

RELACJE I FUNKCJE -- ZADANIA

Zadanie 1.

Podaj dziedzinę, przeciwdziedzinę oraz relację odwrotną do relacji R , S , T określonych następująco:

$$R = \{(a,b), (a,c), (b,c), (c,c)\},$$

$$S = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d)\},$$

$$T = \{(a,b) : a \in N \wedge b \in N \wedge a < b\}$$

Zadanie 2.

Poniższe relacje $R \subset A \times A$ przedstaw w postaci tabel i diagramów, wyznacz dziedzinę, przeciwdziedzinę oraz relację odwrotną

$$A = \{0,1,2\}, \quad xRy \Leftrightarrow x < y$$

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad xRy \Leftrightarrow x \mid y \wedge x \neq y$$

$$A = \{1,2,3,4\}, \quad xRy \Leftrightarrow 2 \mid x + y$$

Zadanie 3.

Znajdź na płaszczyźnie obrazy następujących relacji określonych w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$1) \quad xRy \Leftrightarrow x < y$$

$$2) \quad xRy \Leftrightarrow x + y = 1$$

$$3) \quad xRy \Leftrightarrow |x - y| < 1$$

$$4) \quad xRy \Leftrightarrow x^2 + y < 1$$

$$5) \quad xRy \Leftrightarrow x = y \vee -x = y$$

$$6) \quad xRy \Leftrightarrow x + y \geq 1 \wedge y < 5$$

$$7) \quad xRy \Leftrightarrow |x| < y$$

$$8) \quad xRy \Leftrightarrow \frac{6}{x} \leq y \leq 7 - x$$

$$9) \quad xRy \Leftrightarrow |x| + |y| \leq 1$$

$$10) \quad xRy \Leftrightarrow x \cdot y < 0$$

Określ dziedziny i przeciwdziedziny tych relacji.

Zadanie 4.

Niech $R = \{(2,1), (3,1), (4,1), (5,2), (6,2)\}$ i $S = \{(3,2), (3,3), (3,4), (5,5)\}$.

Wyznacz następujące relacje: $R \circ S$, $S \circ R$, $(R \circ S)^{-1}$, $R^{-1} \circ S^{-1}$, $S^{-1} \circ R^{-1}$. Które z tych relacji są sobie równe?

Zadanie 5.

Niech $R, S \subset Z \times Z$, gdzie Z – liczby całkowite,

$$xRy \Leftrightarrow x^2 = y \quad \quad xSy \Leftrightarrow x < y$$

Które z podanych par należą do $R \circ S$, a które do $S \circ R$:

$$(-2,5) \quad (4,19) \quad (-2,4) \quad (1,7) \quad (3,25) \quad (2,9)$$

Zadanie 6.

Wśród następujących relacji określonych w zbiorze liczb rzeczywistych wskaż relacje R , które są funkcjami oraz relacje, dla których relacja odwrotna jest funkcją

- 1) $x R y \Leftrightarrow x < y$
- 2) $x R y \Leftrightarrow x = y$
- 3) $x R y \Leftrightarrow x = 2y$
- 4) $x R y \Leftrightarrow y = 2x$
- 5) $x R y \Leftrightarrow y = x + 2$
- 6) $x R y \Leftrightarrow y = x^3$
- 7) $x R y \Leftrightarrow y = x^2 + 2$
- 8) $x R y \Leftrightarrow x = 2y^2$
- 9) $x R y \Leftrightarrow x + y = 0$
- 10) $x R y \Leftrightarrow x \cdot y = 0$
- 11) $x R y \Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0$
- 12) $x R y \Leftrightarrow (1 + x^2) \cdot y = 1$
- 13) $x R y \Leftrightarrow y - x^3 = 1$

Zadanie 7.

Niech $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{2, 3, 4\}$. Zbadaj, czy następujące relacje są funkcjami $f : X \mapsto Y$

- 1) $\{(1, 3), (2, 4), (3, 3)\}$
- 2) $\{(1, 4), (2, 5), (3, 3)\}$
- 3) $\{(3, 2), (3, 4), (2, 2)\}$
- 4) $\{(1, 2), (1, 4), (4, 2)\}$
- 5) $\{(1, 3), (2, 4)\}$
- 6) $\{(1, 4), (2, 1)\}$

Zadanie 8.

Niech f_1, f_2, f_3 będą funkcjami określonymi w zbiorze liczb rzeczywistych:

- a) $f_1(x) = x + 1$
- b) $f_2(x) = x^2 - 3$
- c) $f_3(x) = 2x$

Wyznacz funkcje: $f_1 \circ f_2$, $f_1 \circ f_3$, $f_2 \circ f_3$, $f_1 \circ f_1$, $f_2 \circ f_2$, $f_3 \circ f_3$, $f_2 \circ f_1$, $f_3 \circ f_1$,
 $f_3 \circ f_2$, $f_1 \circ (f_2 \circ f_3)$, $f_2 \circ (f_1 \circ f_3)$, $f_3 \circ (f_1 \circ f_2)$.

Zadanie 9.

Zbadać, czy funkcja w podanym przedziale jest różnowartościowa i wyznaczyć jej funkcję odwrotną. Przedstaw obie funkcje f i f^{-1} na jednym wykresie

1) $y = 3x + 5, \quad x \in \mathbb{R}$

2) $y = -2x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$

3) $y = \frac{1}{3}x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$

4) $y = x^3 - 2, \quad x \in \mathbb{R}$

5) $y = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

6) $y = x^2 - 1, \quad x \in \langle 0, +\infty \rangle$

7) $y = x^2 - 1, \quad x \in \langle 0, +\infty \rangle$

8) $y = x^2 + 3x + 3, \quad x \in \left\langle -\frac{3}{2}, +\infty \right\rangle$

9) $y = x^2 + 3x + 3, \quad x \in \left\langle -\infty, -\frac{3}{2} \right\rangle$

Zadanie 10.

Dla danych funkcji f i zbiorów A, B, C, D wyznacz $f[A], f[B], f^{-1}[C], f^{-1}[D]$.

1) $f(x) = x + 2, \quad A = \langle 2, 3 \rangle, \quad B = \langle -3, 2 \rangle, \quad C = \langle 2, 3 \rangle, \quad D = \{-1, 4\}$

2) $f(x) = 3 - 2x, \quad A = \langle 2, 3 \rangle, \quad B = \langle -3, 2 \rangle, \quad C = \langle 2, 3 \rangle, \quad D = \{-1, 4\}$

3) $f(x) = (x + 2)(x - 4), \quad A = \{-3, 5\}, \quad B = \langle -1, 2 \rangle, \quad C = \langle 5, 7 \rangle, \quad D = \{-8\}$

Wykonaj odpowiednie rysunki, oddzielnie dla każdego zbioru.