5.12.

$f(0) = -0.0159 \approx 0$

$f(20) = 0.7340$

이라

$x=0$ 근처에 근이 존재할 것 같지만

첨부한 그래프를 보면 오히려 $x=20$ 근처에 근이

존재함을 알 수 있다.

$\therefore$ 이 경우에는 함수값 자체는 고려하지 않는

bisection 이 더 유리함을 알 수 있다.

6.2. $f(x) = -0.9x^2 + 1.7x + 2.5$

ⓐ fixed point iteration.

$x = g(x)$ 꼴로 바꿔야함

로 근방에서의 기울기의 절대값이 1보다 작도록 변형해야함. $|g'(x)| < 1$.

$\Rightarrow 0.9x^2 = 1.7x + 2.5$

$\Rightarrow x_{i+1} = \sqrt{\dfrac{1.7x_i + 2.5}{0.9}}$ 로 두고 해를 추정한다.

$x_0 = 5$ 이므로

$x_1 = \sqrt{\dfrac{1.7 \times 5 + 2.5}{0.9}} = 3.496029\cdots$

$\varepsilon_a = \dfrac{|5 - 3.496029\cdots|}{3.496029\cdots} \times 100 = 43.02\%$

이 과정을 2번 더해 x_3 추정

(b) N-R

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$f(x) = -0.9x^2 + 1.7x + 2.5$$

$$f'(x) = -1.8x + 1.7$$

$$x_1 = 5 - \frac{-11.5}{-7.3} = 5 - 1.57534\ldots$$

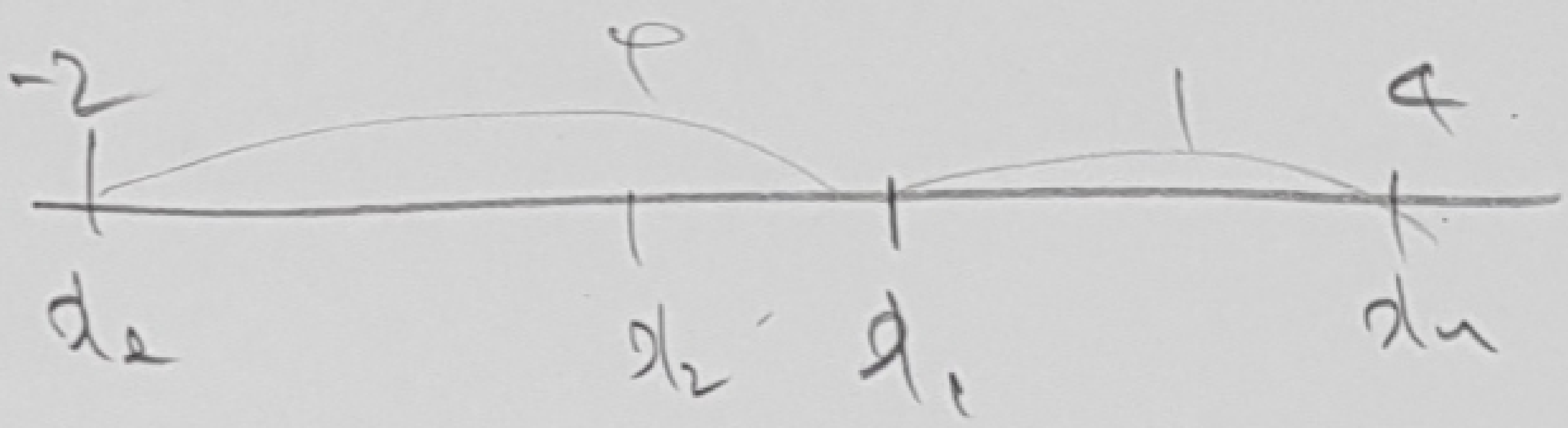
$$= \underline{3.4247}$$

$$\varepsilon_a = \frac{|3.4247 - 5|}{3.4247} \times 100 = 45.99\%$$

⋮

이 과정을 2번 더 해서 계측정

7.7 (a) Golden-section search.



* φ는 아래 식을 만족

$$\cdots = \varphi+1 : \varphi = \underbrace{\varphi : 1 = 1 : \varphi-1}_{} = \cdots$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

$$\therefore \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

사전작업) $f(x_l) = -29.6$
$f(x_u) = -12.8$

첫번째 반복?

$$x_1 = x_l + (\varphi-1)(x_u - x_l)$$

$$= -2 + (\varphi-1)\times 6 \approx 1.7082$$

$$f(x_1) \approx 5.0075$$

$$x_2 = x_u - (\varphi-1)(x_u - x_l) \approx 0.2918$$

$$f(x_2) \approx 1.0416$$

$\therefore$ max_1 (첫번째 max 추정치) $= 5.0075$

그리고 그 때의 $x_{max} = 1.7082$.

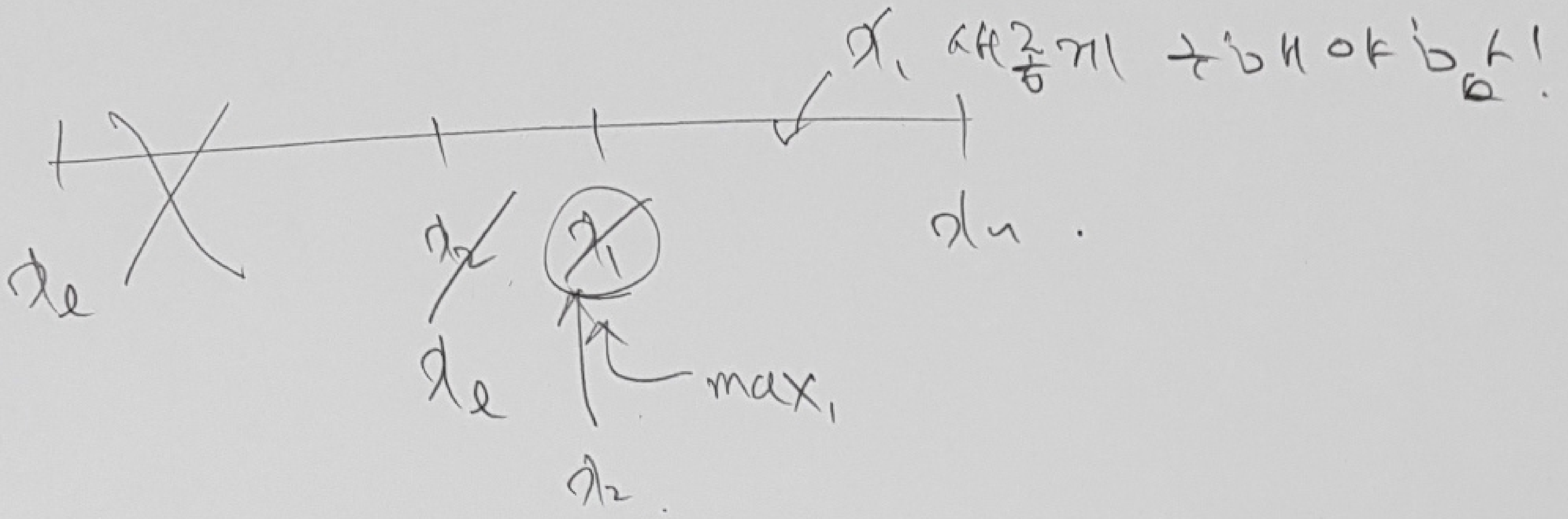
근사 상대오차의 최대치:

$$\varepsilon_a = (2-\varphi) \times \frac{(x_u - x_l)}{x_{max}} \times 100 (\%)$$

$$\approx 134.1644\%$$

이전 추정치와
이번 추정치가
일치할 경우 $\varepsilon_a = 0$이 되므로
최대치로 계산.

두번째 반복)



이전 반복에서 x_1 에서 최댓값을 가졌으므로.

$$\begin{cases} x_l \leftarrow x_2 \\ x_2 \leftarrow x_1 \quad , \boxed{f(x_2) = 5.0075} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_l + (\varphi - 1)(x_u - x_l)$$

$$\approx 0.2918 + (\varphi - 1)(4 - 0.2918)$$

$$\approx \underline{2.5836}$$

$$\boxed{f(x_1) \approx 5.6474}$$

이번에도 $x = x_1$ 에서최대

$\therefore max_2 = 5.6474$

이때의 $x = 2.5836$

근사상대오차의 최대치

$$\varepsilon_a = (2 - \varphi) \times \frac{(4 - 0.2918)}{2.5836} \times 100 \ (\%)$$

$$\approx 54.8230\%$$

세번째 반복도 유사.

7.7.(6) parabolic interpolation

★

최댓값 근방의 점 3개를 선택

⇒ 세개을 지나는 2차함수 찾기

⇒ 2차 함수의 최댓값을 추정치로!

* 강의자료의 공식을 통해 풀이도 가능!

sol) $P1 = (1.75, f(1.75)) \approx (1.75, 5.1051)$

$P2 = (2, f(2)) \approx (2, 5.6)$

$P3 = (2.5\ f(2.5)) \approx \boxed{(2.5, 5.7813)}$.

max_0(첫번째 최대값 추정치) = 5.7813

그때의 $x = 2.5$.

첫번째반복) P_1, P_2, P_3 를 지나는 2차함수

⇒ $\underline{ax^2 + bx + c = y}$ 는 P_1, P_2, P_3 대입.

$$\begin{cases} 1.75^2 \times a + 1.75 \times b + c = 5.1051 \\ 2^2 \times a + 2 \times b + c = 5.6 \\ 2.5^2 \times a + 2.5 \times b + c = 5.7813 \end{cases}$$

를 만족하는 a, b, c 찾기.

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1.75^2 & 1.75 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \\ 2.5^2 & 2.5 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5.1051 \\ 5.6 \\ 5.7813 \end{bmatrix}}_{b}.$$

$x = A \backslash b$ 를 통해 x를 구하기.

$$x = \begin{bmatrix} -2.1560 \\ 10.0646 \\ -5.9052 \end{bmatrix}.$$

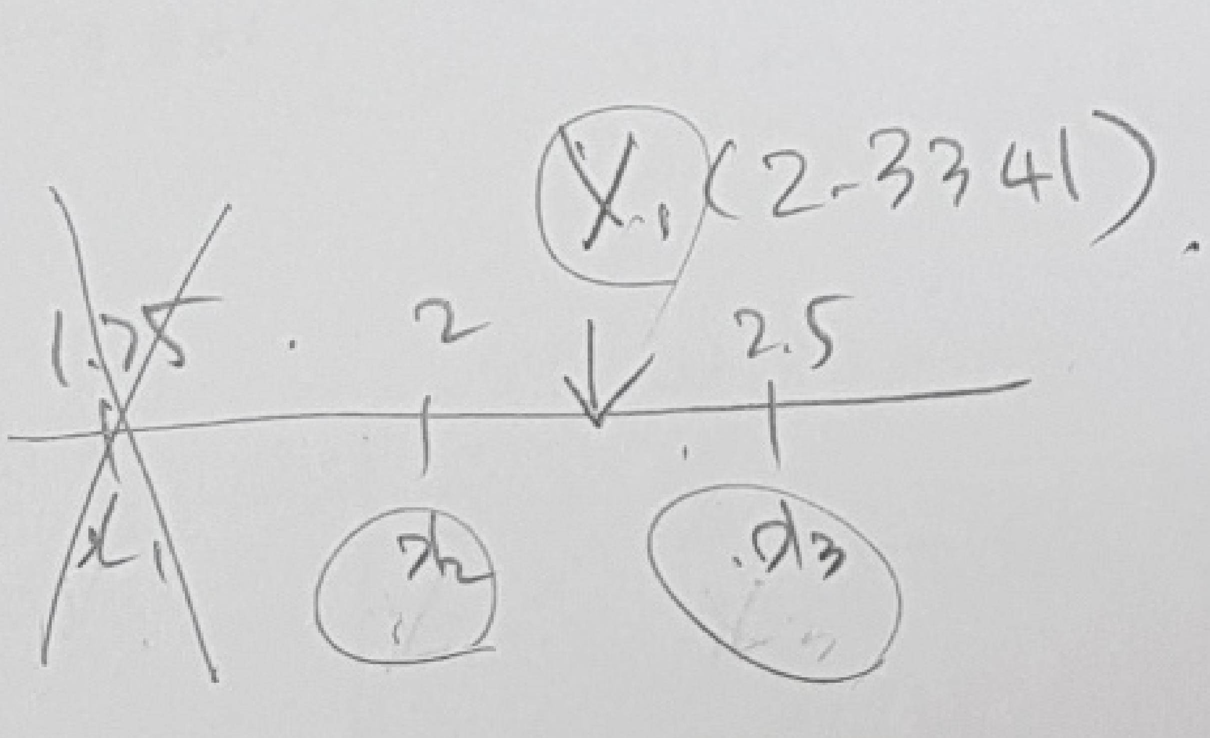
$$\therefore y = -2.1560x^2 + 10.0646x - 5.9052.$$

의 최댓값 찾기. ⇒ 미분 $=0$ 지점 찾기.

최댓값은 $X_1 = 2.3341$ 에서

$$max_1 = f(X_1) = 5.8851$$ //

근사상대오차



$$\left| \frac{2.3341 - 2.5}{2.3341} \right| \times 100 = 7.1081\ \%.$$

x_1이 버려지고. $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$, $(X_1, f(X_1))$ 세 지점을 지나는 2차 함수를 통해 위 과정을 반복한다.

9.5.

$$\begin{cases} 0.5x_1 - x_2 = -9.5 & (1) \\ 1.02x_1 - 2x_2 = -18.8 & (2) \end{cases} \Rightarrow 0.51x_1 - x_2 = -9.4.$$

(a) Word 문서 참고.

(b) 행렬로 방정식

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 1.02 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -9.5 \\ -18.8 \end{bmatrix}}_{b}.$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0.5 & -1 \\ 1.02 & -2 \end{vmatrix} = 0.02 \approx 0.$$

(c) ill-condition 이라고 볼 수 있음.

근거
(a) 에서 보았듯이 그래프로 근 찾기 어려움.
(b) 에서 $\det(A) \approx 0$ 임.

(d)

$$\begin{array}{rl} & 0.5x_1 - x_2 = -9.5 \\ - & 0.51x_1 - x_2 = -9.4 \\ \hline & -0.01x_1 = -0.1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 14.5. \end{cases}$$

(e) a_{11} 이 0.52 로 바뀐경우. 해는

$$
\begin{array}{r} 0.52x_1 - \cancel{x_1} = -9.5 \\ -\ 0.51x_1 - \cancel{x_2} = -9.4 \\ \hline 0.01x_1 \qquad = -0.1 \end{array}
\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -10 \\ x_2 = 4.3 \end{cases}
$$

-10 $+5.2$ 4.3

※ ill-condition 인 경우.

계수가 조금만 변해도 해가 크게 변하는 것을 알 수 있다.

9.7 Augmented mtx $= \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & -1 & -38 \\ -3 & -1 & 7 & -34 \\ -8 & 1 & -2 & -20 \end{array}\right]$

① Gauss elimination

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & -1 & -38 \\ -3 & -1 & 7 & -34 \\ -8 & 1 & -2 & -20 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{3}{2} \\ \\ 4 \end{array}$$

$3 \quad -9 \quad -\frac{3}{2} \quad : \quad -57$

$8 \quad -24 \quad -4 \quad : \quad -152$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & -1 & -38 \\ 0 & -10 & \frac{11}{2} & -91 \\ 0 & -23 & -6 & -172 \end{array}\right] 2 - \frac{23}{10}$$

$23 \quad -\frac{253}{20} \quad : \quad \frac{2093}{10}$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & -1 & -38 \\ 0 & -10 & \frac{11}{2} & -91 \\ 0 & 0 & -\frac{373}{20} & \frac{373}{10} \end{array}\right]$$

$$x_3 = -2$$

$$-10x_2 + \frac{11}{2}x_3 = -91$$

$$\Rightarrow x_2 = 8$$

$$2x_1 - 6x_2 - x_3 = -38$$

$$\Rightarrow x_1 = 4$$

② Partial pivoting.

$\boxed{A_{R_1} \leftrightarrow A_{R_3}}$: pivoting

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -8 & 1 & -2 & -20 \\ -3 & -1 & 7 & -34 \\ 2 & -6 & -1 & -38 \end{array}\right] \begin{array}{l} -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \end{array}$$

$3 \quad -\frac{3}{8} \quad \frac{3}{4} \; : \; \frac{5}{2}$

$-2 \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{1}{2} \quad -5$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -8 & 1 & -2 & -20 \\ 0 & -\frac{11}{8} & \frac{31}{4} & -\frac{53}{2} \\ 0 & -\frac{23}{4} & -\frac{3}{2} & -43 \end{array}\right]$$

$\boxed{A_{R_2} \leftrightarrow A_{R_3}}$: pivoting

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -8 & 1 & -2 & -20 \\ 0 & -\frac{23}{4} & -\frac{3}{2} & -43 \\ 0 & -\frac{11}{8} & \frac{31}{4} & -\frac{53}{2} \end{array}\right] -\frac{11}{46}$$

$\frac{11}{8} \quad \frac{33}{92} \; : \; \frac{473}{46}$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -8 & 1 & -2 & -20 \\ 0 & -\frac{23}{4} & -\frac{3}{2} & -43 \\ 0 & 0 & \frac{746}{92} & -\frac{746}{46} \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{x_3 = -2}$$

$-\frac{23}{4}x_2 - \frac{3}{2}x_3 = -43$

$\boxed{\Rightarrow x_2 = 8}$

$-8x_1 + x_2 - 2x_3 = -20$

$\boxed{x_1 = 4}$