



Pontifícia Universidade Católica de Goiás

Escola de Engenharia

Sistemas de Controle 2

Cap.7 - Erros de Estado Estacionário

Prof. Dr. Marcos Lajovic Carneiro



Sistemas de Controle 2

Prof. Dr. Marcos Lajovic Carneiro

Cap.7 - Erros de Estado Estacionário

7. Erros de Estado Estacionário

7.1 Introdução

7.2 Erro de Estado Estacionário de Sistemas com Retroação Unitária

7.3 Constantes de Erro Estático e Tipo de Sistema

7.4 Especificações de Erro de Estado Estacionário

7.5 Erros de Estado Estacionário Devidos a Perturbações

7.6 Erro de Estado Estacionário para Sistemas com Retroação Não-unitária

7.7 Sensibilidade

7.8 Erro de Estado Estacionário de Sistemas no Espaço de Estados

Bibliografia principal:

Engenharia de Sistemas de Controle – Norman S. Nise



Objetivos do capítulo

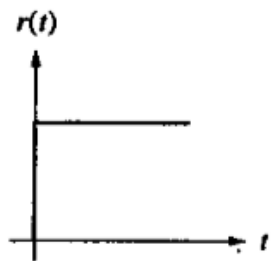
- Como determinar o erro de estado estacionário de um sistema com retroação unitária
- Como especificar o desempenho de erro de estado estacionário de um sistema
- Como determinar o erro de estado estacionário devido a perturbações na entrada
- Como determinar o erro de estado estacionário de sistemas com retroação não-unitária
- Como projetar parâmetros do sistema que permitam atender especificações de desempenho de erro de estado estacionário
- Como determinar o erro de estado estacionário de sistemas representados no espaço de estados



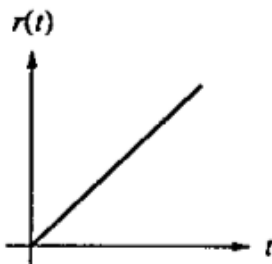
7.1) Introdução

Definição e Entradas de Teste

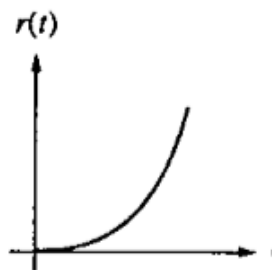
O **erro de estado estacionário** é a diferença entre a entrada e a saída para uma entrada de teste quando $t \rightarrow \infty$



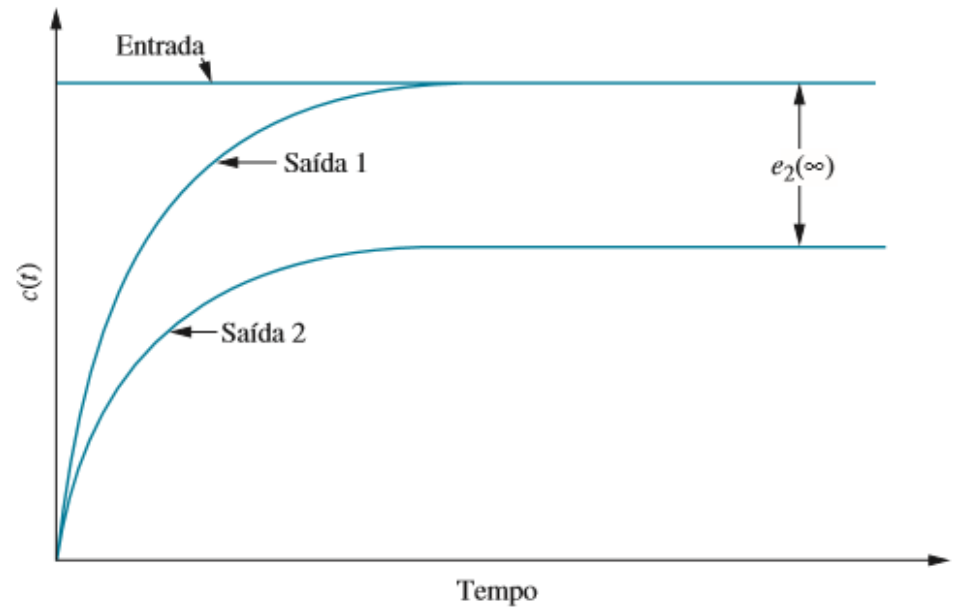
Degrau



Rampa



Parábola

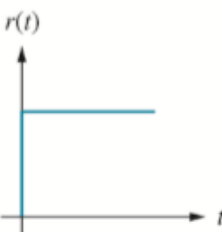
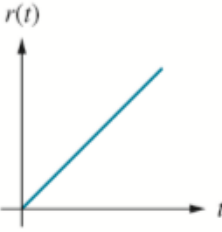
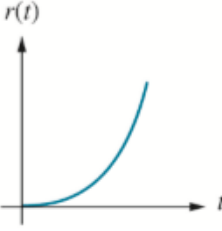




7.1) Introdução

Definição e Entradas de Teste

TABELA 7.1 Formas de onda de teste para a avaliação dos erros em regime permanente de sistemas de controle de posição

Forma de onda	Nome	Interpretação física	Função no domínio do tempo	Transformada de Laplace
	Degrau	Posição constante	1	$\frac{1}{s}$
	Rampa	Velocidade constante	t	$\frac{1}{s^2}$
	Parábola	Aceleração constante	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$

Satélite em órbita geoestacionária

Satélite orbitando a uma velocidade constante

Míssil acelerando

Sistema de rastreamento





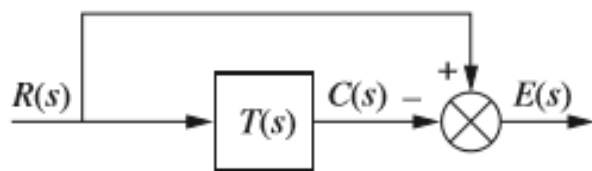
7.1) Introdução

Aplicação a Sistemas Estáveis

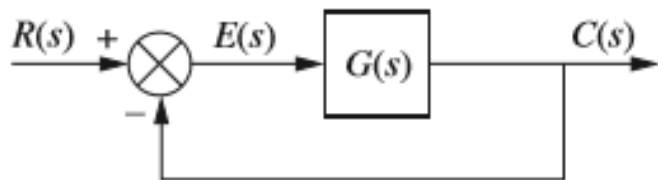
Resposta natural tende a zero quando $t \rightarrow \infty$

Calculando os Erros de Estado Estacionário

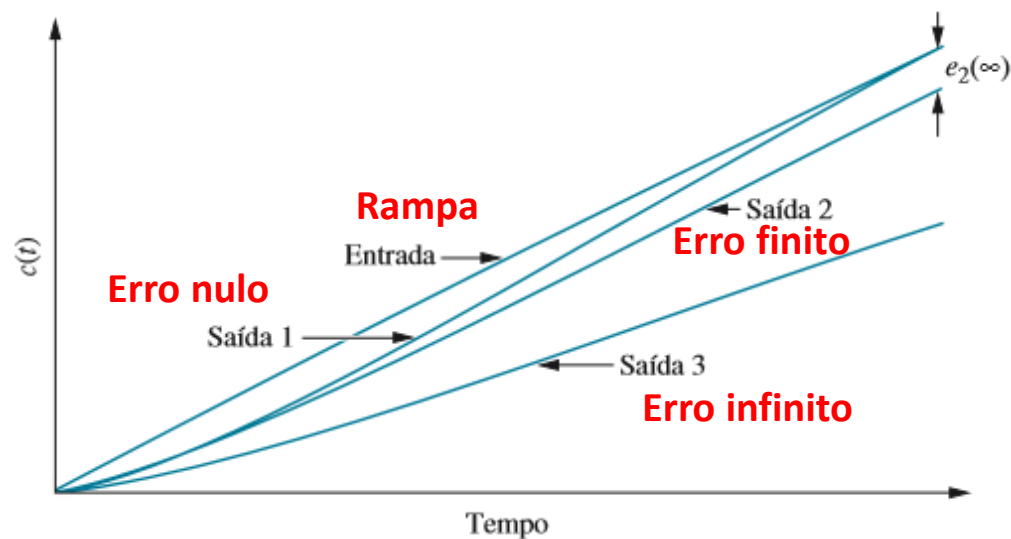
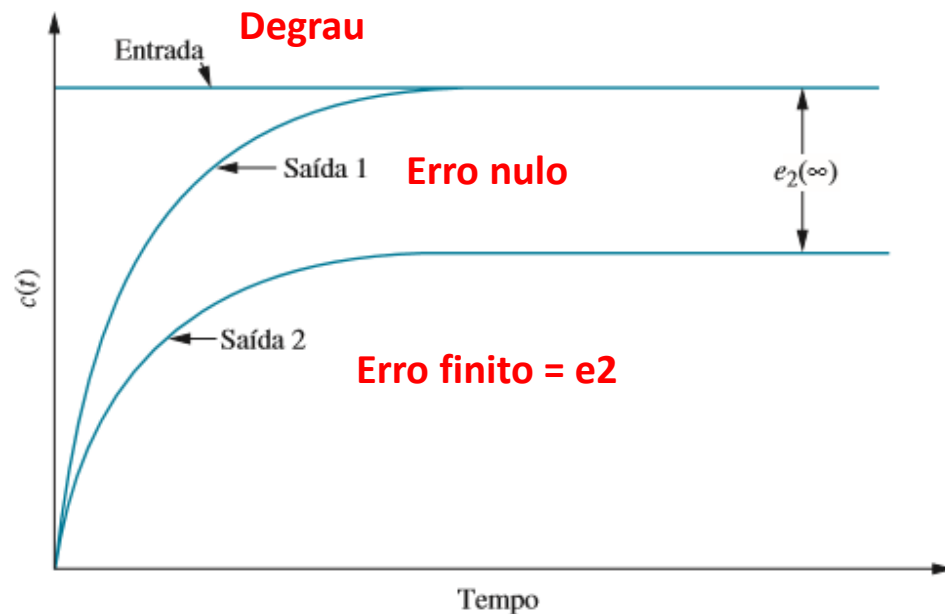
Representação geral



Representação para sistemas com retroação unitária



Foco inicial do estudo

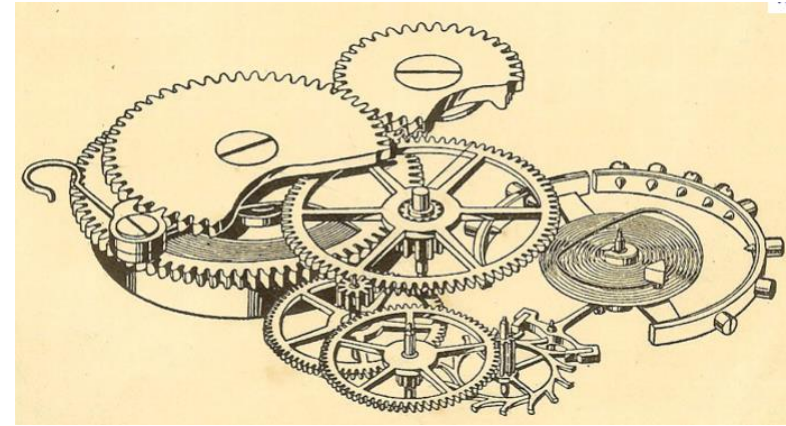




7.1) Introdução

Fontes de Erro de Estado Estacionário

- Não linearidades
- Configuração do Sistema
- Tipo de entrada

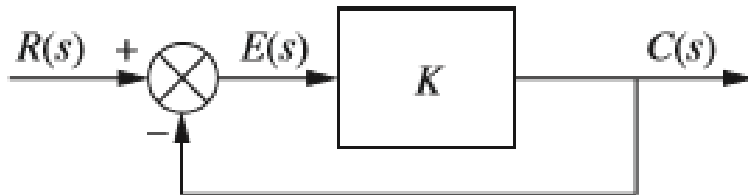


Exemplos de não-linearidades:

- Folgas de engrenagens
- Movimento do motor apenas após um limiar de tensão

Escopo do estudo → Erros de:

- Configuração do Sistema
- Tipo de entrada





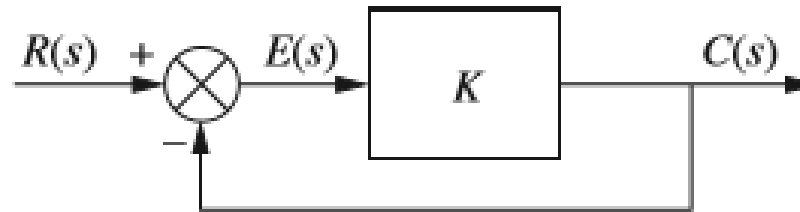
7.1) Introdução

Erro de configuração de sistema

Sistema com ganho puro K no percurso direto:

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$C(s) = KE(s)$$



$$e_{\text{estado estacionário}} = \frac{1}{K} c_{\text{estado estacionário}} \quad \rightarrow \text{Erro finito e não nulo}$$

$e_{\text{estado estacionário}}$ \rightarrow Valor do estado estacionário do erro

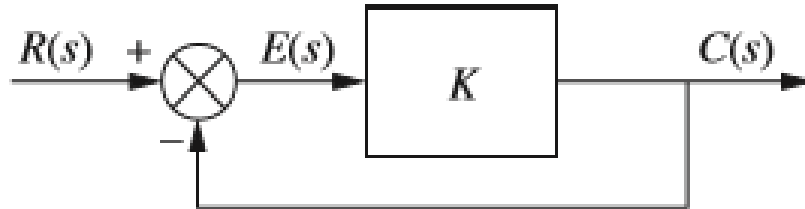
$c_{\text{estado estacionário}}$ \rightarrow Valor do estado estacionário da saída

Sistema com apenas um ganho constante no sentido direto sempre apresenta um erro



7.1) Introdução

Sistema com ganho puro K no percurso direto:



$$\bar{E}(s) = R(s) - \bar{C}(s)$$

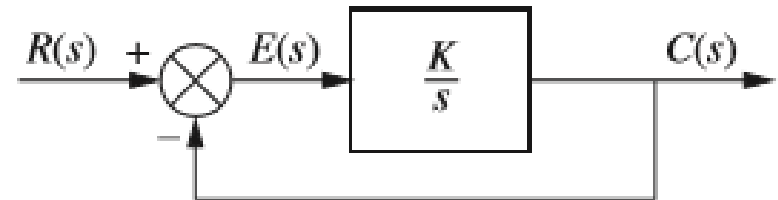
$$C(s) = KE(s)$$

$$e_{\text{estado estacionário}} = \frac{1}{K} c_{\text{estado estacionário}}$$

Para uma resposta em degrau:

→ Erro finito e não nulo

Inserção de um integrador:



$$e(t) = r(t) - c(t)$$

A medida que $c(t)$ aumentar $e(t)$ diminuirá até chegar a zero.

$$C(s) = \frac{E(s)K}{s}$$

$$E(s) = s \cdot \frac{C(s)}{K} \quad (\text{Aplicando Inversa de Laplace})$$

$$e(t) = \frac{c(t)}{K} \delta'(t) \quad \text{0}$$

$$e(t) = 0$$

Para uma resposta em degrau:

→ Erro zero



7.2 Erro de Estado Estacionário de Sistemas com Retroação Unitária

Erro de Estado Estacionário em Termos de T (s)

Calculando erro de estado estacionário:

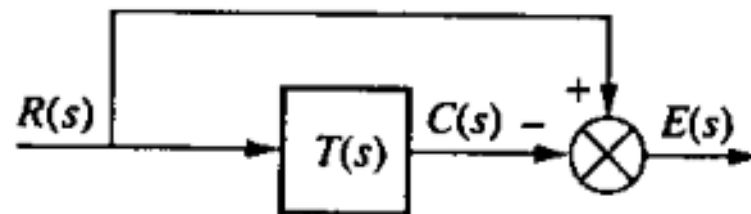
$$\begin{cases} E(s) = R(s) - C(s) \\ C(s) = R(s)T(s) \end{cases}$$

$$E(s) = R(s)[1 - T(s)]$$

Aplicando teorema do valor final e fazendo $s \rightarrow 0$:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s)[1 - T(s)]$$



Teorema do valor final

Permite obter o valor de $e(\infty)$ no tempo sem calcular a transformada inversa de laplace.

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = \int_{0-}^{\infty} \dot{f}(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0-)$$

$$\int_{0-}^{\infty} \dot{f}(t) dt = f(\infty) - f(0-) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0-)$$

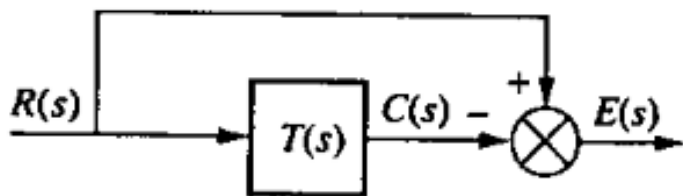
$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$



7.2 Erro de Estado Estacionário de Sistemas com Retroação Unitária

Exemplo 7.1

Problema Determinar o erro de estado estacionário para o sistema da Fig. 7.3(a) se $T(s) = 5/(s^2 + 7s + 10)$ e a entrada for um degrau unitário.



$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$C(s) = R(s)T(s)$$

$$E(s) = R(s)[1 - T(s)]$$

$$R(s) = 1/s \quad \text{degrau}$$

$$T(s) = 5/(s^2 + 7s + 10)$$

$$E(s) = \frac{s^2 + 7s + 5}{s(s^2 + 7s + 10)}$$

Verificar a estabilidade. Se for estável, aplicar teorema do valor final.

Cap 6

→ Sistema estável

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

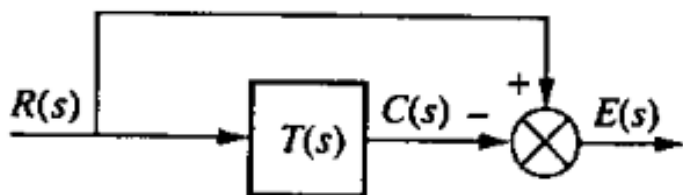
$$e(\infty) = \frac{\cancel{s}(s^2 + 7s + 5)}{\cancel{s}(s^2 + 7s + 10)} \quad s \rightarrow 0$$

$$e(\infty) = 1/2$$

*O teorema do valor final só pode ser aplicado de a função for estável.



Exercício em sala



Calcule o erro de estado estacionário se a entrada for um degrau unitário.

$$T(s) = \frac{32}{s^2 + 5s + 2}$$

Solução

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$C(s) = R(s)T(s)$$

$$E(s) = R(s)[1 - T(s)]$$

$$R(s) = 1/s \quad \text{degrau}$$

$$T(s) = \frac{32}{s^2 + 5s + 2}$$

$$E(s) = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{32}{s^2 + 5s + 2} \right]$$

$$E(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{s^2 + 5s - 30}{s^2 + 5s + 2} \right]$$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \left[\frac{s^2 + 5s - 30}{s^2 + 5s + 2} \right]$$

$$e(\infty) = -15$$



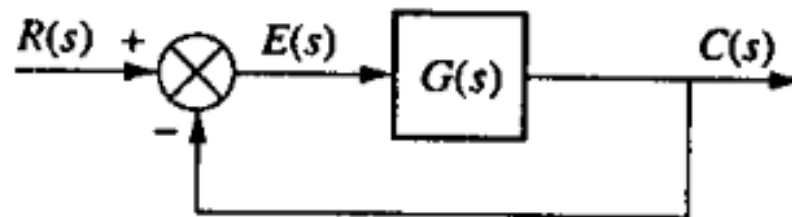
7.2 Erro de Estado Estacionário de Sistemas com Retroação Unitária

Erro de Estado Estacionário em Termos de $G(s)$

→ Fornece maior compreensão na análise e projeto do Sistema.

$$\begin{cases} E(s) = R(s) - C(s) \\ C(s) = E(s)G(s) \end{cases}$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$



→ Deve-se verificar se o sistema é estável (critério de Routh-Hurwitz).

→ Aplicar teorema do valor final:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$$

Laboratório 1
Estabilidade
pelo MATLAB

Analisar resposta segundo as 3 entradas de teste:

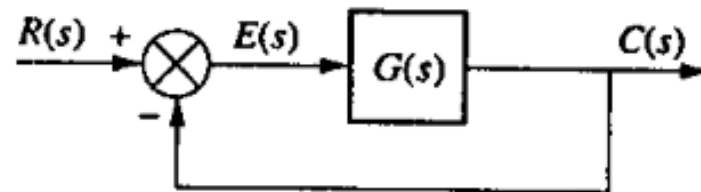
- Degrau
- Rampa
- Parábola



7.2 Erro de Estado Estacionário de Sistemas com Retroação Unitária

Analisando entrada em **Degrau**:

$$R(s) = 1/s$$

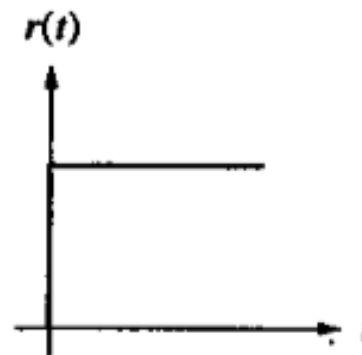


$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$$

$$e(\infty) = e_{\text{degrau}}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(1/s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)}$$

Para que o erro seja zero é preciso que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$



Degrau

$$G(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots}{s^n (s + p_1)(s + p_2) \cdots}$$

Se $n \geq 1$

Erro = 0

Pelo menos 1 integração
no percurso direto

Se $n = 0$

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{z_1 z_2 \cdots}{p_1 p_2 \cdots}$$

Erro finito

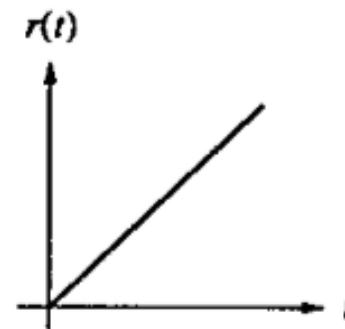
Nenhuma
integração no
percurso direto



7.2 Erro de Estado Estacionário de Sistemas com Retroação Unitária

Entrada em Rampa: $R(s) = 1/s^2$,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$$



Rampa

$$e(\infty) = e_{\text{rampa}}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(1/s^2)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sG(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)}$$

Para que o erro seja zero é preciso que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \infty$$

$$G(s) \equiv \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots}{s^n(s + p_1)(s + p_2) \cdots}$$

Se $n \geq 2$

Erro = 0

Pelo menos 2 integrações no percurso direto

Se $n = 1$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{z_1 z_2 \cdots}{p_1 p_2 \cdots}$$

Erro finito

Apenas uma integração no percurso direto

Se $n = 0$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0$$

Erro infinito

Nenhuma integração no percurso direto

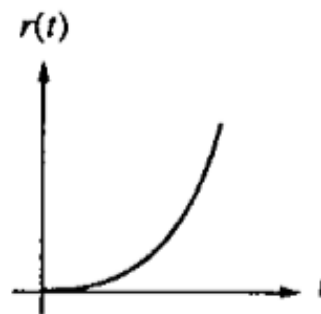


7.2 Erro de Estado Estacionário de Sistemas com Retroação Unitária

Entrada em Parabola: $R(s) = 1/s^3$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$$

$$e(\infty) = e_{\text{parábola}}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(1/s^3)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + s^2 G(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)}$$



Parábola

Para que o erro seja zero é preciso que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \infty$$

$$G(s) \equiv \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots}{s^n (s + p_1)(s + p_2) \cdots}$$

Se $n \geq 3$

Erro = 0

Pelo menos 3 integrações no percurso direto

Se $n = 2$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \frac{z_1 z_2 \cdots}{p_1 p_2 \cdots}$$

Apenas 2 integrações no percurso direto

Erro finito

Se $n = 1$ ou 0

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$$

Uma ou nenhuma integração no percurso direto

Erro infinito



7.2 Erro de Estado Estacionário de Sistemas com Retroação Unitária

Exemplo 7.2

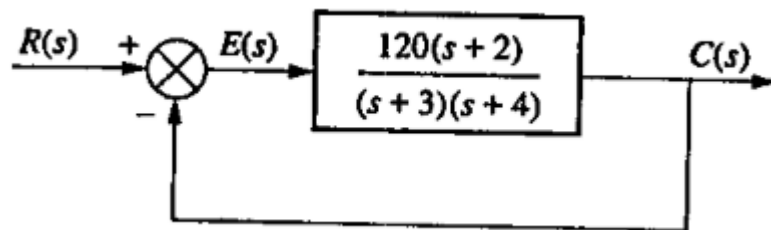
Analisando erro do Sistema de acordo com o tipo de entrada

Problema Determinar os erros de estado estacionário para as entradas $5u(t)$, $5tu(t)$ e $5t^2u(t)$ no sistema mostrado na Fig. 7.5. A função $u(t)$ é o degrau unitário.

$$\begin{cases} E(s) = R(s) - C(s) \\ C(s) = E(s)G(s) \end{cases}$$



$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$



$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$$

- Verificar se o sistema é estável
- Testar cada entrada

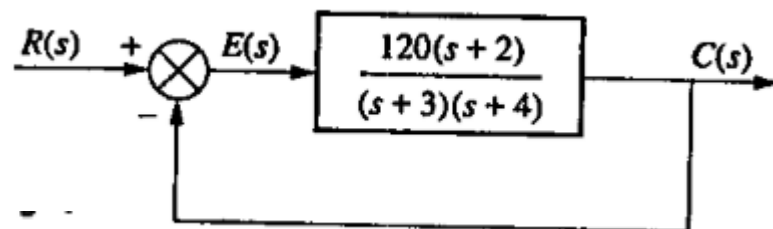


7.2 Erro de Estado Estacionário de Sistemas com Retroação Unitária

Exemplo 7.2

Problema Determinar os erros de estado estacionário para as entradas $5u(t)$, $5tu(t)$ e $5t^2u(t)$ no sistema mostrado na Fig. 7.5. A função $u(t)$ é o degrau unitário.

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$$



$$e(\infty) = e_{\text{degrau}}(\infty) = \frac{5}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{5}{1 + 20} = \frac{5}{21}$$

$$e(\infty) = e_{\text{rampa}}(\infty) = \frac{5}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{5}{0} = \infty$$

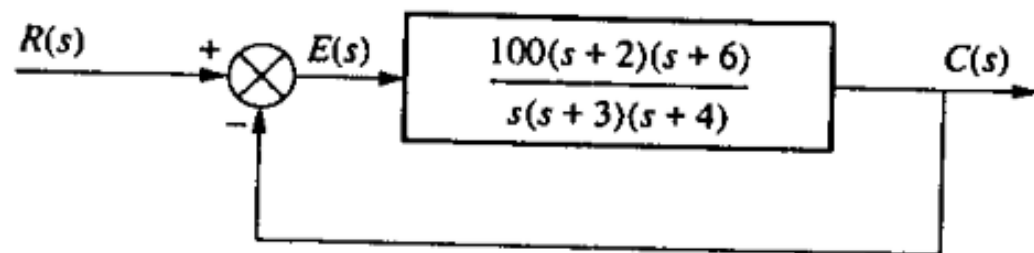
$$e(\infty) = e_{\text{parábola}}(\infty) = \frac{10}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)} = \frac{10}{0} = \infty$$



Exercício em sala


Erros de estado estacionário em sistemas com uma integração

Problema Determinar os erros de estado estacionário para as entradas $5u(t)$, $5tu(t)$ e $5t^2u(t)$ no sistema mostrado na Fig. 7.6. A função $u(t)$ é o degrau unitário.



$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$C(s) = E(s)G(s)$$


$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

Teorema do valor final

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$$

$$e(\infty) = e_{\text{degrau}}(\infty) = \frac{5}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{5}{\infty} = 0$$

$$e(\infty) = e_{\text{rampa}}(\infty) = \frac{5}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

$$e(\infty) = e_{\text{parábola}}(\infty) = \frac{10}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)} = \frac{10}{0} = \infty$$



7.3 Constantes de Erro Estático e Tipo de Sistema

Constantes de Erro Estático

→ Parâmetros de especificação de desempenho de erro em estado estacionário.

Relações para o erro de estado estacionário:

Entrada:

$$u(t)$$

Erro de estado estacionário:

$$e(\infty) = e_{\text{degrau}}(\infty) = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)}$$

$$tu(t)$$

$$e(\infty) = e_{\text{rampa}}(\infty) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)}$$

$$t^2u(t)$$

$$e(\infty) = e_{\text{parábola}}(\infty) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)}$$

Constantes de erro estático:

Constante de posição

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

Constante de velocidade

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

Constante de aceleração

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$

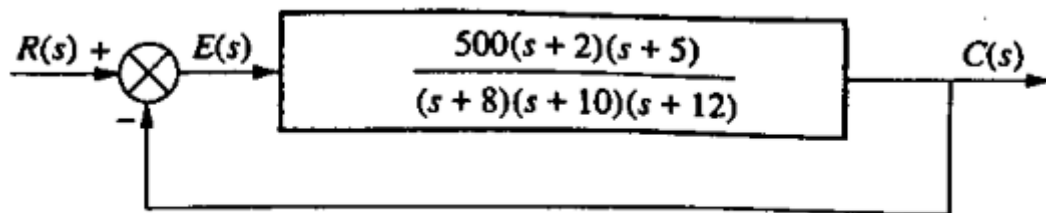


7.3 Constantes de Erro Estático e Tipo de Sistema

Exemplo 7.4

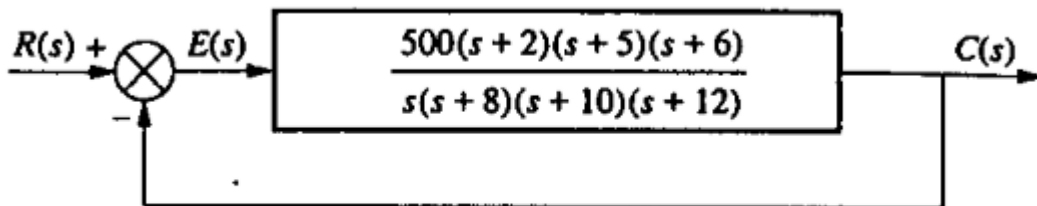
Erro de estado estacionário por intermédio das constantes de erro estático

Problema Para cada um dos sistemas abaixo, calcule as constantes de erro estático e obtenha o erro esperado para entradas padronizadas em degrau, rampa e parábola.



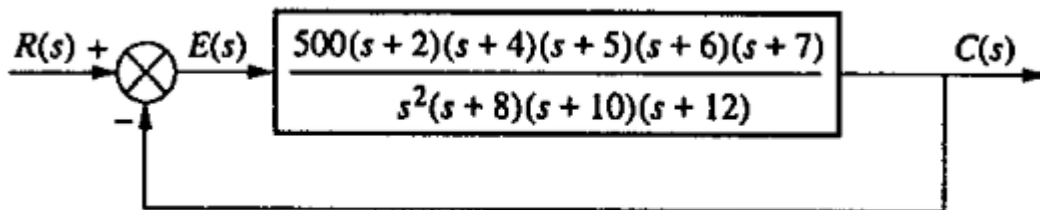
Sistema 1

(a)



Sistema 2

(b)



Sistema 3

(c)

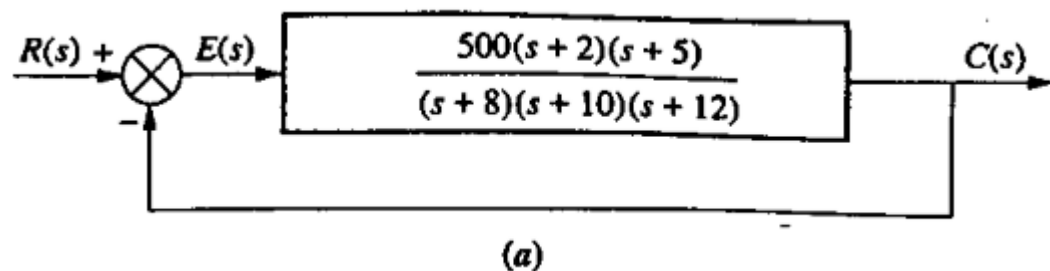


7.3 Constantes de Erro Estático e Tipo de Sistema

Exemplo 7.4

Erro de estado estacionário por intermédio das constantes de erro estático

Problema Para cada um dos sistemas abaixo, calcule as constantes de erro estático e obtenha o erro esperado para entradas padronizadas em degrau, rampa e parábola.



Sistema 1

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{500 \times 2 \times 5}{8 \times 10 \times 12} = 5,208$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$$

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = 0,161$$

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = \infty$$

$$e(\infty) = \frac{1}{K_a} = \infty$$

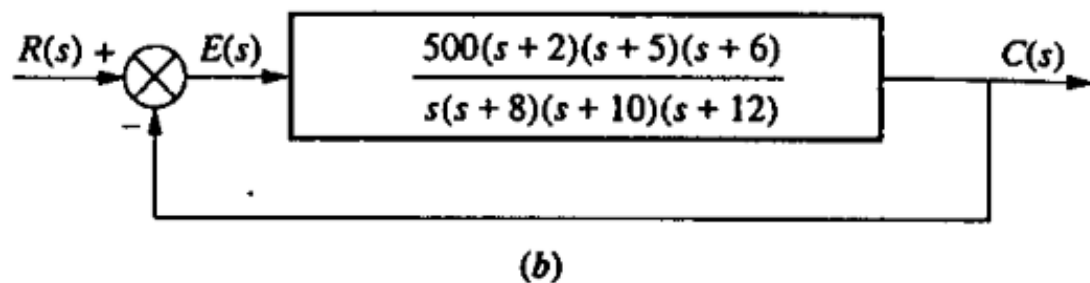


7.3 Constantes de Erro Estático e Tipo de Sistema

Exemplo 7.4

Erro de estado estacionário por intermédio das constantes de erro estático

Problema Para cada um dos sistemas da Fig. 7.7, calcule as constantes de erro estático e obtenha o erro esperado para entradas padronizadas em degrau, rampa e parábola.



Sistema 2

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{500 \times 2 \times 5 \times 6}{8 \times 10 \times 12} = 31,25$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$$

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{31,25} = 0,032$$

$$e(\infty) = \frac{1}{K_a} = \infty$$

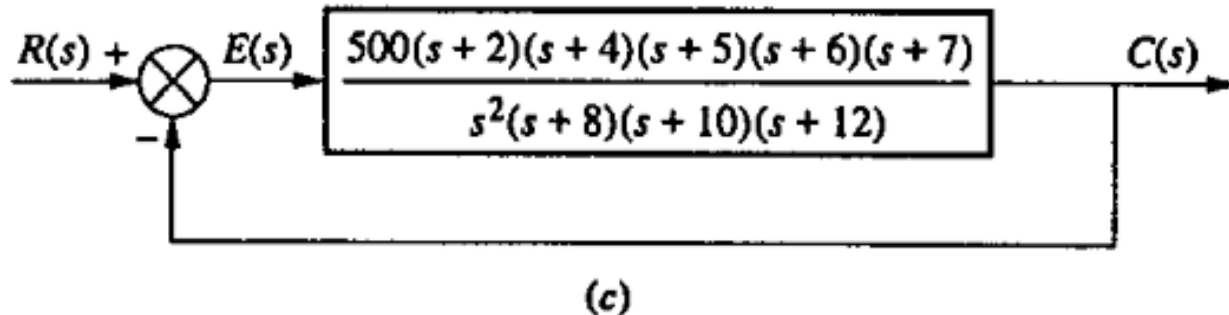


7.3 Constantes de Erro Estático e Tipo de Sistema

Exemplo 7.4

Erro de estado estacionário por intermédio das constantes de erro estático

Problema Para cada um dos sistemas da Fig. 7.7, calcule as constantes de erro estático e obtenha o erro esperado para entradas padronizadas em degrau, rampa e parábola.



Sistema 3

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \infty$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \frac{500 \times 2 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{8 \times 10 \times 12} = 875$$

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0$$

$$e(\infty) = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{875} = 1,14 \times 10^{-3}$$



7.3 Constantes de Erro Estático e Tipo de Sistema

Definindo o Tipo do Sistema

$n=0 \rightarrow$ Tipo 0

$n=1 \rightarrow$ Tipo 1

$n=2 \rightarrow$ Tipo 2

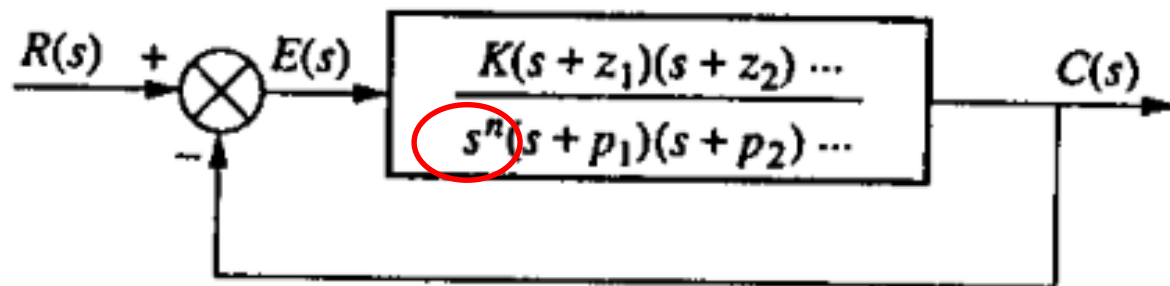


TABELA 7.2 Relações entre entrada, tipo do sistema, constantes de erro estático e erros em regime permanente

Entrada	Fórmula do erro em regime permanente	Tipo 0		Tipo 1		Tipo 2	
		Constante de erro estático	Erro	Constante de erro estático	Erro	Constante de erro estático	Erro
Degrau, $u(t)$	$\frac{1}{1 + K_p}$	$K_p = \text{Constante}$	$\frac{1}{1 + K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Rampa, $tu(t)$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	∞	$K_v = \text{Constante}$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parábola, $\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	$K_a = \text{Constante}$	$\frac{1}{K_a}$



7.3 Constantes de Erro Estático e Tipo de Sistema

Tipo de Sistema

Exercício de Avaliação 7.2

Problema: Um sistema com retroação unitária possui a seguinte função de transferência no percurso direto:

$$G(s) = \frac{1000(s + 8)}{(s + 7)(s + 9)}$$

- Determinar o tipo de sistema, K_p , K_v e K_a .
- Utilize as respostas de (a) para determinar os erros de estado estacionário para os sinais de entrada padronizados em degrau, rampa e parábola.



7.3 Constantes de Erro Estático e Tipo de Sistema

Tipo de Sistema

Exercício de Avaliação 7.2

Problema: Um sistema com retroação unitária possui a seguinte função de transferência no percurso direto:

$$G(s) = \frac{1000(s + 8)}{(s + 7)(s + 9)}$$

- Determinar o tipo de sistema, K_p , K_v e K_a .
- Utilize as respostas de (a) para determinar os erros de estado estacionário para os sinais de entrada padronizados em degrau, rampa e parábola.

Respostas:

- O sistema a malha fechada é estável. Tipo de sistema = Tipo 0. $K_p = 127$, $K_v = 0$ e $K_a = 0$.
- $e_{\text{degrau}}(\infty) = 7,8 \times 10^{-3}$; $e_{\text{rampa}}(\infty) = \infty$; $e_{\text{parábola}}(\infty) = \infty$.

7.4 Especificações de Erro de Estado Estacionário

Especificações de resposta transitória:

- Relação de amortecimento ζ
- Tempo de assentamento, T_s
- Instante de pico, T_p
- Ultrapassagem percentual, %UP

Especificações de erro de estado estacionário:

- Constante de posição, K_p
- Constante de velocidade, K_v
- Constante de aceleração, K_a

Uma única constante de erro de estado estacionário podem nos dizer muita coisa!

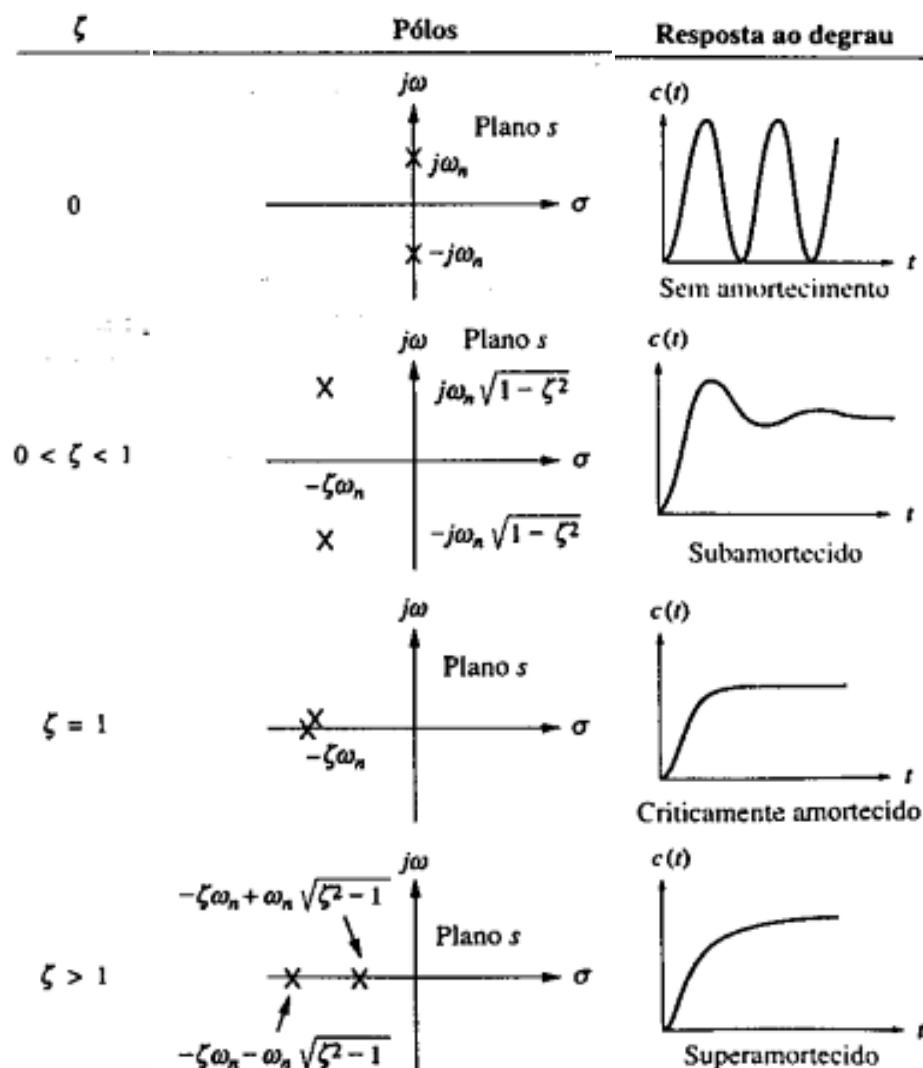


FIGURA 7.9 Um robô utilizado na fabricação de memórias de acesso aleatório (RAMs) de semicondutor, semelhantes às utilizadas em computadores pessoais. O erro em regime permanente é um aspecto de projeto importante para robôs de linha de montagem.

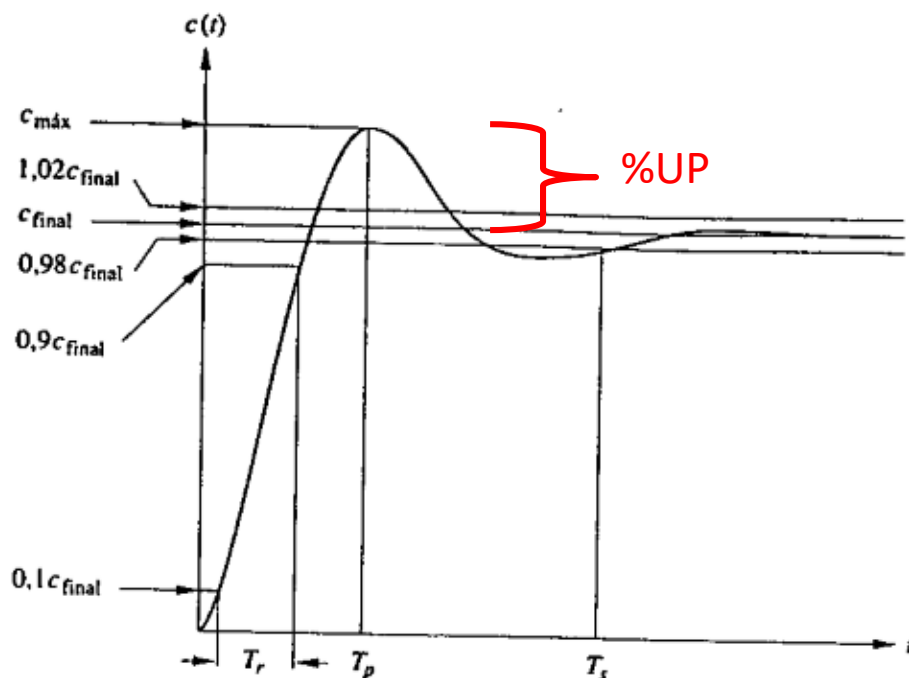


Revisão cap.4 - Especificações de resposta transitória

- Relação de amortecimento ζ



- Tempo de assentamento, T_s : tempo para chegar em 2%.
- Instante de pico, T_p
- Ultrapassagem percentual, %UP





7.4 Especificações de Erro de Estado Estacionário

Exemplo: Um Sistema com $K_v=1000$.

1. Sistema estável \rightarrow Se não o K_v não estaria definido
2. Tipo 1 $\rightarrow K_v$ finito. ($K_v=0$ é Tipo 0 / K_v infinito é Tipo 2)
3. Sinal de teste = Rampa.
4. Erro de estado estacionário para entrada de Rampa = $1/1000$

TABELA 7.2 Relações entre entrada, tipo do sistema, constantes de erro estático e erros em regime permanente

Entrada	Fórmula do erro em regime permanente	Tipo 0		Tipo 1		Tipo 2	
		Constante de erro estático	Erro	Constante de erro estático	Erro	Constante de erro estático	Erro
Degrau, $u(t)$	$\frac{1}{1 + K_p}$	$K_p = \text{Constante}$	$\frac{1}{1 + K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Rampa, $tu(t)$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	∞	$K_v = \text{Constante}$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parábola, $\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	$K_a = \text{Constante}$	$\frac{1}{K_a}$



7.4 Especificações de Erro de Estado Estacionário

Exemplo 7.5 Interpretando a especificação do erro de estado estacionário

Problema Que informações estão contidas na especificação $K_p = 1000$?

1. Instável ou estável?
2. Tipo ?
3. Sinal de teste ?
4. Valor dos erros de estado estacionário?

1. Sistema estável

2. Tipo 0 $\rightarrow K_p$ finito, constante.

3. Sinal de teste = Degrau.

4. Erro de estado estacionário para entrada do degrau = $1/1001$

TABELA 7.2 Relações entre entrada, tipo do sistema, constantes de erro estático e erros em regime permanente

Entrada	Fórmula do erro em regime permanente	Tipo 0		Tipo 1		Tipo 2	
		Constante de erro estático	Erro	Constante de erro estático	Erro	Constante de erro estático	Erro
Degrau, $u(t)$	$\frac{1}{1 + K_p}$	$K_p = \text{Constante}$	$\frac{1}{1 + K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Rampa, $tu(t)$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	∞	$K_v = \text{Constante}$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parábola, $\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	$K_a = \text{Constante}$	$\frac{1}{K_a}$

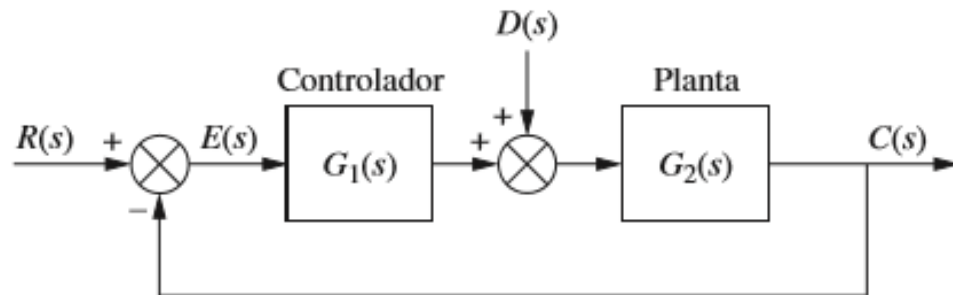


7.5 Erros de Estado Estacionário Devidos a Perturbações

Sistema com retroação → Compensar perturbações

Deduzindo expressão do erro de estado estacionário com a perturbação incluída:

$$\begin{cases} C(s) = E(s)G_1(s)G_2(s) + D(s)G_2(s) \\ C(s) = R(s) - E(s) \end{cases}$$



Isolando o $E(s)$:

$$E(s) = \boxed{\frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)}} R(s) - \boxed{\frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}} D(s)$$

Relaciona $E(s)$ a $R(s)$ Relaciona $E(s)$ a $D(s)$

Aplicando Teorema do valor final:

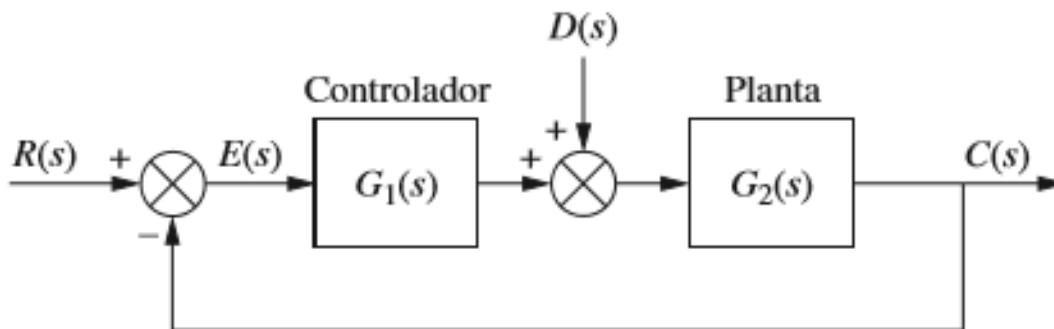
$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s) - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sG_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s) = e_R(\infty) + e_D(\infty)$$



7.5 Erros de Estado Estacionário Devidos a Perturbações

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s) - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sG_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s) = e_R(\infty) + e_D(\infty)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_R(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s) \\ e_D(\infty) = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sG_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Erro estacionário em relação a } R(s) \\ \text{Erro estacionário em relação a } D(s) \end{array}$$





7.5 Erros de Estado Estacionário Devidos a Perturbações

Analizando como reduzir o erro em relação a perturbação:

$$e_D(\infty) = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sG_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s)$$

$D(s) = 1/s$ Perturbação em degrau:

$$e_D(\infty) = - \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G_2(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)}$$

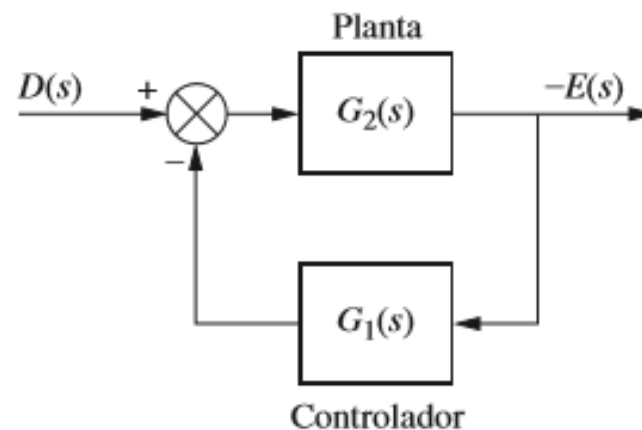
$$e_D = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sG_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \left(\frac{1}{s}\right)$$

$$e_D = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

$$e_D = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{G_2(s)} + \frac{G_1(s)G_2(s)}{G_2(s)}}$$

$$e_D = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{G_2(s)} + G_1(s)}$$

Logo é possível reduzir o erro aumentando G_1 e reduzindo G_2





7.5 Erros de Estado Estacionário Devidos a Perturbações

Exemplo 7.7

Erro de estado estacionário devido a uma perturbação em degrau

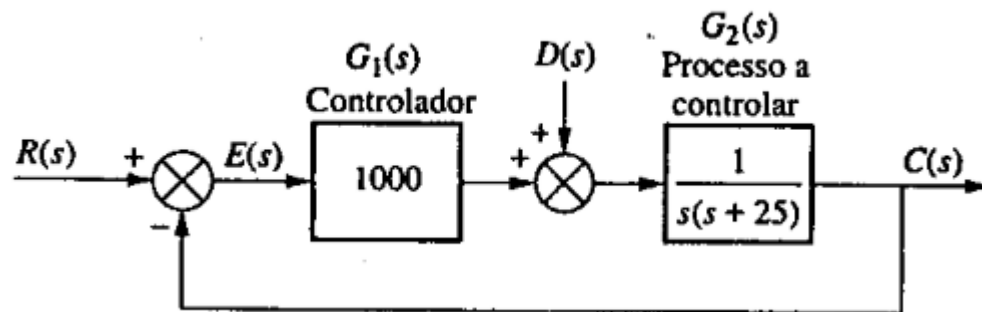
Problema Determinar a componente do erro de estado estacionário devida a uma perturbação em degrau para o sistema da Fig. 7.13.

$$e_R(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s)$$

Erro estacionário em relação a $R(s)$

$$e_D(\infty) = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sG_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s)$$

Erro estacionário em relação a $D(s)$





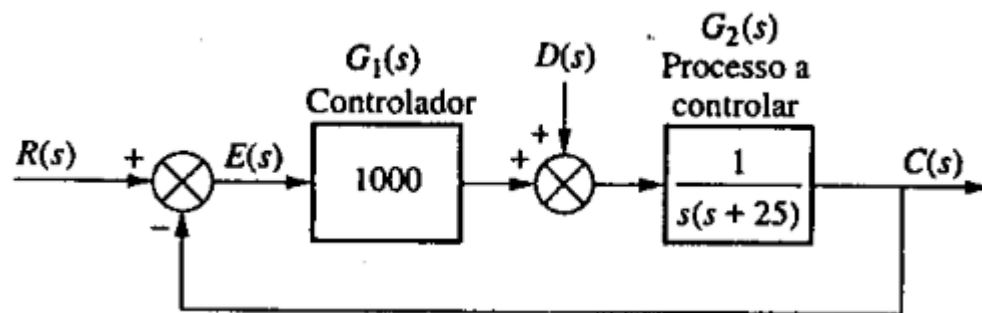
7.5 Erros de Estado Estacionário Devidos a Perturbações

Exemplo 7.7

Erro de estado estacionário devido a uma perturbação em degrau

Problema Determinar a componente do erro de estado estacionário devida a uma perturbação em degrau para o sistema da Fig. 7.13.

$$e_D(\infty) = - \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G_2(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)}$$



Solução O sistema é estável.

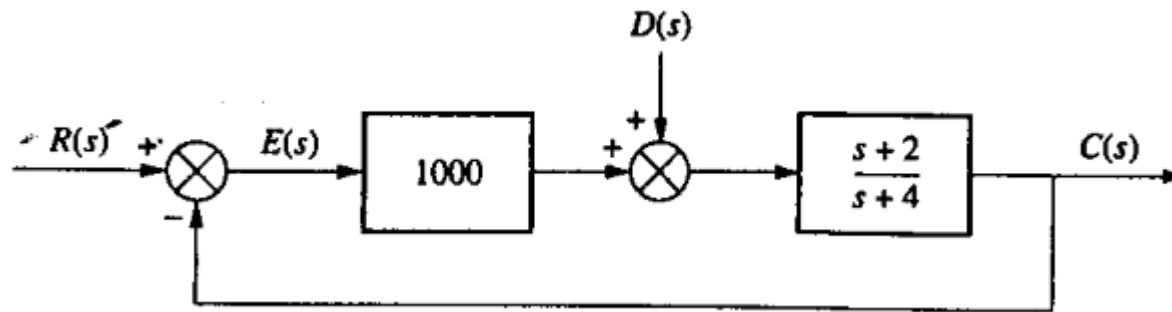
$$e_D(\infty) = - \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G_2(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)} = - \frac{1}{0 + 1000} = - \frac{1}{1000}$$



7.5 Erros de Estado Estacionário Devidos a Perturbações

Exercício de Avaliação 7.4

Problema: Calcular a componente do erro de estado estacionário devida a uma perturbação em degrau no sistema da Fig. 7.14.



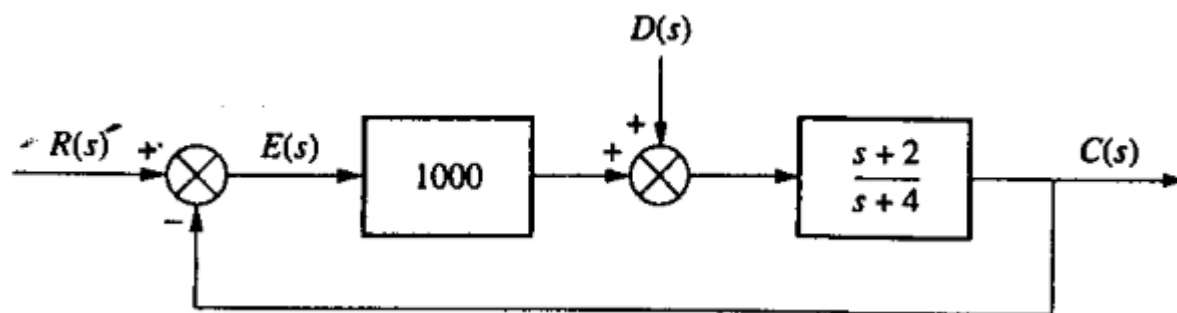
$$e_D(\infty) = - \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G_2(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)}$$



7.5 Erros de Estado Estacionário Devidos a Perturbações

Exercício de Avaliação 7.4

Problema: Calcular a componente do erro de estado estacionário devida a uma perturbação em degrau no sistema da Fig. 7.14.



O sistema é estável. Uma vez que $G_1(s) = 1000$ e $G_2(s) = \frac{(s+2)}{(s+4)}$,

$$e_D(\infty) = -\frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G_2(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)} = \frac{1}{2 + 1000} = -9,98e - 04$$



Exercícios



7.2 Erro de Estado Estacionário de Sistemas com Retroação Unitária

Exercício de Avaliação 7.1

Problema: Um sistema com retroação unitária possui a seguinte função de transferência no percurso direto:

$$G(s) = \frac{10(s + 20)(s + 30)}{s(s + 25)(s + 35)}$$

- a. Determinar o erro de estado estacionário para as seguintes entradas: $15u(t)$, $15tu(t)$ e $15t^2u(t)$.
- b. Repetir para

$$G(s) = \frac{10(s + 20)(s + 30)}{s^2(s + 25)(s + 35)(s + 50)}$$

Resolver no final da aula ou em casa



7.2 Erro de Estado Estacionário de Sistemas com Retroação Unitária

Exercício de Avaliação 7.1

Problema: Um sistema com retroação unitária possui a seguinte função de transferência no percurso direto:

$$G(s) = \frac{10(s + 20)(s + 30)}{s(s + 25)(s + 35)}$$

a. Determinar o erro de estado estacionário para as seguintes entradas: $15u(t)$, $15tu(t)$ e $15t^2u(t)$.

a. Inicialmente, verifica-se a estabilidade.

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{10s^2 + 500s + 6000}{s^3 + 70s^2 + 1375s + 6000} = \frac{10(s + 30)(s + 20)}{(s + 26,03)(s + 37,89)(s + 6,085)}$$

Os polos estão no semiplano esquerdo. Portanto, o sistema é estável. A estabilidade também poderia ser verificada por meio do critério de Routh-Hurwitz utilizando o denominador de $T(s)$. Assim,

$$15u(t): e_{\text{degrau}}(\infty) = \frac{15}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{15}{1 + \infty} = 0$$

$$15tu(t): e_{\text{rampa}}(\infty) = \frac{15}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{15}{\frac{10 \cdot 20 \cdot 30}{25 \cdot 35}} = 2,1875$$

$$15t^2u(t): e_{\text{parábola}}(\infty) = \frac{15}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)} = \frac{30}{0} = \infty, \text{ uma vez que } L[15t^2] = \frac{30}{s^3}$$



7.2 Erro de Estado Estacionário de Sistemas com Retroação Unitária

Exercício de Avaliação 7.1

Problema: Um sistema com retroação unitária possui a seguinte função de transferência no percurso direto:

b. Repetir para

$$G(s) = \frac{10(s + 20)(s + 30)}{s^2(s + 25)(s + 35)(s + 50)}$$

b. Inicialmente, verifica-se a estabilidade.

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{10s^2 + 500s + 6000}{s^5 + 110s^4 + 3875s^3 + 4,37e04s^2 + 500s + 6000} \\ &= \frac{10(s + 30)(s + 20)}{(s + 50,01)(s + 35)(s + 25)(s^2 - 7,189e - 04s + 0,1372)} \end{aligned}$$

Com base no termo de segunda ordem no denominador, verifica-se que o sistema é instável. A instabilidade também poderia ser determinada utilizando o critério de Routh-Hurwitz no denominador de $T(s)$. Como o sistema é instável, os cálculos relativos ao erro de regime estacionário não podem ser realizados.

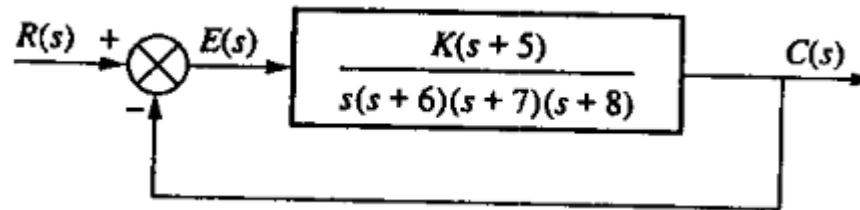


7.4 Especificações de Erro de Estado Estacionário

Exemplo 7.6

Projeto de ganho para atender a especificação do erro de estado estacionário

Problema Dado o sistema de controle da Fig. 7.10, obter o valor de K de modo que o erro de estado estacionário seja 10%.



Resolver no final da aula ou em casa

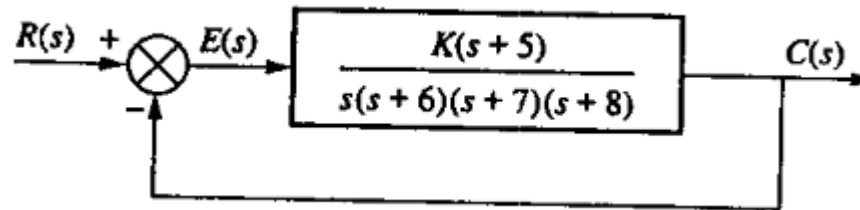


7.4 Especificações de Erro de Estado Estacionário

Exemplo 7.6

Projeto de ganho para atender a especificação do erro de estado estacionário

Problema Dado o sistema de controle da Fig. 7.10, obter o valor de K de modo que o erro de estado estacionário seja 10%.



Resolver no final da aula ou em casa



7.4 Especificações de Erro de Estado Estacionário

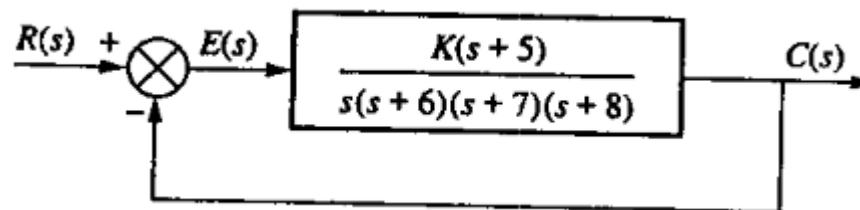
Exemplo 7.6

Projeto de ganho para atender a especificação do erro de estado estacionário

Problema Dado o sistema de controle da Fig. 7.10, obter o valor de K de modo que o erro de estado estacionário seja 10%.

Sistema Tipo 1

Entrada: Rampa



$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0,1$$

$$K_v = 10 = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{K \times 5}{6 \times 7 \times 8}$$

$$K = 672$$

Aplicando o critério de Routh-Hurwitz verifica-se que é estável para este ganho

Entrada	Tipo 1	
	Constante de erro estático	Erro
Degrau $u(t)$	$K_p = \infty$	0
Rampa $tu(t)$	$K_v =$ Constante	$\frac{1}{K_v}$
Parábola $\frac{1}{2}t^2u(t)$	$K_a = 0$	∞



7.4 Especificações de Erro de Estado Estacionário

Exercício de Avaliação 7.3

Problema: Um sistema com retroação unitária possui a seguinte função de transferência no percurso direto:

$$G(s) = \frac{K(s + 12)}{(s + 14)(s + 18)}$$

Obter o valor de K que leva a um erro de 10% em estado estacionário.



7.4 Especificações de Erro de Estado Estacionário

Exercício de Avaliação 7.3

Resolver no final da aula ou em casa

Problema: Um sistema com retroação unitária possui a seguinte função de transferência no percurso direto:

$$G(s) = \frac{K(s + 12)}{(s + 14)(s + 18)}$$

Obter o valor de K que leva a um erro de 10% em estado estacionário.

Roteiro para solução do problema (dicas):

Qual o tipo do Sistema ?

Qual o tipo de entrada para obter erro finito ?

Qual o valor da constante de erro ?

Pelo teorema do valor final calcular o valor de K .



7.4 Especificações de Erro de Estado Estacionário

Exercício de Avaliação 7.3

Problema: Um sistema com retroação unitária possui a seguinte função de transferência no percurso direto:

$$G(s) = \frac{K(s + 12)}{(s + 14)(s + 18)}$$

Obter o valor de K que leva a um erro de 10% em estado estacionário.

O sistema é estável para valores positivos de K . O sistema é do tipo 0. Portanto, para uma entrada em degrau, $e_{\text{degrau}}(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = 0,1$. Resolvendo para K_p , tem-se $K_p = 9 = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{12K}{14 \cdot 18}$, de onde se obtém $K = 189$.

Resposta: $K = 189$.