Resolução P1 – 2019/1

Q1

q1	Considere a máquina em ponto flutuante com base 2, $\|E\| = 8$, $\|M\| = 8$ e $BIAS = 195$. Determine o bit α tal que $x = (1\|11000000\|0\alpha100000)$ represente o menor número possível. Então, forneça o valor de x em decimal, com 5 dígitos significativos.	-0,171875

Primeiro devemos achar α tal que x seja o menor número:

x = (1|11000000|0α100000)

S = 1

C = 11000000 = 192

M = 0α100000

O primeiro bit de sinal 1 significa que x é um número negativo, ou seja, queremos que a mantissa seja o maior possível. Logo, α deve ser 1.

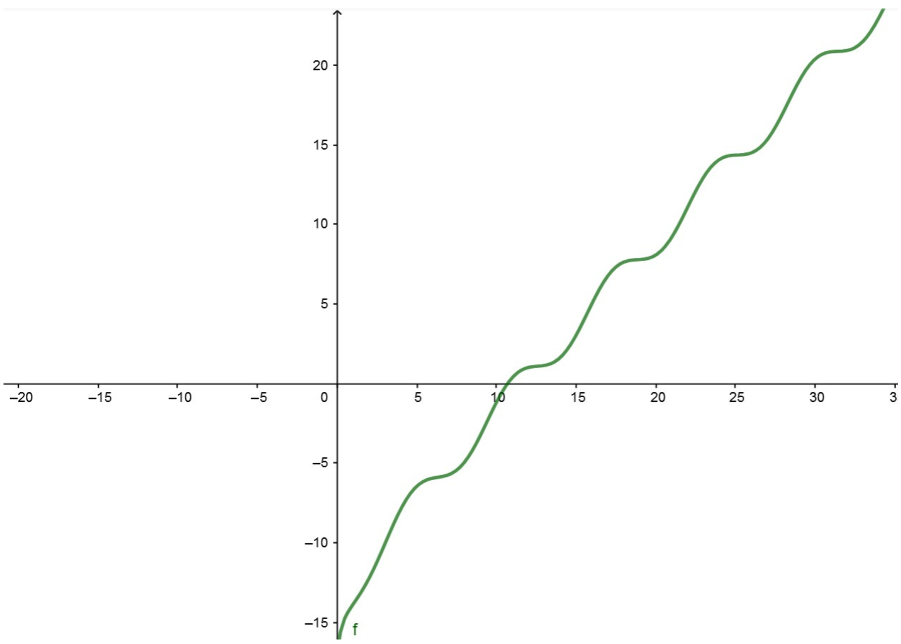
M = 01100000 = 1.01100000 (o bit antes da vírgula não precisa aparecer na mantissa pois sempre será 1 em binário) = 1 + ¼ + 1/8 = 1.375

Agora, obtemos x = (-1)^s * M * 2^(C – bias) = -1 * 1.375 * 2^(-3) = -0.171875

Q2

q2	Encontre uma raiz da função $f(x) = ln(x) - \sin(x) + x - 14$.	10.68072

Para essa função, temos o seguinte gráfico, plotado com o Geogebra (disponível nos computadores durante a prova):



Nota-se que a raiz da função está próxima de 10. Para chegar ao resultado, podemos escolher tanto o método da bissecção quanto o método de Newton.

Caso escolhêssemos o método da bissecção, seria necessário definir um intervalo onde a função é contínua e que contenha sua raiz. Para o método de Newton, somente precisamos um chute (x) que esteja próximo da raiz. Optamos pelo método de Newton nessa questão, disponível em **q2.sce.**

Q3

q3	Determine uma estimativa para erro absoluto no valor da função $f(x) = x^4 \ln(1+4x)$ em $x = 3$ se o erro absoluto em x for menor ou igual a 7×10^{-6}	0.00211356	1

Uma questão fácil, porém cuzona. Um erro comum seria usar o número de condicionamento para estimar o erro absoluto, mas isso não atinge o resultado correto, pois o **número de condicionamento é a relação entre os erros relativos**. Para chegar no resultado, devemos usar a seguinte fórmula:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

f'(x) = 301.9376075 (temos um método para calcular a derivada no código **q3.sce**)

Δx (erro absoluto na entrada) = 7 * 10^-6

R: f'(x) * Δx = 0.00211356

Q4

q4	Considere T, P e R=A*P matrizes de tamanho 385 por 385, tal que A seja matriz tridiagonal e P seja uma matriz anti-diagonal, onde $P_{ij} = 0$ se $j \neq n - i + 1$ (ou seja, somente os elementos do canto inferior esquerdo até o canto superior direito podem ser diferentes de zero). Considere a matriz formada por blocos $M = [T \quad R\; R \quad T]$. Quantos elementos diferentes de zero possui a matriz M ?	4612	1

Temos um erro de digitação nessa questão, T não foi definida. No entanto, sabemos (informados pelo professor) que T = A e ficamos com M = [A R R A].

Para facilitar a questão, vamos realizá-la no código **q4.sce** no scilab. Lá estão definidas as matrizes e a contagem dos elementos **diferentes** de zero.

Após definirmos todas as matrizes, somente precisamos contar a quantidade de elementos diferentes de zero na matriz M, realizado com iterações pela matriz no código.

OBS: Preste atenção no enunciado da questão, é bem comum ele pedir a quantidade de elementos iguais a 0 nesse tipo de questão em vez de diferentes.

Q5

q5	Calcule o numero de condicionamento da função $g(x) = \cos(13x)$ em x=141.	15289,93	1

Definimos f(x) = cos(13*x), fl(x) = -13 * sin(13*x) e x = 141. O cálculo do número de condicionamento é `abs((x * fl(x))/f(x)) = 15289.93.`

Note que fl(x) é a derivada de f(x), você pode derivá-la manualmente ou por código. Em uma função facilmente derivável, recomendo que você derive manualmente e verifique se está correta com o código. Você pode testar os dois métodos no código **q5.sce**.

Q6

q6	Converta o número inteiro $x = (2204)_{10}$ da base 10 para a base 8.	4234	1

Como a questão é simples, basta olhar o código **q6.sce** para ver a função de conversão.

Q7

q7	Forneça o número de condicionamento na norma L^2 da matriz $[1 \quad 2\ 2 \quad 3.999]$.	24992,0	1

Aqui temos mais um erro de digitação, nada de novo. A matriz é M = [1 2; 2 3.999]. Como é norma 2, podemos utilizar o código cond(M,2) para obter a resposta.

Dica:

Norma 1 seria cond(M,1) e norma infinita seria cond(M,'inf').

Q8

q8	Utilizando o Scilab, quantos flops $(+, -, *, /)$ são necessários para calcular $(x^T x)./(x+3)$ onde x é um vetor com 200 componentes?	799	1

Para resolver essa questão, vamos tomar os seguintes valores:

n = 200

vetor * vetor = 2n-1 flops = 399

vetor ./ vetor = n flops (pois dividimos elemento a elemento) = 200

vetor + k = n flops = 200

Total: 799

Caso tivéssemos multiplicação de vetor por matriz, seria: 2n^2 – n flops

OBS:

Note que ele está contando somas e subtrações como flops. Por vezes, ele considera apenas multiplicações e divisões, então preste atenção no enunciado. Caso queira ver com mais detalhes:

https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-sci/sdsl-complexidade_de_algoritmos_em_algebra_linear.html

Q9

q9	Em uma máquina com base 10 e precisão 3 utilizando arredondamento por truncamento, qual a representação de $x = 1589368.86635711291$?	1580000	1	solução

Como é truncamento e a precisão é 3, só pegamos os 3 primeiros bits e mantemos a ordem de grandeza do número.

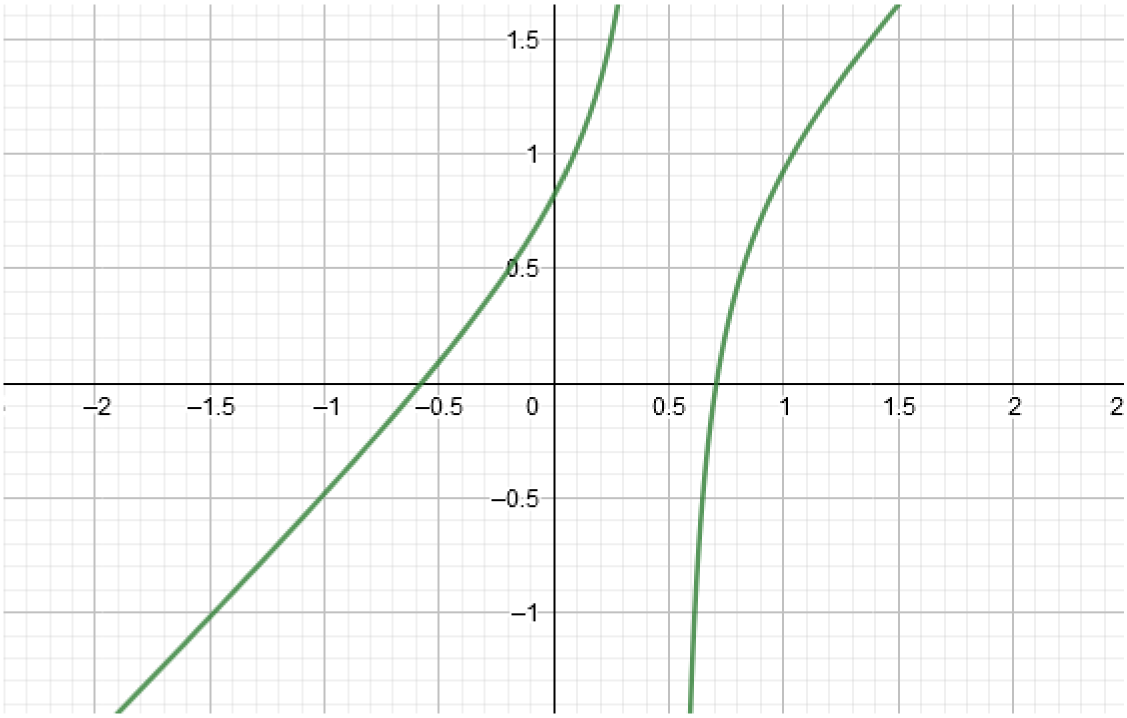
Q10

q10	Forneça, com 5 dígitos significativos, o zero da função $f(x) = \frac{x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x-\frac{\sqrt{6}}{6}}{x-\frac{1}{2}}$ no intervalo $[0,1]$.	0.7071067	1

Oof, ficou difícil de ler essa função, ENHANCE!

$$f(x) = \frac{x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x-\frac{\sqrt{6}}{6}}{x-\frac{1}{2}}$$

Devemos ter muito cuidado nessa questão, pois ela não é contínua. Veja o gráfico:



Usaremos o método de Newton para achar o zero da função. Caso escolhêssemos um x = 0.1, por exemplo, o método não daria certo! Divertido, não? A prova te induz ao erro.

Sabendo disso, vamos definir x = 0.9 como chute. Após algumas iterações, obtemos o resultado correto: 0.7071067

OBS:

Pode-se usar o método da bissecção para resolução da questão. Basta definir um intervalo como a = 0.6 e b = 1.