Ecuaciones diferenciales ordinarias

Método de Euler

Ecuación de interes:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Solución de Euler (expansión de Taylor a primer orden);

$$y_{i+1} = y_i + \phi h + \mathcal{O}(h^2);\ \text{donde } \phi = f(x_i, y_i) \text{ Pendiente estimada}.$$

Error de truncamiento;

$$\mathcal{O}(h^2) \to \frac{f'(x_i, y_i)}{2!} h^2.$$

Mejora del método de Euler: M. de Heun

La derivada es el promedio entre las derivadas en i y $i+1$:

$$y_{i+1}^{0} = y_i + f(x_i, y_i)h \leftarrow \text{ predictor.}$$

Solución de Heun;

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{0})}{2}h.$$

Si la función f no depende de y, no se necesita predictor;

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}h.$$

Método de punto medio o polígono mejorado

La derivada se estima en el punto medio entre i y $i+1$:

$$y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i)\frac{h}{2} \leftarrow \text{ auxiliar.}$$

Solución de punto medio;

$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})h.$$

Los tres métodos anteriores hacen parte de la misma familia de soluciones de ecuaciones diferenciales llamados **métodos de Runge-Kutta**.

Método de Runge-Kutta

Todos tienen la misma forma:

$$y_{i+1} = y_i + \underbrace{\phi(x_i, y_i, h)}_{\text{función incremento}} h.$$

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n; \ a_i \text{ constantes;}$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h),$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h),$$

$$\vdots$$

$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h).$$

p_i y q_{ij} son constantes.

El orden de precisión del método depende en principio del valor de n.

Runge-Kutta de primer y segundo orden

Si $n = 1$: $\Rightarrow \phi = a_1 k_1;\ k_1 = f(x_i, y_i)$

$$y_{i+1} = y_i + a_1 f(x_i, y_i) h.\ a_1 = 1 \text{ Euler}$$

Si $n = 2$: $\Rightarrow \phi = a_1 k_1 + a_2 k_2$ y

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i), \\ k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h), \end{aligned}$$

Solución:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2) h.$$

Runge-Kutta de segundo orden

Recordemos la expansión en serie de Taylor:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{\frac{\partial f(x_i,y_i)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_i,y_i)}{\partial y}\frac{dy}{dx}}{2!}h^2$$

Ahora expandamos k_2 a primer orden:

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11}k_1 h) \approx f(x_i, y_i) + p_1 h\frac{\partial f}{\partial x} + q_{11}k_1 h\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$y_{i+1} = y_i + \left[a_1 f(x_i, y_i) + a_2\left(f(x_i, y_i) + p_1 h\frac{\partial f}{\partial x} + q_{11}k_1 h\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]h,$$

Runge-Kutta de segundo orden

Reagrupando términos de h:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + (a_1 + a_2) f(x_i, y_i) h \\ &+ \left(a_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y} \right) h^2, \end{aligned}$$

Comparando término a término con la expansión de Taylor:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1, \\ a_2 p_1 &= 1/2, \\ a_2 q_{11} &= 1/2. \end{aligned}$$

Existe un conjunto infinito de métodos de RK.

Runge-Kutta de segundo orden

$$a_1 + a_2 = 1,$$
$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2},$$

- Si la EDO tiene solución cuadrática el resultado es el mismo independiente de a_2.
- Si $a_2 = 1/2$ se tiene el método de Heun.
- Si $a_2 = 1$ se tiene el método de punto medio.

Runge-Kutta de cuarto orden

De la misma forma se puede establecer un conjunto de ecuaciones para RK de tercer y cuarto orden. Este último es el más comúnmente usado. Aquí se presenta la forma estándar en la que se usa RK-4:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h;$$

con

$$k_1 = f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h),$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h),$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h).$$

Runge-Kutta de cuarto orden; esquema de funcionamiento