Wykład 10, 11

Def. (Kuratowski)

$(x,y)=\{\{x\}, \{x,y\}\}$

$(x,y)$ nazywamy parą uporządkowaną elementów x i y.
x-poprzednik, y-następnik.

Lemat o parach uporządkowanych

$(a,b)=(c,d) \leftrightarrow a=c \wedge b=d$

Def. (n-członowe układy uporządkowane)

$(a_1)=a_1$

$(a_1,...,a_n,a_{n+1})=((a_1,...,a_n),a_{n+1})$

Lemat o n-tkach uporządkowanych

$$(a_1,..a_n)=(b_1,...,b_n) \leftrightarrow a_1=b_1 \wedge ... \wedge a_n=b_n$$

Def. (iloczyn kartezjański)

$$A\times B=\{(x,y): x\in A \wedge y\in B\}$$

Przykład.

$A=\{x,y,z\}$   $B=\{a,b\}$

$$A\times B=\{(x,a),(x,b),(y,a),(y,b),(z,a),(z,b)\}$$

Przykładowe prawo

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

Dowód: $(x,y)\in A\times(B\cup C)$ wtw gdy $x\in A \wedge y\in B\cup C$
wtw gdy $x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$ wtw gdy $(x\in A\wedge y\in B)\vee$
$(x\in A\wedge y\in C)$ wtw gdy $(x,y)\in A\times B\vee(x,y)\in A\times C$
wtw gdy $(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$

Relacje

Def. Relacją w produkcie $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ nazywamy dowolny zbiór $R\subset A_1\times\ldots\times A_n$.

Zwykle rozważamy relacje dwuargumentowe, czyli $R\subset A\times B$, zwane krótko relacjami.

Def. $R\subset A\times B$
Dziedziną relacji R nazywamy zbiór $DR=\left\{x\in A: \exists_{y\in B}(x,y)\in R\right\}$.

Przeciwdziedziną relacji R nazywamy zbiór

$$D^*R=\left\{y: \exists_{x\in A}(x,y)\in R\right\}.$$

Def. Relacją odwrotną do relacji R nazywamy relację

$$R^{-1}=\{(y,x):(x,y)\in R\}.$$

Def. Złożeniem relacji S z relacją R nazywamy relację

$$S\circ R=\left\{(x,y):\exists_z((x,z)\in R\wedge(z,y)\in S)\right\}.$$

Przykład R={(1,2), (1,3), (2,1)}

DR={1,2} $D^*R$={2,3,1}

$R^{-1}$ ={(2,1), (3,1), (1,2)}

Przykład R={(1,2), (3,1)} S={(2,3), (1,5)}

$$S \circ R = \{(1,3), (3,5)\}$$