Podstawy logiki i teorii mnogości

Literatura:

1. J. Słupecki, K. Hałkowska, K. Piróg-Rzepecka: “Logika matematyczna”.

2. A. Wojciechowska: “Elementy logiki i teorii mnogości”.

3. H. Rasiowa: “Wstęp do matematyki współczesnej”.

4. K. Kuratowski, A. Mostowski: „Teoria mnogości”.

5. A. Błaszczyk, S. Turek: “Teoria mnogości”.

6. W. Marek, J. Onyszkiewicz: “Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach”.

7. T. Batóg: „Podstawy logiki”.

8. B. Stanosz: „Ćwiczenia z logiki”.

Wykład 1, Wykład 2

Klasyczny Rachunek Zdań

2 wartości logiczne: 1-prawda, 0-fałsz.

Def. Zdaniem w sensie logicznym nazywamy zdanie oznajmujące, które jest prawdziwe lub fałszywe.

Spójniki logiczne (funktory rachunku zdań)

nazwa	wyrażenie	symbol
negacja	nieprawda, że	$\neg$
koniunkcja	i	$\wedge$
alternatywa	lub	$\vee$

implikacja	Jeżeli…, to…	$\to$, $\Rightarrow$
równoważność	wtedy i tylko wtedy, gdy	$\leftrightarrow$, $\Leftrightarrow$

Spójniki logiczne w połączeniu ze zdaniami (argumentami spójnika) tworzą zdania złożone.

Tablice prawdziwościowe spójników.

p	$\neg$p
1	0
0	1

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Zmienne zdaniowe: p,q,r,s

Def. Formułami (schematami zdaniowymi) klasycznego rachunku zdań będziemy nazywać wyrażenia zdefiniowane w następujący sposób:

1. każda zmienna zdaniowa jest formułą,
2. jeżeli p jest formułą, to $\neg p$ jest formułą,
3. jeżeli p i q są formułami, to wyrażenia $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ są formułami.

Def. Wartościowaniem nazywamy przyporządkowanie wartości logicznych zmiennym zdaniowym.

np.

p	q	r
1	0	1

Def. Tautologią klasycznego rachunku zdań nazywamy formułę, która przyjmuje wartość logiczną 1 dla każdego wartościowania.

Ważniejsze prawa klasycznego rachunku zdań

Prawa rozdzielności:

$p\wedge(q\vee r)\leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

$p\vee(q\wedge r)\leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

Prawa łączności:

$(p\wedge q)\wedge r\leftrightarrow p\wedge(q\wedge r)$

$(p\vee q)\vee r\leftrightarrow p\vee(q\vee r)$

$[(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow r]\leftrightarrow[p\leftrightarrow(q\leftrightarrow r)]$

Prawa de Morgana

$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Prawo eksportacji-importacji

$(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

Prawa idempotentności dla $\wedge$ i $\vee$

$p \wedge p \leftrightarrow p$

$p \vee p \leftrightarrow p$

Prawa przemienności

$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$

$p \vee q \leftrightarrow q \vee p$

$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

Prawa definiowania

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

$p \wedge q \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

$p \vee q \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

Prawo podwójnego przeczenia

$\neg\neg p \leftrightarrow p$

Metody sprawdzania, czy dana formuła klasycznego rachunku zdań jest tautologią.

1. Metoda zero-jedynkowa.

Przykłady.

1. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Odp. Formuła jest tautologią.

2. $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$

p	q	r	p→q	q→r	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	p→r	$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Odp. Formuła jest tautologią.

2. Metoda nie-wprost.
Przykłady.

1. $(p \to q) \to \neg p \vee q$
Zakładamy, że formuła nie jest tautologią.
Wtedy w(p→q)=1 i w($\neg p \vee q$)=0 dla pewnego wartościowania w.
Z drugiego warunku w($\neg p$)=0 i w(q)=0. Stąd w(p)=1 i w(q)=0.
Podstawiamy te wartości za p i q do pierwszego warunku:
w(1→0)=0. Otrzymaliśmy sprzeczność.
Zatem formuła jest tautologią.

2. $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$
Zakładamy, że formuła nie jest tautologią.
Wtedy w(p→q)=1 i w$(\neg p \to \neg q)$=0 dla pewnego wartościowania w.
Z warunku drugiego w($\neg p$)=1 i w($\neg q$)=0. Stąd w(p)=0 i w(q)=1.
Podstawiamy te wartości za p i q do warunku pierwszego:
w(0→1)=1. Jest on przy tych wartościach spełniony.
Zatem formuła nie jest tautologią.

Def. Mówimy, że schemat B wynika logicznie ze schematu $A_1, \ldots, A_n$ w klasycznym rachunku zdań, jeżeli schemat zdaniowy $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ jest tautologią klasycznego rachunku zdań.

Poprawne schematy wnioskowania

Reguła odrywania

$$\frac{p \to q \qquad p}{q}$$

Reguła sylogizmu warunkowego

$$\frac{p \to q \qquad q \to r}{p \to r}$$

Reguła wprowadzania koniunkcji

$$\frac{p \qquad q}{p \wedge q}$$

Reguły opuszczania koniunkcji

$$\frac{p \wedge q}{p} \qquad \frac{p \wedge q}{q}$$

Reguły wprowadzania alternatywy

p	q
---	------
$p \vee q$	$p \vee q$

Reguła eliminacji alternatywy

$$\frac{p \vee q \quad p \rightarrow r \quad q \rightarrow r}{r}$$

Reguły odrywania dla alternatywy

$p \vee q$	$p \vee q$
$\neg p$	$\neg q$
------	-------
q	p

Reguła wprowadzania równoważności

$$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow p}{p \leftrightarrow q}$$

Przykład. Sprawdzić, czy schemat $p \to q$ jest poprawnym schematem wnioskowania.

$$\begin{array}{c} p \to q \\ r \to q \\ \hline p \vee r \to q \end{array}$$

W tym celu należy sprawdzić, czy formuła $(p \to q) \wedge (r \to q) \to (p \vee r \to q)$ jest tautologią.

p	q	r	$p \to q$	$r \to q$	$(p \leftarrow q) \wedge (r \to q)$	$p \vee r$	$(p \vee r \to q)$	$(p \to q) \wedge (r \to q) \to (p \vee r \to q)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1

Formuła jest tautologią, zatem schemat wnioskowania jest poprawny.

Tw. O podstawianiu
Jeżeli formuła jest tautologią klasycznego rachunku zdań i za zmienne w tej formule konsekwentnie podstawimy pewne schematy zdaniowe, to otrzymana w ten sposób formuła też jest tautologią klasycznego rachunku zdań.

Wniosek.
Jeżeli w poprawnym schemacie wnioskowania podstawimy konsekwentnie dowolne formuły za zmienne , to otrzymany w ten sposób schemat też jest poprawnym schematem wnioskowania klasycznego rachunku zdań.