Wykład 5,6

LOGIKA PIERWSZEGO RZĘDU (LPR) – SYNTAKTYKA.

DEF. Język pierwszego rzędu.

Symbole

a) logiczne
- zmienne przedmiotowe: $X, Y, Z, \ldots, X_1, Y_1, \ldots$
  VAR – zbiór wszystkich zmiennych przedmiotowych
- stałe logiczne: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$
- symbole pomocnicze: (,)

b) pozalogiczne
- symbole relacyjne (predykaty): *P*, *Q*, *R*, ...
- symbole funkcyjne: *f*, *g*, *h*, ...
- stałe przedmiotowe: *a*, *b*, *c*, ...

Językiem pierwszego rzędu nazywamy układ

$$L=(R_1,\ldots,R_n;f_1,\ldots,f_m;\ a_1,\ldots,a_k;\ \rho)$$

gdzie ρ jest funkcją , która dla każdego symbolu relacyjnego i funkcyjnego określa jego arność, tzn. liczbę argumentów, przy czym $\rho(R_i)>0,(i=1,\ldots,n)$ oraz $\rho(f_i)>0,(i=1,\ldots,m)$.

DEF. Termy.

Termami języka *L* nazywamy wyrażenia określone przez następujące warunki:

- każda zmienna i stała przedmiotowa jest termem,
- jeżeli *f* jest symbolem funkcyjnym, $\rho(f)=n$ oraz $t_1,\ldots,t_n$ są termami, to $f(t_1,\ldots,t_n)$ jest termem.

TER_L – zbiór wszystkich termów języka L.

Przykłady termów:

x, a, f(x, y), g(f(a),b,c)

DEF. Formuły atomowe.

Formułami atomowymi (*atomami*) języka L nazywamy wyrażenia postaci $R(t_1,...,t_n)$, gdzie R jest symbolem relacyjnym, $\rho(R) = n$, a $t_1,...,t_n$ są termami.

Przykłady formuł atomowych:

R(x,y), P(f(a), b, g(c)), Q(f(x), y)

DEF. Formuły

Formułami języka L nazywamy wyrażenia określone przez następujące warunki:

- każda formuła atomowa jest formułą,
- jeżeli A i B są formułami, to wyrażenia $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ są formułami,
- jeżeli A jest formułą i x jest zmienną przedmiotową, to wyrażenia $(\forall x\, A)$, $(\exists x\, A)$ są formułami.

FOR_L – zbiór wszystkich formuł języka L.

Reguły opuszczania nawiasów w formułach:
1) opuszczamy zewnętrzne nawiasy,
2) uwzględniamy siłę wiązania spójników logicznych i kwantyfikatorów w kolejności od najsilniej wiążących:

a) $\neg$, $\forall$, $\exists$
b) $\wedge$, $\vee$
c) $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Przykłady formuł:

$$\underset{x}{\forall}(A \wedge B) \leftrightarrow \underset{x}{\forall} A \wedge \underset{x}{\forall} B$$

$$\neg \underset{x}{\forall} A \leftrightarrow \underset{x}{\exists} \neg A$$

DEF. Zdania.
Zdaniem (*formułą domkniętą*) nazywamy formułę bez zmiennych wolnych.
SEN_L – zbiór wszystkich zdań języka L.

Przykłady zdań:

P(a,b)→R(a,c)

$$\underset{x}{\forall} P(x) \rightarrow \underset{y}{\exists} P(y)$$

DEF. Termy bazowe.
Termem bazowym nazywamy term nie zawierający zmiennych.
TB_L – zbiór wszystkich termów bazowych języka L.

DEF. Atomy bazowe.
Atomem bazowym nazywamy formułę atomową nie zawierającą zmiennych.
AB_L – zbiór wszystkich atomów bazowych języka L.

LOGIKA PIERWSZEGO RZĘDU – SEMANTYKA.

Niech $L=(R_1,...,R_n;f_1,...,f_m;\ a_1, ..., a_k;\ \rho)$

będzie językiem pierwszego rzędu.

DEF. Interpretacja języka.
Interpretacją języka L nazywamy układ

$$M=\left(|M|; R_1^M,...,R_n^M; f_1^M,...,f_m^M; a_1^M,...,a_k^M\right)$$

gdzie

$|M|$ – niepusty zbiór zwany dziedziną lub uniwersum interpretacji,

R_i^M – n-argumentowa relacja na zbiorze $|M|$, $n=\rho(R_i)$, tzn $R_i^M \subset |M|^n = \{(u_1,...,u_n) : u_1,...,u_n \in |M|\}$,

f_i^M – n-argumentowe działanie na zbiorze $|M|$, $n=\rho(f_i)$, tzn. $f_i^M : |M|^n \to |M|$,

a_i^M – element zbioru $|M|$.

Dla każdego termu bazowego języka L, $t \in TB_L$, tzn. termu nie zawierającego zmiennych, określamy $t^M \in |M|$ następująco:

a) a_i^M jest dane przez interpretację M,
b) $(f_i(t_1,...,t_n))^M = f_i^M(t_1^M,...,t_n^M)$.

DEF. Tautologia LPR.
Tautologią (prawem) LPR nazywamy formułę, która jest prawdziwa we wszystkich interpretacjach danego języka.

WAŻNIEJSZE PRAWA RACHUNKU KWANTYFIKATORÓW

Prawa podstawiania

$$\underset{x}{\forall} A \rightarrow A[x/t]$$

$$A[x/t] \rightarrow \underset{x}{\exists} A$$

Założenie: nie ma kolizji zmiennych przy podstawianiu

Prawa przestawiania kwantyfikatorów

$$\underset{x}{\forall}\underset{y}{\forall} A \leftrightarrow \underset{y}{\forall}\underset{x}{\forall} A$$

$$\underset{x}{\exists}\underset{y}{\exists} A \leftrightarrow \underset{y}{\exists}\underset{x}{\exists} A$$

$$\underset{x}{\exists}\underset{y}{\forall} A \rightarrow \underset{y}{\forall}\underset{x}{\exists} A$$

Prawa rozdzielności kwantyfikatorów

$$\underset{x}{\forall}(A \wedge B) \leftrightarrow \underset{x}{\forall} A \wedge \underset{x}{\forall} B$$

$$\underset{x}{\exists}(A \vee B) \leftrightarrow \underset{x}{\exists} A \vee \underset{x}{\exists} B$$

$$\underset{x}{\forall} A \vee \underset{x}{\forall} B \rightarrow \underset{x}{\forall}(A \vee B)$$

$$\underset{x}{\exists}(A \wedge B) \rightarrow \underset{x}{\exists} A \wedge \underset{x}{\exists} B$$

Prawa wyłączania kwantyfikatorów przed nawias

$$\underset{x}{\forall}(A \wedge B) \leftrightarrow \underset{x}{\forall} A \wedge B$$

$$\forall_x (A \vee B) \leftrightarrow \forall_x A \vee B$$

$$\exists_x (A \wedge B) \leftrightarrow \exists_x A \wedge B$$

$$\exists_x (A \vee B) \leftrightarrow \exists_x A \vee B$$

Założenie: x nie jest wolne w B

Prawa zamiany zmiennych związanych

$$\forall_x A \leftrightarrow \forall_y A[x / y]$$

$$\exists_x A \leftrightarrow \exists_y A[x / y]$$

Założenie: y nie występuje w A

Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów

$$\neg \forall_x A \leftrightarrow \exists_x \neg A$$

$$\neg \exists_x A \leftrightarrow \forall_x \neg A$$

Prawa ekstensjonalności

$$\forall_x (A \leftrightarrow B) \rightarrow (\forall_x A \leftrightarrow \forall_x B)$$

$$\forall_x (A \leftrightarrow B) \rightarrow (\exists_x A \leftrightarrow \exists_x B)$$