Otimização combinatória – Formulação linear

Questão 1 (Formulação Matemática)

Sejam x_i, $i \in [3]$ a quantidade produzida na Fábrica i, e y_{ij} a quantidade transportada da Fábrica i ao Atacadista j, $j \in [5]$. Seja c_{ij} o custo de transporte por unidade da Fábrica i ao Atacadista j, d_j a demanda do Atacadista j, e C_i a capacidade da Fábrica i. Temos

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & 0,50x_1 + 1,50x_2 + 0,70x_3 - \sum_{i\in[3],j\in[5]} c_{ij}y_{ij}, && && (1)\\
\textbf{sujeito a} \quad & \sum_{i\in[3]} y_{ij} = d_j, && \forall j \in [5], && (2)\\
& \sum_{j\in[5]} y_{ij} \le C_i, && \forall i \in [3], && (3)\\
& x_i = \sum_{j\in[5]} y_{ij} && \forall i \in [3], && (4)\\
& x_i \ge 0, && \forall i \in [3], && (5)\\
& y_{ij} \ge 0, && \forall i \in [3], j \in [5]. && (6)
\end{aligned}
$$

Na formulação a restrição (2) garante que a demanda do atacadistas satisfeita, a restrição (3) garante que as capacidades das fábricas é respeitada, e a restrição (4) garante que a produção iguala a distribuição.

Questão 2 (Formulação Matemática)

Queremos minimizar o custo total

$$\textbf{minimiza} \quad 3x_1 + 6x_2 \tag{7}$$

sem produzir mais que 18 horas

$$3x_1 + 2x_2 \le 18 \tag{8}$$

produzindo pelo menos 5 quilos

$$x_1 + x_2 \ge 5 \tag{9}$$

respeitando a relação entre sucata para aço puro

$$x_2 \le 7/8\, x_1 \tag{10}$$

e sem usar demais aço ou sucata

$$x_1 \le 4 \tag{11}$$
$$x_2 \le 7. \tag{12}$$

Questão 3 (Formulação Matemática)

Seja x_i a quantidade do ingrediente i, em litros. Além disso vamos usar uma variável auxiliar $x = \sum_{i\in[n]} x_i$ que representa a quantidade total de ingredientes. Podemos formular

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & \sum_{i\in[n]} r_i x_i, && (13)\\
\textbf{sujeito a} \quad & x = \sum_{i\in[n]} x_i, && (14)\\
& x = 1, && (15)\\
& 0.2x \le \sum_{i\in[n]} a_i x_i \le 0.3x, && (16)\\
& 0.3x \le \sum_{i\in[n]} d_i x_i \le 0.4x, && (17)\\
& 0.03x \le \sum_{i\in[n]} p_i x_i \le 0.04x, && (18)\\
& \sum_{i\in P} x_i \ge 2 \sum_{i\in[n]\setminus P} x_i, && (19)\\
& x_i, x \ge 0, \qquad i \in [n]. && (20)
\end{aligned}
$$

Na formulação restrições (14) e (15) garantem uma quantidade total de 1 litro, restrições (16), (17), e (18) garantem os limites de acidez, docura e álcool, e restrição (19) garante a quantidade correto dos ingredientes preferidos.

Questão 4 (Formulação Matemática)

Para cada etapa i que tem um pré-requisito j de duração d_j podemos adicionar uma restrição $t_i \ge t_j + d_j$ para garantir que a etapa não inicia antes da etapa que é pré-requisito terminar. Aplicando essa ideia sistematicamente a todas etapas, obtemos o modelo

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & t_9 + 0 \\
\textbf{sujeito a} \quad & t_1 \geq t_0 + 0 \\
& t_2 \geq t_1 + 2 \\
& t_3 \geq t_1 + 2 \\
& t_4 \geq t_3 + 3 \\
& t_5 \geq t_3 + 3 \\
& t_6 \geq t_2 + 1 \\
& t_6 \geq t_4 + 2.5 \\
& t_7 \geq t_5 + 1.5 \\
& t_7 \geq t_6 + 2 \\
& t_8 \geq t_2 + 1 \\
& t_8 \geq t_4 + 3 \\
& t_9 \geq t_7 + 4 \\
& t_9 \geq t_8 + 3 \\
& t_i \geq 0, & \forall i \in [9].
\end{aligned}
$$

Questão 5 (Formulação Matemática)

Seja p_t o período antes do período t ($p_t = t - 1$, para $t > 1$, e $p_1 = 6$) e m_t o número mínimo necessário de policiais no período t. Temos

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & \sum_{t \in [6]} x_t \\
\textbf{sujeito a} \quad & x_t + x_{p_t} \geq m_t, & t \in [6], \\
& x_t \geq 0, & t \in [6].
\end{aligned}
$$