RELACJE

DEF. *Relacją w produkcie* $A_1 \times \ldots \times A_n$ (*relacją n-argumentową*) nazywamy dowolny podzbiór
$R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$.

DEF. Relację $R \subseteq A \times B$ nazywamy relacją między elementami zbioru A, a elementami zbioru B.

DEF. Relację $R \subseteq A^2 = A \times A$ nazywamy relacją w (na) zbiorze A.

DEF. Dla dowolnej 2-argumentowej R określamy zbiory:

1. *Dziedzina relacji*: $$D(R) = \left\{ x \in A : \underset{y \in B}{\exists} (x, y) \in R \right\}$$

2. *Przeciwdziedzina relacji*: $$D^*(R) = \left\{ y \in B : \underset{x \in B}{\exists} (x, y) \in R \right\}$$

4. *Pole relacji:* $$P(R) = D(R) \cup D^*(R)$$

5. *Relacja prawostronnie jednoznaczna* (jednoznaczna, inaczej: jest *funkcją*), jeżeli

$$\underset{x, y, z \in \Re}{\forall} \; xRy \wedge xRz \Rightarrow y=z$$

Jeżeli *R* jest funkcją, to $D(R)$ nazywamy zbiorem jej *argumentów*, zaś $D^*(R)$ – zbiorem jej *wartości*. Jeżeli argumentowi *x* funkcja *R* przyporządkowuje wartość *y*, to mówimy, że *y* jest wartością funkcji *R* dla argumentu *x*, i zapisujemy to w postaci : $y = R(x)$ (zamiast *R* zwykle używamy oznaczenia *f*).

6. *Relacja R jest lewostronnie jednoznaczna* (odwrotnie jednoznaczna), jeżeli:

$$\underset{x, y, z \in \Re}{\forall} \; xRy \wedge zRy \Rightarrow x=z$$

7. Relacja, która jest lewostronnie i prawostronnie jednoznaczna jest *funkcją wzajemnie jednoznaczną*

ALGEBRA RELACJI

Niech $R, S \subseteq U$.
Na relacjach określamy następujące działania:

$$\left.\begin{array}{ll} Suma: & R \cup S \\ Iloczyn: & R \cap S \\ Dopełopełne: & R' \end{array}\right\} \text{ tak jak dla zbiorów}$$

Relacja *odwrotna* do relacji *R*:

$$R^{-1} = \{\langle y, x \rangle : \langle x, y \rangle \in R\}$$

Mamy: $DR^{-1} = D^{*}R$ oraz $D^{*}R^{-1} = DR$

Superpozycja (złożenie) relacji *R* i *S*:

$$S \circ R = \{\langle x, y \rangle : \exists z(\langle x, z \rangle \in R \wedge \langle z, y \rangle \in S)\}$$

PRAWA algebry relacji:

$$\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$$

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$$

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$$

$$(R')^{-1} = \left(R^{-1}\right)'$$

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

$$(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$$

$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$$

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$$

TYPY RELACJI W ZBIORZE

Niech $R \subset A \times A$.
Notacja:
Piszemy xRy zamiast $\langle x, y\rangle \in R$.
Piszemy $R(x_1,\dots,x_n)$ zamiast $\langle x_1,\dots,x_n\rangle \in R$

DEF. *Relacja identyczności* w zbiorze A:

$$I_A = \{\langle x, x\rangle : x \in A\}$$

$$\forall_{x,y\in A} (x I_A y \leftrightarrow x = y)$$

Nazwa typu	Definicja	Twierdzenie ($\Leftrightarrow$)
Zwrotna	$\forall_{x\in A} xRx$	$I_A \subseteq R$
Symetryczna	$\forall_{x,y\in A} (xRy \Rightarrow yRx)$	$R^{-1} \subseteq R \quad \Leftrightarrow \quad R^{-1} = R$
Przechodnia	$\forall_{x,y,z\in A} ((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)$	$R \circ R \subseteq R$
Przeciwzwrotna	$\forall_{x\in A} \neg(xRx)$	$R \cap I_A = \varnothing$
Przeciwsymetryczna	$\forall_{x,y\in A} (xRy \Rightarrow \neg(yRx))$	$R \cap R^{-1} = \varnothing$
Antysymetryczna	$\forall_{x,y\in A} ((xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y)$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$
Spójna	$\forall_{x,y\in A} (xRy \vee yRx)$	$R \cup R^{-1} = A^2$
Słabospójna	$\forall_{x,y\in A} (xRy \vee x = y \vee yRx)$	$R \cup I_A \cup R^{-1} = A^2$

FUNKCJE

DEF. *Funkcją* nazywamy dowolny podzbiór $f \subseteq A \times B$, taki że dla dowolnych $x \in A$ i $y_1, y_2 \in B$:

$$(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_2 .$$

Jeżeli $(x, y) \in f$, to : x – argument funkcji f, y – wartość funkcji f.
Zamiast $(x, y) \in f$ piszemy $y = f(x)$.

Dziedzina funkcji f (zbiór argumentów):

$$D_f = \{x \in A : \exists y \in B\ (x, y) \in f\} = \{x \in A : \exists y \in B\ y = f(x)\}$$

Przeciwdziedzina funkcji f (zbiór wartości):

$$W_f = \{y \in B : \exists x \in A\ (x, y) \in f\} = \{y \in B : \exists x \in A\ y = f(x)\}$$

DEF. Jeżeli $D_f = X$ i $W_f \subseteq Y$, to mówimy, że f jest funkcją określoną na zbiorze X i o wartościach w zbiorze Y. Piszemy $f : X \to Y$. Mówimy też, że funkcja f przekształca zbiór X w zbiór Y.

Rodzaje funkcji:

1. $f : X \to Y$ jest *„na" (surjekcja)*, jeżeli $W_f = Y$.

Piszemy: $f : X \xrightarrow{na} Y$

Fakt: $f : D_f \xrightarrow{na} W_f$

2. $f : X \to Y$ jest *różnowartościowa (injekcja),* jeżeli

$$\forall x_1, x_2 \in X \left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x_1, x_2 \in X \left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\right)$$

Piszemy: $f : X \xrightarrow{1-1} Y$

3. $f : X \to Y$ jest *wzajemnie jednoznaczna (bijekcja)*, jeżeli $f : X \xrightarrow{1-1,\ na} Y$.

Fakt: Dla funkcji różnowartościowej $f : D_f \xrightarrow{1-1,\ na} W_f$.

Złożenie funkcji

DEF. *Złożeniem (superpozycją)* funkcji f i g nazywamy funkcję $g \circ f$ zdefiniowaną następująco:

$$g \circ f = \{(x,z) \in D_f \times W_f : \exists y((x,y) \in f \wedge (y,z) \in g)\}$$

Fakt:

1. $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$
2. $(g \circ f)(x) = z \Leftrightarrow \exists y \in D_g (y = f(x) \wedge g(y) = z)$
3. $\forall x \in D_{g \circ f} \; ((g \circ f)(x) = g(f(x)))$

Własności:

1. Jeżeli f i g są funkcjami, to $g \circ f$ jest funkcją.

2. $D_{g \circ f} \subseteq D_f$ i $D^*_{g \circ f} \subseteq D^*_g$

3. Jeżeli $f : A \to B$ i $g : B \to C$, to $g \circ f : A \to C$.

4. Jeżeli $f : A \xrightarrow{1-1} B$ i $g : B \xrightarrow{1-1} C$, to $g \circ f : A \xrightarrow{1-1} C$.
   Jeżeli funkcje f i g są różnowartościowe, to $g \circ f$ jest różnowartościowa.

5. Jeżeli $f : A \xrightarrow{na} B$ i $g : B \xrightarrow{na} C$, to $g \circ f : A \xrightarrow{na} C$.

6. Jeżeli $f : A \xrightarrow{1-1,\, na} B$ i $g : B \xrightarrow{1-1,\, na} C$, to $g \circ f : A \xrightarrow{1-1,\, na} C$.

7. Jeżeli $f : A \xrightarrow{1-1,\, na} B$,to $f^{-1} : B \xrightarrow{1-1,\, na} A$.

Funkcja odwrotna

DEF. Jeżeli f jest funkcja różnowartościową, to zbiór

$$\{(y,x):(x,y)\in f\}$$

jest też funkcją (różnowartościową). Funkcję tę nazywamy funkcją *odwrotną* funkcji *f* i oznaczamy f^{-1}.

Fakt:

1. $D_{f^{-1}} = W_f \qquad W_{f^{-1}} = D_f$

2. Dla dowolnych $x \in D_f$ i $y \in W_f$

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

czyli

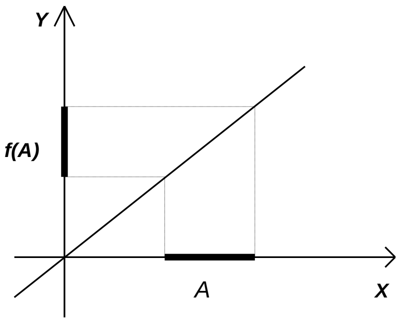
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{i} \quad f(f^{-1}(x)) = x$$

3. Funkcje wzajemnie odwrotne $f,\ f^{-1} \subseteq \Re \times \Re$ są symetryczne względem prostej *y* = *x*.

OBRAZY WYZNACZONE PRZEZ FUNKCJĘ

$f : X \to Y \qquad A \subset X$

$f[A] = \{y \in Y : \exists_{x \in X} (x \in A \wedge y = f(x))\}$



Własności obrazu wyznaczonego przez funkcję:

1° $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$

2° $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$

$f[A \cap B] = f[A] \cap f[B] \iff f$ - różnowartościowa

3° $f[A - B] \subset f[A] - f[B]$

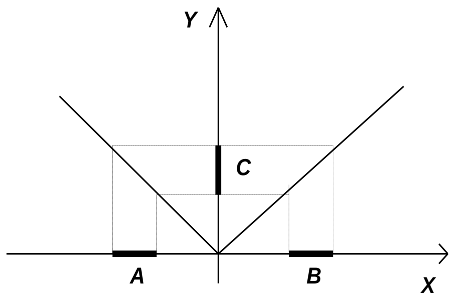
$f[A - B] = f[A] - f[B] \iff f$ - różnowartościowa

4° $A \subset B \Rightarrow f[A] \subset f[B]$

PRZECIWOBRAZY WYZNACZONE PRZEZ FUNKCJĘ

$f: X \to Y \qquad C \subset Y$

$f^{-1}[C] = \{x \in X : f(x) \in C\}$



$f^{-1}[C] = A \cup B$

Własności przeciwobrazu:

1° $f^{-1}[C \cup D] = f^{-1}[C] \cup f^{-1}[D]$

2° $f^{-1}[C \cap D] = f^{-1}[C] \cap f^{-1}[D]$

3° $f^{-1}[C - D] = f^{-1}[C] - f^{-1}[D]$

4° $C \subset D \Rightarrow f^{-1}[C] \subset f^{-1}[D]$

5° $\forall_{C \subset f[X]} f\left[f^{-1}[C]\right] = C$

6° $\forall_{A \subset X} A \subset f\left[f^{-1}[A]\right]$

$\forall_{A \subset X} A = f\left[f^{-1}[A]\right] \Leftrightarrow f$ - różnowartościowa

RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCI

Na wielkie znaczenie tych relacji w różnych dziedzinach matematyki pierwszy zwrócił uwagę G.Frege (18884 r.)

• Relację $R \subset X \times X$ nazywamy *relacją równoważności* w zbiorze X, jeżeli R jest relacją zwrotną, symetryczną i przechodnią, tzn. jeżeli spełnione są następujące warunki:

1° $\forall_{x \in X}\, xRx$

2° $\forall_{x,y \in X} (xRy \Rightarrow yRx)$

3° $\forall_{x,y,z \in X} ((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)$

• Niech R będzie dowolną relacją równoważności w $X \neq \varnothing$ i

$$[x]_{\mathrm{R}} = \{y \in X : \mathrm{R}(x,y)\} \quad \text{czyli} \quad y \in [x]_{\mathrm{R}} \Leftrightarrow \mathrm{R}(x,y).$$

Zbiory x_{R} dla $x \in X$ nazywamy *klasami równoważności* w X lub *klasami abstrakcji* relacji R w X.

• Niech R będzie dowolną relacją równoważności w zbiorze $X \neq \varnothing$, to

1° $x \in x_{\mathrm{R}}$

2° $[x]_{\mathrm{R}} = [y]_{\mathrm{R}} \Leftrightarrow \mathrm{R}(x,y)$

3° $x_{\mathrm{R}} \neq y_{\mathrm{R}} \Rightarrow x_{\mathrm{R}} \cap y_{\mathrm{R}} = \varnothing$

• *Zasada abstrakcji* (zasada identyfikacji elementów równoważnych)

Dowolna relacja równoważności R w zbiorze $X \neq \varnothing$ ustala podział tego zbioru na rozłączne i niepuste podzbiory, mianowicie na klasy równoważności tej relacji, w taki sposób, że dwa elementy x, y zbioru X należą do tej samej klasy równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy R(x,y).

Przy przejściu od elementów x, y zbioru X do klas równoważności $[x]_R, [y]_R$ relacja równoważności R zostaje zamieniona na relację równości.

Z metody identyfikacji elementów równoważnych korzysta się w matematyce bardzo często, szczególnie wtedy, gdy zachodzi potrzeba wprowadzenia nowych tworów matematycznych.

RELACJE PORZĄDKUJĄCE

1. Relacja porządkująca (częściowo-porządkująca)

Relację $R \subset X \times X$ nazywamy *porządkującą* (częściowo porządkującą) zbiór X jeżeli jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna, czyli jeżeli spełnia następujące warunki:

a) $\forall_{x \in X}\, xRx$

b) $\forall_{x,y,z \in X} (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$

c) $\forall_{x,y \in X} (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$

2. Relacja quasi-porządkująca

Relację $R \subset X \times X$ nazywamy *quasi-porządkującą* zbiór X, jeżeli jest zwrotna i przechodnia, czyli

a) $\forall_{x \in X}\, xRx$

b) $\forall_{x,y,z \in X} (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$

3. Relacja liniowo-porządkująca

Relację dwuczłonową R w X porządkującą zbiór X nazywamy *liniowo-porządkującą*, jeżeli spełnia warunek spójności:

$$\forall_{x,y \in X} (xRy \vee yRx)$$