

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
МАИ

Институт № 8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 804 «Теория вероятностей и компьютерное моделирование»

Курсовая работа на тему:
«Метод наименьших квадратов»

по дисциплине
Теория вероятностей и математическая статистика

Работу выполнил
студент группы М8О-305Б-20
Черных С. Д.

Работу принял
кандидат физико-математических наук,
доцент Ибрагимов Д. Н.

МОСКВА, 2022

Описание модели

Модель полезного сигнала имеет вид:

$$y(x) = \theta_0 + \theta_1 x + \dots + \theta_m x^m. \quad (1)$$

Рассматривается модель наблюдений:

$$y_k = \theta_0 + \theta_1 x_k + \dots + \theta_m x_k^m + \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2)$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ – независимые и одинаково распределённые случайные величины.

Моделирование данных

Смоделировать два набора наблюдений на основе модели (2) для следующих случаев:

1 случай	2 случай
$m = 3, \varepsilon_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$	$m = 2, \varepsilon_k \sim \mathcal{R}(-3\sigma, 3\sigma)$
$x_k = -4 + k \cdot \frac{8}{n}, k = \overline{1, n}, n = 40.$	

Параметры задания определяются номером варианта

Вариант 23

$$\theta_1 = 5, \theta_2 = 3, \theta_3 = 0.13, \sigma^2 = 2.8$$

$$\theta_0 = (-1)^N N, \text{ где } N - \text{номер варианта}$$

Задание

Для обоих случаев выполнить по очереди следующие задания.

1. Подобрать порядок многочлена \hat{m} в модели (1), используя критерий Фишера, и вычислить оценки неизвестных параметров $(\theta_0, \dots, \theta_{\hat{m}})$ методом наименьших квадратов.
2. В предположении нормальности ошибок построить доверительные интервалы уровней надёжности $\alpha_1 = 0.95$ и $\alpha_2 = 0.99$ для параметров $(\theta_0, \dots, \theta_{\hat{m}})$.
3. В предположении нормальности ошибок построить доверительные интервалы уровней надёжности $\alpha_1 = 0.95$ и $\alpha_2 = 0.99$ для полезного сигнала (1).
4. Представить графически
 - истинный полезный сигнал,
 - набор наблюдений,
 - оценку полезного сигнала, полученную в шаге 1,
 - доверительные интервалы полезного сигнала, полученные в шаге 3.
5. По остаткам регрессии построить оценку плотности распределения случайной ошибки наблюдения в виде гистограммы.
6. Вычислить оценку дисперсии σ^2 случайной ошибки.
7. По остаткам регрессии с помощью χ^2 - критерия Пирсона на уровне значимости 0.05 проверить гипотезу о том, что закон распределения ошибки наблюдения является нормальным.

Случай 1

1. Был подобран $m = 3$ и вычислены $(\theta_0, \dots, \theta_m)$ методом наименьших квадратов.

При $m = 1$	$T(Z_n) = 7.0956569863343315$
При $m = 2$	$T(Z_n) = 37.22412593998484$
При $m = 3$	$T(Z_n) = 8.938055621907973$
При $m = 4$	$T(Z_n) = 1.1331687340722725 < 2.02$

2. Доверительные интервалы уровней надёжности $\alpha_1 = 0.95$ и $\alpha_2 = 0.99$ для параметров $(\theta_0, \dots, \theta_m)$.

Для альфа = 0.95 $t_{0.975}(37) = 2.03$

Доверительный интервал для θ_0 : [-22.90794917119481 ; -22.83964529161884]

Доверительный интервал для θ_1 : [5.185397255504669 ; 5.253701135080644]

Доверительный интервал для θ_2 : [2.9379696825137422 ; 3.0062735620897163]

Доверительный интервал для θ_3 : [0.11621847273471328 ; 0.18452235231068778]

Для альфа = 0.99 $t_{0.995}(37) = 2.72$

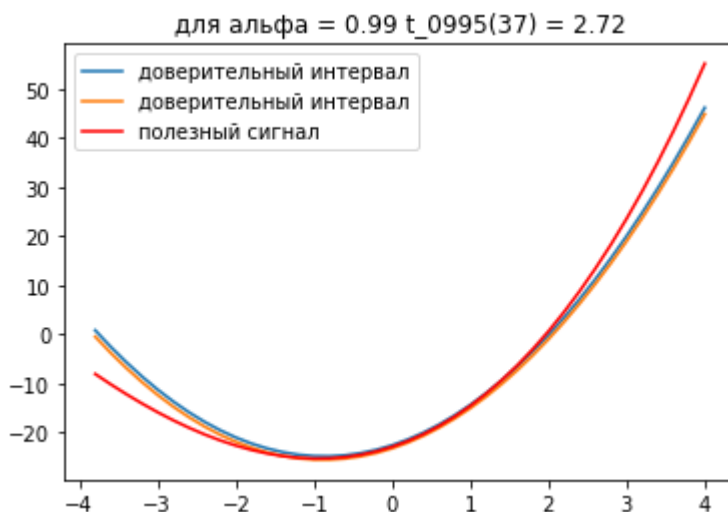
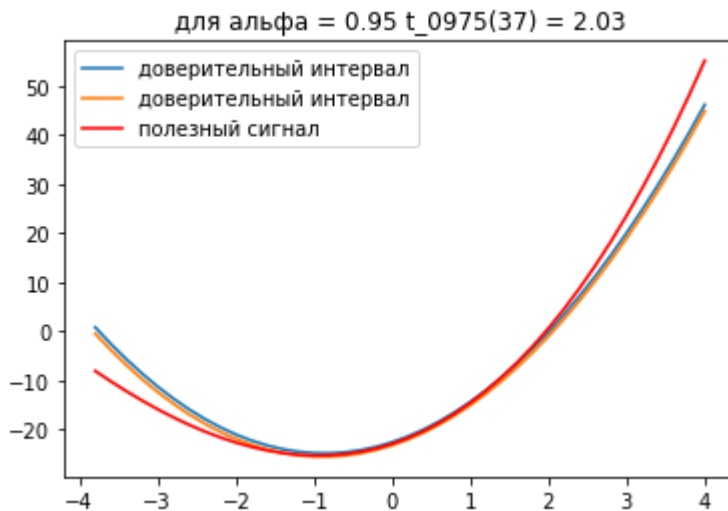
Доверительный интервал для θ_0 : [-22.919557465999596 ; -22.828036996814056]

Доверительный интервал для θ_1 : [5.173788960699885 ; 5.265309429885428]

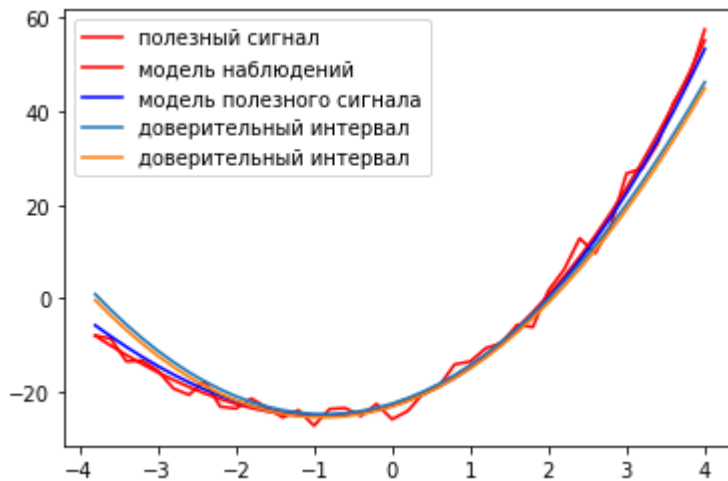
Доверительный интервал для θ_2 : [2.9263613877089583 ; 3.0178818568945003]

Доверительный интервал для θ_3 : [0.10461017792992944 ; 0.19613064711547162]

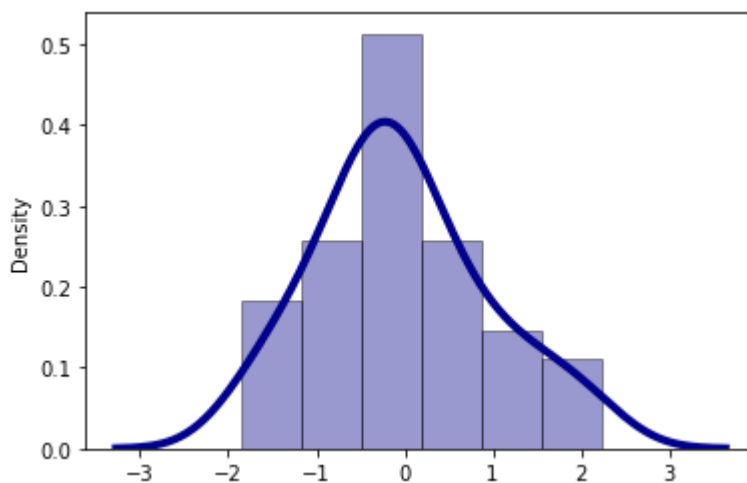
3. Построены доверительные интервалы уровней надёжности $\alpha_1 = 0.95$ и $\alpha_2 = 0.99$ для полезного сигнала (1).



4.



5.



6.

$$\sigma^2 = 0.9456156478400527$$

7. Распределение является нормальным, так как с помощью χ^2 - критерия Пирсона на уровне значимости 0.05 проверена гипотеза о том, что закон распределения ошибки наблюдения является нормальным $2.7721600129386625 < 14.067$ гипотеза верна

Случай 2

1. Был подобран $m = 2$ и вычислены $(\theta_0, \dots, \theta_m)$ методом наименьших квадратов

При $m = 1$	$T(Z_n) = 5.951280891478134$
При $m = 2$	$T(Z_n) = 31.750976253830657$
При $m = 3$	$T(Z_n) = 0.37120417516763027$

2. Для альфа = 0.95 $t_{0.975}(37) = 2.03$

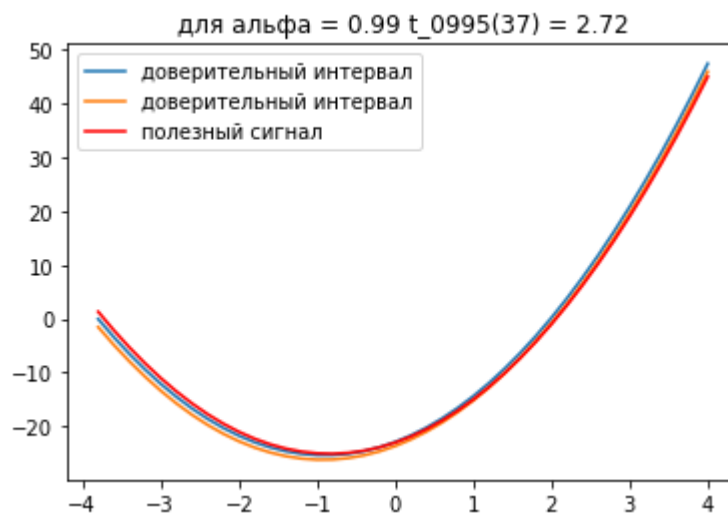
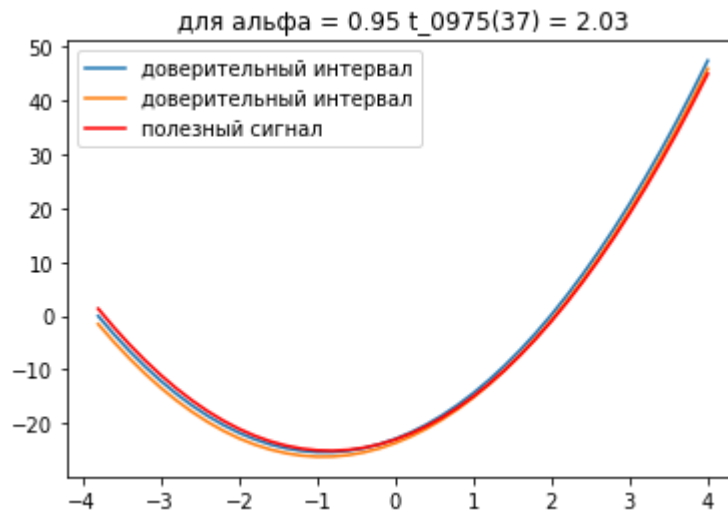
Доверительный интервал для θ_0 : [-23.35692729108671 ; -23.196443943722873]

Доверительный интервал для θ_1 : [5.406239456007577 ; 5.566722803371415]

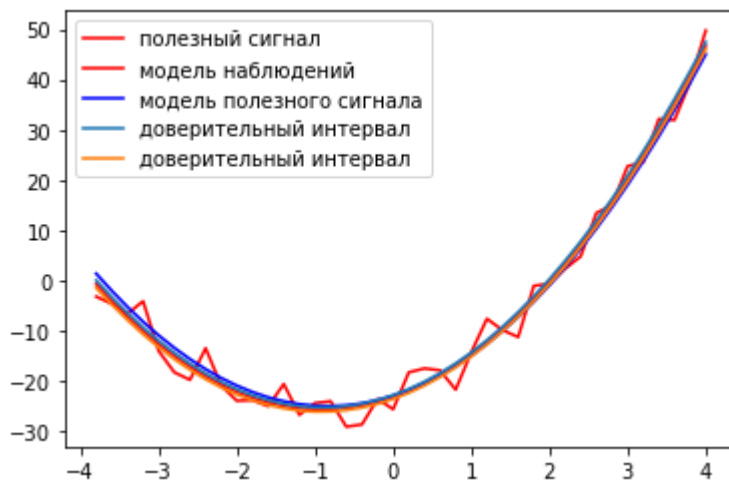
Доверительный интервал для θ_2 : [2.921280929910935 ; 3.081764277274773]
Для альфа = 0.99 $t_{0.995}(37) = 2.72$

Доверительный интервал для θ_0 : [-23.38420155455495 ; -23.169169680254633]
Доверительный интервал для θ_1 : [5.378965192539338 ; 5.593997066839654]
Доверительный интервал для θ_2 : [2.894006666442696 ; 3.1090385407430117]

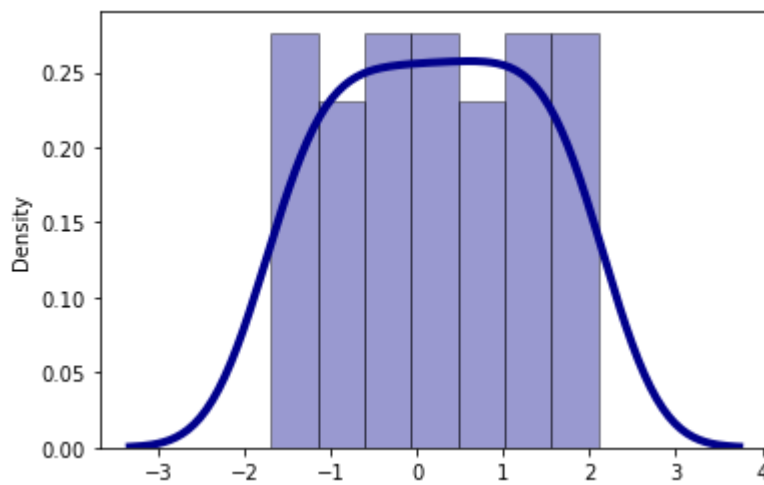
3. Построены доверительные интервалы уровней надёжности $\alpha_1 = 0.95$ и $\alpha_2 = 0.99$ для полезного сигнала (1).



4.



5.



6. $\sigma^2 = 1.3114098272905477$

7. Распределение является нормальным, так как с помощью χ^2 - критерия Пирсона на уровне значимости 0.05 проверена гипотеза о том, что закон распределения ошибки наблюдения является нормальным $7.403652102899734 < 14.067$ гипотеза верна