RELACJE PORZĄDKUJĄCE

Relacja porządkująca (częściowo-porządkująca)

Relację $R \subset X \times X$ nazywamy *porządkującą* (częściowo porządkującą) zbiór X jeżeli jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna, czyli jeżeli spełnia następujące warunki:

a) $\underset{x \in X}{\forall} xRx$

b) $\underset{x,y,z \in X}{\forall} (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$

c) $\underset{x,y \in X}{\forall} (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$

Relacja liniowo-porządkująca

Relację dwuczłonową R w X porządkującą zbiór X nazywamy *liniowo-porządkującą*, jeżeli spełnia warunek spójności:

$$\underset{x,y \in X}{\forall} \left(xRy \vee yRx\right)$$

1. Jeżeli relacja $R \subset X \times X$ jest relacją porządkującą zbiór X, to mówimy, że R porządkuje zbiór X i parę uporządkowaną (X, R) nazywamy *zbiorem uporządkowanym*.

2.Mając dany zbiór uporządkowany $(X, \leq)$ będziemy mówić, że *x poprzedza y* (gdzie $x \in X$ i $y \in X$) wtedy i tylko wtedy, gdy $x \leq y$ i $x \neq y$.

3.Niech $(X, \leq)$ będzie zbiorem uporządkowanym. Element $x_0 \in X$ nazywamy *maksymalnym*, gdy

$$\neg \underset{x \in X}{\exists} \left(x_0 \prec x\right) \Leftrightarrow \neg \underset{x \in X}{\exists} \left(x_0 \leq x \wedge x_0 \neq x\right)$$

4.Element $x_0 \in X$ zbioru uporządkowanego $(X, \leq)$ nazywamy *największym*, gdy

$$\underset{x \in X}{\forall} x \leq x_0$$

W zbiorze uporządkowanym $(X, \leq)$ istnieje co najwyżej jeden element największy. Element największy jest maksymalny.

5.Element $x_0 \in X$ zbioru uporządkowanego $(X, \leq)$ nazywamy *minimalnym*, gdy

$$\neg \underset{x \in X}{\exists} (x \prec x_0) \Leftrightarrow \neg \underset{x \in X}{\exists} (x \leq x_0 \wedge x_0 \neq x)$$

6.Element $x_0 \in X$ zbioru uporządkowanego $(X, \leq)$ nazywamy *najmniejszym*, jeśli

$$\underset{x \in X}{\forall} x_0 \leq x$$

W zbiorze uporządkowanym $(X, \leq)$ może istnieć co najwyżej jeden element najmniejszy. Element najmniejszy jest minimalny.

PODZBIORY ZBIORÓW UPORZĄDKOWANYCH

1.Niech $(X, \leq)$ będzie dowolnym zbiorem uporządkowanym i niech A będzie podzbiorem zbioru X. Niech $\leq| A$ będzie relacją dwuczłonową w A zdefiniowaną następująco:

$$\underset{x, y \in A}{\forall} x \leq| Ay \Leftrightarrow x \leq y$$

Relację $\leq| A$ nazywamy *relacją $\leq$ zredukowaną do A.*

2.Jeżeli $(X, \leq)$ jest zbiorem uporządkowanym i $A \subset X$, to $(A, \leq| A)$ jest również zbiorem uporządkowanym.

3.Podzbiór $A \subset X$ zbioru uporządkowanego $(X, \leq)$ nazywamy *łańcuchem*, jeżeli

$$\underset{x, y \in A}{\forall} x \leq y \vee y \leq x$$

4. Niech $A \subset X$ będzie podzbiorem zbioru uporządkowanego $(X, \leq)$

a)Element $x_0 \in X$ nazywamy *ograniczeniem górnym zbioru A*, jeżeli

$$\forall_{x \in A} \, x \leq x_0$$

b)Element $x_0 \in X$ nazywamy *ograniczeniem dolnym zbioru A*, jeżeli

$$\forall_{x \in A} \, x_0 \leq x$$

5.Lemat Kuratowskiego - Zorna

Niech $(X, \leq)$ będzie zbiorem uporządkowanym. Jeżeli w zbiorze X dla każdego łańcucha $A \subset X$ istnieje ograniczenie górne, to w X istnieje element maksymalny.