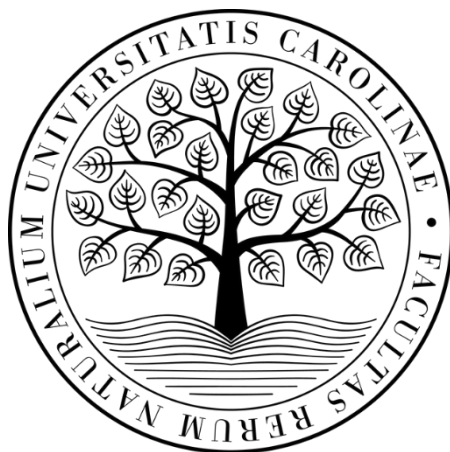


# Univerzita Karlova

Přírodovědecká fakulta



## Úvod do programování

Vizualizace Kochovy vločky

Jan Prýmek

1. ročník N-GKDPZ

Příbram 2024

## Zadání

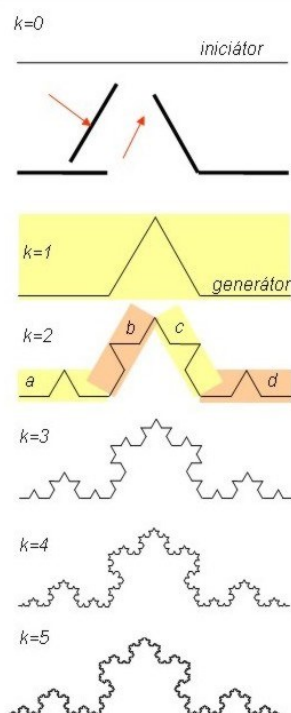
S využitím želví grafiky vykreslete Kochovu vložku. Vstupní parametry představují délka strany vložky a její stupeň. Pro výpočet použijte rekurzivní metodu. Příklad bude řešen s využitím objektově orientovaného programování.

## Kochova vložka

Slabinou euklidovské geometrie je, jak jednoduchým způsobem popsat složité strukturované útvary. K popisu například Kochovy vložky by bylo nutné stanovit složitou a nepřehlednou rovnici. Takovýto objekt však může být jednoduše popsán pomocí fraktální geometrie neboli matematického nástroje, který slouží k popisu složité strukturovaných objektů, jejichž charakter se při určitém zvětšení nebo zmenšení nemění. Vhodným příkladem je srovnání dvou map různých měřítek, na kterých pobřežní linie vypadá stejně, jelikož se nemění její charakter.

Slovo „fraktál“ se tedy používá pro všeobecné označení objektů, jejichž tvar je nezávislý na velikosti měřítka, pod kterým objekt pozorujeme (měřítková neměnnost). Poprvé toto slovo použil Benoit Mandelbrot, když se našel určit délku pobřeží Velké Británie v roce 1977. Při tom zjistil, že čím větší měřítko mapy, ze které měří délku, tím podrobnější je pobřežní linie a tím pádem je i větší délka pobřeží. Proto je Mandelbrot označován za otce fraktální geometrie navzdory tomu, že některé fraktální objekty včetně Kochovy vložky již byly v tu dobu známy.

Kochova křivka patří mezi tzv. IFS fraktály, které ke konstrukci používají cyklicky se opakující transformace. Je potřeba tzv. iniciátor a generátor, kde v případě této křivky je iniciátorem úsečka a generátorem útvar vzniklý vyjmutím prostřední třetiny a nahrazením této třetiny dvěma úsečkami délky jedné třetiny. Po transformaci je každá strana už považována za iniciátor pro další krok. Dalším důležitým údajem u fraktálních křivek je počet iterací potřebných ke vzniku dané křivky. Kochova křivka v různých stupních je zobrazena na obrázku 1.



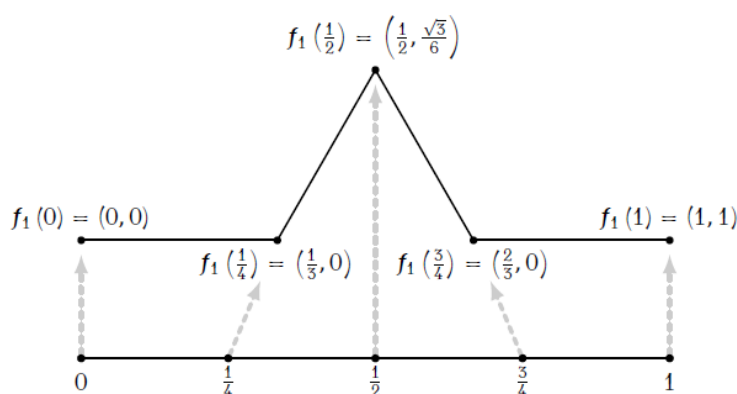
Obrázek 1 – Generování Kochovy křivky

zdroj: <https://www.ksr.tul.cz/fraktaly/geometrie.html#konstrukce>

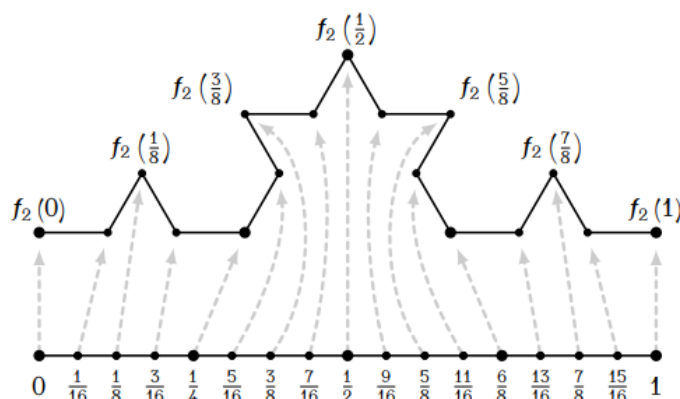
Kochova křivka je rovinný fraktál, který vznikl z úsečky nekonečným opakováním postupu, kdy prostřední třetinu každé úsečky nahradíme rovnostranným trojúhelníkem. Každý segment se tedy dá rozdělit na čtyři části směřující jiným směrem. U první strany se jedná pouze o vykreslení rovné čáry vedoucí do třetiny celkové délky segmentu vločky. Pro konstrukci druhé strany je potřeba zjistit bod vrcholu trojúhelníka, v jehož výpočtu hraje klíčovou roli následující forma Pythagorovy věty:

$$h = \sqrt{\frac{d^2}{9} - \frac{d^2}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{6}d$$

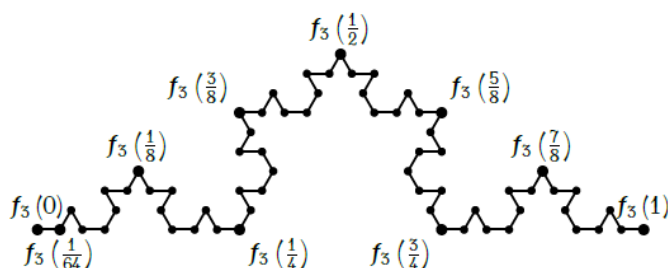
Kochova křivka je definována jako limita funkcí  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Funkce  $f_0$  je zobrazení intervalu  $[0, 1]$  na úsečku, tedy  $f_0(x) = (x, 0)$ . Funkce  $f_{n+1}$  je definována pomocí čtyř kopií funkcí  $f_n$ , každá zmenšená na třetinu a příslušně pootočená a posunutá (obrázky 2 až 4) (Bouchala 2015).



Obrázek 2 – Kochova křivka pro  $f_1$

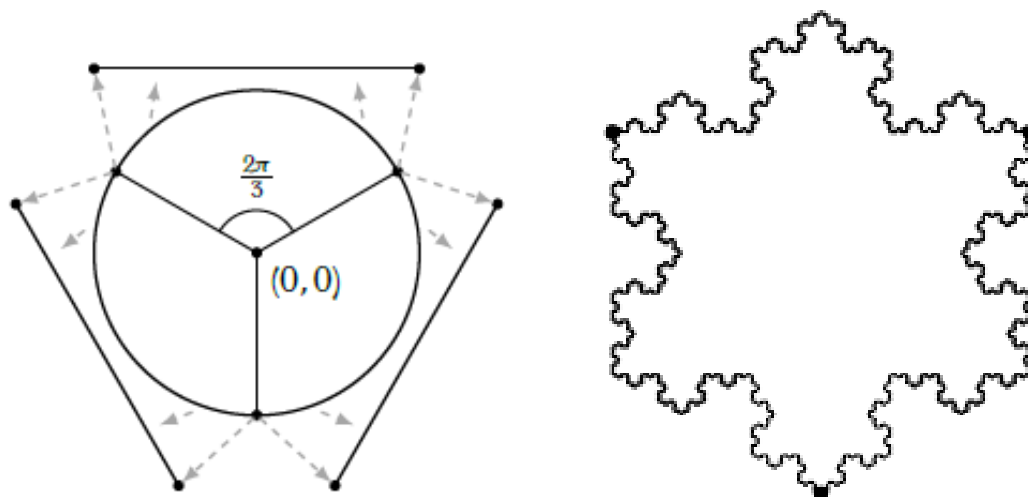


Obrázek 3 – Kochova křivka pro  $f_2$



Obrázek 4 – Kochova křivka pro  $f_3$

Kochova vločka je pak zobrazení jednotkové kružnice do roviny, které v rovině vykreslí tři kopie Kochovy křivky (obrázek 5).



Obrázek 5 – Složení dvou zobrazení – zobrazení kružnice na tři úsečky a zobrazení úseček na případně natočenou a posunutou Kochovu křivku

zdroj: Bouchala (2015)

## Algoritmus

Tento program využívá modul Turtle, který poskytuje jednoduché prostředky pro kreslení grafiky pomocí tzv. „turtle graphics“. Hvězdička *from turtle import \** znamená, že se importují všechny funkce, třídy a proměnné, které modul Turtle poskytuje. To zahrnuje různé metody pro ovládání kreslicího objektu, nastavování barev, pozic, rychlosti atd.

Byla vytvořena třída Koch, která představuje Kochovu křivku. Přijímá atributy *depth* pro hloubku (stupeň) rekurze a *length* pro délku hrany, které určují komplexnost výsledné vločky. Konstruktor této třídy inicializuje objekt s určenou hloubkou a délkou. Třída Koch obsahuje metodu *draw*, která Kochovu vločku nakreslí pomocí metody *koch\_flake*. Dále je definována metoda *koch\_curve*, což je hlavní metoda pro vytváření Kochovy křivky.

Metoda *koch\_curve* přijímá dva parametry – *depth*, která určuje složitost křivky, a *length* udávající délku úsečky, která má být nakreslena. Pokud je *depth* rovno 0, funkce jednoduše nakreslí přímou úsečku délky *length*. Jinak rekurzivně dělí úsečku na menší úsečky a odpovídajícím způsobem otočí objekt Turtle pro nakreslení Kochovy křivky.

Metoda *koch\_flake* přijímá opět parametry *depth* a *length* a kreslí Kochovu vločku tím, že třikrát zavolá funkci *koch\_curve* pro vykreslení všech tří stran vločky a po dokončení každé křivky otočí objekt Turtle o 120° doprava. Toto otočení je nutné, aby se Turtle dostal do pozice pro kreslení další strany trojúhelníka.

Metoda *speed(0)* dále nastavuje rychlost vykreslování na maximum, pomocí *goto(-length/2, length/3)* je Turtle přemístěn na výchozí pozici pro lepší vizualizaci a příkazem *done()* se okno zavře až po kliknutí uživatele. Byla vytvořena jedna instance třídy Koch s hloubkou rekurze a délkou strany zadanou uživatelem.

## Vstupní data

Vstupním parametrem od uživatele jsou pouze délka strany vložky a hloubka rekurze.

## Výstup

Výstupem algoritmu je nakreslení Kochovy vložky v grafickém okně, které se zobrazí po spuštění kódu. Tvar Kochovy vložky bude odpovídat zadaným parametrům, které určují její složitost a velikost.

## Dokumentace

Program pomocí rekurze vykreslí Kochovu vložku. Uživatel musí zadat požadovanou délku strany vložky a její stupeň. Stupeň vložky určuje, kolik iterací program provede a jak moc tedy bude vložka detailní. Stupeň vyšší než 6 je však příliš detailní a v kombinaci s kratší stranou pak není vidět rozdíl mezi jednotlivými vložkami s takto vysokým stupněm. Navíc se vložka bude vykreslovat příliš dlouho. Délka strany vložky by se měla také vybírat uvážlivěji s ohledem na velikost okna a na stupeň vložky.

## Vylepšení

Výstup by mohl být například ve formě obrázku jako PNG.

Algoritmus používá pouze základní grafické funkce modulu Turtle. Pokud by uživatel chtěl vylepšit vizuální efekty vložky (například použitím barev, tloušťky čáry apod.), bylo by třeba rozšířit algoritmus o další funkce.

## Zdroje

BAYER, T. (2023): Přednáška 7 - Princip a použití rekurze. Základní problémy řešitelné rekurzí. Odhady složitostí. Převod rekurze na iteraci.

<https://web.natur.cuni.cz/~bayertom/images/courses/Prog1/programovani6.pdf> (cit. 12. 2. 2024)

BOUCHALA, O. (2015): Konstrukce von Kochovy vložky. Bakalářská práce. Katedra matematické analýzy, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova, Praha.

KATEDRA SKLÁŘSKÝCH STROJŮ A ROBOTIKY, FAKULTA STROJNÍ, TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI (2011): Fraktální geometrie, <https://www.ksr.tul.cz/fraktaly/geometrie.html#konstrukce> (cit. 12. 2. 2024)