4.2 Determinantes

Históricamente, los determinantes precedían a las matrices, un hecho curioso a la luz de la forma como se enseña el álgebra lineal en la actualidad, con las matrices antes que los determinantes. No obstante, los determinantes surgen independientemente de las matrices en la solución de muchos problemas prácticos, y la teoría de los determinantes estaba bien desarrollada casi dos siglos antes de que a la matrices se les otorgara un valor de estudio como tal. Al final de esta sección se presenta una reseña histórica de los determinantes.

Recuerde que el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ de 2×2 es

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Esta expresión se encontró por primera vez cuando se determinaron formas para calcular la inversa de una matriz. En particular, se encontró que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

El determinante de una matriz A en ocasiones también se denota por $|A|$, de modo que para la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ de 2×2 es posible escribir

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Advertencia Esta notación para el determinante recuerda la notación del valor absoluto. Es fácil confundir la notación $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, para determinante, con la notación $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, para la matriz en sí. No las confunda. Por fortuna, usualmente será claro por el contexto lo que se pretende.

Se define el determinante de una matriz $A = [a]$ de 1×1 como

$$\det A = |a| = a$$

(Note que realmente debe tener cuidado con esta notación: en este caso, $|a|$ *no* denota el valor absoluto de a.) ¿Cómo se define entonces el determinante de una matriz de 3×3? Si a su CAS le solicita la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

la respuesta será equivalente a

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}$$

donde $\Delta = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$. Observe que

$$\begin{aligned} \Delta &= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg \\ &= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \\ &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{aligned}$$

y que cada una de las entradas en la porción de matriz de A^{-1} parezca ser el determinante de una submatriz de 2×2 de A. De hecho, esto es cierto, y es la base de la definición del determinante de una matriz de 3×3. La definición es *recursiva* en el sentido de que el determinante de una matriz de 3×3 se define en términos de determinantes de matrices de 2×2.

Definición Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Entonces el ***determinante*** de A es el escalar

$$\det A = |A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Note que cada uno de los determinantes de 2×2 se obtiene al borrar el renglón y la columna de A que contienen la entrada por la que se multiplica el determinante. Por ejemplo, el primer sumando es a_{11} multiplicado por el determinante de la submatriz obtenida al borrar el renglón 1 y la columna 1. Note también que los signos más y menos se alternan en la ecuación (1). Si se denota con A_{ij} la submatriz de una matriz A obtenida al borrar el renglón i y la columna j, entonces la ecuación (1) se puede abreviar como

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} \\ &= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} \end{aligned}$$

Para cualquier matriz cuadrada A, $\det A_{ij}$ se llama ***menor-(i, j)*** de A.

Ejemplo 4.8 Calcule el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución Calcule

$$\begin{aligned} \det A &= 5\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 5(0 - (-2)) + 3(3 - 4) + 2(-1 - 0) \\ &= 5(2) + 3(-1) + 2(-1) = 5 \end{aligned}$$

Con un poco de práctica, debe descubrir que puede trabajar fácilmente determinantes de 2×2 en su cabeza. Entonces, escribir la segunda línea en la solución anterior es innecesario.

Otro método para calcular el determinante de una matriz de 3×3 es análogo al método para calcular el determinante de una matriz de 2×2. Copie las primeras dos columnas de A a la derecha de la matriz y tome los productos de los elementos en las seis diagonales que se muestran a continuación. Agregue signos más a los productos de las diagonales con pendiente descendente y signos menos a los productos de las diagonales con pendiente ascendente.

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right. & & \left.\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}\right. & & \\ & & + & + & + \end{array} \tag{2}$$

Este método produce

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

En el ejercicio 19 se le pedirá comprobar que este resultado está de acuerdo con el de la ecuación (1) para un determinante de 3 × 3.

Ejemplo 4.9

Calcule el determinante de la matriz en el ejemplo 4.8 con el método que se muestra en (2).

Solución Agregue a A sus primeras dos columnas y calcule los seis productos indicados:

$$\begin{array}{ccccc} & & & 0 & -10 & -9 \\ \left[\begin{array}{ccc} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right] & \begin{array}{cc} 5 & -3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{array} & & & & \\ & & & 0 & -12 & -2 \end{array}$$

Sumar los tres productos en la parte baja y restar los tres productos en la parte superior produce

$$\det A = 0 + (-12) + (-2) - 0 - (-10) - (-9) = 5$$

como antes.

Advertencia Está a punto de definir determinantes para matrices cuadradas arbitrarias. Sin embargo, *no* hay un análogo del método en el ejemplo 4.9 para matrices más grandes. *Sólo* es válido para matrices de 3 × 3.

Determinantes de matrices de $n \times n$

La definición del determinante de una matriz de 3 × 3 se extiende naturalmente a matrices cuadradas arbitrarias.

Definición Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de $n \times n$, donde $n \geq 2$. Entonces el ***determinante*** de A es el escalar

$$\begin{aligned} \det A = |A| &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} \end{aligned} \tag{3}$$

Es conveniente combinar un menor con su signo más o menos. Para este fin, se define el ***cofactor-(i, j) de A*** como

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Con esta notación, la definición (3) se convierte en

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j} \tag{4}$$

El ejercicio 20 le pide comprobar que esta definición proporciona correctamente la fórmula para el determinante de una matriz de 2×2 cuando $n = 2$.

Con frecuencia, a la definición (4) se le conoce como ***expansión por cofactores a lo largo del primer renglón***. ¡Es un hecho sorprendente que se obtenga exactamente el mismo resultado al expandir a lo largo de *cualquier renglón* (o incluso *cualquier columna*)! Este hecho se resume como teorema, pero la demostración se difiere hasta el final de esta sección (pues es un poco larga e interrumpiría el análisis si se presentara aquí).

Teorema 4.1

Teorema de expansión de Laplace

El determinante de una matriz A de $n \times n$, donde $n \geq 2$, puede calcularse como

$$\begin{aligned} \det A &= a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \end{aligned} \tag{5}$$

(que es la ***expansión por cofactores a lo largo del i-ésimo renglón***) y también como

$$\begin{aligned} \det A &= a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \end{aligned} \tag{6}$$

(la ***expansión por cofactores a lo largo de la j-ésima columna***).

Dado que $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, cada cofactor es más o menos el correspondiente menor, donde $(-1)^{i+j}$ proporciona el signo correcto. Una forma rápida de determinar si el signo es $+$ o $-$ es recordar que los signos forman un patrón de "tablero de ajedrez":

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.10

Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

por (a) expansión por cofactores a lo largo del tercer renglón y (b) expansión por cofactores a lo largo de la segunda columna.

Solución

(a) Calcule

$$\begin{aligned} \det A &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \\ &= 2\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2(-6) + 8 + 3(3) \\ &= 5 \end{aligned}$$

(b) En este caso se tiene

$$\begin{aligned} \det A &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \\ &= -(-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3(-1) + 0 + 8 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Pierre Simon Laplace (1749–1827) nació en Normandía, Francia, y se esperaba que se convirtiera en clérigo hasta que se descubrió su talento matemático en la escuela. Hizo muchas importantes aportaciones al cálculo, la probabilidad y la astronomía. Fue examinador del joven Napoleón Bonaparte en el Real Cuerpo de Artilleros y, más tarde, cuando Napoleón estuvo en el poder, sirvió brevemente como ministro del Interior y luego como canciller del Senado. Laplace fue honrado con el título de conde del Imperio en 1806 y en 1817 recibió el título de marqués de Laplace.

Note que en el inciso (b) del ejemplo 4.10 fue necesario hacer menos cálculos que en el inciso (a) porque se expandió a lo largo de una columna que contenía una entrada cero: a saber, a_{22}; por tanto, no fue necesario calcular C_{22}. Se tiene que el teorema de expansión de Laplace es más útil cuando la matriz contiene un renglón o una columna con muchos ceros, pues al elegir expandir a lo largo de dicho renglón o columna, se minimiza el número de cofactores que es necesario calcular.

Ejemplo 4.11

Calcule el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución Primero, note que la columna 3 sólo tiene una entrada distinta de cero; por tanto, debe expandir a lo largo de esta columna. A continuación, note que el patrón $+/-$ asigna un signo menos a la entrada $a_{23} = 2$. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}\det A &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43} \\ &= 0(C_{13}) + 2C_{23} + 0(C_{33}) + 0(C_{43}) \\ &= -2\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Ahora continúe expandiendo a lo largo del tercer renglón del determinante anterior (la tercera columna también sería una buena elección) para obtener

$$\begin{aligned}\det A &= -2\left(-2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right) \\ &= -2(-2(-8) - 5) \\ &= -2(11) = -22\end{aligned}$$

(Note que el patrón $+/-$ para el menor de 3×3 no es el de la matriz original, sino el de una matriz de 3×3 en general).

La expansión de Laplace es particularmente útil cuando la matriz es triangular (superior o inferior).

Ejemplo 4.12

Calcule el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución Expanda a lo largo de la primera columna para obtener

$$\det A = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

(Se omitieron todos los cofactores correspondientes a las entradas cero.) Ahora expanda nuevamente a lo largo de la primera columna:

$$\det A = 2 \cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Al seguir expandiendo a lo largo de la primera columna, se completa el cálculo:

$$\det A = 2 \cdot 3 \cdot 1\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (5(-1) - 2 \cdot 0) = 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot (-1) = -30$$

El ejemplo 4.12 debe convencerlo de que el determinante de una matriz triangular es el producto de sus entradas diagonales. En el ejercicio 21 se le pedirá ofrecer una prueba de este hecho. El resultado se registra como teorema.

Teorema 4.2 El determinante de una matriz triangular es el producto de las entradas en su diagonal principal. Específicamente, si $A = [a_{ij}]$ es una matriz triangular de $n \times n$, entonces

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

Nota En general (esto es, a menos que la matriz sea triangular o tenga alguna otra forma especial), calcular un determinante mediante expansión por cofactores no es eficiente. Por ejemplo, el determinante de una matriz de 3×3 tiene $6 = 3!$ sumandos, y cada uno requiere dos multiplicaciones, y luego se necesitan cinco sumas y restas para terminar los cálculos. Para una matriz de $n \times n$, habrá $n!$ sumandos, cada uno con $n - 1$ multiplicaciones, y luego $n! - 1$ sumas y restas. El número total de operaciones es por tanto

$$T(n) = (n - 1)n! + n! - 1 > n!$$

Incluso la más rápida de las supercomputadoras no puede calcular el determinante de una matriz moderadamente grande con el uso de la expansión por cofactores. Para ilustrar: suponga que necesita calcular un determinante de 50×50. (Matrices *mucho* más grandes que 50×50 se usan para almacenar los datos de las imágenes digitales como las que se transmiten por Internet o las que se toman con una cámara digital.) Calcular el determinante directamente requeriría, en general, más de $50!$ operaciones, y $50! \approx 3 \times 10^{64}$. Si tuviera una computadora que pudiera realizar un billón (10^{12}) operaciones por segundo, tardaría aproximadamente 3×10^{52} segundos, o casi 10^{45} años, en terminar los cálculos. Para poner esto en perspectiva, considere que los astrónomos estiman la edad del universo en al menos 10 mil millones (10^{10}) de años. Por ende, incluso en una supercomputadora muy rápida, ¡calcular un determinante 50×50 mediante expansión por cofactores tardaría más de 10^{30} veces la edad del universo!

Por fortuna, existen métodos mejores, y ahora se desarrollarán medios computacionalmente más efectivos para encontrar determinantes. Primero, es necesario observar algunas de las propiedades de los determinantes.

Propiedades de los determinantes

La forma más eficiente de calcular determinantes es usar reducción por renglones. Sin embargo, no toda operación elemental con renglones deja sin cambios el determinante de una matriz. El siguiente teorema resume las principales propiedades que necesita entender con la finalidad de usar de manera efectiva la reducción por renglones.

Teorema 4.3 Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada.

a. Si A tiene un renglón (columna) cero, entonces $\det A = 0$.
b. Si B se obtiene al intercambiar dos renglones (columnas) de A, entonces $\det B = -\det A$.
c. Si A tiene dos renglones (columnas) idénticos, entonces $\det A = 0$.
d. Si B se obtiene al multiplicar un renglón (columna) de A por k, entonces $\det B = k \det A$.
e. Si A, B y C son idénticas, excepto que el i-ésimo renglón (columna) de C es la suma de los i-ésimos renglones (columnas) de A y B, entonces $\det C = \det A + \det B$.
f. Si B se obtiene al sumar un múltiplo de un renglón (columna) de A a otro renglón (columna), entonces $\det B = \det A$.

Demostración Se demostrará (b) como Lema 4.14 al final de esta sección. Las demostraciones de las propiedades (a) y (f) se dejan como ejercicios. Las propiedades restantes se probarán en términos de renglones; las demostraciones correspondientes a columnas son análogas.

(c) Si A tiene dos renglones idénticos, intercámbielos para obtener la matriz B. Claramente, $B = A$, de modo que $\det B = \det A$. Por otra parte, por (b), $\det B = -\det A$. Por tanto, $\det A = -\det A$, de modo que $\det A = 0$.

(d) Suponga que el renglón i de A se multiplica por k para producir B; esto es, $b_{ij} = ka_{ij}$ para $j = 1, \ldots, n$. Dado que los cofactores C_{ij} de los elementos en los i-ésimos renglones de A y B son idénticos (¿por qué?), expandir a lo largo del i-ésimo renglón de B produce

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} ka_{ij}C_{ij} = k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = k \det A$$

(e) Como en (d), los cofactores C_{ij} de los elementos en los i-ésimos renglones de A, B y C son idénticos. Más aún, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para $j = 1, \ldots, n$. Expanda a lo largo del i-ésimo renglón de C para obtener

$$\det C = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij})C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}C_{ij} = \det A + \det B$$

Note que las propiedades (b), (d) y (f) se relacionan con operaciones elementales con renglones. Dado que la forma escalonada de una matriz cuadrada es necesariamente triangular superior, puede combinar estas propiedades con el Teorema 2 para calcular determinantes de manera eficiente. (Vea la Exploración: "Conteo de operaciones" en el capítulo 2, que muestra que la reducción por renglones de una matriz de $n \times n$ usa en el orden de n^3 operaciones, mucho menos que las $n!$ necesarias para la expansión por cofactores.) Los siguientes ejemplos ilustran el cálculo de determinantes usando reducción por renglones.

Ejemplo 4.13

Calcule $\det A$ si

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Solución

(a) Con la propiedad (f) y luego la propiedad (a), se tiene

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{vmatrix} \overset{R_3+2R_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(b) Se reduce A a forma escalonada del modo siguiente (existen otras formas posibles de hacer esto):

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} -\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_1/3}{=} -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_3-2R_1 \\ R_4-5R_1}}{=} -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_4}{=} -(-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_3+4R_2 \\ R_4+2R_2}}{=} 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 15 & -33 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 15 \cdot (-13) = 585$$

Comentario Por el Teorema 4.3, también puede usar operaciones elementales con columnas en el proceso de calcular determinantes, y puede "mezclar y combinar" operaciones elementales en renglones y columnas. Por ejemplo, en el ejemplo 4.13(a), podría comenzar con la suma de la columna 3 a la columna 1 para crear un 1 como pivote en la esquina superior izquierda. De hecho, el método que se utilizó fue más rápido, pero en otros ejemplos las operaciones en columnas pueden acelerar los cálculos. Tenga esto en mente cuando trabaje determinantes a mano.

Determinantes de matrices elementales

Recuerde de la sección 3.3 que una matriz elemental resulta de realizar una operación elemental con renglón sobre una matriz identidad. Al hacer $A = I_n$ en el Teorema 4.3 se produce el siguiente teorema.

Teorema 4.4 Sea E una matriz elemental de $n \times n$.

a. Si E resulta de intercambiar dos renglones de I_n, entonces $\det E = -1$.
b. Si E resulta de multiplicar un renglón de I_n por k, entonces $\det E = k$.
c. Si E resulta de sumar un múltiplo de un renglón de I_n a otro renglón, entonces $\det E = 1$.

La palabra *lema* se deriva del verbo griego *lambanein*, que significa "asir". En matemáticas, un lema es un "teorema auxiliar" que se "agarra" y se usa para probar otro teorema, por lo general más importante.

Demostración Dado que $\det I_n = 1$, al aplicar (b), (d) y (f) del Teorema 4.3 inmediatamente produce (a), (b) y (c), respectivamente, del Teorema 4.4.

A continuación, recuerde que al multiplicar *por la izquierda* una matriz B por una matriz elemental realiza la correspondiente operación elemental con renglón sobre B. Por tanto, es posible parafrasear sucintamente (b), (d) y (f) del Teorema 4.3 como el lema siguiente, cuya prueba es directa y se deja como el ejercicio 43.

Lema 4.5 Sea B una matriz de $n \times n$ y sea E una matriz elemental de $n \times n$. Entonces

$$\det(EB) = (\det E)(\det B)$$

Puede usar el Lema 4.5 para demostrar el teorema principal de esta sección: una caracterización de la inversibilidad en términos de determinantes.

Teorema 4.6 Una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$.

Demostración Sea A una matriz de $n \times n$ y sea R la forma escalonada reducida por renglones de A. Primero se demostrará que $\det A \neq 0$ si y sólo si $\det R \neq 0$. Sean $E_1, E_2, \ldots, E_r$ las matrices elementales correspondientes a las operaciones elementales con renglones que reducen A a R. Entonces

$$E_r \cdots E_2 E_1 A = R$$

Al sacar determinantes de ambos lados y aplicar repetidamente el Lema 4.5, se obtiene

$$(\det E_r) \cdots (\det E_2)(\det E_1)(\det A) = \det R$$

Por el Teorema 4.4, los determinantes de todas las matrices elementales son distintos de cero. Se concluye que $A \neq 0$ si y sólo si $\det R \neq 0$.

Ahora suponga que A es invertible. Entonces, por el teorema fundamental de las matrices invertibles, $R = I_n$, de modo que $\det R = 1 \neq 0$. En consecuencia, también $\det A \neq 0$. Por el contrario, si $A \neq 0$, entonces $\det R \neq 0$, de modo que R no puede contener un renglón cero, por el Teorema 4.3(a). Se tiene que R debe ser I_n (¿por qué?), de modo que A es invertible, nuevamente por el teorema fundamental.

Determinantes y operaciones matriciales

Ahora se tratará de determinar qué relación, si la hay, existe entre los determinantes y algunas de las operaciones matriciales básicas. Específicamente, se quieren encontrar fórmulas para $\det(kA)$, $\det(A + B)$, $\det(AB)$ $\det(A^{-1})$, y $\det(A^T)$ en términos de $\det A$ y $\det B$.

El Teorema 4.3(d) *no* dice que $\det(kA) = k \det A$. La relación correcta entre la multiplicación escalar y los determinantes está dada por el siguiente teorema.

Teorema 4.7 Si A es una matriz de $n \times n$, entonces

$$\det(kA) = k^n \det A$$

En el ejercicio 44 se le pide dar una demostración de este teorema.

Por desgracia, no hay una fórmula simple para $\det(A + B)$ y, en general, $\det(A + B) \neq \det A + \det B$. (Encuentre dos matrices de 2×2 que verifiquen esto.) En consecuencia, es una agradable sorpresa descubrir que los determinantes son bastante compatibles con la multiplicación de matrices. De hecho, se tiene la agradable fórmula siguiente debida a Cauchy.

Augustin Louis Cauchy (1789–1857) nació en París y estudió ingeniería, pero cambió a matemáticas debido a su pobre salud. Brillante y prolífico matemático, publicó más de 700 artículos, muchos acerca de problemas bastante difíciles. Su nombre puede encontrarse en muchos teoremas y definiciones en ecuaciones diferenciales, series infinitas, teoría de probabilidad, álgebra y física. Es célebre por introducir el rigor en el cálculo y tender los cimientos de la rama de las matemáticas conocida como análisis. Políticamente conservador, Cauchy fue realista, y en 1830 siguió a Carlos X al exilio. Regresó a Francia en 1838, pero no recuperó su puesto en la Sorbona hasta que la universidad desechó su requisito de que los miembros del personal docente juraran lealtad al nuevo rey.

Teorema 4.8 Si A y B son matrices de $n \times n$, entonces

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

Demostración Considere dos casos: A invertible y A no invertible.

Si A es invertible, entonces, por el teorema fundamental de las matrices invertibles, puede escribirse como un producto de matrices elementales, por ejemplo

$$A = E_1E_2 \cdots E_k$$

Entonces $AB = E_1E_2 \cdots E_kB$, de modo que k aplicaciones del Lema 4.5 producirán

$$\det(AB) = \det(E_1E_2 \cdots E_kB) = (\det E_1)(\det E_2) \cdots (\det E_k)(\det B)$$

Al continuar con la aplicación del Lema 4.5, se obtiene

$$\det(AB) = \det(E_1E_2 \cdots E_k)\det B = (\det A)(\det B)$$

Por otra parte, si A no es invertible, entonces tampoco lo es AB, por el ejercicio 47 de la sección 3.3. En consecuencia, por el Teorema 4.6, $\det A = 0$ y $\det(AB) = 0$. En consecuencia, $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, pues ambos lados son cero.

Ejemplo 4.14

Al aplicar el Teorema 4.8 a $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, se encuentra que

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 16 & 5 \end{bmatrix}$$

y que $\det A = 4$, $\det B = 3$ y $\det(AB) = 12 = 4 \cdot 3 = (\det A)(\det B)$, como se afirmó. (¡Compruebe estas aseveraciones!)

El siguiente teorema ofrece una amigable relación entre el determinante de una matriz invertible y el determinante de su inversa.

Teorema 4.9 Si A es invertible, entonces

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Demostración Puesto que A es invertible, $AA^{-1} = I$, de modo que $\det(AA^{-1}) = \det I = 1$. En consecuencia, $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$, por el Teorema 4.8, y como $\det A \neq 0$ (¿por qué?), dividir entre $\det A$ produce el resultado.

Ejemplo 4.15 Verifique el Teorema 4.9 para la matriz A del ejemplo 4.14.

Solución Calcule

$$A^{-1} = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\det A^{-1} = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4} = \frac{1}{\det A}$$

Comentario La belleza del Teorema 4.9 es que en ocasiones no es necesario saber *cuál* es la inversa de una matriz, sino sólo que *existe*, o saber cuál es su determinante. Para la matriz A en los dos últimos ejemplos, una vez que se sabe que $\det A = 4 \neq 0$, inmediatamente puede deducirse que A es invertible y que $\det A^{-1} = \frac{1}{4}$ sin realmente calcular A^{-1}.

Ahora se relacionará el determinante de una matriz A con el de su transpuesta A^T. Dado que los renglones de A^T son justo las columnas de A, evaluar $\det A^T$ mediante expansión a lo largo del primer renglón es idéntico a evaluar $\det A$ por expansión a lo largo de su primera columna, lo cual es posible hacer por el teorema de expansión de Laplace. Por tanto, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.10 Para cualquier matriz cuadrada A,

$$\det A = \det A^T$$

Regla de Cramer y la adjunta

Gabriel Cramer (1704-1752) fue un matemático suizo. La regla que lleva su nombre se publicó en 1750, en su tratado *Introducción al análisis de las curvas algebraicas*. Sin embargo, ya en 1730, otros matemáticos conocían casos especiales de la fórmula, entre ellos el escocés Colin Maclaurin (1698-1746), acaso el más grande de los matemáticos británicos que fueron los "sucesores de Newton".

En esta sección se deducen dos fórmulas útiles que relacionan los determinantes con la solución de sistemas lineales y la inversa de una matriz. La primera de ellas, la ***regla de Cramer***, ofrece una fórmula para describir la solución de ciertos sistemas de n ecuaciones lineales con n variables completamente en términos de determinantes. Aunque este resultado es de poco uso práctico más allá de sistemas de 2×2, es de gran importancia teórica.

Se necesitará una nueva notación para este resultado y su prueba. Para una matriz A de $n \times n$ y un vector $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$, sea $A_i(\mathbf{b})$ que denota la matriz obtenida al sustituir la i-ésima columna de A por $\mathbf{b}$. Esto es:

$$A_i(\mathbf{b}) = [\mathbf{a}_1 \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Columna } i}}{\mathbf{b}} \cdots \mathbf{a}_n]$$

Teorema 4.11 **Regla de Cramer**

Sea A una matriz de $n \times n$ invertible y sea $\mathbf{b}$ un vector en $\mathbb{R}^n$. Entonces la solución única $\mathbf{x}$ del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está dada por

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det A} \quad \text{para } i = 1, \ldots, n$$

Demostración Las columnas de la matriz identidad $I = I_n$ son los vectores unitarios estándar $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, entonces

$$\begin{aligned} AI_i(\mathbf{x}) &= A[\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{x} \ \cdots \ \mathbf{e}_n] = [A\mathbf{e}_1 \ \cdots \ A\mathbf{x} \ \cdots \ A\mathbf{e}_n] \\ &= [\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{b} \ \cdots \ \mathbf{a}_n] = A_i(\mathbf{b}) \end{aligned}$$

Por tanto, por el Teorema 4.8,

$$(\det A)(\det I_i(\mathbf{x})) = \det(AI_i(\mathbf{x})) = \det(A_i(\mathbf{b}))$$

Ahora

$$\det I_i(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_n & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_i$$

como puede ver al expandir a lo largo del i-ésimo renglón. Por tanto, $(\det A)x_i = \det(A_i(\mathbf{b}))$ y el resultado surge al dividir entre $\det A$ (que es distinto de cero, pues A es invertible).

Ejemplo 4.16 Use la Regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 \\ -x_1 + 4x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Solución Calcule

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad \det(A_1(\mathbf{b})) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \quad \text{y} \quad \det(A_2(\mathbf{b})) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Por la Regla de Cramer,

$$x_1 = \frac{\det(A_1(\mathbf{b}))}{\det A} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{\det(A_2(\mathbf{b}))}{\det A} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Comentario Como se hizo notar anteriormente, la regla de Cramer es computacionalmente ineficiente para todos los sistemas de ecuaciones lineales, excepto los pequeños, pues involucra el cálculo de muchos determinantes. El esfuerzo que se realiza para calcular sólo uno de dichos determinantes, usando incluso el método más eficiente, se emplearía mejor al usar la eliminación gaussiana para resolver directamente el sistema.

El resultado final de esta sección es una fórmula para la inversa de una matriz en términos de determinantes. Esta fórmula se insinuó por la fórmula para la inversa de una matriz de 3×3, que se dio sin demostración al inicio de esta sección. Por ende, se cierra el ciclo.

Ahora descubra la fórmula por usted mismo. Si A es una matriz invertible de $n \times n$, su inversa es la matriz (única) X que satisface la ecuación $AX = I$. Al resolver para X una columna cada vez, sea $\mathbf{x}_j$ la j-ésima columna de X. Esto es:

$$\mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix}$$

Por tanto, $A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$, y por la regla de Cramer,

$$x_{ij} = \frac{\det(A_i(\mathbf{e}_j))}{\det A}$$

Sin embargo,

$$\det(A_i(\mathbf{e}_j)) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & i\text{-ésima columna} & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & 1 & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} = (-1)^{j+i} \det A_{ji} = C_{ji}$$

que es el cofactor (j, i) de A.

Se tiene que $x_{ij} = (1/\det A)C_{ji}$, de modo que $A^{-1} = X = (1/\det A)[C_{ji}] = (1/\det A)[C_{ij}]^T$. Con palabras: la inversa de A es la *transpuesta* de la matriz de cofactores de A, divida por el determinante de A.

La matriz

$$[C_{ji}] = [C_{ij}]^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

se llama ***adjunta*** (o ***transpuesta conjugada***) de A y se denota adj A. El resultado que acaba de probarse puede enunciarse del modo siguiente.

Teorema 4.12 Sea A una matriz de $n \times n$ invertible. Entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A$$

Ejemplo 4.17 Use el método de la adjunta para calcular la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución Calcule $\det A = -2$ y los nueve cofactores

$$C_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -18 \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 10 \quad C_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 3 \quad C_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6 \quad C_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

La adjunta es la *transpuesta* de la matriz de cofactores; a saber,

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -18 & 10 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ 10 & -6 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -18 & 3 & 10 \\ 10 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -18 & 3 & 10 \\ 10 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -\frac{3}{2} & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

que es la misma respuesta que se obtuvo (con menos trabajo) en el ejemplo 3.30.

Demostración del teorema de expansión de Laplace

Por desgracia no hay una demostración sencilla y breve del Teorema de Expansión de Laplace. La demostración que se proporciona tiene el mérito de ser relativamente directa. Se le descompone en varios pasos, el primero de los cuales es demostrar que la expansión por cofactores a lo largo del primer renglón de una matriz es igual que la expansión por cofactores a lo largo de la primera columna.

Lema 4.13 Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

$$a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n} = \det A = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + \cdots + a_{n1}C_{n1} \qquad (7)$$

Demostración Este lema se demuestra por inducción sobre n. Para $n = 1$, el resultado es trivial. Ahora suponga que el resultado es verdadero para matrices $(n-1) \times (n-1)$; esta es la hipótesis de inducción. Note que, por la definición de cofactor (o menor), todos los términos que contienen a_{11} se representan por medio del sumando $a_{11}C_{11}$. Por tanto, puede ignorar los términos que contengan a_{11}.

El i-ésimo sumando a la derecha de la ecuación (7) es $a_{i1}C_{i1} = a_{i1}(-1)^{i+1} \det A_{i1}$. Ahora se expande A_{i1} a lo largo del primer renglón:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

El j-ésimo término de esta expansión de $\det A_{i1}$ es $a_{1j}(-1)^{1+j-1} \det A_{1i,1j}$, donde la notación $A_{kl,rs}$ denota la submatriz de A que se obtiene al borrar los renglones k y l y las columnas r y s. Al combinar esto, se ve que el término que contiene $a_{i1}a_{1j}$ en el lado derecho de la ecuación (7) es

$$a_{i1}(-1)^{i+1}a_{1j}(-1)^{1+j-1} \det A_{1i,1j} = (-1)^{i+j+1}a_{i1}a_{1j} \det A_{1i,1j}$$

¿Cuál es el término que contiene $a_{i1}a_{1j}$ en el lado izquierdo de la ecuación (7)? El factor a_{1j} ocurre en el j-ésimo sumando $a_{1j}C_{1j} = a_{1j}(-1)^{1+j} \det A_{1j}$. Por la hipótesis de inducción, puede expandir $\det A_{ij}$ a lo largo de su primera columna:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

El i-ésimo término en esta expansión de $\det A_{1j}$ es $a_{i1}(-1)^{(i-1)+1} \det A_{1i,1j}$ de modo que el término que contiene $a_{i1}a_{1j}$ en el lado izquierdo de la ecuación (7) es

$$a_{1j}(-1)^{1+j}a_{i1}(-1)^{(i-1)+1} \det A_{1i,1j} = (-1)^{i+j+1}a_{i1}a_{1j} \det A_{1i,1j}$$

que establece que los lados izquierdo y derecho de la ecuación (7) son equivalentes.

A continuación se demuestra la propiedad (b) del Teorema 4.3.

Lema 4.14 Sea A una matriz de $n \times n$ y sea B que se obtiene al intercambiar cualesquiera dos renglones (columnas) de A. Entonces

$$\det B = -\det A$$

Demostración Una vez más, la demostración es por inducción sobre n. El resultado puede comprobarse fácilmente cuando $n = 2$, así que suponga que es verdadero para matrices $(n-1) \times (n-1)$. Se demostrará que el resultado es verdadero para matrices de $n \times n$. Primero, pruebe que se cumple cuando se intercambian dos renglones adyacentes de A; por ejemplo, los renglones r y $r+1$.

Por el Lema 4.13, puede evaluar det B mediante expansión por cofactores a lo largo de su primera columna. El i-ésimo término en esta expansión es $(-1)^{1+i} b_{i1} \det B_{i1}$. Si $i \neq r$ e $i \neq r+1$, entonces $b_{i1} = a_{i1}$ y B_{i1} es una submatriz $(n-1) \times (n-1)$ que es idéntica a A_{i1}, excepto que se intercambiaron dos renglones adyacentes.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,n} \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Por tanto, por la hipótesis de inducción, $\det B_{i1} = -\det A_{i1}$ si $i \neq r$ e $i \neq r+1$.

Si $i = r$, entonces $b_{i1} = a_{r+1,1}$ y $B_{i1} = A_{r+1,1}$.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{Renglón } i \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,n} \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Por tanto, el r-ésimo sumando en det B es

$$(-1)^{r+1} b_{r1} \det B_{r1} = (-1)^{r+1} a_{r+1,1} \det A_{r+1,1} = -(-1)^{(r+1)+1} a_{r+1,1} \det A_{r+1,1}$$

De igual modo, si $i = r+1$, entonces $b_{i1} = a_{r1}$, $B_{i1} = A_{r1}$ y el $(r+1)$-ésimo sumando en el det B es

$$(-1)^{(r+1)+1} b_{r+1,1} \det B_{r+1,1} = (-1)^{r} a_{r1} \det A_{r1} = -(-1)^{r+1} a_{r1} \det A_{r1}$$

En otras palabras, los términos r-ésimo y $(r+1)$-ésimo en la expansión por cofactores de la primera columna de det B son los *negativos* de los términos $(r+1)$-ésimo y r-ésimo, respectivamente, en la expansión por cofactores de la primera columna de det A.

Al sustituir todos estos resultados en el det B y usar el Lema 4.13 nuevamente, se obtiene

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} b_{i1} \det B_{i1} \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r, r+1}}^{n} (-1)^{i+1} b_{i1} \det B_{i1} + (-1)^{r+1} b_{r1} \det B_{r1} + (-1)^{(r+1)+1} b_{r+1,1} \det B_{r+1,1} \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r, r+1}}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} (-\det A_{i1}) - (-1)^{(r+1)+1} a_{r+1,1} \det A_{r+1,1} - (-1)^{r+1} a_{r1} \det A_{r1} \\ &= -\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} \\ &= -\det A \end{aligned}$$

Esto demuestra el resultado para matrices de $n \times n$ si se intercambian renglones adyacentes. Para ver que se sustenta para intercambios arbitrarios de renglones, sólo es necesario notar que, por ejemplo, los renglones r y s, donde $r < s$, pueden intercambiarse al realizar $2(s - r) - 1$ intercambios de renglones adyacentes (vea el ejercicio 67). Puesto que el número de intercambios es *impar* y cada uno cambia el signo del determinante, el efecto neto es un cambio de signo, como se desea.

La demostración para los intercambios de columna es análoga, excepto que se expande a lo largo del renglón 1 en lugar de a lo largo de la columna 1.

Ahora se puede demostrar el teorema de expansión de Laplace.

Demostración del Teorema 4.1 Sea B la matriz que se obtiene al mover el renglón i de A a la parte superior, usando $i - 1$ intercambios de renglones adyacentes. Por el Lema 4.14, $\det B = (-1)^{i-1} \det A$. Pero $b_{1j} = a_{ij}$ y $B_{1j} = A_{ij}$ para $j = 1, \ldots, n$.

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \det A = (-1)^{i-1} \det B &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} \det B_{1j} \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \end{aligned}$$

lo que da la fórmula para la expansión por cofactores a lo largo del renglón i.

La demostración para expansión por columna es similar e invoca el Lema 4.13, de modo que es posible usar expansión por columna en lugar de expansión por renglón (vea el ejercicio 68).

Breve historia de los determinantes

Un niño prodigio autodidacta, Takakazu Seki Kōwa (1642-1708), descendía de una familia de guerreros samurai. Además de descubrir los determinantes, escribió acerca de ecuaciones diofantinas, cuadrados mágicos y números de Bernoulli (antes que Bernoulli) y muy probablemente realizó descubrimientos en cálculo.

Como se anotó al inicio de esta sección, la historia de los determinantes antecede a la de las matrices. De hecho, los determinantes se introdujeron primero, de manera independiente, por parte de Seki, en 1683, y Leibniz, en 1693. En 1748, los determinantes aparecieron en el *Tratado de álgebra* de Maclaurin, que incluyó un tratamiento de la regla de Cramer hasta el caso de 4×4. En 1750, el mismo Cramer probó el caso general de su regla y la aplicó al ajuste de curvas, y en 1772 Laplace dio una demostración de su teorema de expansión.

El término *determinante* no se acuñó sino hasta 1801, cuando lo usó Gauss. En 1812, Cauchy usó por primera vez los determinantes en el sentido moderno. De hecho, Cauchy fue el responsable de desarrollar mucha de la teoría temprana de los determinantes, incluidos muchos resultados importantes que se han mencionado: la regla del producto para determinantes, el polinomio característico y la noción de una matriz diagonalizable. Los determinantes no fueron ampliamente conocidos sino hasta 1841, cuando Jacobi los popularizó, aunque en el contexto de funciones de varias variables, como se les encuentra en un curso de cálculo multivariable. (En 1850, Sylvester llamó "jacobianos" a ese tipo de determinantes, un término que todavía se usa en la actualidad.)

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) nació en Leipzig y estudió leyes, teología, filosofía y matemáticas. Probablemente es mejor conocido por desarrollar (con Newton, de manera independiente) las ideas principales del cálculo diferencial e integral. Sin embargo, sus aportaciones a otras ramas de las matemáticas también son impresionantes. Desarrolló la noción de determinante, conoció versiones de la regla de Cramer y del teorema de expansión de Laplace antes de que otros le dieran el crédito a ellos, y tendió los cimientos para la teoría de matrices mediante el trabajo que hizo sobre las formas cuadráticas. Leibniz también fue el primero en desarrollar el sistema binario de aritmética. Creía en la importancia de una buena notación y, junto con la notación familiar para derivadas e integrales, introdujo una forma de notación de subíndices para los coeficientes de un sistema lineal que en esencia es la que se usa en la actualidad.

Hacia finales del siglo XIX, la teoría de los determinantes se desarrolló hasta el punto de que libros completos se dedicaban a ellos, incluido el *Tratado elemental sobre los determinantes* de Dodgson, en 1867, y la monumental obra en cinco volúmenes de Thomas Muir, que apareció a principios del siglo XX. Aunque su historia es fascinante, los determinantes de hoy son más de interés teórico que práctico. La Regla de Cramer es un método desesperadamente ineficiente para resolver un sistema de ecuaciones lineales, y los métodos numéricos han sustituido cualquier uso de los determinantes en el cálculo de eigenvalores. Sin embargo, los determinantes se usan para dar a los estudiantes una comprensión inicial de los polinomios característicos (como en las secciones 4.1 y 4.3).

Ejercicios 4.2

Calcule los determinantes en los ejercicios 1-6 usando expansión por cofactores a lo largo del primer renglón y la primera columna.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Calcule los determinantes en los ejercicios 7-15 usando expansión por cofactores a lo largo de cualquier renglón o columna que parezca conveniente.

7. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & \tan\theta \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ a & 0 & b \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & d & e & f \\ g & h & i & j \end{vmatrix}$

En los ejercicios 16-18, calcule los determinantes de 3 × 3 indicados, usando el método del ejemplo 4.9.

16. El determinante en el ejercicio 6

17. El determinante en el ejercicio 8

18. El determinante en el ejercicio 11

19. Verifique que el método indicado en (2) concuerda con la ecuación (1) para un determinante de 3 × 3.

20. Verifique que la definición (4) concuerda con la definición de un determinante de 2 × 2 cuando $n = 2$.

21. Demuestre el Teorema 4.2. [*Sugerencia:* una demostración por inducción sería adecuada.]

En los ejercicios 22-25, evalúe el determinante dado usando operaciones elementales en renglón y/o columna y el Teorema 4.3 para reducir la matriz a forma escalonada por renglones.

22. El determinante en el ejercicio 1

23. El determinante en el ejercicio 9

24. El determinante en el ejercicio 13

25. El determinante en el ejercicio 14

En los ejercicios 26-34, use las propiedades de los determinantes para evaluar por inspección el determinante dado. Explique su razonamiento.

26. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ **27.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ **29.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$ **31.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **33.** $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

34. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Encuentre los determinantes en los ejercicios 35-40, suponiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$$

35. $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ **36.** $\begin{vmatrix} 3a & -b & 2c \\ 3d & -e & 2f \\ 3g & -h & 2i \end{vmatrix}$

37. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$ **38.** $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

39. $\begin{vmatrix} 2c & b & a \\ 2f & e & d \\ 2i & h & g \end{vmatrix}$

40. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d-3g & 2e-3h & 2f-3i \\ g & h & i \end{vmatrix}$

41. Demuestre el Teorema 4.3(a).

42. Demuestre el Teorema 4.3(f).

43. Demuestre el Lema 4.5.

44. Demuestre el Teorema 4.7.

En los ejercicios 45 y 46, use el Teorema 4.6 para encontrar todos los valores de k para los cuales A es invertible.

45. $A = \begin{bmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{bmatrix}$

46. $A = \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ k^2 & 4 & k^2 \\ 0 & k & k \end{bmatrix}$

En los ejercicios 47-52, suponga que A y B son matrices de n × n con det A = 3 y det B = −2. Encuentre los determinantes indicados.

47. $\det(AB)$ **48.** $\det(A^2)$ **49.** $\det(B^{-1}A)$

50. $\det(2A)$ **51.** $\det(3B^T)$ **52.** $\det(AA^T)$

En los ejercicios 53-56, A y B son matrices de n × n.

53. Demuestre que $\det(AB) = \det(BA)$.

54. Si B es invertible, demuestre que $\det(B^{-1}AB) = \det(A)$.

55. Si A es idempotente (esto es, $A^2 = A$), encuentre todos los posibles valores de $\det(A)$.

56. Una matriz cuadrada A se llama ***nilpotente*** si $A^m = O$ para algún $m > 1$. (La palabra *nilpotente* proviene del latín *nil*, que significa “nada”, y *potere*, que significa "tener poder". En consecuencia, una matriz nilpotente es aquella que se vuelve "nada" [esto es: la matriz cero] cuando se eleva a alguna potencia.) Encuentre todos los posibles valores de $\det(A)$ si A es nilpotente.

En los ejercicios 57-60, use la regla de Cramer para resolver el sistema lineal dado.

57. $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$

58. $\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ x + 3y &= -1 \end{aligned}$

59. $\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 1 \\ y + z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$

60. $\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ x - y \quad &= 3 \end{aligned}$

En los ejercicios 61-64, use el Teorema 4.12 para calcular la inversa de la matriz de coeficientes para el ejercicio dado.

61. Ejercicio 57

62. Ejercicio 58

63. Ejercicio 59

64. Ejercicio 60

65. Si A es una matriz invertible de $n \times n$, demuestre que adj A también es invertible y que

$$(\operatorname{adj} A)^{-1} = \frac{1}{\det A}A = \operatorname{adj}(A^{-1})$$

66. Si A es una matriz de $n \times n$, demuestre que

$$\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$$

67. Verifique que si $r < s$, entonces los renglones r y s de una matriz pueden intercambiarse al realizar $2(s - r) - 1$ intercambios de renglones adyacentes.

68. Demuestre que el teorema de expansión de Laplace se sostiene para expansión por columna a lo largo de la j-ésima columna.

69. Sea A una matriz cuadrada que puede particionarse como

$$A = \left[\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline O & S \end{array}\right]$$

donde P y S son matrices cuadradas. Se dice que tal matriz está en ***forma triangular (superior) en bloques***. Demuestre que

$$\det A = (\det P)(\det S)$$

[*Sugerencia:* intente una demostración por inducción acerca del número de renglones de P.]

70. **(a)** Ofrezca un ejemplo para demostrar que si A puede particionarse como

$$A = \left[\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array}\right]$$

donde P, Q, R y S son todas cuadradas, entonces no necesariamente es verdadero que

$$\det A = (\det P)(\det S) - (\det Q)(\det R)$$

(b) Suponga que A se particiona como en el inciso (a) y que P es invertible. Sea

$$B = \left[\begin{array}{c|c} P^{-1} & O \\ \hline -RP^{-1} & I \end{array}\right]$$

Calcule $\det(BA)$ usando el ejercicio 69 y use el resultado para demostrar que

$$\det A = \det P \det(S - RP^{-1}Q)$$

[La matriz $S - RP^{-1}Q$ se llama ***complemento de Schur*** de P en A, en honor a Issai Schur (1875-1941), quien nació en Bielorrusia pero pasó la mayor parte de su vida en Alemania. Es conocido principalmente por su trabajo fundamental acerca de la teoría de la representación de grupos, pero también trabajó en teoría de números, análisis y otras áreas.]

(c) Suponga que A se particiona como en el inciso (a), que P es invertible y que $PR = RP$. Demuestre que

$$\det A = \det(PS - RQ)$$

Método de condensación de Lewis Carroll

Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898) es mucho mejor conocido por su nombre literario, Lewis Carroll, con el cual escribió *Las aventuras de Alicia en el país de las maravillas* y *A través del espejo*. También escribió muchos libros matemáticos y colecciones de acertijos lógicos.

En 1866, Charles Dodgson, mejor conocido por su pseudónimo, Lewis Carroll, publicó su único artículo de investigación matemática. En él describió un "nuevo y breve método" para calcular determinantes, al que llamó "condensación". Aunque no es muy conocido en la actualidad y se volvió obsoleto por los métodos numéricos para evaluar determinantes, el método de condensación es muy útil para cálculos manuales. Cuando no había calculadoras o sistemas algebraicos de cómputo, muchos estudiantes descubrieron que la condensación era su método de elección. Sólo requiere la habilidad para calcular determinantes de 2×2.

Se requiere la siguiente terminología.

Definición Si A es una matriz de $n \times n$, con $n \geq 3$, el ***interior*** de A, denotado $\operatorname{int}(A)$, es la matriz $(n-2) \times (n-2)$ que se obtiene al borrar el primer renglón, el último renglón, la primera columna y la última columna de A.

Se ilustrará el método de condensación para la matriz de 5×5

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Comience por hacer A_0 igual a la matriz de 6×6 cuyas entradas son todas 1. Luego, establezca $A_1 = A$. Es útil imaginar A_0 como la base de una pirámide con A_1 centrada encima de A_0. Agregue a la pirámide capas sucesivamente más pequeñas, hasta que llegar a una matriz de 1×1 en la parte superior, ésta contendrá det A. (Figura 4.9)

Esta viñeta se basa en el artículo "Lewis Carroll's Condensation Method for Evaluating Determinants" de Adrian Rice y Eve Torrence, en *Math Horizons*, noviembre de 2006, pp. 12-15. Para más detalles acerca del método de condensación, vea David M. Bressoud, *Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, MAA Spectrum Series (Cambridge University Press, 1999).

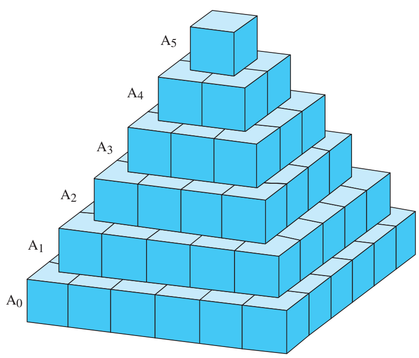

Figura 4.9

A continuación, "condense" A_1 en una matriz A_2' de 4×4 cuyas entradas son los determinantes de todas las submatrices de 2×2 de A_1:

$$A_2' = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 11 & -7 & -8 \\ -5 & 7 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 5 & -4 \\ 7 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Ahora divida cada entrada de A_2' por la correspondiente entrada de $\text{int}(A_0)$ para obtener la matriz A_2. Dado que A_0 es toda números 1, esto significa $A_2 = A_2'$.

Repita el procedimiento y construya A_3' a partir de las submatrices de 2×2 de A_2 y luego divida cada entrada de A_3' por la correspondiente entrada de $\text{int}(A_1)$ y continúe así. Se obtiene:

$$A_3' = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 11 & -7 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -7 & -8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 & 60 & -27 \\ -30 & 36 & -29 \\ 12 & -4 & 26 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 62/2 & 60/3 & -27/1 \\ -30/-1 & 36/2 & -29/1 \\ 12/1 & -4/-1 & 26/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 20 & -27 \\ 30 & 18 & -29 \\ 12 & 4 & 13 \end{bmatrix},$$

$$A_4' = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 31 & 20 \\ 30 & 18 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 20 & -27 \\ 18 & -29 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 30 & 18 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 18 & -29 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42 & -94 \\ -96 & 350 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -42/7 & -94/1 \\ -96/(-1) & 350/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -94 \\ 96 & 70 \end{bmatrix},$$

$$A_5' = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -6 & -94 \\ 96 & 70 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = [8604],$$

$$A_5 = [8604/18] = [478]$$

Como puede comprobar por otros métodos, $A = 478$. En general, para una matriz A de $n \times n$, el método de condensación producirá una matriz A_n de 1×1 que contiene det A.

Claramente, el método se descompone si el interior de cualquiera de las A_i contiene un cero, pues entonces se trataría de dividir entre cero para construir A_{i+1}. Sin embargo, puede usar cuidadosamente las operaciones elementales con renglones y columnas para eliminar los ceros, de modo que pueda avanzar.

Exploración

Aplicaciones geométricas de los determinantes

Esta exploración revelará algunas de las sorprendentes aplicaciones de los determinantes a la geometría. En particular, se verá que los determinantes están estrechamente relacionados con fórmulas para área y volumen, y pueden usarse para producir las ecuaciones de líneas, planos y otros tipos de curvas. La mayoría de estas ideas surgieron cuando la teoría de los determinantes se desarrollaba como un tema por derecho propio.

El producto cruz

Recuerde de la Exploración: "El producto cruz" del capítulo 1, que el producto cruz de

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ es el vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ definido por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$$

Si este producto cruz se escribe como $(u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_1 - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_3$, donde $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ son los vectores base estándar, entonces se ve que la *forma* de esta fórmula es

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & u_1 & v_1 \\ \mathbf{e}_2 & u_2 & v_2 \\ \mathbf{e}_3 & u_3 & v_3 \end{bmatrix}$$

si se expande a lo largo de la primera columna. (Desde luego, este no es un determinante propio, pues $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ son vectores, no escalares; sin embargo, ofrece una forma útil de recordar la fórmula un tanto complicada del producto cruz. También permite el uso de las propiedades de los determinantes para verificar algunas de las otras propiedades del producto cruz.)

Ahora se repasarán algunos de los ejercicios del capítulo 1.

1. Use la versión en determinantes del producto cruz para calcular $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

(a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$ (d) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

2. Si $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$, y $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$, demuestre que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}$$

3. Use las propiedades de los determinantes (y el problema 2 anterior, si es necesario) para probar la propiedad dada del producto cruz.

(a) $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ (b) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$

(c) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (d) $\mathbf{u} \times k\mathbf{v} = k(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

(e) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ (f) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ y $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$

(g) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ (la ***identidad del triple producto escalar***)

Área y volumen

Ahora se puede dar una interpretación geométrica de los determinantes de matrices de 2×2 y 3×3. Recuerde que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$, entonces el área $\mathcal{A}$ del paralelogramo determinado por dichos vectores está dado por $\mathcal{A} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$. (Vea la Exploración: "El producto cruz" del capítulo 1.)

4. Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$. Demuestre que el área $\mathcal{A}$ del paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ está dada por

$$\mathcal{A} = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} \right|$$

[*Sugerencia:* escriba $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

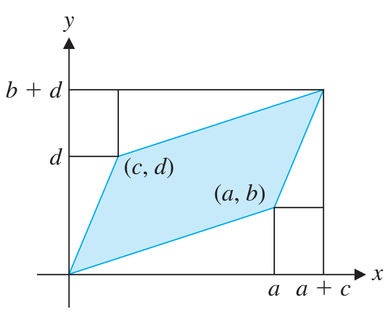

Figura 4.10

5. Obtenga geométricamente la fórmula de área del problema 4 y use la figura 4.10 como guía. [*Sugerencia:* reste áreas del rectángulo grande hasta que quede el paralelogramo.] En este caso, ¿de dónde proviene el signo del valor absoluto?

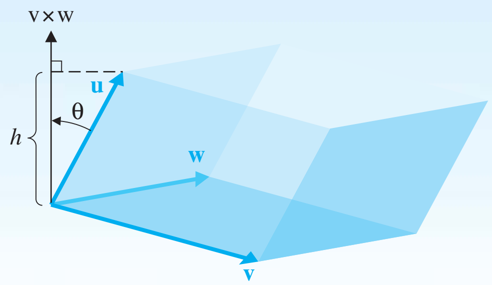

Figura 4.11

6. Encuentre el área del paralelogramo determinado por **u** y **v**.

$$\text{(a) } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{(b) } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Al generalizar los problemas 4-6, considere un ***paralelepípedo***, un sólido tridimensional que recuerda un ladrillo "inclinado", cuyas seis caras son todas paralelogramos con caras opuestas paralelas y congruentes (figura 4.11). Su volumen está dado por el área de su base por su altura.

7. Demuestre que el volumen $\mathcal{V}$ del paralelepípedo determinado por **u**, **v** y **w** está dado por el valor absoluto del determinante de la matriz de 3×3 $[\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}]$ con **u**, **v** y **w** como sus columnas. [*Sugerencia:* de la figura 4.11 puede ver que la altura h puede expresarse como $h = \|\mathbf{u}\| \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre **u** y $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Use este hecho para demostrar que $\mathcal{V} = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$ y aplique el resultado del problema 2.]

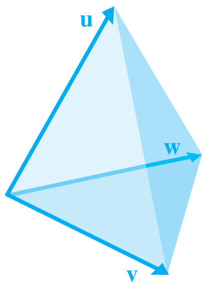

Figura 4.12

8. Demuestre que el volumen $\mathcal{V}$ del tetraedro determinado por **u**, **v** y **w** (figura 4.12) está dado por

$$\mathcal{V} = \tfrac{1}{6}|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$$

[*Sugerencia:* de la geometría se sabe que el volumen de tal sólido es $\mathcal{V} = \frac{1}{3}$ (área de la base)(altura).]

Ahora vea estas interpretaciones geométricas desde un punto de vista transformacional. Sea A una matriz de 2×2 y sea P el paralelogramo determinado por los vectores **u** y **v**. Considere el efecto de la transformación matricial T_A sobre el área de P. Sea $T_A(P)$ el paralelogramo determinado por $T_A(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ y $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.

9. Demuestre que el área de $T_A(P)$ está dada por $|\det A|$(área de P).

10. Sea A una matriz de 3×3 y sea P el paralelepípedo determinado por los vectores **u**, **v** y **w**. Sea $T_A(P)$ que denota al paralelepípedo determinado por $T_A(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ y $T_A(\mathbf{w}) = A\mathbf{w}$. Demuestre que el volumen de $T_A(P)$ está dado por $|\det A|$(volumen de P).

Los problemas anteriores ilustran que el determinante de una matriz captura lo que hace la correspondiente transformación matricial al área o volumen de las figuras sobre las que actúa. (Aunque sólo se consideraron ciertos tipos de figuras, el resultado es perfectamente general y puede hacerse riguroso. Eso no se hará aquí.)

Rectas y planos

Suponga que se dan dos puntos distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano. Existe una recta única que pasa a través de dichos puntos y su ecuación es de la forma

$$ax + by + c = 0$$

Puesto que los dos puntos dados están sobre esta recta, sus coordenadas satisfacen esta ecuación. Por ende,

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0 \end{aligned}$$

Las tres ecuaciones juntas pueden verse como un sistema de ecuaciones lineales con las variables a, b y c. Dado que *hay* una solución no trivial (es decir, la recta existe), la matriz de coeficientes

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}$$

no puede ser invertible, por el teorema fundamental de las matrices invertibles. En consecuencia, su determinante debe ser cero, por el Teorema 4.6. Al expandir este determinante se obtiene la ecuación de la recta.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

11. Use el método descrito anteriormente para encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados.

(a) $(2, 3)$ y $(-1, 0)$ (b) $(1, 2)$ y $(4, 3)$

12.Demuestre que los tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) son colineales (están en la misma recta) si y sólo si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

13. Demuestre que la ecuación del plano a través de los tres puntos no colineales (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) y (x_3, y_3, z_3) está dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

¿Qué sucede si los tres puntos *son* colineales? [*Sugerencia:* explique qué sucede cuando se usa reducción por renglón para evaluar el determinante.]

14. Demuestre que los cuatro puntos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) y (x_4, y_4, z_4) son coplanares (están en el mismo plano) si y sólo si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ajuste de curvas

Cuando los datos que surgen de la experimentación toman la forma de puntos (x, y) que pueden graficarse en el plano, con frecuencia es de interés encontrar una relación entre las variables x y y. Idealmente se querría encontrar una función cuya gráfica pase a través de todos los puntos. En ocasiones todo lo que se quiere es una aproximación (vea la sección 7.3), pero en ciertas situaciones también son posibles resultados exactos.

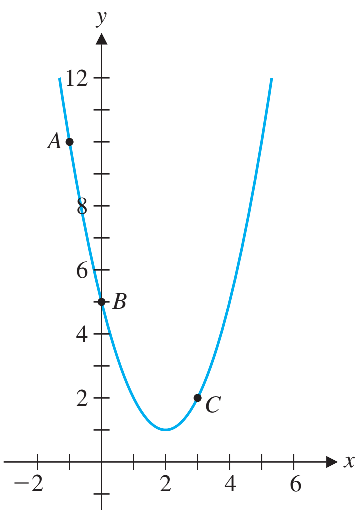

Figura 4.13

15. De la figura 4.13 parece como si pudiera encontrarse una parábola que pasa a través de los puntos $A(-1, 10)$, $B(0, 5)$ y $C(3, 2)$. La ecuación de tal parábola es de la forma $y = a + bx + cx^2$. Al sustituir los puntos dados en esta ecuación, establezca un sistema de tres ecuaciones lineales con las variables a, b y c. *Sin resolver el sistema*, use el Teorema 4.6 para argumentar que debe tener una solución única. Luego resuelva el sistema para encontrar la ecuación de la parábola en la figura 4.13.

16. Use el método del problema 15 para encontrar los polinomios de grado cuando mucho 2 que pasen a través de los siguientes conjuntos de puntos.

(a) $A(1, -1)$, $B(2, 4)$, $C(3, 3)$ (b) $A(-1, -3)$, $B(1, -1)$, $C(3, 1)$

17. Al generalizar los problemas 15 y 16, suponga que a_1, a_2 y a_3 son distintos números reales. Para cualquier número real b_1, b_2 y b_3, se quiere demostrar que existe una cuadrática única con ecuación de la forma $y = a + bx + cx^2$ que pasa a través de los puntos (a_1, b_1), (a_2, b_2) y (a_3, b_3). Haga esto para demostrar que la matriz de coeficientes del sistema lineal asociado tiene el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$$

que necesariamente es distinto de cero. (¿Por qué?)

18. Sean a_1, a_2, a_3, y a_4 distintos números reales. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) \neq 0$$

Para cualesquiera números reales b_1, b_2, b_3 y b_4, use ese resultado para probar que existe una cúbica única con ecuación $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ que pasa a través de los cuatro puntos (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) y (a_4, b_4). (*No* resuelva realmente para a, b, c y d.)

19. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n números reales. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

donde $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ significa el producto de todos los términos de la forma $(a_j - a_i)$, donde $i < j$ y tanto i como j están entre 1 y n. [El determinante de una matriz de esta forma (o su transpuesta) se llama ***determinante de Vandermonde***, en honor del matemático francés A. T. Vandermonde (1735-1796).]

Deduzca que, para cualesquiera n puntos en el plano cuyas coordenadas x son todas distintas, existe un polinomio único de grado $n - 1$ cuyo gráfico pasa a través de los puntos dados.