



Accélération de la résolution des équations de Goldstein par la méta-modélisation

Airbus use-cases

Antoine Bensalah & Régis Lebrun

2021

AIRBUS

Simulations aéroacoustiques

On s'intéresse à la propagation d'ondes acoustiques au sein d'un écoulement non potentiel (Navier Stokes), afin de réduire les nuisances sonores du trafic aérien et d'améliorer le confort des passagers.

- L'écoulement est calculé en l'absence de source acoustique
- La propagation des ondes acoustiques est calculée au sein de cet écoulement
- On obtient ainsi les équations de Goldstein

Outline

- 1 Problem settings
 - Introduction to Goldstein's equation
 - Learning problem
- 2 Short and incomplete machine learning bibliography for PDE solving
 - One learning stage = one PDE instance solved
 - Family of PDE solved
- 3 Explicit inversion of transport operator for shear flows
- 4 Test case description
 - 2D test case
 - 1D test case

Outline

- 1 Problem settings
 - Introduction to Goldstein's equation
 - Learning problem
- 2 Short and incomplete machine learning bibliography for PDE solving
 - One learning stage = one PDE instance solved
 - Family of PDE solved
- 3 Explicit inversion of transport operator for shear flows
- 4 Test case description
 - 2D test case
 - 1D test case

Goldstein's equation: 2D ($d = 2$) problem setting

Physical parameters

- wave number: $k_0 > 0$ (could be in \mathbb{C})
- based flow (Mach): $\mathbf{M}_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ (simplifications: ρ_0, c_0 uniform)
- acoustic source: $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$.

Unknowns:

- “acoustic” unknown $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$
- “hydrodynamic” unknown: $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^d$

Airbus quantity of interest: acoustic pressure $p = -(-ik_0 + \mathbf{M}_0 \cdot \nabla)\varphi$.

Goldstein's equation

Goldstein's equation

$\varphi \in H^1(\Omega)$, $\xi \in H(\Omega, \mathbf{M}_0) := \{\zeta \in L^2(\Omega)^d / \mathbf{M}_0 \cdot \nabla \zeta \in L^2(\Omega)^d\}$ such that:

$$\begin{cases} (-ik_0 + \mathbf{M}_0 \cdot \nabla)^2 \varphi - \Delta \varphi - \nabla \cdot \xi = f, & \text{in } \Omega \\ (-ik_0 + \mathbf{M}_0 \cdot \nabla) \xi + (\xi \cdot \nabla) \mathbf{M}_0 + \omega_0 \times \nabla \varphi = \mathbf{0} & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

where ω_0 is the vorticity of the flow: $\omega_0 := \nabla \times \mathbf{M}_0$,

Boundary conditions

Perfectly Matched Layer (PML) thus $\varphi = 0$ on $\partial\Omega$

$\xi = \mathbf{0}$ on $\partial\Omega^- := \{\mathbf{x} \in \partial\Omega / \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) < 0\}$ (inflow boundary)

Block viewpoint

Block system of operators

Goldstein's equations read as

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_{[k_0, \mathbf{M}_0]} & \mathcal{D} \\ \mathcal{V}_{[\mathbf{M}_0]} & \mathcal{T}_{[k_0, \mathbf{M}_0]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

- Convected Helmholtz operator: $\mathcal{H}_{[k_0, \mathbf{M}_0]}(\varphi) := (-ik_0 + \mathbf{M}_0 \cdot \nabla)^2 \varphi - \Delta \varphi$
- Transport operator: $\mathcal{T}_{[k_0, \mathbf{M}_0]}(\xi) := (-ik_0 + \mathbf{M}_0 \cdot \nabla)\xi + (\xi \cdot \nabla)\mathbf{M}_0$
- Coupling operators $\mathcal{D}(\xi) := -\nabla \cdot \xi$ and $\mathcal{V}_{[\mathbf{M}_0]}(\varphi) := \omega_0 \times \nabla \varphi = (\nabla \times \mathbf{M}_0) \times \nabla \varphi$

Difficulties: $\mathcal{T}_{[k_0, \mathbf{M}_0]}^{-1}$ too costly

- ξ is a vectorial unknown
- $\mathcal{T}_{[k_0, \mathbf{M}_0]}^{-1}$ demands a far smaller discretization than $\mathcal{H}_{[k_0, \mathbf{M}_0]}$

Numerical setting

For now, Goldstein's equations are solved by Q_1 finite element method (or P_1)

Computational parametrs

- Computational domain: $\Omega := [-l_x, L_x + l_x] \times [-l_y, L_y + l_y] \subset \mathbb{R}^d$
- Mesh : uniform 2D-grid of size $n_x, n_y \in \mathbb{N}^*$. Mesh points:

$$\forall i, j \in [0 \dots n_x - 1] \times [0 \dots n_y - 1],$$

$$(x_i, y_j) := (ih_x - l_x, jh_y - l_y), \quad h_x = \frac{L_x + 2l_x}{n_x - 1}, \quad h_y = \frac{L_y + 2l_y}{n_y - 1}$$

- PML coefficients $\alpha_x, \alpha_y \in \mathbb{C}$ and lengths $l_x, l_y > 0$.

Discretization spaces

On a domain $D \subset \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{Q}_1(D) := \underset{\mathbb{C}}{\text{span}} \left\{ (x, y) \in D \mapsto x^n y^m \right\}_{n,m \in \{0,1\}}$$

Finite element spaces

$$Q_1(\Omega) := \left\{ \psi \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{C}), : \psi|_{[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]} \in \mathbb{Q}_1([x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]) \quad \forall i, j \right\}$$

and to take into account the boundary conditions:

$$Q_1^0(\Omega) := \{ \psi \in Q_1(\Omega) / \psi|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

$$Q_1^-(\Omega) := \{ \psi \in Q_1(\Omega) / \psi|_{\partial\Omega^-} = 0 \}$$

Iterative numerical scheme

Iterative scheme

Sequences $(\varphi^n) \in (Q_1^0(\Omega))^{\mathbb{N}}$, $(\xi^n) \in (Q_1^-(\Omega)^d)^{\mathbb{N}}$ such that, $\varphi^0 = 0$, $\xi^0 = \mathbf{0}$ and

$$\begin{pmatrix} H_{[k_0, \mathbf{m}_0]} & D \\ 0 & T_{[k_0, \mathbf{m}_0]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} \\ \xi^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -V_{[\mathbf{m}_0]} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n \\ \xi^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

which converge (not always ...) to the Q_1 -approximated solution φ, ξ .

Remark:

- $H_{[k_0, \mathbf{m}_0]}$, D , $T_{[k_0, \mathbf{m}_0]}$, $V_{[\mathbf{m}_0]}$: discretized versions of $\mathcal{H}_{[k_0, \mathbf{m}_0]}$, \mathcal{D} , $\mathcal{T}_{[k_0, \mathbf{m}_0]}$, $\mathcal{V}_{[\mathbf{m}_0]}$
- f : L^2 projection on Q_1 of the acoustic source (still denoted f).

Outline

- 1 Problem settings
 - Introduction to Goldstein's equation
 - Learning problem
- 2 Short and incomplete machine learning bibliography for PDE solving
 - One learning stage = one PDE instance solved
 - Family of PDE solved
- 3 Explicit inversion of transport operator for shear flows
- 4 Test case description
 - 2D test case
 - 1D test case

Acceleration of the iterative scheme ?

Idea 1: acceleration with metamodel $\xi_{\mathcal{M}}$

Fast computation of ξ^{n+1} at each iteration:

$$\xi^{n+1} \leftarrow \xi_{\mathcal{M}}(k_0, \mathbf{M}_0, \varphi^n) \approx T_{[k_0, \mathbf{M}_0]}^{-1}(-V_{[\mathbf{M}_0]}\varphi^n)$$

then, classical finite elements computations to solve the new iterative scheme

$$H_{[k_0, \mathbf{M}_0]}\varphi^{n+1} = f - D\xi_{\mathcal{M}}(k_0, \mathbf{M}_0, \varphi^n)$$

Idea 2: acceleration with metamodel $f_{\mathcal{M}} = -D\xi_{\mathcal{M}}$

Fast computation of the update of the right hand side at each iteration:

$$f_{\mathcal{M}}(k_0, \mathbf{M}_0, \varphi^n) \approx DT_{[k_0, \mathbf{M}_0]}^{-1}(-V_{[\mathbf{M}_0]}\varphi^n)$$

then, the iterative scheme become (still solved by FEM)

$$H_{[k_0, \mathbf{M}_0]}\varphi^{n+1} = f + f_{\mathcal{M}}(k_0, \mathbf{M}_0, \varphi^n)$$

Abstract viewpoint: meta model parameters

The metamodel is a map between “discrete” spaces (= finite dimensional):

$$\xi_{\mathcal{M}} : \mathbb{R}^{d_p} \times W_h \times U_h \longrightarrow V_h,$$

- \mathbb{R}^{d_p} : represents the space of **scalar parameters**, for instance k_0
- U_h, V_h, W_h : the **functional parameter** spaces:
 - U_h to represent φ (e.g. $U_h \subset H_0^1(\Omega)$)
 - V_h^d to represent ξ (e.g. $V_h \subset H^-(\Omega, \mathbf{M}_0)$)
 - W_h^d to represent \mathbf{M}_0 (e.g. $W_h \subset C^1(\Omega)$)

easy to adapt to $f_{\mathcal{M}}$

Abstract viewpoint: meta model connection with iterative scheme

Connection between $\xi_{\mathcal{M}}$ and our classical numerical method (FEM)

We need a family of “interpolation” and “projection” operators, depending of the FEM discrete space used $Q_1(\Omega)$,

$$\mathcal{I} : Q_0^1(\Omega) \rightarrow U_h \quad \text{and} \quad \mathcal{P} : V_h \rightarrow Q_1^-(\Omega)^d$$

to make the transition

$$\begin{array}{ccc} (k_0, \mathbf{M}_0, \varphi^n) \in \mathbb{R} \times W_h \times U_h & \xrightarrow{\xi_{\mathcal{M}}} & \xi_{\mathcal{M}}(k_0, \mathbf{M}_0, \varphi^n) \in V_h \\ \uparrow \mathcal{I} & & \downarrow \mathcal{P} \\ \varphi^n \in Q_1^0(\Omega) & & \xi^{n+1} \in Q_1^-(\Omega)^d \end{array}$$

easy to adapt to $f_{\mathcal{M}}$

First “simple” approach: fixed mesh

Functional discrete spaces: fixed mesh

We choose:

$$U_h = Q_1^0(\Omega), \quad V_h = Q_1^-(\Omega)^d \quad \text{and } \mathcal{I}, \mathcal{P} \text{ identity}$$

Thus, the meta model is a function of the acoustic unknown values at mesh points

$$(\varphi_{i,j}^n) := (\varphi^n(x_i, y_j)) \in \mathbb{C}^{n_x \times n_y}$$

Scalar parameters

- **Flow parameters:** flow family parametrized by $\theta \in \mathbb{R}^{d_f}$, $d_f \in \mathbb{N}^*$ typically small (< 5)

$$\mathbf{M}_0 \in \left\{ \mathbf{M}_0^\theta, \theta \in \mathbb{R}^{d_f} \right\}$$

- **The wave number:** $k_0 \in \mathbb{R}$.

Thus

$$\mathbb{R}^{d_p} = \mathbb{R}^{d_f+1}$$

First “simple” approach: meta model input/output parameters

Thus:

Meta models $\xi_{\mathcal{M}}$

$$\begin{aligned} \xi_{\mathcal{M}} : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d_f} \times \mathbb{C}^{n_x \times n_y} &\longrightarrow \mathbb{C}^{2 \times n_x \times n_y} \\ k_0, \theta, (\varphi_{i,j})_{i,j} &\longmapsto (\xi_{i,j})_{i,j} \approx -T_{[k_0, \mathbf{M}_0]}^{-1} V_{[\mathbf{M}_0^\theta]}(\varphi) \end{aligned}$$

and

Meta models $f_{\mathcal{M}}$

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{M}} : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d_f} \times \mathbb{C}^{n_x \times n_y} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n_x \times n_y} \\ k_0, \theta, (\varphi_{i,j})_{i,j} &\longmapsto (g_{i,j})_{i,j} \approx DT_{[k_0, \mathbf{M}_0^\theta]}^{-1} V_{[\mathbf{M}_0^\theta]}(\varphi) \end{aligned}$$

With much more ambition

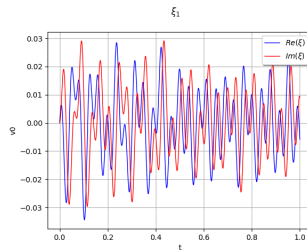
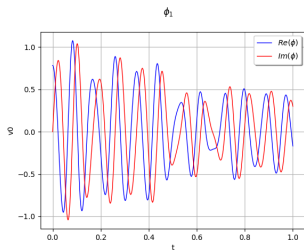
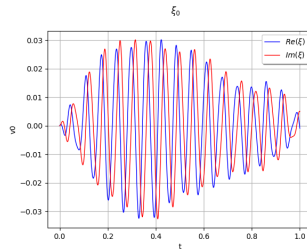
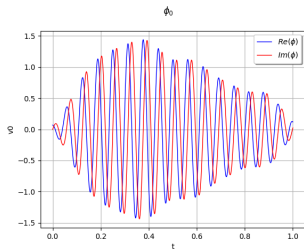
In real life case

- The flow does not belong to an easily available low dimensionnal space
- We would like to change the approximation spaces of φ and ξ : the meta model should not depend on it

Consequences

- A priori (naive ?) dimension of the flow space is far larger than 5
- Need for meshless approach ?

Un oeil sur les inconnues acoustique et aérodynamique



Méthodologie proposée I

Etape 1: Réduction de dimension des inconnues acoustique et hydrodynamique

Les inconnues acoustique ϕ et hydrodynamique ξ sont des fonctions de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} , discrétisées sur un maillage uniforme comportant $N = 3000$ noeuds.

On dispose de deux bases d'apprentissage: 10^3 et 10^4 paires $((k, m, \phi), \xi)$

On teste les techniques suivantes pour réduire la dimension:

- La décomposition de Karhunen-Loeve basée sur les opérateurs de covariance de ϕ et ξ : il s'agit d'une décomposition en composantes principales où le produit scalaire continu n'est pas confondu avec le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n
- La décomposition en composantes principales à noyaux de `scikit-learn`

Méthodologie proposée II

Etape 2: Méta-modélisation entre les représentations réduites

On construit un méta-modèle entre les vecteurs des représentations réduites des inconnues acoustique et aérodynamique, en utilisant l'une des techniques suivantes:

- Projection sur une base fonctionnelle orthonormée par rapport à la loi jointe de la représentation réduite de l'inconnue acoustique;
- Approximation par arbre de tenseurs
- Régression par processus Gaussien (krigeage)

Pour les deux premières méthodes, la sélection des fonctions de base se fait à l'aide du critère leave-one-out analytique, pour la troisième méthode les paramètres du noyau de covariance (exponentiel) sont choisis par maximisation de la vraisemblance.

Théorèmes de décomposition spectrale I

Théorème de décomposition spectrale

Si $\underline{\underline{C}} : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$ (où $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$) est une fonction de covariance continue alors il existe une suite décroissante $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ avec $\lambda_k \geq 0$ et $\sum_k \lambda_k < +\infty$ et une base hilbertienne orthonormée $(\underline{\varphi}_k)_{k \geq 1}$ de $L^2(\mathcal{D}, \mathbb{R}^d)$ qui sont les solutions du **problème de Fredholm** associé à $\underline{\underline{C}}$:

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{D}, \quad \int_{\mathcal{D}} \underline{\underline{C}}(\underline{s}, \underline{t}) \underline{\varphi}_k(\underline{t}) d\underline{t} = \lambda_k \underline{\varphi}_k(\underline{s}) \quad (1)$$

Théorèmes de décomposition spectrale II

Théorème de Mercer

Sous les hypothèses précédentes, le noyau de covariance $\underline{\underline{C}}$ s'écrit:

$$\forall(\underline{s}, \underline{t}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}, \quad \underline{\underline{C}}(\underline{s}, \underline{t}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \underline{\varphi}_k(\underline{s}) \underline{\varphi}_k^t(\underline{t}) \quad (2)$$

avec une convergence absolue, uniforme sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

⇒ représentation compacte de $\underline{\underline{C}}$: après troncature à K termes et discrétisation de \mathcal{D} (dim N), K vecteurs $\underline{\varphi}_k(\underline{s}_i)_{i=1:N}$ plutôt qu'une matrice $(C_{ij})_{i,j=1:N}$.

Décomposition de Karhunen Loeve I

Décomposition de Karhunen Loeve

Soit $\underline{X} : \Omega \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^d$ un champ centré continu en moyenne quadratique et $\underline{X} \in L^2(\Omega \times \mathcal{D})$. Il existe une unique base hilbertienne orthonormée $(\underline{\varphi}_k)_{k \geq 1}$ de $L^2(\mathcal{D}, \mathbb{R}^d)$ et une unique suite décroissante $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ avec $\lambda_k \geq 0$ et $\sum_k \lambda_k < +\infty$ telles que pour tout $\underline{x} \in \mathcal{D}$:

$$\underline{X}(\omega, \underline{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \xi_k(\omega) \underline{\varphi}_k(\underline{x}) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad (3)$$

où les variables aléatoires ξ_k sont données par $\xi_k(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_{\mathcal{D}} \underline{X}(\omega, \underline{x})^t \underline{\varphi}_k(\underline{x}) d\underline{x}$ et vérifient $\mathbb{E}(\xi_k) = 0$ et $\mathbb{E}(\xi_k \xi_\ell) = \delta_{kl}$.

Les $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ et $(\underline{\varphi}_k)_{k \geq 1}$ sont solutions du problème de Fedholm associé à $\underline{\underline{C}}$.

Décomposition de Karhunen Loeve II

Optimalité de Karhunen Loeve

Soit $\underline{X} : \Omega \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^d$ un champ centré continu en moyenne quadratique et $\underline{X} \in L^2(\Omega \times \mathcal{D})$ et K un entier positif. Alors, en notant $S = L^2(\Omega)$:

$$\forall U \text{ sous espace vectoriel de dimension } K \text{ de } L^2(\mathcal{D}), \quad \|\underline{X} - \underline{X}_{U \otimes S}\|^2 \geq \sum_{k=K+1}^{+\infty} \lambda_k \quad (4)$$

où $\underline{X}_{U \otimes S}$ est la projection de \underline{X} sur le sous espace vectoriel $U \otimes S$ engendré par les éléments tensorisés $g(\underline{s})\xi(\omega)$ où $g \in U$ et $\xi \in S$.

L'égalité est atteinte uniquement pour $U = \text{vect}\{\underline{\varphi}_1, \dots, \underline{\varphi}_K\}$ qui correspond à la troncature de la décomposition de Karhunen Loeve (3) au rang K .

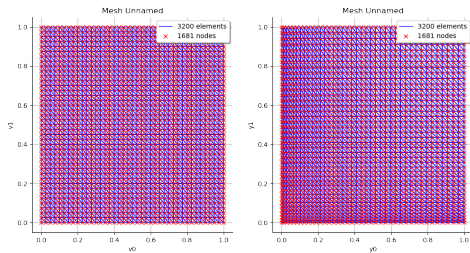
Décomposition de Karhunen Loeve III

\implies Quelle que soit la base $(\theta_k(\underline{s}))_{1 \leq k \leq K}$ d'un sous espace vectoriel de dimension K de $L^2(\mathcal{D})$, alors:

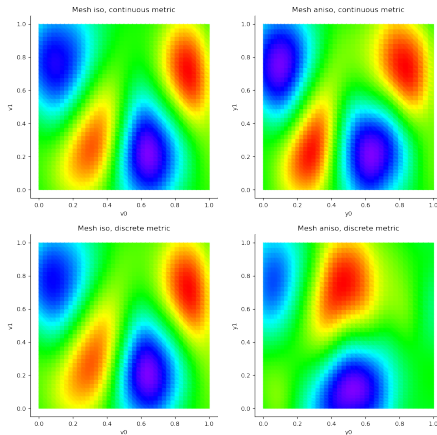
- l'approximation de \underline{X} par $\underline{X}_{U \otimes S}(\omega, \underline{s}) = \sum_{k=1}^K \xi_k(\omega) \theta_k(\underline{s})$ est optimale si U coïncide avec l'espace engendré par les K premiers modes de la décomposition de Karhunen Loeve de \underline{X} ;
- la qualité de l'approximation est mesurée par $\sum_{k=K+1}^{+\infty} \lambda_k$; donc si on veut une approximation ε près et si les λ_k décroissent lentement vers 0, on doit prendre K grand;
- si \underline{X} est dans le sous espace vectoriel engendré par les K premiers termes de la décomposition de Karhunen Loeve, alors l'approximation est exacte et $\sum_{k=K+1}^{+\infty} \lambda_k = 0$.

Un petit mot sur KL/PCA

Décomposition de Karhunen Loeve IV



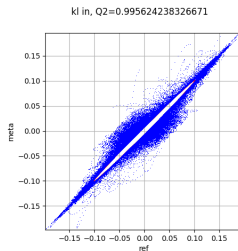
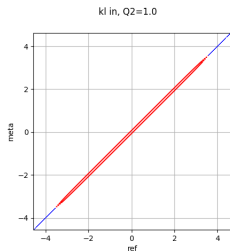
Décomposition de Karhunen Loeve V



Réduction des inconnues acoustique et aérodynamique I



Réduction des inconnues acoustique et aérodynamique II



Quelques remarques:

- Si les décompositions sont faites sur les trajectoires centrées il faut plusieurs centaines de modes pour représenter les inconnues avec $Q_2 > 0.99$.
- Si les décompositions sont faites sur les trajectoires brutes, c'est-à dire si la base est adaptée à la fois à la courbe moyenne et aux fluctuations, il suffit de 10 modes pour l'inconnue acoustique et 45 modes pour l'inconnue aérodynamique.

Réduction des inconnues acoustique et aérodynamique III

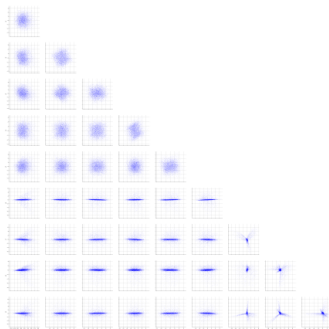
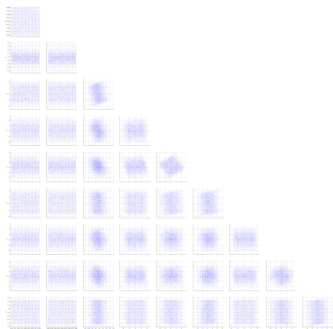
- Même si la base (φ) permet de représenter la moyenne d'un processus, elle peut être très mal adaptée si la régularité de la moyenne est plus faible que celle des fluctuations

Apprentissage de la relation entre les représentations réduites I

- Les techniques s'appuyant sur des bases orthonormées donnent des résultats catastrophiques sur les données brutes
- Seule la régression par processus Gaussien donne un résultat raisonnable pour une base d'apprentissage de taille 10^4

On profite de l'apprentissage des opérateurs de projection et de relèvement de la source acoustique pour rééchantillonner la source acoustique uniformément dans son espace réduit et on calcule l'inconnue aérodynamique correspondante.

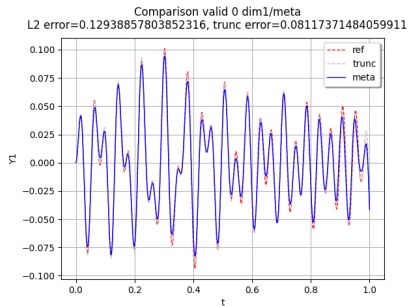
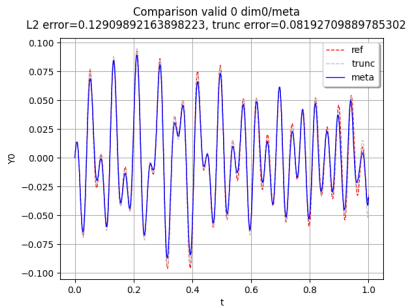
Apprentissage de la relation entre les représentations réduites II



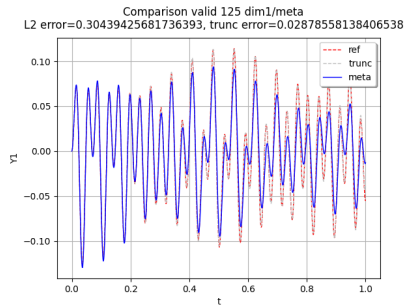
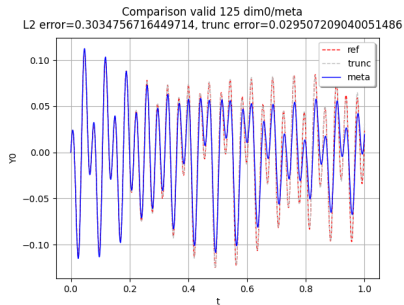
Apprentissage de la relation entre les représentations réduites III

- La projection sur une base fonctionnelle donne maintenant des résultats raisonnables
- La régression par processus Gaussien donne des résultats comparables à ceux de la base de départ
- Les arbres de tenseurs donnent désormais de très bons résultats... mais en permettant de nombreuses adaptations de l'arbre et des rangs internes, pour un coût de calcul très important (30 heures sur 8 coeurs pour la base de taille 10^3).

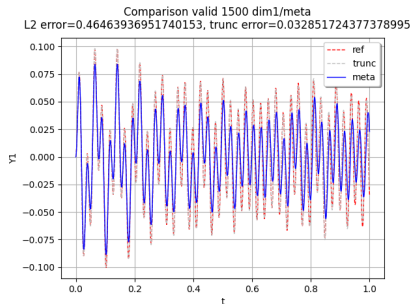
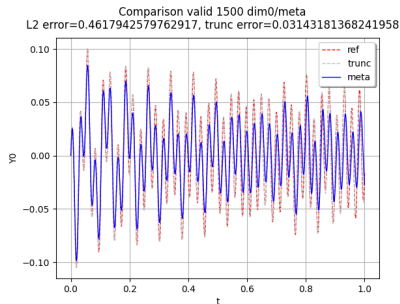
Méta-modèle final I



Méta-modèle final II



Méta-modèle final III



Méta-modèle final IV

