Wykład 8,9

Teoria mnogości

Oznaczenia: X,Y,Z,A,B,C...-zbiory, x,y,z,a,b,c...-elementy zbiorów,

$x \in X$ -element x należy do zbioru X

Aksjomaty Zermelo (aksjomaty istnienia zbiorów)

1.Jeżeli dwa zbiory mają takie same elementy, to są sobie równe.

$\forall_z ((z \in X \leftrightarrow z \in Y) \to X = Y)$

2.Aksjomat zbioru pustego

Istnieje zbiór, który nie ma żadnych elementów.

$\exists_X \forall_y (y \notin X)$

Tw. Istnieje dokładnie jeden zbiór X, taki że $\forall_y (y \notin X)$.

Taki zbiór nazywamy zbiorem pustym i oznaczamy symbolem Ø.

1. Aksjomat pary

Dla wszelkich przedmiotów a,b istnieje zbiór, którego jedynymi elementami są a i b.

$\forall_a \forall_b \exists_X \forall_y (y \in X \leftrightarrow y = a \vee y = b)$

{a,b} (zbiór składający się z elementów a i b) nazywamy parą nieuporządkowaną elementów a i b.

Tw. {a,b}={b,a}.

3.Aksjomat sumy

Dla wszelkich zbiorów A, B istnieje zbiór, którego elementami są wszystkie elementy zbioru A i wszystkie elementy zbioru B.

$\forall_A \forall_B \exists_X \forall_y (y \in X \leftrightarrow y \in A \vee y \in B)$

Def. (inkluzja)

Zbiór A zawiera się w zbiorze B (oznaczamy $A \subset B$) wtw gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B.

$A \subset B \leftrightarrow \underset{x}{\forall} (x \in A \rightarrow x \in B)$

4.Aksjomat zbioru potęgowego

Dla każdego zbioru A istnieje zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A.

$\forall_A \exists_X \forall_Y (Y \in X \leftrightarrow Y \subset A)$

Zbiór potęgowy zbioru A oznaczamy przez P(A).

Przykład.

A={a,b,c}

P(A)={Ø, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}}

5.Aksjomat wyróżniania

W(X)-dowolny warunek
Dla każdego zbioru A istnieje zbiór wszystkich elementów zbioru A, które spełniają warunek W(X).
$\forall_A \exists_X \forall_y \left(y \in X \leftrightarrow y \in A \wedge W(X) \right)$

Tw. Nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów.

Algebra zbiorów

Działania na zbiorach:
1. Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.

2. Iloczynem zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

3.Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Dowody przykładowych praw algebry zbiorów:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Należy pokazać: $\forall_x (x \in A \cap (B \cup C) \leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C))$

$x \in A \cap (B \cup C)$ wtw gdy $x \in A \wedge x \in B \cup C$ wtw gdy $x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$ wtw gdy $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$ wtw gdy $x \in A \cap B \vee x \in A \cap C$ wtw gdy $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

Należy pokazać: $\forall_x (x \in (A \cup B) \setminus C \leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C))$

$x \in (A \cup B) \setminus C$ wtw gdy $x \in (A \cup B) \wedge x \notin C$ wtw gdy $(x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C$ wtw gdy $(x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C)$ wtw gdy $x \in A \setminus C \vee x \in B \setminus C$ wtw gdy $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

3. $(A \subset B) \wedge (C \subset D) \to (A \cap C \subset B \cap D)$

Niech $(A \subset B) \wedge (C \subset D)$ tzn. $\forall_x (x \in A \to x \in B) \wedge \forall_x (x \in C \to x \in D)$

Udowodnimy $A \cap C \subset B \cap D$ tzn. $\forall_x (x \in A \cap C \to x \in B \cap D)$

Niech $x \in A \cap C$, a to zachodzi wtw gdy $x \in A \wedge x \in C$.

Z założenia wtedy $x \in B \wedge x \in D$. Zatem $x \in B \cap D$.