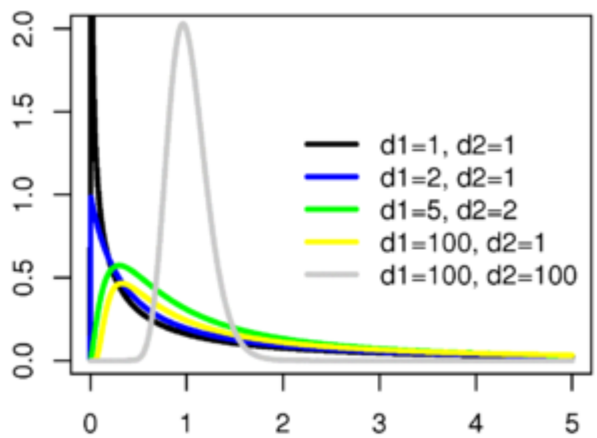
Loi de Fisher

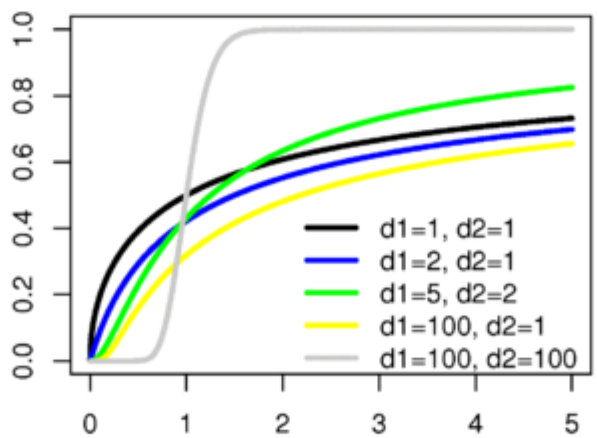
Dans la Théorie des probabilités et en Statistiques, la **loi de Fisher** ou encore **loi de Fisher-Snedecor** ou encore **loi F de Snedecor** est une loi de probabilité continue.[1,2,3] Elle tire son nom des statisticiens Ronald Aylmer Fisher et George W. Snedecor. La loi de Fisher survient très fréquemment en tant que distribution de l'hypothèse nulle dans des tests statistiques, comme par exemple les tests du ratio de vraisemblance ou encore dans l'analyse de la variance (*F-test*).

Fisher-Snedecor

Densité de probabilité / Fonction de masse



Fonction de répartition



Paramètres	$d_1 > 0,\ d_2 > 0$ degré de liberté
Support	$x \in [0, +\infty[$

Sommaire

Caractérisation

Une variable aléatoire réelle distribuée selon la loi de Fisher peut être définie comme le quotient de deux variables aléatoires indépendantes, distribuées selon une loi du χ^2:

$$\frac{U_1/d_1}{U_2/d_2}$$

avec U_1 et U_2 ayant respectivement d_1 et d_2 degrés de liberté.

La densité de probabilité d'une loi de Fisher, $F(d_1, d_2)$, est donnée par

Densité de probabilité (fonction de masse)	$\frac{\sqrt{\frac{(d_1\,x)^{d_1}\,\,d_2^{d_2}}{(d_1\,x+d_2)^{d_1+d_2}}}}{x\,\mathrm{B}\!\left(\frac{d_1}{2},\frac{d_2}{2}\right)}$
Fonction de répartition	$I_{\frac{d_1 x}{d_1 x+d_2}}(d_1/2, d_2/2)$
Espérance	$\frac{d_2}{d_2-2}$ pour $d_2 > 2$
Mode	$\frac{d_1-2}{d_1}\;\frac{d_2}{d_2+2}$ pour $d_1 > 2$
Variance	$\frac{2\,d_2^2\,(d_1+d_2-2)}{d_1(d_2-2)^2(d_2-4)}$ pour $d_2 > 4$
Asymétrie (statistique)	$\frac{(2d_1+d_2-2)\sqrt{8(d_2-4)}}{(d_2-6)\sqrt{d_1(d_1+d_2-2)}}$ pour $d_2 > 6$
Kurtosis (non-normalisé)	*voir texte*

$$f(x) = \frac{\left(\frac{d_1\,x}{d_1\,x+d_2}\right)^{d_1/2}\;\left(1-\frac{d_1\,x}{d_1\,x+d_2}\right)^{d_2/2}}{x\;\mathrm{B}(d_1/2, d_2/2)}$$

pour tout réel $x \geq 0$, où d_1 et d_2 sont des entiers positifs et B est la fonction bêta.

La fonction de répartition associée est $F(x) = I_{\frac{d_1 x}{d_1 x+d_2}}(d_1/2, d_2/2)$

où I est la fonction bêta incomplète régularisée.

L'espérance, la variance valent respectivement

$$\frac{d_2}{d_2-2}$$

pour $d_2 > 2$ et

$$\frac{2\,d_2^2\,(d_1+d_2-2)}{d_1(d_2-2)^2(d_2-4)}$$

pour $d_2 > 4$. Pour $d_2 > 8$, le kurtosis est

$$\frac{20d_2-8d_2^2+d_2^3+44d_1-32d_1d_2+A}{d_1(d_2-6)(d_2-8)(d_1+d_2-2)/12}$$

où $A = 5d_2^2d_1 - 22d_1^2 + 5d_2d_1^2 - 16.$

Généralisation

Une généralisation de la loi de Fisher est la loi de Fisher non centrée.

Distributions associées et propriétés

- Si $X \sim \mathrm{F}(\nu_1,\nu_2)$ alors $Y = \lim_{\nu_2\to\infty} \nu_1 X$ est distribuée selon une loi du χ^2 $\chi^2_{\nu_1}$;
- La loi $\mathrm{F}(\nu_1,\nu_2)$ est équivalente à la loi *T-square* de Hotelling's $(\nu_1(\nu_1+\nu_2-1)/\nu_2)\mathrm{T}^2(\nu_1,\nu_1+\nu_2-1)$;
- Si $X \sim \mathrm{F}(\nu_1,\nu_2)$, alors $\frac{1}{X} \sim F(\nu_2,\nu_1)$;
- Si $X \sim \mathrm{t}(\nu)$ est distribuée selon une loi de Student alors $X^2 \sim \mathrm{F}(1,\nu)$;
- Si $X \sim \mathrm{F}(\nu_1,\nu_2)$ et $Y = \frac{\nu_1 X/\nu_2}{1+\nu_1 X/\nu_2}$ alors $Y \sim \mathrm{Beta}(\nu_1/2,\nu_2/2)$ est distribuée selon une loi bêta;
- Si $\mathrm{Q}_X(p)$ est le quantile d'ordre p pour $X \sim \mathrm{F}(\nu_1,\nu_2)$ et que $\mathrm{Q}_Y(p)$ est le quantile d'ordre p pour $Y \sim \mathrm{F}(\nu_2,\nu_1)$ alors $\mathrm{Q}_X(p) = 1/\mathrm{Q}_Y(p)$.

Références

1. (en) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York, 1972 (ISBN 978-0-486-61272-0)
2. NIST (2006). Engineering Statistics Handbook - F Distribution (http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda3665.htm)
3. (en) Alexander Mood, *Introduction to the Theory of Statistics (Third Edition, p. 246-249)*,

McGraw-Hill, 1974 (ISBN 0-07-042864-6)

Liens externes

- Table of critical values of the *F*-distribution (http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda3673.htm)
- Online significance testing with the F-distribution (http://home.clara.net/sisa/signhlp.htm)
- Distribution Calculator (http://www.vias.org/simulations/simusoft_distcalc.html) pour calculer les probabilités et les valeurs critiques des lois normales,de Student, du Chi-deux et de la loi de Fisher
- Cumulative distribution function (CDF) calculator for the Fisher F-distribution (http://www.danielsoper.com/statcalc/calc39.aspx)
- Probability density function (PDF) calculator for the Fisher F-distribution (http://www.danielsoper.com/statcalc/calc38.aspx)