Relacje

Wykład 12,13

Funkcje jako relacje

Def. Relację R nazywamy funkcją, jeżeli spełnia warunek prawostronnej jednoznaczności:

$$\underset{x,y_1,y_2}{\forall}\left(\left(x,y_1\right)\in R\wedge\left(x,y_2\right)\in R\rightarrow y_1=y_2\right)$$

Def. Mówimy, że funkcja jest funkcją ze zbioru A w zbiór B (piszemy: f: A→B), jeżeli spełnione są warunki:

a. f jest funkcją,
b. Df = A,
c. $D^* f\subseteq B$.

Mówimy, że f jest funkcją ze zbioru A na zbiór B, jeżeli dodatkowo spełnia warunek:

d. D^*f = B.

Def. f-funkcja, $x\in Df$
f(x)=jedyne y, takie że $(x, y)\in f$
f(x) nazywamy wartością funkcji f dla argumentu x.

Zachodzi wzór: $(x,y)\in f\leftrightarrow y=f(x)$

Def. Funkcję nazywamy różnowartościową (wzajemnie jednoznaczną), jeśli spełnia warunek:

$$\underset{x_1,x_2\in Df}{\forall}\left(f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)\rightarrow x_1=x_2\right)$$

Def. Relację f^{-1} nazywamy relacją odwrotną do funkcji f.

Tw. Dla każdej funkcji f relacja f^{-1} jest funkcją wtw gdy f jest funkcją różnowartościową.

Złożenie funkcji:

$g \circ f$ jako złożenie relacji

Fakt.

$$\forall_{x \in D(g \circ f)} (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Przykład

R={(1,2), (3,4), (1,5)}-nie jest to funkcja

R={(2,2), (3,1)}- jest to funkcja

Obrazy i przeciwobrazy

Def. Niech f: X→Y. Dla $A \subseteq X$ określamy:

$$f[A] = \{y : \exists_x (x \in A \wedge y = f(x))\}.$$

f[A] nazywamy obrazem zbioru A danym przez funkcję f.

Dla $B \subseteq Y$ określamy:

$$f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

$f^{-1}[B]$ nazywamy przeciwobrazem zbioru B danym przez funkcję f.

Prawa dla obrazów i przeciwobrazów:

$$f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$$

$$f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$$

$$f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$$

$$f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$$

$$f^{-1}[B'] = f^{-1}[B]'$$

Def. (Typy relacji na zbiorze A)

Niech $R \subseteq A^2$. Mówimy, że relacja R jest:

-zwrotna, jeżeli: $\underset{x \in A}{\forall}(xRx)$,

-symetryczna, jeżeli: $\underset{x,y \in A}{\forall}(xRy \to yRx)$,

-przechodnia, jeżeli: $\underset{x,y,z \in A}{\forall}(xRy \wedge yRz \to xRz)$,

-słabo antysymetryczna, jeżeli: $\underset{x,y \in A}{\forall}(xRy \wedge yRx \to x = y)$,

-przeciwzwrotna, jeżeli: $\underset{x \in A}{\forall}\neg(xRx)$,

-przeciwsymetryczna, jeżeli: $\underset{x,y \in A}{\forall}(xRy \to \neg yRx)$,

-spójna, jeżeli: $\underset{x,y \in A}{\forall}(xRy \vee yRx)$.

Przykład $R \subseteq R^2$ $xRy \leftrightarrow x \geq y$

1. zwrotność : $\underset{x \in R}{\forall} (x \geq x)$ - relacja jest zwrotna.

2. symetryczność: $\underset{x,y \in R}{\forall} (x \geq y \rightarrow y \geq x)$ - relacja nie jest symetryczna.

3. przechodniość: $\underset{x,y,z \in R}{\forall} (x \geq y \wedge y \geq z \rightarrow x \geq z)$ - relacja jest przechodnia.

4. słaba antysymetryczność: $\underset{x,y \in R}{\forall} (x \geq y \wedge y \geq x \rightarrow x = y)$ - relacja jest słabo antysymetryczna.

5. przeciwsymetryczność: $\underset{x,y \in R}{\forall} (x \geq y \rightarrow \neg(y \geq x))$ -relacja nie jest przeciwsymetryczna.

6. przeciwzwrotność: $\underset{x \in R}{\forall} \neg(x \geq x)$ -relacja nie jest przeciwzwrotna.

7. spójność: $\underset{x,y \in R}{\forall} (x \geq y \vee y \geq x)$ -relacja jest spójna.

Relacje równoważności

Def. Relację $R \subseteq A^2$ nazywamy relacją równoważności na zbiorze A, jeżeli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Def. Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze A.
Dla $x \in A$ zbiór : $[x]_R = \{y : xRy\}$ nazywamy klasą abstrakcji relacji R wyznaczoną przez element x.

Def. Rodzinę wszystkich klas abstrakcji relacji równoważności R na zbiorze A oznaczamy symbolem A/R i nazywamy zbiorem ilorazowym zbioru A wyznaczonym przez relację R.

$$A/R=\{[x]_R : x \in A\}$$

Def. Rodzinę niepustych podzbiorów zbioru A nazywamy podziałem zbioru A, jeżeli każdy element zbioru A należy do dokładnie jednego zbioru tej rodziny.

Fakt. (Zasada abstrakcji) Zbiór ilorazowy zbioru A wyznaczony przez relację równoważności R jest podziałem zbioru A.

Przykład

$R \subseteq R^2 \qquad xRy \leftrightarrow |x| = |y|$

1. zwrotność: $\forall_{x \in R} (|x| = |x|)$ -relacja jest zwrotna.

2. symetryczność: $\forall_{x,y \in R} (|x| = |y| \rightarrow |y| = |x|)$-relacja jest symetryczna.

3. przechodniość: $\forall_{x,y,z \in R} (|x| = |y| \wedge |y| = |z| \rightarrow |x| = |z|)$-relacja jest przechodnia.

Jest to relacja równoważności.

Klasy abstrakcji:

Dla x=0: $[0]_R = \{0\}$

Dla $x \neq 0$: $[x]_R = \{x, -x\}$