2 Sistemas de ecuaciones lineales

El mundo está lleno de ecuaciones. . . Debe haber una respuesta para todo, si sólo supiéramos cómo plantear las ecuaciones.

—Anne Tyler
The Accidental Tourist
Alfred A. Knopf, 1985, p. 235

2.0 Introducción: trivialidad

La palabra *trivial* se deriva de la raíz latina *tri* ("tres") y de la palabra latina *via* ("camino"). Por ende, literalmente, una trivialidad es un lugar donde se juntan tres caminos. Este punto de reunión común da lugar al otro significado, más popular, de *trivial*: lugar común, ordinario o insignificante. En las universidades medievales, el *trivium* consistía de las tres materias "comunes" (gramática, retórica y lógica) que se impartían antes del *quadrivium* (aritmética, geometría, música y astronomía). Los "tres caminos" que constituían el trivium fueron el comienzo de las artes liberales.

En esta sección comenzará el examen de los sistemas de ecuaciones lineales. El mismo sistema de ecuaciones puede verse en tres formas diferentes, aunque igualmente importantes; esos serán sus tres caminos, que conducirán todos a la misma solución. Necesitará acostumbrarse a este camino triple de ver los sistemas de ecuaciones lineales, para que se conviertan en lugar común (¡trivial!) para usted.

El sistema de ecuaciones que se considerará es

$$\begin{aligned} 2x + y &= 8 \\ x - 3y &= -3 \end{aligned}$$

Problema 1 Dibuje las dos rectas representadas por dichas ecuaciones. ¿Cuál es su punto de intersección?

Problema 2 Considere los vectores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Dibuje la cuadrícula coordenada determinada por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. [*Sugerencia:* dibuje primero, ligeramente, la cuadrícula coordenada estándar y úsela como auxiliar para dibujar la nueva.]

Problema 3 En la cuadrícula u-v, encuentre las coordenadas de $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Problema 4 Otra forma de enunciar el problema 3 es pedir los coeficientes de x y y para los que $x\mathbf{u} + y\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Escriba las dos ecuaciones a las cuales es equivalente esta ecuación vectorial (una para cada componente). ¿Qué observa?

Problema 5 Ahora regrese a las rectas que dibujó para el problema 1. A la recta cuya ecuación es $2x + y = 8$ se le referirá como recta 1, y a la recta cuya ecuación es $x - 3y = -3$ como recta 2. Trace el punto $(0, 0)$ sobre su gráfica para el problema 1 y etiquételo P_0. Di-

Tabla 2.1

Punto	x	y
P_0	0	0
P_1		
P_2		
P_3		
P_4		
P_5		
P_6		

buje un segmento de recta *horizontal* de P_0 a la recta 1 y etiquete este nuevo punto P_2. A continuación, dibuje un segmento de recta *vertical* de P_1 a la recta 2 y etiquete este punto P_2. Ahora dibuje un segmento de recta *horizontal* de P_2 a la recta 1 para obtener el punto P_3. Continúe de esta forma y dibuje segmentos verticales a la recta 2 seguidos por segmentos horizontales a la recta 1. ¿Qué parece estar ocurriendo?

Problema 6 Con una calculadora con dos lugares decimales de precisión, encuentre las coordenadas (aproximadas) de los puntos $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_6$. (Descubrirá que es útil despejar primero la primera ecuación para x en términos de y y la segunda ecuación para y en términos de x.) Registre sus resultados en la tabla 2.1 y escriba por separado las coordenadas x y y de cada punto.

Los resultados de estos problemas muestran que la tarea de “resolver” un sistema de ecuaciones lineales puede verse en varias formas. Repita el proceso descrito en los problemas con los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{(a)}\ \begin{aligned} 4x - 2y &= 0 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned} \qquad \text{(b)}\ \begin{aligned} 3x + 2y &= 9 \\ x + 3y &= 10 \end{aligned} \qquad \text{(c)}\ \begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= 3 \end{aligned} \qquad \text{(d)}\ \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x - y &= 3 \end{aligned}$$

¿Todas sus observaciones de los problemas 1-6 todavía son válidas para estos ejemplos? Note cualquier similitud o diferencia. En este capítulo se explorarán estas ideas con más detalle.

2.1 Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales

Recuerde que la ecuación general de una recta en $\mathbb{R}^2$ es de la forma

$$ax + by = c$$

y que la ecuación general de un plano en $\mathbb{R}^3$ es de la forma

$$ax + by + cz = d$$

Las ecuaciones de esta forma se llaman ***ecuaciones lineales***.

Definición Una ***ecuación lineal*** en las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde los ***coeficientes*** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y el ***término constante*** b son constantes.

Ejemplo 2.1

Las siguientes ecuaciones son lineales:

$$3x - 4y = -1 \qquad r - \tfrac{1}{2}s - \tfrac{15}{3}t = 9 \qquad x_1 + 5x_2 = 3 - x_3 + 2x_4$$

$$\sqrt{2}x + \frac{\pi}{4}y - \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)z = 1 \qquad 3.2x_1 - 0.01x_2 = 4.6$$

Observe que la tercera ecuación es lineal porque puede reescribirse en la forma $x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 3$. También es importante notar que, aunque en estos ejemplos (y en la mayoría de las aplicaciones) los coeficientes y términos constantes son números reales, en algunos ejemplos y aplicaciones serán números complejos o miembros de $\mathbb{Z}_p$ para algún número primo p.

Las siguientes ecuaciones no son lineales:

$$xy + 2z = 1 \qquad x_1^2 - x_2^3 = 3 \qquad \frac{x}{y} + z = 2$$

$$\sqrt{2x} + \frac{\pi}{4}y - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}z\right) = 1 \qquad \operatorname{sen} x_1 - 3x_2 + 2^{x_3} = 0$$

Por tanto, las ecuaciones lineales no contienen productos, recíprocos u otras funciones de las variables; las variables sólo aparecen a la primera potencia y sólo se multiplican por constantes. Ponga particular atención al cuarto ejemplo en cada lista: ¿por qué la cuarta ecuación en la primera lista es lineal, pero la cuarta ecuación en la segunda lista no lo es?

Una ***solución*** de una ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ es un vector $[s_1, s_2, \ldots, s_n]$ cuyos componentes satisfacen la ecuación cuando se sustituye $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$

Ejemplo 2.2

(a) $[5, 4]$ es una solución de $x - 4y = -1$ porque, cuando se sustituye $x = 5$ y $y = 4$, la ecuación se satisface: $3(5) - 4(4) = -1$. $[1, 1]$ es otra solución. En general, las soluciones simplemente corresponden a los puntos sobre la recta determinada por la ecuación dada. Por tanto, al hacer $x = t$ y despejar y, se ve que el conjunto completo de soluciones puede escribirse en la forma paramétrica $[t, \frac{1}{4} + \frac{3}{4}t]$. (También podría hacer y igual a algún parámetro, por decir, s, y despejar x; las dos soluciones paramétricas se verían diferentes, pero serían equivalentes. Inténtelo.)

(b) La ecuación lineal $x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$ tiene $[3, 0, 0]$, $[0, 1, 2]$ y $[6, 1, -1]$ como soluciones específicas. El conjunto completo de soluciones corresponde al conjunto de puntos en el plano determinado por la ecuación dada. Si se hace $x_2 = s$ y $x_3 = t$, entonces una solución paramétrica está dada por $[3 + s - 2t, s, t]$.(¿Cuáles valores de s y t producen las tres soluciones específicas anteriores?)

Un ***sistema de ecuaciones lineales*** es un conjunto finito de ecuaciones lineales, cada una con las mismas variables. Una ***solución*** de un sistema de ecuaciones lineales es un vector que *simultáneamente* es una solución de cada ecuación en el sistema. El ***conjunto solución*** de un sistema de ecuaciones lineales es el conjunto de *todas* las soluciones del sistema. Al proceso de encontrar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales se le conocerá como "resolver el sistema".

Ejemplo 2.3

El sistema

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

tiene $[2,1]$ como una solución, pues es una solución de ambas ecuaciones. Por otra parte, $[1, -1]$ no es una solución del sistema, porque sólo satisface la primera ecuación.

Ejemplo 2.4

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

(a) $\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x - 2y &= 4 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$

Solución

(a) Al sumar las dos ecuaciones se obtiene $2x = 4$, de modo que $x = 2$, de donde se encuentra que $y = 1$. Una comprobación rápida confirma que $[2, 1]$ es de hecho una solución de ambas ecuaciones. Que ésta es la *única* solución que puede verse al observar que esta solución corresponde al (único) punto de intersección $(2, 1)$ de las rectas con ecuaciones $x - y = 1$ y $x + y = 3$, como se muestra en la figura 2.1(a). Por tanto, $[2, 1]$ es una *solución única*.

(b) La segunda ecuación en este sistema es justo el doble de la primera, de modo que las soluciones corresponden sólo a la primera ecuación: a saber, los puntos sobre la recta $x - y = 2$. Las mismas pueden representarse paramétricamente como $[2 + t, t]$. Por tanto, este sistema tiene *un número infinito de soluciones* [figura 2.1(b)].

(c) Dos números x y y no pueden tener simultáneamente una diferencia de 1 y 3. Por tanto, este sistema *no tiene soluciones*. (Un planteamiento más algebraico puede ser restar la segunda ecuación de la primera, lo que produce la conclusión absurda $0 = -2$.) Como muestra la figura 2.1(c), en este caso las rectas para las ecuaciones son paralelas.

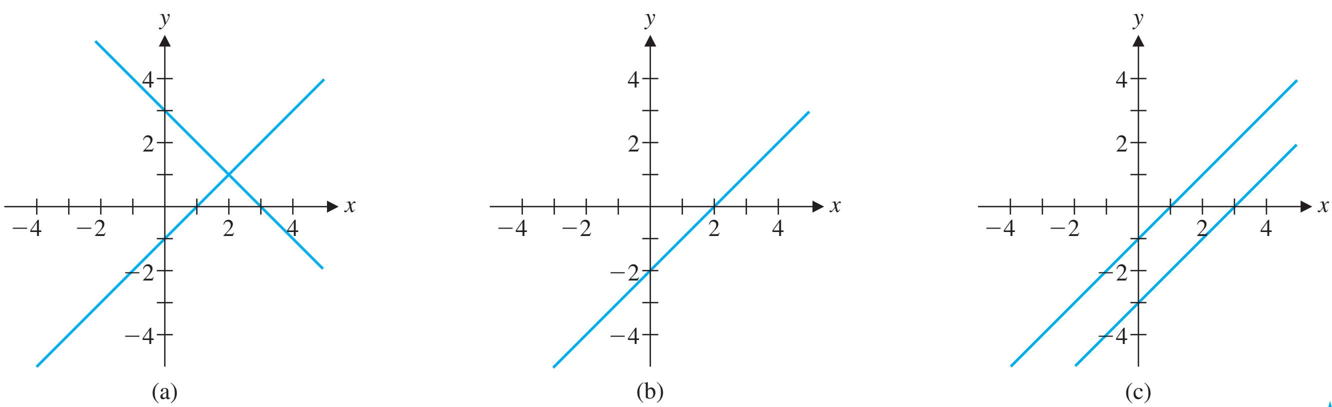


Figura 2.1

Un sistema de ecuaciones lineales se llama ***consistente*** si tiene al menos una solución. Un sistema sin soluciones se llama ***inconsistente***. Aun cuando sean pequeños, los tres sistemas en el ejemplo 2.4 ilustran las únicas tres posibilidades para el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes reales. Más tarde se probará que estas mismas tres posibilidades se sostienen para *cualquier* sistema de ecuaciones lineales sobre los números reales.

Un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes reales tiene

(a) una solución única (un sistema consistente) o
(b) un número infinito de soluciones (un sistema consistente) o
(c) ninguna solución (un sistema inconsistente).

Resolución de un sistema de ecuaciones lineales

Dos sistemas lineales se llaman ***equivalentes*** si tienen los mismos conjuntos solución. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} x - y &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

son equivalentes, pues ambos tienen la solución única $[2, 1]$. (Compruébelo.)

El planteamiento para resolver un sistema de ecuaciones lineales es transformar el sistema dado en uno equivalente que sea más fácil de resolver. El patrón triangular del segundo ejemplo anterior (en el que la segunda ecuación tiene una variable menos que la primera) es el que se buscará.

Ejemplo 2.5

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \\ y + 3z &= 5 \\ 5z &= 10 \end{aligned}$$

Solución A partir de la última ecuación y trabajando hacia atrás, se descubre sucesivamente que $z = 2$, $y = 5 - 3(2) = -1$ y $x = 2 + (-1) + 2 = 3$. De modo que la solución única es $[3, -1, 2]$.

El procedimiento que se usó para resolver el ejemplo 2.5 se llama ***sustitución hacia atrás***.

Ahora se regresa a la estrategia general para transformar un sistema dado en uno equivalente que puede resolverse fácilmente mediante sustitución hacia atrás. Este proceso se describirá con mayor detalle en la siguiente sección; por ahora, simplemente se le observará en acción en un solo ejemplo.

Ejemplo 2.6

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \\ 3x - 3y + 2z &= 16 \\ 2x - y + z &= 9 \end{aligned}$$

Solución Para transformar este sistema en uno que muestre la estructura triangular del ejemplo 2.5, primero es necesario eliminar la variable x de las ecuaciones 2 y 3. Observe que restar de las ecuaciones 2 y 3 múltiplos adecuados de la ecuación 1 hará el truco. A continuación, observe que se opera sobre los coeficientes, no sobre las variables, de modo que puede ahorrar cierta escritura si registra los coeficientes y términos constantes en la *matriz*

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 16 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

La palabra *matriz* se deriva de la palabra latina *mater*, que significa "madre". Cuando se agrega el sufijo *–ix*, el significado se convierte en "útero". Así como un útero rodea un feto, los corchetes de una matriz rodean sus entradas, y así como el útero da origen a un bebé, una matriz da origen a ciertos tipos de funciones llamadas *transformaciones lineales*. Una matriz con m renglones y n columnas se llama matriz de $m \times n$ (pronúnciese "m por n").

donde las primeras tres columnas contienen los coeficientes de las variables en orden, la columna final contiene los términos constantes y la barra vertical sirve para recordar los signos igual en las ecuaciones. Esta matriz se llama ***matriz aumentada*** del sistema.

Existen varias formas de convertir el sistema dado en uno con el patrón triangular que se busca. Los pasos que se usarán aquí son los más cercanos en espíritu al método más general que se describe en la siguiente sección. Se realizará la secuencia de operaciones sobre un sistema dado y simultáneamente sobre la matriz aumentada correspondiente. Comience por eliminar x de las ecuaciones 2 y 3.

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \\ 3x - 3y + 2z &= 16 \\ 2x - y + z &= 9 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 16 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

Reste 3 veces la primera ecuación de la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \\ 5z &= 10 \\ 2x - y + z &= 9 \end{aligned}$$

Reste 3 veces el primer renglón del segundo renglón:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

Reste 2 veces la primera ecuación de la tercera ecuación:

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \\ 5z &= 10 \\ y + 3z &= 5 \end{aligned}$$

Reste 2 veces el primer renglón del tercer renglón:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

Intercambie las ecuaciones 2 y 3:

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \\ y + 3z &= 5 \\ 5z &= 10 \end{aligned}$$

Intercambie los renglones 2 y 3:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right]$$

Éste es el mismo sistema que se resolvió usando la sustitución hacia atrás en el ejemplo 2.5, donde se descubrió que la solución era $[3, -1, 2]$. Por tanto, ésta también es la solución al sistema dado en este ejemplo. ¿Por qué? El cálculo anterior muestra que *cualquier solución del sistema dado también es una solución del sistema final*, pero, dado que los pasos recién realizados son *reversibles*, podría recuperar el sistema original a partir del sistema final. (¿Cómo?) Por tanto, *cualquier solución del sistema final también es una solución del sistema dado.* Por ende, los sistemas son equivalentes (como lo son todos los obtenidos en los pasos intermedios anteriores). Más aún, se puede trabajar con matrices en lugar de ecuaciones, pues es asunto simple reinsertar las variables antes de proceder con la sustitución hacia atrás. (Trabajar con matrices es el tema de la siguiente sección.)

Comentario Las calculadoras con capacidades matriciales y los sistemas algebraicos de cómputo (CAS por sus siglas en inglés) pueden facilitar la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, en particular cuando los sistemas son grandes o tienen coeficientes que no son "bonitos", como suele ser el caso en aplicaciones de la vida real. Sin embargo, como siempre, debe hacer tantos ejemplos como pueda con lápiz y papel hasta que se sienta cómodo con las técnicas. Incluso si se solicita una calculadora o CAS, piense en *cómo* realizaría los cálculos de forma manual antes de hacer algo. Después de obtener una respuesta, asegúrese de pensar si es razonable.

No se confunda al pensar que la tecnología siempre le dará la respuesta más rápido o más fácilmente que los cálculos a mano. ¡En ocasiones pueden no darle la respuesta en absoluto! Los errores de redondeo asociados con la aritmética de punto flotante que usan las calculadoras y computadoras pueden causar serios problemas y conducir a respuestas totalmente erróneas a ciertos problemas. Vea la Exploración "Mentiras que me dice mi computadora" para un vistazo del problema. (¡Está advertido!)

Ejercicios 2.1

En los ejercicios 1-6, determine cuáles son ecuaciones lineales con las variables x, y y z. Si alguna ecuación no es lineal, explique por qué.

1. $x - \pi y + \sqrt[3]{5}z = 0$ **2.** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

3. $x^{-1} + 7y + z = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{9}\right)$

4. $2x - xy - 5z = 0$ **5.** $3\cos x - 4y + z = \sqrt{3}$

6. $(\cos 3)x - 4y + z = \sqrt{3}$

En los ejercicios 7-10, encuentre una ecuación lineal que tenga el mismo conjunto solución que la ecuación dada (posiblemente con algunas restricciones sobre las variables).

7. $2x + y = 7 - 3y$ **8.** $\dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = 1$

9. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{xy}$ **10.** $\log_{10} x - \log_{10} y = 2$

En los ejercicios 11-14, encuentre el conjunto solución de cada ecuación.

11. $3x - 6y = 0$ **12.** $2x_1 + 3x_2 = 5$

13. $x + 2y + 3z = 4$ **14.** $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1$

En los ejercicios 15-18, dibuje gráficas que correspondan a los sistemas lineales dados. Determine geométricamente si cada sistema tiene una solución única, un número infinito de soluciones o ninguna solución. Luego resuelva cada sistema algebraicamente para confirmar su respuesta.

15. $\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$ **16.** $\begin{aligned} x - 2y &= 7 \\ 3x + y &= 7 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} 3x - 6y &= 3 \\ -x + 2y &= 1 \end{aligned}$ **18.** $\begin{aligned} 0.10x - 0.05y &= 0.20 \\ -0.06x + 0.03y &= -0.12 \end{aligned}$

En los ejercicios 19-24, resuelva el sistema dado mediante sustitución hacia atrás.

19. $\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ y &= 3 \end{aligned}$ **20.** $\begin{aligned} 2u - 3v &= 5 \\ 2v &= 6 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2y - z &= 1 \\ 3z &= -1 \end{aligned}$ **22.** $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 - x_4 &= 0 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$ **24.** $\begin{aligned} x - 3y + z &= 5 \\ y - 2z &= -1 \end{aligned}$

Los sistemas en los ejercicios 25 y 26 muestran un patrón "triangular inferior" que las hace fáciles de resolver mediante sustitución hacia atrás. (La sustitución hacia adelante se encontrará nuevamente en el capítulo 3.) Resuelva estos sistemas.

25. $\begin{aligned} x &= 2 \\ 2x + y &= -3 \\ -3x - 4y + z &= -10 \end{aligned}$ **26.** $\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ -\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 &= 5 \\ \tfrac{3}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$

Encuentre las matrices aumentadas de los sistemas lineales en los ejercicios 27-30.

27. $\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$ **28.** $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} x + 5y &= -1 \\ -x + y &= -5 \\ 2x + 4y &= 4 \end{aligned}$ **30.** $\begin{aligned} a - 2b + d &= 2 \\ -a + b - c - 3d &= 1 \end{aligned}$

En los ejercicios 31 y 32, encuentre un sistema de ecuaciones lineales que tenga la matriz dada como su matriz aumentada.

31. $\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

32. $\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$

Para los ejercicios 33-38, resuelva los sistemas lineales en los ejercicios dados.

33. Ejercicio 27 **34.** Ejercicio 28

35. Ejercicio 29 **36.** Ejercicio 30

37. Ejercicio 31 **38.** Ejercicio 32

39. **(a)** Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales con las variables x y y cuyo conjunto solución esté dado por las ecuaciones paramétricas $x = t$ y $y = 3 - 2t$.

(b) Encuentre otra solución paramétrica para el sistema en el inciso (a) en el que el parámetro es s y $y = s$.

40. **(a)** Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales con las variables x_1, x_2 y x_3 cuyo conjunto solución esté dado por las ecuaciones paramétricas $x_1 = t$, $x_2 = 1 + t$ y $x_3 = 2 - t$.

(b) Encuentre otra solución paramétrica para el sistema en el inciso (a) en el que el parámetro es s y $x_3 = s$.

En los ejercicios 41-44, los sistemas de ecuaciones son no lineales. Encuentre sustituciones (cambios de variables) que conviertan cada sistema en un sistema lineal y use este último para ayudar a resolver el sistema dado.

41. $$\begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} &= 0 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} &= 1 \end{aligned}$$

42. $$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 &= 6 \\ x^2 - y^2 &= 3 \end{aligned}$$

43. $$\begin{aligned} \tan x - 2 \operatorname{sen} y \phantom{{}+ \cos z} &= 2 \\ \tan x - \operatorname{sen} y + \cos z &= 2 \\ \operatorname{sen} y - \cos z &= -1 \end{aligned}$$

44. $$\begin{aligned} -2^a + 2(3^b) &= 1 \\ 3(2^a) - 4(3^b) &= 1 \end{aligned}$$

2.2 Métodos directos para resolver sistemas lineales

En esta sección se verá un procedimiento sistemático general para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Este procedimiento se basa en la idea de reducir la matriz aumentada del sistema dado a una forma que luego pueda resolverse mediante sustitución hacia atrás. El método es *directo* en el sentido de que conduce directamente a la solución (si existe una) en un número finito de pasos. En la sección 2.5 se considerarán algunos métodos *indirectos* que funcionan en una forma completamente diferente.

Matrices y forma escalonada

Existen dos importantes matrices asociadas con un sistema lineal. La ***matriz de coeficientes*** contiene los coeficientes de las variables, y la ***matriz aumentada*** (que ya se encontró) es la matriz coeficiente aumentada por una columna adicional que contiene los términos constantes.

Para el sistema

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ x \phantom{{}+3y} + 5z &= 1 \\ -x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

la matriz de coeficientes es

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

y la matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Observe que si falta una variable (como y en la segunda ecuación), su coeficiente 0 se ingresa en la posición adecuada de la matriz. Si la matriz de coeficientes de un sistema lineal se denota con A y el vector columna de términos constantes con $\mathbf{b}$, entonces la forma de la matriz aumentada es $[A \mid \mathbf{b}]$.

Al resolver un sistema lineal, no siempre será posible reducir la matriz de coeficientes a la forma triangular, como se hizo en el ejemplo 2.6. Sin embargo, siempre se puede lograr un patrón en escalera en las entradas distintas de cero de la matriz final.

La palabra *escalonada* proviene de la palabra latina *scala*, que significa "escalera". La palabra francesa para "escalera", *échelle*, también se deriva de esta base latina. Una matriz en forma escalonada muestra un patrón en escalera.

Definición Una matriz está en ***forma escalonada por renglones*** si satisface las siguientes propiedades:

1. Cualquier renglón que consiste completamente de ceros está en la parte baja.
2. En cada renglón distinto de cero, el primer elemento distinto de cero (llamado ***elemento pivote***) está en una columna a la izquierda de cualquier elemento pivote bajo él.

Observe que estas propiedades garantizan que los elementos pivote formen un patrón en escalera. En particular, en cualquier columna que contenga un elemento pivote, todas las entradas bajo el elemento pivote son cero, como ilustran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.7

Las siguientes matrices están en forma escalonada por renglones:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Si una matriz en forma escalonada por renglones en realidad es la matriz aumentada de un sistema lineal, el sistema es bastante fácil de resolver mediante sustitución hacia atrás solamente.

Ejemplo 2.8

Si supone que cada una de las matrices en el ejemplo 2.7 es una matriz aumentada, escriba los sistemas correspondientes de ecuaciones lineales y resuélvalos.

Solución Recuerde primero que la última columna en una matriz aumentada es el vector de términos constantes. Entonces la primera matriz corresponde al sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 1 \\ -x_2 &= 2 \end{aligned}$$

(Advierta que se eliminó la última ecuación $0 = 0$ o $0x_1 + 0x_2 = 0$, que claramente es satisfecha por cualquier valor de x_1 y x_2.) La sustitución hacia atrás produce $x_2 = -2$ y entonces $2x_1 = 1 - 4(-2) = 9$, de modo que $x_1 = \frac{9}{2}$. La solución es $[\frac{9}{2}, -2]$.

La segunda matriz tiene el sistema correspondiente

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 1 \\ x_2 &= 5 \\ 0 &= 4 \end{aligned}$$

La última ecuación representa $0x_1 + 0x_2 = 4$, que claramente no tiene solución. Por tanto, el sistema no tiene soluciones. De igual modo, el sistema que corresponde a la cuarta matriz no tiene soluciones. Para el sistema que corresponde a la tercera matriz, se tiene

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

de modo que $x_1 = 1 - 2(3) - x_2 = -5 - x_2$. Existe un número infinito de soluciones, pues a x_2 se le puede asignar cualquier valor t para obtener la solución paramétrica $[-5 - t, t, 3]$.

Operaciones elementales con renglones

Ahora se describe el procedimiento mediante el cual cualquier matriz puede reducirse a una matriz en forma escalonada por renglones. Las operaciones permisibles, llamadas ***operaciones elementales con renglones***, corresponden a las operaciones que pueden realizarse sobre un sistema de ecuaciones lineales para transformarlo en un sistema equivalente.

Definición Las siguientes ***operaciones elementales con renglones*** pueden realizarse sobre una matriz:

1. Intercambiar dos renglones.
2. Multiplicar un renglón por una constante distinta de cero.
3. Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.

Observe que la división de un renglón entre una constante distinta de cero está implícita en la definición anterior pues, por ejemplo, dividir un renglón entre 2 es lo mismo que multiplicarlo por $\frac{1}{2}$. De igual modo, restar un múltiplo en un renglón de otro renglón es lo mismo que sumar un múltiplo negativo de un renglón a otro renglón.

Se usará la siguiente notación abreviada para las tres operaciones elementales con renglones:

1. $R_i \leftrightarrow R_j$ significa intercambiar renglones i y j.
2. kR_i significa multiplicar el renglón i por k.
3. $R_i + kR_j$ significa sumar k veces el renglón j al renglón i (y sustituir el renglón i con el resultado).

El proceso de aplicar operaciones elementales con renglones para llevar una matriz a la forma escalonada por renglones, llamado ***reducción de renglón***, se usa para reducir una matriz a la forma escalonada.

Ejemplo 2.9 Reduzca la siguiente matriz a forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución Trabaje columna por columna, de izquierda a derecha y de arriba abajo. La estrategia es crear un elemento pivote en una columna y luego usarlo para crear ceros abajo de él. El elemento elegido para convertirse en elemento pivote se llama simplemente ***pivote***, y esta fase del proceso se conoce como ***pivoteo***. Aunque no es estrictamente necesario, con frecuencia es conveniente usar la segunda operación elemental de renglón para convertir en 1 cada elemento pivote.

Comience por introducir ceros en la primera columna abajo del 1 pivote en el primer renglón:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 + R_1]{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 2R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Ahora la primera columna está como se quiere, de modo que la siguiente cosa por hacer es crear un elemento pivote en el segundo renglón, en busca del patrón en escalera de la forma escalonada. En este caso, se hace al intercambiar renglones. (También podría sumar los renglones 3 o 4 al renglón 2.)

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

El pivote esta vez fue -1. Ahora se crea un cero en la parte baja de la columna 2, usando el elemento pivote -1 en el renglón 2:

$$\xrightarrow{R_4 + 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 29 & 29 & -5 \end{bmatrix}$$

Ahora se hace la columna 2. Al notar que ya se tiene un elemento pivote en la columna 3, sólo se pivotea en el 8 para introducir un cero debajo de él. Esto es más sencillo si primero se divide el renglón 3 entre 8:

$$\xrightarrow{\frac{1}{8}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 29 & 29 & -5 \end{bmatrix}$$

Ahora use el 1 pivote en el renglón 3 para crear un cero debajo de él:

$$\xrightarrow{R_4 - 29R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

Con este paso final, la matriz se redujo a forma escalonada.

Comentarios

- La forma escalonada por renglones de una matriz no es única. (Encuentre una forma escalonada por renglones diferente para la matriz del ejemplo 2.9.)

- El elemento pivote en cada renglón se usa para crear los ceros debajo de él.
- Los pivotes no necesariamente son los elementos que están originalmente en las posiciones que al final ocupan los elementos pivote. En el ejemplo 2.9, los pivotes fueron 1, -1, 8 y 24. La matriz original tenía 1, 4, 2 y 5 en dichas posiciones sobre la "escalera".
- Una vez que se pivotea y se introducen ceros bajo el elemento pivote en una columna, dicha columna no cambia. En otras palabras, la forma escalonada por renglones surge de izquierda a derecha, de arriba abajo.

Las operaciones elementales con renglones son reversibles; esto es, pueden "deshacerse". Por ende, si alguna operación elemental con renglones convierte A en B, existe también una forma escalonada por renglones que convierte B en A. (Vea los ejercicios 15 y 16.)

Definición Las matrices A y B son ***equivalentes por renglones*** si existe una secuencia de operaciones elementales con renglones que convierta A en B.

Las matrices en el ejemplo 2.9,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

son equivalentes por renglones. Sin embargo, en general, ¿cómo puede decirse si dos matrices son equivalentes por renglones?

Teorema 2.1 Las matrices A y B son equivalentes por renglones si y sólo si pueden reducirse a la misma forma escalonada por renglones.

Demostración Si A y B son equivalentes por renglones, entonces más operaciones con renglones reducirán B (y por tanto a A) a la (misma) forma escalonada por renglones.

Recíprocamente, si A y B tienen la misma forma escalonada por renglones R, entonces, mediante operaciones elementales con renglones, puede convertirse A en R y B en R. Al invertir la última secuencia de operaciones, puede convertir R en B, y por tanto la secuencia $A \to R \to B$ logra el efecto deseado.

Comentario En la práctica, el Teorema 2.1 es más fácil de usar si R es la forma escalonada *reducida* por renglones de A y B, como se define en la página 79. Vea los ejercicios 17 y 18.

Eliminación gaussiana

Cuando se aplica la reducción por renglones a la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, se crea un sistema equivalente que puede resolverse mediante sustitución hacia atrás. Todo el proceso se conoce como ***eliminación gaussiana***.

Eliminación gaussiana

1. Escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales.
2. Use operaciones elementales con renglones para reducir la matriz aumentada a forma escalonada por renglones.
3. Con sustitución hacia atrás, resuelva el sistema equivalente que corresponda a la matriz reducida por renglones.

Comentario Cuando se realiza a mano, el paso 2 de la eliminación gaussiana permite muchas opciones. He aquí algunos lineamientos útiles:

(a) Localice la columna de la extrema izquierda que no sea toda ceros.

(b) Cree un elemento pivote en la parte superior de esta columna. (Por lo general será más sencillo si la convierte en 1 pivote. Vea el ejercicio 22.)

(c) Use el elemento pivote para crear ceros debajo de él.

(d) Cubra el renglón que contiene el elemento pivote y regrese al paso (a) para repetir el procedimiento sobre la submatriz restante. Deténgase cuando toda la matriz esté en forma escalonada por renglones.

Ejemplo 2.10

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

Solución La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right]$$

Proceda a reducir esta matriz a forma escalonada por renglones y siga los lineamientos dados para el paso 2 del proceso. La primera columna distinta de cero es la columna 1.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) es considerado generalmente uno de los tres más grandes matemáticos de todos los tiempos, junto con Arquímedes y Newton. Con frecuencia se le llama "príncipe de los matemáticos", un sobrenombre que merecía con creces. Niño prodigio, Gauss supuestamente era capaz de hacer aritmética antes de poder hablar. A la edad de 3 años, corrigió un error en los cálculos de su padre para la nómina de la compañía, y como joven estudiante descubrió la fórmula $n(n + 1)/2$ para la suma de los primeros n números naturales. Cuando tenía 19, demostró que podía construirse un polígono de 17 lados usando solamente regla y compás, y a los 21 demostró, en su disertación doctoral, que todo polinomio de grado n con coeficientes reales o complejos tenía exactamente n ceros, contando múltiples ceros: el teorema fundamental del álgebra.

La publicación en 1801 de Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, se considera generalmente el fundamento de la moderna teoría de números, pero hizo aportaciones a casi cada rama de las matemáticas, así como a la estadística, la física, la astronomía y la topografía. Gauss no publicó todos sus hallazgos, probablemente porque era muy crítico de su propio trabajo. Tampoco le gustaba dar clases y con frecuencia criticaba a otros matemáticos, acaso porque descubrió, mas no publicó, sus resultados antes que ellos.

El método llamado eliminación gaussiana lo conocían los chinos en el tercer siglo antes de Cristo, pero lleva el nombre de Gauss debido a su redescubrimiento en un ensayo en el que resolvió un sistema de ecuaciones lineales para describir la órbita de un asteroide.

Comience por crear un elemento pivote en la parte superior de esta columna; e intercambiar los renglones 1 y 3 es la mejor forma de lograr esto.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right]$$

Ahora cree un segundo cero en la primera columna, usando el 1 pivote:

$$\xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right]$$

Cubra ahora el primer renglón y repita el procedimiento. La segunda columna es la primera columna distinta de cero de la submatriz. Al multiplicar el renglón 2 por $\frac{1}{5}$ creará un 1 pivote.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right]$$

Ahora necesita otro cero en la parte baja de la columna 2:

$$\xrightarrow{R_3 - 2R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

La matriz aumentada ahora está en forma escalonada por renglones y se avanza al paso 3. El sistema correspondiente es

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

y la sustitución hacia atrás produce $x_3 = 3$, entonces $x_2 = 3 - x_3 = 3 - 2 = 1$, y finalmente $x_1 = -5 + x_2 + 2x_3 = -5 + 1 + 4 = 0$. La solución se escribe en forma vectorial como

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(A partir de ahora, las soluciones vectoriales de los sistemas lineales se escribirán como vectores columna. La razón de esto será clara en el capítulo 3.)

Ejemplo 2.11

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} w - x - y + 2z &= 1 \\ 2w - 2x - y + 3z &= 3 \\ -w + x - y &= -3 \end{aligned}$$

Solución La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

que puede reducirse por renglones del modo siguiente:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3+2R_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema asociado ahora es

$$\begin{aligned} w - x - y + 2z &= 1 \\ y - z &= 1 \end{aligned}$$

que tiene un número infinito de soluciones. Existe más de una forma de asignar parámetros, pero se procederá a usar sustitución hacia atrás, y escribir las variables correspondientes a los elementos pivote (las ***variables pivote***) en términos de las otras variables (las ***variables libres***).

En este caso, las variables pivote son w y y, y las variables libres son x y z. Por tanto, $y = 1 + z$, y a partir de esto se obtiene

$$\begin{aligned} w &= 1 + x + y - 2z \\ &= 1 + x + (1 + z) - 2z \\ &= 2 + x - z \end{aligned}$$

Si se asignan los parámetros $x = s$ y $z = t$, la solución puede escribirse en forma vectorial como

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + s - t \\ s \\ 1 + t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El ejemplo 2.11 destaca una propiedad muy importante: en un sistema consistente, las variables libres son las que no son variables pivote. Dado que el número de variables pivote es el número de renglones distintos de cero en la forma escalonada por renglones de la matriz de coeficientes, puede predecirse el número de variables libres (parámetros) antes de encontrar la solución explícita con el uso de sustitución hacia atrás. En el capítulo 3 se probará que, aunque la forma escalonada por renglones de una matriz no es única, el número de renglones distintos de cero es el mismo en *todas* las formas escalonadas por renglones de una matriz dada. Por tanto, tiene sentido dar un nombre a este número.

Definición El ***rank*** de una matriz es el número de renglones distintos de cero en su forma escalonada por renglones.

El rank de una matriz A se denotará mediante rank(A). En el ejemplo 2.10, el rank de la matriz de coeficientes es 3, y en el ejemplo 2.11, el rank de la matriz de coeficientes es 2. Las observaciones recién realizadas justifican el siguiente teorema, que se demostrará con más generalidad en los capítulos 3 y 6.

Teorema 2.2 **El teorema del rank**

Sea A la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales con n variables. Si el sistema es consistente, entonces

$$\text{número de variables libres} = n - \text{rank}(A)$$

Por tanto, en el ejemplo 2.10, se tiene $3 - 3 = 0$ variables libres (en otras palabras, una solución *única*), y en el ejemplo 2.11, se tiene $4 - 2 = 2$ variables libres, como se encontró.

Ejemplo 2.12 Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ 2x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Solución Cuando la matriz aumentada se reduce por renglones, se tiene

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - 2R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

lo que conduce a la ecuación imposible $0 = 5$. (También podría hacerse $R_3 - \frac{2}{3}R_2$ como la segunda operación elemental con renglones, lo que daría la misma contradicción pero una forma escalonada por renglones diferente.) Por tanto, el sistema no tiene soluciones: es inconsistente.

Wilhelm Jordan (1842–1899) fue un profesor alemán de geodesia cuyas aportaciones a la resolución de sistemas lineales fue un método sistemático de sustitución hacia atrás estrechamente relacionado con el descrito aquí.

Eliminación de Gauss-Jordan

Una modificación de la eliminación gaussiana simplifica enormemente la fase de sustitución hacia atrás y es particularmente útil cuando se hacen cálculos a mano en un sistema con un número infinito de soluciones. Esta variante, conocida como ***eliminación de Gauss-Jordan***, se apoya en reducir aún más la matriz aumentada.

Definición Una matriz está en ***forma escalonada reducida por renglones*** si satisface las siguientes propiedades:

1. Está en forma escalonada por renglones.
2. El elemento pivote en cada renglón distinto de cero es 1 (llamado ***1 pivote***).
3. Cada columna que contiene un 1 pivote tiene ceros en todos los otros lugares.

La siguiente matriz está en forma escalonada reducida por renglones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para matrices de 2×2, las posibles formas escalonadas reducidas por renglones son

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde * puede ser cualquier número.

Es claro que, después de que una matriz se reduce a forma escalonada, posteriores operaciones elementales con renglones la llevarán a la forma escalonada reducida por renglones. Lo que no es claro (aunque la intuición puede sugerirlo) es que, a diferencia de la forma escalonada por renglones, la forma escalonada reducida por renglones de una matriz es *única*.

Para una demostración breve de que la forma escalonada reducida por renglones de una matriz es única, vea el artículo de Thomas Yuster, "The Reduced Row Echelon Form of a Matrix Is Unique: A Simple Proof", en el número de marzo de 1984 de *Mathematics Magazine* (vol. 57, núm. 2, pp. 93-94).

En la eliminación de Gauss-Jordan, se procede como en la eliminación gaussiana, pero la matriz aumentada se reduce a la forma escalonada *reducida* por renglones.

Eliminación de Gauss-Jordan

1. Escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales.
2. Use operaciones elementales con renglones para reducir la matriz aumentada a la forma escalonada reducida por renglones.
3. Si el sistema resultante es consistente, resuelva para las variables pivote en términos de cualquier variable libre restante.

Ejemplo 2.13

Resuelva el sistema en el ejemplo 2.11 mediante eliminación de Gauss-Jordan.

Solución La reducción procede como se hizo en el ejemplo 2.11, hasta que se llega a la forma escalonada:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ahora debe crear un cero arriba del 1 pivote en el segundo renglón, tercera columna. Esto se hace al sumar el renglón 2 al renglón 1 para obtener

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ahora el sistema se reduce a

$$\begin{aligned} w - x \qquad + z &= 2 \\ y - z &= 1 \end{aligned}$$

Ahora es mucho más fácil resolver para las variables pivote:

$$w = 2 + x - z \qquad \text{y} \qquad y = 1 + z$$

Si se asignan los parámetros $x = s$ y $z = t$ como antes, la solución puede escribirse en forma vectorial como

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + s - t \\ s \\ 1 + t \\ t \end{bmatrix}$$

Comentario Desde un punto de vista computacional, es más eficiente (en el sentido de que requiere menos cálculos) primero reducir la matriz a forma escalonada por renglones y luego, *de derecha a izquierda*, convertir cada elemento pivote a 1 y crear ceros arriba de dichos 1 pivote. Sin embargo, para cálculo manual, descubrirá que es más sencillo sólo trabajar de izquierda a derecha y crear los 1 pivote y los ceros en sus columnas conforme avance.

Regrese a la geometría que lo llevó a este punto. Así como los sistemas de ecuaciones lineales en dos variables corresponden a rectas en $\mathbb{R}^2$, del mismo modo las ecuaciones lineales en tres variables corresponden a planos en $\mathbb{R}^3$. De hecho, muchas preguntas acerca de rectas y planos pueden responderse al resolver un sistema lineal adecuado.

Ejemplo 2.14

Encuentre la recta de intersección de los planos $x + 2y - z = 3$ y $2x + 3y + z = 1$.

Solución Primero, observe que *habrá* una recta de intersección, pues los vectores normales de los dos planos, $[1, 2, -1]$ y $[2, 3, 1]$, no son paralelos. Los puntos que yacen en la intersección de los dos planos corresponden a los puntos en el conjunto solución del sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x + 3y + z &= 1 \end{aligned}$$

Aplicar la eliminación de Gauss-Jordan a la matriz aumentada produce

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_2]{R_1 + 2R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right]$$

Al sustituir variables se tiene

$$\begin{aligned} x \qquad + 5z &= -7 \\ y - 3z &= 5 \end{aligned}$$

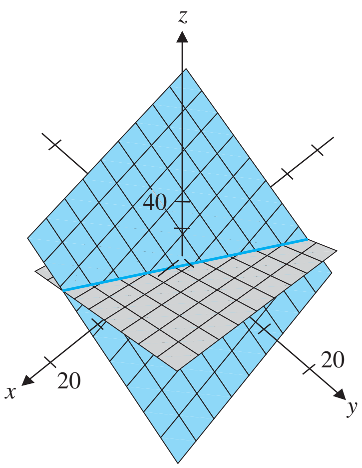


Figura 2.2
La intersección de dos planos

La variable libre z se iguala al parámetro t y por tanto se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los dos planos:

$$\begin{aligned} x &= -7 - 5t \\ y &= 5 + 3t \\ z &= t \end{aligned}$$

En forma vectorial, la ecuación es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vea la figura 2.2.

Ejemplo 2.15

Sea $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Determine si las rectas $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{u}$ y $\mathbf{x} = \mathbf{q} + t\mathbf{v}$ se intersectan y, si es así, encuentre su punto de intersección.

Solución Debe tener cuidado. Aunque t se usó como el parámetro en las ecuaciones de ambas rectas, éstas son independientes y, por tanto, lo son sus parámetros. Use un parámetro diferente (por decir, s) para la primera recta, de modo que su ecuación se convierte en $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u}$. Si las rectas se intersectan, entonces se quiere encontrar $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ que satisfaga ambas ecuaciones simultáneamente. Esto es, se quiere $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} = \mathbf{q} + t\mathbf{v}$ o $s\mathbf{u} - t\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$.

Al sustituir los $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dados, se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} s - 3t &= -1 \\ s + t &= 2 \\ s + t &= 2 \end{aligned}$$

cuya solución se encuentra fácilmente que es $s = \frac{5}{4}$, $t = \frac{3}{4}$. Por tanto, el punto de intersección es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \tfrac{5}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

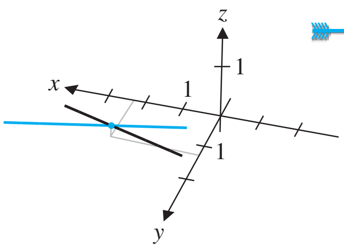


Figura 2.3
Dos rectas que se intersectan

Vea la figura 2.3. (Compruebe que al sustituir $t = \frac{3}{4}$ en la otra ecuación produce el mismo punto.)

Comentario En $\mathbb{R}^3$, es posible que dos rectas se intersecten en un punto, que sean paralelas o ninguna de las dos. Las rectas no paralelas que no se intersectan se llaman *rectas alabeadas*.

Sistemas homogéneos

Se vio que todo sistema de ecuaciones lineales no tiene soluciones tiene una solución única o tiene un número infinito de soluciones. Sin embargo, hay un tipo de sistema que siempre tiene al menos una solución.

Definición Un sistema de ecuaciones lineales se denomina ***homogéneo*** si el término constante en cada ecuación es cero.

En otras palabras, un sistema homogéneo tiene una matriz aumentada de la forma $[A \mid \mathbf{0}]$. El siguiente sistema es homogéneo:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 0 \\ -x + 5y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Dado que un sistema homogéneo no puede no tener solución (¡disculpe la doble negación!), tendrá o una solución única (a saber, la solución cero o trivial) o un número infinito de soluciones. El siguiente teorema dice que el último caso *debe* ocurrir si el número de variables es mayor que el número de ecuaciones.

Teorema 2.3 Si $[A \mid \mathbf{0}]$ es un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n variables, donde $m < n$, entonces el sistema tiene un número infinito de soluciones.

Demostración Dado que el sistema tiene al menos la solución cero, es consistente. Además, $\operatorname{rank}(A) \le m$ (¿por qué?). Por el teorema del rank se tiene

$$\text{número de variables libres} = n - \operatorname{rank}(A) \ge n - m > 0$$

De modo que existen al menos una variable libre y, por tanto, un número infinito de soluciones.

Nota El Teorema 2.3 no dice algo acerca del caso donde $m \ge n$. El ejercicio 44 le pide dar ejemplos para demostrar que, en este caso, puede haber una solución única o un número infinito de soluciones.

Sistemas lineales sobre $\mathbb{Z}_p$

$\mathbb{R}$ y $\mathbb{Z}_p$ son ejemplos de *campos*. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ y el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ son otros ejemplos. Los campos se estudian con detalle en los cursos de álgebra abstracta.

Hasta el momento, todos los sistemas lineales encontrados involucraron números reales, y en concordancia las soluciones han sido vectores en algún $\mathbb{R}^n$. Se vio cómo surgen otros sistemas numéricos, notablemente $\mathbb{Z}_p$. Cuando p es un número primo, $\mathbb{Z}_p$ se comporta en muchas aspectos como $\mathbb{R}$; en particular, es posible sumar, restar, multiplicar y dividir (por números distintos de cero). Por ende, también pueden resolverse sistemas de ecuaciones lineales cuando las variables y coeficientes pertenecen a algún $\mathbb{Z}_p$. En tal caso, se hace referencia a resolver un sistema *sobre* $\mathbb{Z}_p$.

Por ejemplo, la ecuación lineal $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, cuando se ve como una ecuación sobre $\mathbb{Z}_2$, tiene exactamente cuatro soluciones:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(donde la última solución surge porque $1 + 1 + 1 = 1$ en $\mathbb{Z}_2$).

Cuando la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ se ve sobre $\mathbb{Z}_3$, las soluciones $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ son

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Compruebe esto.)

Pero no es necesario usar métodos de ensayo y error; la reducción por renglones de las matrices aumentadas funciona igual de bien sobre $\mathbb{Z}_p$ que sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.16

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales sobre $\mathbb{Z}_3$.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 \phantom{{}+2x_2} + x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Solución La primera cosa a notar en ejemplos como este es que no se necesitan resta y división; puede lograr los mismos efectos al usar suma y multiplicación. (Sin embargo, esto requiere que comience a trabajar sobre $\mathbb{Z}_p$, donde p es un primo; vea el ejercicio 60 al final de esta sección y el ejercicio 57 en la sección 1.1.)

Reduzca por renglones la matriz aumentada del sistema y use cálculos en módulo 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 + 2R_2]{R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[2R_3]{R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto, la solución es $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$.

Ejemplo 2.17 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales sobre $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Solución La reducción por renglones procede del modo siguiente:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_5+R_1]{R_2+R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{R_1 + R_2 \\ R_5 + R_2}]{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4+R_3]{R_2+R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Al hacer la variable libre $x_4 = t$ produce

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dado que t puede tomar los dos valores 0 y 1, existen exactamente dos soluciones:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Comentario Para sistemas lineales sobre $\mathbb{Z}_p$, nunca puede haber un número infinito de soluciones. (¿Por qué no?) En vez de ello, cuando hay más de una solución, el número de soluciones es finito y es función del número de variables libres y p. (Vea el ejercicio 59.)

Ejercicios 2.2

En los ejercicios 1-8, determine si la matriz dada está en forma escalonada por renglones. Si lo está, indique si también está en forma escalonada reducida por renglones.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 9-14, use operaciones elementales con renglones para reducir la matriz dada a (a) forma escalonada por renglones y (b) forma escalonada reducida por renglones.

9. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 6 \\ 3 & -6 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} -2 & 6 & -7 \\ 3 & -9 & 10 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

15. Invierta las operaciones elementales con renglones usadas en el ejemplo 2.9 para demostrar que puede convertir

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} \text{ en}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

16. En general, ¿cuál es la operación elemental con renglones que "deshace" cada una de las tres operaciones elementales con renglones $R_i \leftrightarrow R_j$, kR_i y $R_i + kR_j$?

En los ejercicios 17 y 18, demuestre que las matrices dadas son equivalentes por renglones y encuentre una secuencia de operaciones elementales con renglones que convertirán A en B.

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

19. ¿Qué está mal con la siguiente "demostración" de que toda matriz con al menos dos renglones es equivalente por renglones a una matriz con un renglón cero?

Realice $R_2 + R_1$ y $R_1 + R_2$. Ahora los renglones 1 y 2 son idénticos. Ahora realice $R_2 - R_1$ para obtener un renglón de ceros en el segundo renglón.

20. ¿Cuál es el efecto neto de realizar la siguiente secuencia de operaciones elementales con renglones sobre una matriz (con al menos dos renglones)?

$$R_2 + R_1, R_1 - R_2, R_2 + R_1, -R_1$$

21. Los estudiantes frecuentemente realizan el siguiente tipo de cálculo para introducir un cero en una matriz:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{3R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Sin embargo, $3R_2 - 2R_1$ *no* es una operación elemental con renglones. ¿Por qué no? demuestre cómo lograr el mismo resultado usando operaciones elementales con renglones.

22. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Demuestre que cualquiera de los tres tipos de operaciones elementales con renglones puede usarse para crear un 1 pivote en la parte superior de la primera columna. ¿Cuál prefiere y por qué?

23. ¿Cuál es el rank de cada una de las matrices en los ejercicios 1-8?

24. ¿Cuáles son las posibles formas escalonadas reducidas por renglones de las matrices de 3×3?

En los ejercicios 25-34, resuelva el sistema de ecuaciones dado usando eliminación gaussiana o de Gauss-Jordan.

25. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} x + 2y &= -1 \\ 2x + y + z &= 1 \\ -x + y - z &= -1 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} 3w + 3x + y &= 1 \\ 2w + x + y + z &= 1 \\ 2w + 3x + y - z &= 2 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} 2r + s &= 3 \\ 4r + s &= 7 \\ 2r + 5s &= -1 \end{aligned}$

30. $\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 8x_4 &= -4 \end{aligned}$

31. $\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 - x_3 - 6x_4 &= 2 \\ \tfrac{1}{6}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - 3x_4 + x_5 &= -1 \\ \tfrac{1}{3}x_1 - 2x_3 - 4x_5 &= 8 \end{aligned}$

32. $\begin{aligned} \sqrt{2}x + y + 2z &= 1 \\ \sqrt{2}y - 3z &= -\sqrt{2} \\ -y + \sqrt{2}z &= 1 \end{aligned}$

33. $\begin{aligned} w + x + 2y + z &= 1 \\ w - x - y + z &= 0 \\ x + y &= -1 \\ w + x + z &= 2 \end{aligned}$

34. $\begin{aligned} a + b + c + d &= 10 \\ a + 2b + 3c + 4d &= 30 \\ a + 3b + 6c + 10d &= 65 \\ a + 4b + 8c + 15d &= 93 \end{aligned}$

En los ejercicios 35-38, determine por inspección (esto es: sin realizar cálculo alguno) si un sistema lineal con la matriz aumentada dada tiene una solución única, un número infinito de soluciones o ninguna solución. Justifique sus respuestas.

35. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

36. $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right]$

37. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 0 \end{array}\right]$

38. $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{array}\right]$

12. Demuestre que, si $ad - bc \neq 0$, entonces el sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s \end{aligned}$$

tiene una solución única.

En los ejercicios 40-43, ¿para qué valor(es) de k, si hay alguno, los sistemas tendrán (a) ninguna solución, (b) una solución única y (c) un número infinito de soluciones?

40. $kx + y = -2$
$2x - 2y = 4$

41. $x + ky = 1$
$kx + y = 1$

42. $x + y + z = 2$
$x + 4y - z = k$
$2x - y + 4z = k^2$

43. $x + y + kz = 1$
$x + ky + z = 1$
$kx + y + z = -2$

44. Proporcione ejemplos de sistemas homogéneos de m ecuaciones lineales con n variables con $m = n$ y con $m > n$ que tengan (a) un número infinito de soluciones y (b) una solución única.

En los ejercicios 45 y 46, encuentre la recta de intersección de los planos dados.

45. $3x + 2y + z = -1$ y $2x - y + 4z = 5$

46. $4x + y - z = 0$ y $2x - y + 3z = 4$

47. **(a)** Proporcione un ejemplo de tres planos que tengan una recta de intersección común (figura 2.4).

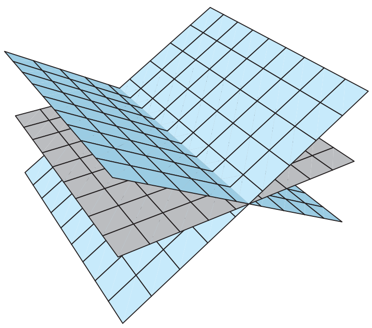


Figura 2.4

(b) Proporcione ejemplos de tres planos que se intersecten en pares, pero que no tengan un punto común de intersección (figura 2.5).

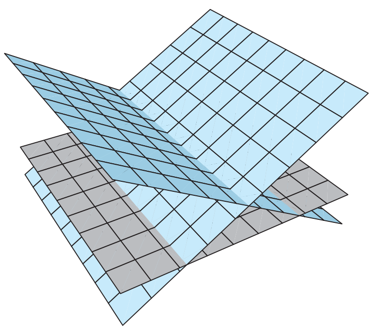


Figura 2.5

(c) Proporcione un ejemplo de tres planos, exactamente dos de los cuales son paralelos (figura 2.6).

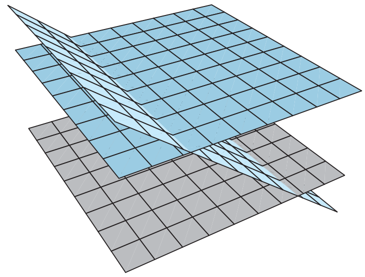


Figura 2.6

(d) Proporcione un ejemplo de tres planos que se intersecten en un solo punto (figura 2.7).

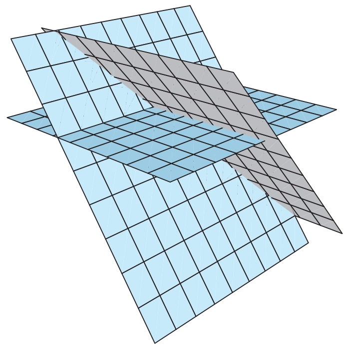


Figura 2.7

En los ejercicios 48 y 49, determine si las rectas $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{x} = \mathbf{q} + t\mathbf{v}$ *se intersectan y, si lo hacen, encuentre su punto de intersección.*

48. $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

49. $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

50. Sean $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Describa todos los puntos $Q = (a, b, c)$ tales que la recta a través de Q con vector director $\mathbf{v}$ intersecta la recta con la ecuación $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u}$.

51. Recuerde que el producto cruz de dos vectores **u** y **v** es un vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ que es ortogonal tanto a **u** como a **v**. (Vea la Exploración: "el producto cruz" en el capítulo 1.) Si

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

demuestre que existe un número infinito de vectores

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

que simultáneamente satisfacen $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$ y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$ y que todos son múltiplos de

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$$

52. Sean $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Demuestre que las rectas $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u}$ y $\mathbf{x} = \mathbf{q} + t\mathbf{v}$ son rectas oblícuas. Encuentre las ecuaciones vectoriales de un par de planos paralelos, uno que contenga a cada recta.

En los ejercicios 53-58, resuelva los sistemas de ecuaciones lineales sobre el $\mathbb{Z}_p$ indicado.

53. $\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_3$

54. $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y + z &= 0 \\ x + z &= 1 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_2$

55. $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y + z &= 0 \\ x + z &= 1 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_3$

56. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ x + 4y &= 1 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_5$

57. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ x + 4y &= 1 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_7$

58. $\begin{aligned} x_1 + 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_5$

59. Demuestre el siguiente corolario del teorema del rank: sea A una matriz de $m \times n$ con elementos en $\mathbb{Z}_p$. Cualquier sistema consistente de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes A tiene exactamente $p^{n-\operatorname{rank}(A)}$ soluciones sobre $\mathbb{Z}_p$.

60. Cuando p no es primo, se necesita cuidado adicional para resolver un sistema lineal (o, de hecho, cualquier ecuación) sobre $\mathbb{Z}_p$. Con la eliminación gaussiana, resuelva el siguiente sistema sobre $\mathbb{Z}_6$ ¿Qué complicaciones surgen?

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 4x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

Exploración

Mentiras que me dice mi computadora

Las computadoras y calculadoras almacenan números reales en *formato de punto flotante*. Por ejemplo, 2001 se almacena como 0.2001×10^4, y -0.00063 se almacena como -0.63×10^{-3}. En general, el formato de punto flotante de un número es $\pm M \times 10^k$, donde k es un entero y la *mantisa* M es un número real (decimal) que satisface $0.1 \leq M < 1$.

El número máximo de lugares decimales que pueden almacenarse en la mantisa dependen de la computadora, calculadora o sistema de álgebra computacional. Si el número máximo de lugares decimales que pueden almacenarse es d, se dice que existen d *dígitos significativos*. Muchas calculadoras almacenan 8 o 12 dígitos significativos; las computadoras pueden almacenar más, pero todavía está sujeto a un límite. Cualquier dígito que no se almacene se omite (en cuyo caso se dice que los números están *truncados*) o se usa para *redondear* el número a d dígitos significativos.

Por ejemplo, $\pi \approx 3.141592654$, y su formato en punto flotante es 0.3141592654×10^1. En una computadora que trunca a cinco dígitos significativos, π se almacenaría como 0.31415×10^1 (y se mostraría como 3.1415); una computadora que redondee a cinco dígitos significativos almacenaría π como 0.31416×10^1 (y mostraría 3.1416). Cuando el dígito eliminado es un solitario 5, el último dígito restante se redondea, de modo que se vuelve par. Por ende, redondeado a dos dígitos significativos, 0.735 se convierte en 0.74, mientras que 0.725 se convierte en 0.72.

Siempre que ocurre truncamiento o redondeo, se introduce un *error de redondeo*, que puede tener un efecto dramático sobre los cálculos. Mientras más operaciones se realicen, más errores se acumulan. En ocasiones, por desgracia, no hay nada que se pueda hacer. Esta exploración ilustra este fenómeno con sistemas muy simples de ecuaciones lineales.

1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales *exactamente* (esto es: trabaje con números racionales a lo largo de los cálculos).

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + \tfrac{801}{800}y &= 1 \end{aligned}$$

2. Como decimal, $\frac{801}{800} = 1.00125$, de modo que, redondeado a cinco dígitos significativos, el sistema se convierte en

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + 1.0012y &= 1 \end{aligned}$$

Con una calculadora o CAS, resuelva este sistema y redondee el resultado de cada cálculo a cinco dígitos significativos.

3. Resuelva el sistema dos veces más, y primero redondee a cuatro dígitos significativos y luego a tres dígitos significativos. ¿Qué ocurre?

4. Claramente, un error de redondeo muy pequeño (menor o igual a 0.00125) puede resultar en errores muy grandes en la solución. Explique geométricamente por qué. (Considere las gráficas de los diversos sistemas lineales que resolvió en los problemas 1-3.)

Los sistemas como el recién trabajado se llaman ***mal condicionados***. Son extremadamente sensibles a errores de redondeo y no hay mucho que se pueda hacer al respecto. En los capítulos 3 y 7 se encontrarán nuevamente sistemas mal condicionados. He aquí otro ejemplo para experimentar:

$$\begin{aligned} 4.552x + 7.083y &= 1.931 \\ 1.731x + 2.693y &= 2.001 \end{aligned}$$

Juguetee con varias cantidades de dígitos significativos para ver qué ocurre, a partir de ocho dígitos significativos (si puede).

Pivoteo parcial

En la Exploración "Mentiras que me dice mi computadora", se vio que los sistemas lineales mal condicionados causan problemas cuando ocurren errores de redondeo. En esta exploración descubrirá otra forma en la que los sistemas lineales son sensibles al error de redondeo y verá que cambios muy pequeños en los coeficientes pueden conducir a enormes imprecisiones en la solución. Por fortuna, hay algo que puede hacer para minimizar o incluso eliminar este problema (a diferencia del problema con los sistemas mal condicionados).

1. (a) Resuelva la ecuación lineal sencilla $0.00021x = 1$ para x.

   (b) Suponga que su calculadora puede acarrear sólo cuatro dígitos significativos. La ecuación se redondeará a $0.0002x = 1$. Resuelva esta ecuación.

La diferencia entre las respuestas de los incisos (a) y (b) puede considerarse como efecto de un error de 0.00001 en la solución de la ecuación dada.

2. Ahora extienda esta idea a un sistema de ecuaciones lineales.

   (a) Con eliminación gaussiana, resuelva el sistema lineal

$$\begin{aligned} 0.400x + 99.6y &= 100 \\ 75.3x - 45.3y &= 30.0 \end{aligned}$$

   con tres dígitos significativos. Comience por pivotear en 0.400 y lleve cada cálculo a tres dígitos significativos. Debe obtener la "solución" $x = -1.00$, $y = 1.01$. Compruebe que la solución real es $x = 1.00$, $y = 1.00$. ¡Este es un error enorme, de -200% en el valor de x! ¿Puede descubrir qué lo causó?

   (b) Resuelva nuevamente el sistema del inciso (a), esta vez intercambiando las dos ecuaciones (o, de manera equivalente, los dos renglones de su matriz aumentada) y pivotee en 75.3. De nuevo, lleve cada cálculo a tres dígitos significativos. ¿Cuál es la solución esta vez?

La moraleja de la historia es que, cuando se usa eliminación gaussiana o de Gauss-Jordan para obtener una solución numérica de un sistema de ecuaciones lineales (esto es: una aproximación decimal), debe elegir el pivote con cuidado. Específicamente, en cada paso de pivoteo, elija de entre todos los pivotes posibles en una columna el elemento con el valor absoluto más grande. Use intercambios de renglones para llevar este elemento a la posición correcta y úselo para crear ceros donde se necesite en la columna. Esta estrategia se conoce como ***pivoteo parcial***.

3. Resuelva los siguientes sistemas mediante eliminación gaussiana, primero sin y luego con pivoteo parcial. Lleve cada cálculo a tres dígitos significativos. (Se proporcionan las soluciones exactas.)

(a) $\begin{aligned} 0.001x + 0.995y &= 1.00 \\ -10.2x + 1.00y &= -50.0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 10x - 7y &= 7 \\ -3x + 2.09y + 6z &= 3.91 \\ 5x - y + 5z &= 6 \end{aligned}$

Solución exacta: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$ Solución exacta: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ -1.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$

Operaciones de conteo: introducción al análisis de algoritmos

Las eliminaciones gaussiana y de Gauss-Jordan son ejemplos de ***algoritmos***: procedimientos sistemáticos diseñados para implementar una tarea particular; en este caso, la reducción por renglones de la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales. Los algoritmos son particularmente adecuados para su implementación en computadoras, pero no todos los algoritmos se crean igual. Además de la rapidez, memoria y otros atributos del sistema de cómputo en el que corren, algunos algoritmos son más rápidos que otros. Una medida de la llamada *complejidad* de un algoritmo (una medida de su eficiencia o capacidad para realizar su tarea en un número razonable de pasos) es el número de operaciones básicas que realiza como función del número de variables que se ingresan.

Examine esta proposición en el caso de los dos algoritmos que se tienen para resolver un sistema lineal: eliminación gaussiana y de Gauss-Jordan. Para este propósito, las operaciones básicas son multiplicación y división; se supondrá que todas las otras operaciones se realizan con mucha más rapidez y pueden ignorarse. (Esta es una suposición razonable, mas no se intentará justificarla.) Considere sólo sistemas de ecuaciones con matrices de coeficientes *cuadradas*, de modo que, si la matriz de coeficientes es $n \times n$, el número de variables de entrada es n. Por ende, su tarea es encontrar el número de operaciones realizadas mediante eliminación gaussiana y de Gauss-Jordan como función de n. Más aún, no se preocupe por casos especiales que puedan surgir; en vez de ello, establezca el *peor caso* que pueda surgir: cuando el algoritmo tarda tanto como sea posible. Dado que esto proporcionará una estimación del tiempo que tardará una computadora en realizar el algoritmo (si se sabe cuánto tarda una computadora en realizar una sola operación), el número de operaciones realizadas por un algoritmo se denotará $T(n)$. Por lo general estará interesado en $T(n)$ para valores grandes de n, de modo que comparar esta función para diferentes algoritmos le permitirá determinar cuál tarda menos tiempo en ejecutarse.

Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (c. 780–850) fue un matemático persa cuyo libro *Hisab al-jabr w'al muqabalah* (c. 825) describió el uso de los numerales indoarábigos y las reglas de la aritmética básica. La segunda palabra del título del libro dio origen a la palabra *álgebra*, y la palabra *algoritmo* se deriva del nombre de al-Khwarizmi.

1. Considere la matriz aumentada

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 6 & 12 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Cuente el número de operaciones requeridas para llevar $[A \mid \mathbf{b}]$ a la forma escalonada por renglones

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

(Por "operación" se entiende una multiplicación o una división.) Ahora cuente el número de operaciones necesarias para completar la fase de sustitución hacia atrás de la eliminación gaussiana. Registre el número total de operaciones.

2. Cuente el número de operaciones necesarias para realizar la eliminación de Gauss-Jordan; esto es: reducir $[A \mid \mathbf{b}]$ a su forma escalonada reducida por renglones

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

(donde se introducen ceros en cada columna inmediatamente después de crear el 1 pivote en dicha columna). ¿Qué sugieren sus respuestas acerca de la eficiencia relativa de los dos algoritmos?

Ahora se tratará de analizar los algoritmos en una forma general sistemática. Suponga que la matriz aumentada $[A \mid \mathbf{b}]$ surge de un sistema lineal con n ecuaciones y n variables; por tanto, $[A \mid \mathbf{b}]$ es $n \times (n + 1)$:

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Suponga que los intercambios de renglón nunca se necesitan, que siempre puede crear un 1 pivote a partir de un pivote al dividir entre el pivote.

3. (a) Demuestre que se necesitan n operaciones para crear el primer 1 pivote:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \cdots & * & * \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

(¿Por qué no necesita contar una operación para la creación del 1 pivote?) Ahora demuestre que se necesitan n operaciones para obtener el primer cero en la columna 1:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

(¿Por qué no necesita contar una operación para la creación del cero mismo?) Cuando la primera columna se ha "barrido", se tiene la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * & * \end{array}\right]$$

Demuestre que el número total de operaciones necesarias hasta este punto es $n + (n - 1)n$.

(b) Demuestre que el número total de operaciones necesarias para alcanzar la forma escalonada por renglones

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * \end{array}\right]$$

es

$$[n + (n-1)n] + [(n-1) + (n-2)(n-1)] + [(n-2) + (n-3)(n-2)] + \cdots + [2 + 1 \cdot 2] + 1$$

que se simplifica a

$$n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2$$

(c) Demuestre que el número de operaciones necesarias para completar la fase de sustitución hacia atrás es

$$1 + 2 + \cdots + (n-1)$$

(d) Con las fórmulas de suma para las sumas en los incisos (b) y (c) (vea los ejercicios 51 y 52 de la sección 2.4 y el apéndice B), demuestre que el número total de operaciones, $T(n)$, realizadas mediante eliminación gaussiana es

$$T(n) = \tfrac{1}{3}n^3 + n^2 - \tfrac{1}{3}n$$

Dado que cada función polinominal está dominada por su término pivote para valores grandes de la variable, se ve que $T(n) \approx \frac{1}{3}n^3$ para grandes valores de n.

4. Demuestre que la eliminación de Gauss-Jordan tiene $T(n) \approx \frac{1}{2}n^3$ operaciones totales si se crean ceros arriba y abajo del 1 pivote conforme avanza. (Esto demuestra que, para sistemas grandes de ecuaciones lineales, la eliminación gaussiana es más rápida que esta versión de la eliminación de Gauss-Jordan.)

2.3 Conjuntos generadores e independencia lineal

El segundo de los tres caminos en el "trivium" trata con combinaciones lineales de vectores. Se vio que es posible ver la resolución de un sistema de ecuaciones lineales como preguntar si cierto vector es una combinación lineal de otros vectores. Esta idea se explora con más detalle en esta sección. Conduce a algunos conceptos muy importantes que se encontrarán repetidamente en capítulos posteriores.

Conjuntos generadores de vectores

Ahora se puede responder con facilidad la pregunta planteada en la sección 1.1: ¿cuándo un vector dado es una combinación lineal de otros vectores dados?

Ejemplo 2.18

(a) ¿El vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ es una combinación lineal de los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$?

(b) ¿$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ es una combinación lineal de los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$?

Solución

(a) Se quiere encontrar escalares x y y tales que

$$x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Al desarrollar, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ y &= 2 \\ 3x - 3y &= 3 \end{aligned}$$

cuya matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

(Observe que las columnas de la matriz aumentada son sólo los vectores dados; note el orden de los vectores, en particular, cuál vector es el vector constante.)

La forma escalonada reducida de esta matriz es

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(Verifique esto.) De modo que la solución es $x = 3$, $y = 2$, y la correspondiente combinación lineal es

$$3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(b) Al usar la observación del inciso (a), se obtiene un sistema lineal cuya matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{array}\right]$$

que se reduce a

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

lo que revela que el sistema no tiene solución. Por tanto, en este caso, $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ no es una combinación lineal de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

La noción de conjunto generador está íntimamente conectada con la solución de sistemas lineales. Revise de nuevo el ejemplo 2.18. Ahí se vio que un sistema con matriz aumentada $[A \mid \mathbf{b}]$ tiene una solución precisamente cuando $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de las columnas de A. Este es un hecho general que se resume en el siguiente teorema.

Teorema 2.4 Un sistema de ecuaciones lineales con matriz aumentada $[A \mid \mathbf{b}]$ es consistente si y sólo si $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de las columnas de A.

Revise nuevamente el ejemplo 2.4 e interprételo a la luz del Teorema 2.4.

(a) El sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

tiene la solución única $x = 2, y = 1$. Por tanto,

$$2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vea la figura 2.8(a).

(b) El sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x - 2y &= 4 \end{aligned}$$

tiene un número infinito de soluciones de la forma $x = 2 + t, y = t$. Esto implica que

$$(2 + t)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

para todos los valores de t. Geométricamente, los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ son todos paralelos y por tanto todos yacen a lo largo de la misma recta que pasa por el origen [vea la figura 2.8(b)].

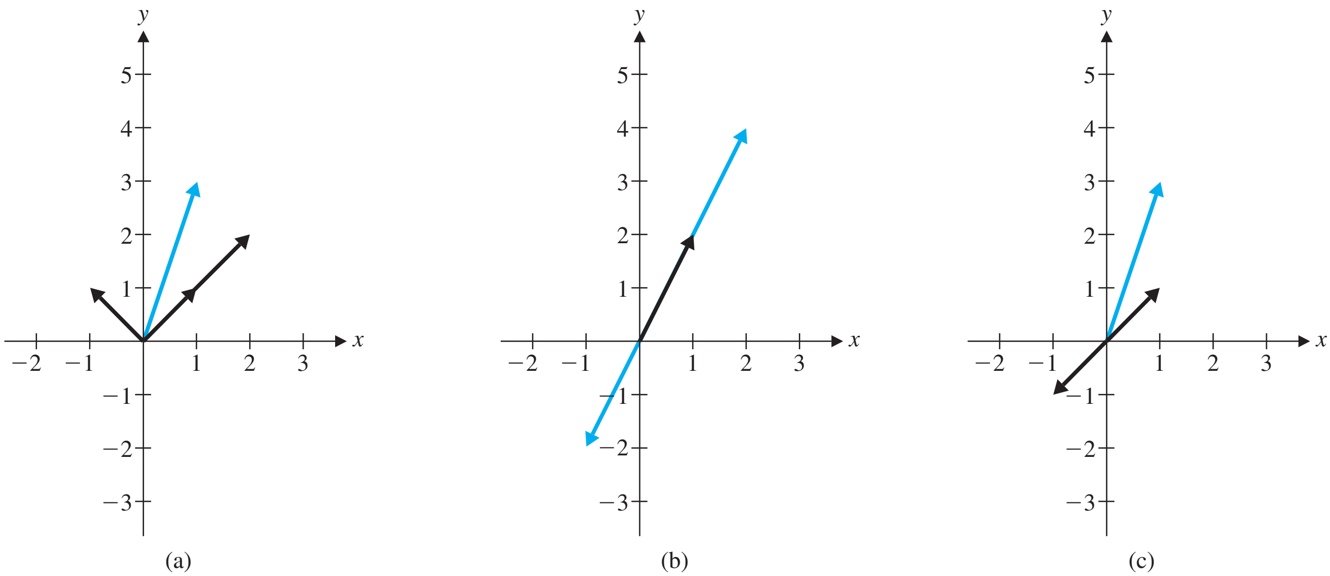


Figura 2.8

(c) El sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$

no tiene soluciones, de modo que no hay valores de x y y que satisfagan

$$x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

En este caso, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ son paralelos, pero $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ no yace a lo largo de la misma recta que pasa por el origen [vea la figura 2.8(c)].

Con frecuencia se estará interesado en la colección de *todas* las combinaciones lineales de un conjunto dado de vectores.

Definición Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ se llama el ***generador*** de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ y se denota mediante gen $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ o gen(S). Si gen $(S) = \mathbb{R}^n$, entonces S se llama ***conjunto generador*** de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.19

Demuestre que $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$.

Solución Necesita demostrar que un vector arbitrario $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ puede escribirse como una combinación lineal de $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$; esto es, debe demostrar que la ecuación $x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ siempre puede resolverse para x y y (en términos de a y b), sin importar los valores de a y b.

La matriz aumentada es $\left[\begin{array}{rr|c} 2 & 1 & a \\ -1 & 3 & b \end{array}\right]$ y la reducción por renglones produce

$$\left[\begin{array}{rr|c} 2 & 1 & a \\ -1 & 3 & b \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{rr|c} -1 & 3 & b \\ 2 & 1 & a \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + 2R_1} \left[\begin{array}{rr|c} -1 & 3 & b \\ 0 & 7 & a + 2b \end{array}\right]$$

en cuyo punto es claro que el sistema tiene una solución (única). (¿Por qué?) Si continúa, obtiene

$$\xrightarrow{\frac{1}{7}R_2} \left[\begin{array}{rr|c} -1 & 3 & b \\ 0 & 1 & (a + 2b)/7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 3R_2} \left[\begin{array}{rr|c} -1 & 0 & (b - 3a)/7 \\ 0 & 1 & (a + 2b)/7 \end{array}\right]$$

de donde se ve que $x = (3a - b)/7$ y $y = (a + 2b)/7$. Por tanto, para cualquier elección de a y b, se tiene

$$\left(\frac{3a - b}{7}\right)\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \left(\frac{a + 2b}{7}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

(Compruebe esto.)

Comentario También es cierto que $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}\right)$: si, dado $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, puede encontrar x y y tales que $x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, entonces también se tiene $x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. De hecho, cualquier conjunto de vectores que *contenga* un conjunto generador para $\mathbb{R}^2$ también será un conjunto generador para $\mathbb{R}^2$ (vea el ejercicio 20).

El siguiente ejemplo es un importante caso (sencillo) de un conjunto generador. Muchas veces encontrará versiones de este ejemplo.

Ejemplo 2.20

Sean $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, y $\mathbf{e}_3$ los vectores unitarios estándar en $\mathbb{R}^3$. Entonces, para cualquier vector $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, se tiene

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

Por tanto, $\mathbb{R}^3 = \text{gen}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

No debe tener dificultad para ver que, en general, $\mathbb{R}^n = \text{gen}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Cuando el generador de un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ no es todo de $\mathbb{R}^n$, es razonable pedir una descripción del generador de los vectores.

Ejemplo 2.21

Encuentre el generador de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. (Vea el ejemplo 2.18.)

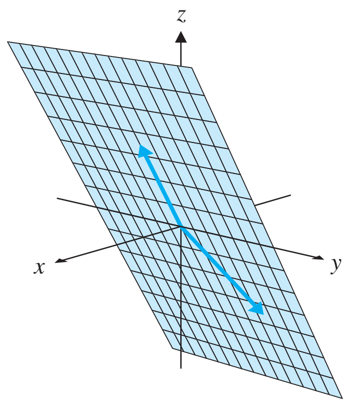


Figura 2.9
Dos vectores no paralelos generan un plano

Solución Al pensar geométricamente, puede ver que el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}$ es justo el plano que pasa por el origen con $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}$ como vectores directores (figura 2.9). La ecuación vectorial de este plano es $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}$, que es sólo otra forma de decir que $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ está en el generador de $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}$.

Suponga que quiere obtener la ecuación general de este plano. Existen muchas formas de proceder. Una es usar el hecho de que la ecuación $ax + by + cz = 0$ debe ser satisfecha por los puntos $(1, 0, 3)$ y $(-1, 1, -3)$ determinados por los vectores directores. Entonces la sustitución conduce a un sistema de ecuaciones en a, b y c. (Vea el ejercicio 17.)

Otro método es usar el sistema de ecuaciones que surgen de la ecuación vectorial:

$$\begin{aligned} s - t &= x \\ t &= y \\ 3s - 3t &= z \end{aligned}$$

Si la matriz aumentada se reduce por renglones, se obtiene

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & -3 & z \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 3R_1} \left[\begin{array}{rr|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z - 3x \end{array}\right]$$

Ahora se sabe que este sistema es inconsistente, pues $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ *está* en el generador de $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}$ por suposición. De modo que se *debe* tener $z - 3x = 0$, (o $3x - z = 0$, en la forma más estándar), lo que da la ecuación general que se busca.

Comentario Un vector normal al plano en este ejemplo también está dado por el producto cruz

$$\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$$

Independencia lineal

En el ejemplo 2.18 se encontró que $3\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$. Abrevie esta ecuación como $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = \mathbf{w}$. El vector $\mathbf{w}$ "depende" de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en el sentido de que es una combinación lineal de ellos. Se dice que un conjunto de vectores es ***linealmente dependiente*** si uno de ellos puede escribirse como una combinación lineal de los otros. Note que también se tiene $\mathbf{u} = -\frac{2}{3}\mathbf{v} + \frac{1}{3}\mathbf{w}$ y $\mathbf{v} = -\frac{3}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{w}$. Para franquear la cuestión de cuál vector expresar en términos del resto, a continuación se enuncia la definición formal:

Definición Un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ es ***linealmente dependiente*** si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$, *al menos uno de los cuales no es cero*, tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Un conjunto de vectores que no es linealmente dependiente se llama ***linealmente independiente***.

Comentarios

- En la definición de independencia lineal, el requisito de que al menos uno de los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$ debe ser distinto de cero admite la posibilidad de que alguno puede ser cero. En el ejemplo anterior, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son linealmente dependientes, pues $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$ y, de hecho, *todos* los escalares son distintos de cero. Por otra parte,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de modo que $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ son linealmente dependientes, pues al menos uno (de hecho, dos) de los tres escalares 1, -2 y 0 es distinto de cero. (Note que la dependencia real surge simplemente del hecho de que los primeros dos vectores son múltiplos.) (Vea el ejercicio 44.)

- Dado que $0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ para *cualesquiera* vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, la dependencia lineal en esencia dice que el vector cero puede expresarse como una combinación lineal *no trivial* de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$. Por tanto, independencia lineal significa que el vector cero puede expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ *sólo* en la forma trivial: $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ sólo si $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_k = 0$.

La relación entre la noción intuitiva de dependencia y la definición formal se proporciona en el siguiente teorema. ¡Felizmente, las dos nociones son equivalentes!

Teorema 2.5 Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ en $\mathbb{R}^n$ son linealmente dependientes si y sólo si al menos uno de los vectores puede expresarse como una combinación lineal de los otros.

Demostración Si uno de los vectores, por ejemplo, $\mathbf{v}_1$ es una combinación lineal de los otros, entonces existen escalares $c_2, \ldots, c_m$ tales que $\mathbf{v}_1 = c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$. Al reordenar, se obtiene $\mathbf{v}_1 - c_2\mathbf{v}_2 - \cdots - c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$, lo que implica que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ son linealmente dependientes, pues al menos uno de los escalares (a saber, el coeficiente 1 de $\mathbf{v}_1$) es distinto de cero.

Por el contrario, suponga que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ son linealmente dependientes. Entonces existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_m$, no todos cero, tales que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$. Suponga $c_1 \neq 0$. Entonces

$$c_1\mathbf{v}_1 = -c_2\mathbf{v}_2 - \cdots - c_m\mathbf{v}_m$$

y se pueden multiplicar ambos lados por $1/c_1$ para obtener $\mathbf{v}_1$ como una combinación lineal de los otros vectores:

$$\mathbf{v}_1 = -\left(\frac{c_2}{c_1}\right)\mathbf{v}_2 - \cdots - \left(\frac{c_m}{c_1}\right)\mathbf{v}_m$$

Nota Parece como si se hiciera un poco de trampa en esta demostración. Después de todo, no puede estar seguro de que $\mathbf{v}_1$ es una combinación lineal de los otros vectores, ni que c_1 es distinto de cero. Sin embargo, el argumento es análogo para algún otro vector $\mathbf{v}_i$ o para un escalar c_j diferente. Alternativamente, puede reetiquetar las cosas de modo que funcionen como en la demostración anterior. En una situación como ésta, un matemático puede comenzar por decir, "sin pérdida de generalidad, puede suponer que $\mathbf{v}_1$ es una combinación lineal de los otros vectores" y luego proceder como antes.

Ejemplo 2.22

Cualquier conjunto de vectores que contenga el vector cero es linealmente dependiente. Pues si $\mathbf{0}, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ están en $\mathbb{R}^n$, entonces puede encontrar una combinación no trivial de la forma $c_1\mathbf{0} + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$ al hacer $c_1 = 1$ y $c_2 = c_3 = \cdots = c_m = 0$.

Ejemplo 2.23

Determine si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Solución Al responder cualquier pregunta de este tipo, es buena idea ver si puede determinar por inspección si un vector es una combinación lineal de los otros. ¡Pensar un poco puede ahorrar muchos cálculos!

(a) La única forma en que los dos vectores pueden ser linealmente dependientes es si uno es múltiplo del otro. (¿Por qué?) Claramente, estos dos vectores no son múltiplos, de modo que son linealmente independientes.

(b) No hay aquí una relación de dependencia obvia, así que se tratará de encontrar escalares c_1, c_2, c_3 tales que

$$c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema lineal correspondiente es

$$\begin{aligned} c_1 + \; c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 &= 0 \\ c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

y la matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Una vez más, se hace la observación fundamental de que ¡las columnas de la matriz de coeficientes son justo los vectores en cuestión!

La forma escalonada reducida por renglones es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(compruebe esto), de modo que $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$. Por tanto, los vectores dados son linealmente independientes.

(c) Un poco de reflexión revela que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de modo que los tres vectores son linealmente dependientes. [Establezca un sistema lineal como en el inciso (b) para comprobar esto algebraicamente.]

(d) Una vez más, no se observa dependencia obvia, así que se procede directamente a reducir un sistema lineal homogéneo cuya matriz aumentada tiene como sus columnas los vectores dados:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_3 - R_2 \\ -R_2}]{R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Si se hace que los escalares sean c_1, c_2 y c_3, se tiene

$$\begin{aligned} c_1 \quad + 3c_3 &= 0 \\ c_2 - 2c_3 &= 0 \end{aligned}$$

de donde se ve que el sistema tiene un número infinito de soluciones. En particular, debe haber una solución distinta de cero, de modo que los vectores dados son linealmente dependientes.

Si continúa, puede describir estas soluciones exactamente: $c_1 = -3c_3$ y $c_2 = 2c_3$. Por tanto, para cualquier valor distinto de cero de c_3, se tiene la relación de dependencia lineal

$$-3c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 2c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Una vez más, compruebe que esto es correcto.)

Este procedimiento se resume para probar la independencia lineal como teorema.

Teorema 2.6 Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ vectores (columna) en $\mathbb{R}^n$ y sea A la matriz de $n \times m$ $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_m]$ con dichos vectores como sus columnas. Entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ son linealmente dependientes si y sólo si el sistema lineal homogéneo con matriz aumentada $[A \mid \mathbf{0}]$ tiene una solución no trivial.

Demostración $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ son linealmente dependientes si y sólo si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_m$, no todos cero, tales que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$. Por el Teorema 2.4, esto es equivalente a decir que el vector distinto de cero $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$ es una solución del sistema cuya matriz aumentada es $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_m \mid \mathbf{0}]$.

Ejemplo 2.24

Los vectores unitarios estándar $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$, pues el sistema con matriz aumentada $[\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3 \,|\, \mathbf{0}]$ ya está en la forma escalonada reducida por renglones

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

y por tanto claramente sólo tiene la solución trivial. En general, se ve que $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ serán linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$.

Al realizar operaciones elementales con renglones sobre una matriz se construyen combinaciones lineales de los renglones. Puede usar este hecho para encontrar otra forma de probar la independencia lineal para vectores.

Ejemplo 2.25

Considere los tres vectores del ejemplo 2.23(d) como vectores *renglón*:

$$[1, 2, 0], \quad [1, 1, -1] \quad \text{y} \quad [1, 4, 2]$$

Construya una matriz con estos vectores como sus renglones y proceda a reducirla a forma escalonada. Cada vez que cambia un renglón, el nuevo renglón se denota al agregar un símbolo de prima:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3' = R_3 - R_1]{R_2' = R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3'' = R_3' + 2R_2'} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir de esto se ve que

$$\mathbf{0} = R_3'' = R_3' + 2R_2' = (R_3 - R_1) + 2(R_2 - R_1) = -3R_1 + 2R_2 + R_3$$

o, en términos de los vectores originales,

$$-3[1, 2, 0] + 2[1, 1, -1] + [1, 4, 2] = [0, 0, 0]$$

[Note que este planteamiento corresponde a tomar $c_3 = 1$ en la solución del ejemplo 2.23(d).]

Por tanto, los renglones de una matriz serán linealmente dependientes si pueden usarse operaciones elementales con renglones para crear un renglón cero. Este hallazgo se resume del modo siguiente:

Teorema 2.7

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ vectores (renglón) en $\mathbb{R}^n$ y sea A la matriz de $m \times n$ $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{bmatrix}$ con dichos vectores como sus renglones. Entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ son linealmente dependientes si y sólo si rango$(A) < m$.

Demostración Suponga que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ son linealmente dependientes. Entonces, por el Teorema 2.2, al menos uno de los vectores puede escribirse como una combinación lineal de los otros. Reetiquete los vectores, si es necesario, de modo que pueda escribir $\mathbf{v}_m$

$= c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{m-1}\mathbf{v}_{m-1}$. Entonces las operaciones elementales con renglones $R_m - c_1R_1, R_m - c_2R_2, \ldots, R_m - c_{m-1}R_{m-1}$ aplicadas a A crearán un renglón cero en el renglón m. Por tanto, rango$(A) < m$.

Por el contrario, suponga que rango$(A) < m$. Entonces existe alguna secuencia de operaciones con renglones que crearán un renglón cero. Puede usar un argumento de sustitución sucesiva análogo al que se utilizó en el ejemplo 2.25 para demostrar que $\mathbf{0}$ es una combinación lineal no trivial de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. Por tanto, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ son linealmente dependientes.

En algunas situaciones, puede deducir que un conjunto de vectores es linealmente dependiente sin hacer trabajo alguno. Una de tales situaciones es cuando el vector cero está en el conjunto (como en el ejemplo 2.22). Otra es cuando hay "demasiados" vectores para que sean independientes. El siguiente teorema resume este caso. (En el capítulo 6 se verá una versión más precisa de este resultado.)

Teorema 2.8 Cualquier conjunto de m vectores en $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente si $m > n$.

Demostración Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ vectores (columna) en $\mathbb{R}^n$ y sea A la matriz $n \times m$ $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_m]$ con dichos vectores como sus columnas. Por el Teorema 2.6, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ son linealmente dependientes si y sólo si el sistema lineal homogéneo con matriz aumentada $[A \mid \mathbf{0}]$ tiene una solución no trivial. Pero, de acuerdo con el Teorema 2.6, este siempre será el caso si A tiene más columnas que renglones; es el caso aquí, pues el número de columnas m es mayor que el número de renglones n.

Ejemplo 2.26

Los vectores $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ son linealmente dependientes, pues no pueden existir más de dos vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$. (Note que si quiere encontrar la relación de dependencia real entre estos tres vectores, debe resolver el sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes tenga los vectores dados como columnas. ¡Hágalo!)

Ejercicios 2.3

En los ejercicios 1-6, determine si el vector $\mathbf{v}$ *es una combinación lineal de los vectores restantes.*

1. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$

2. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}2\\-6\end{bmatrix}$

3. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

4. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

5. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},$
$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

CAS **6.** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}2.2\\4.0\\-2.2\end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1.0\\0.5\\-0.5\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}2.4\\1.2\\3.1\end{bmatrix},$
$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}1.2\\-2.3\\4.8\end{bmatrix}$

En los ejercicios 7 y 8, determine si el vector **b** *está en el generador de las columnas de la matriz A.*

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$

9. Demuestre que $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$.

10. Demuestre que $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$.

11. Demuestre que $\mathbb{R}^3 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

12. Demuestre que $\mathbb{R}^3 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

En los ejercicios 13-16, describa el generador de los vectores dados (a) geométricamente y (b) algebraicamente.

13. $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

17. La ecuación general del plano que contiene los puntos $(1, 0, 3)$, $(-1, 1, -3)$ y el origen es de la forma $ax + by + cz = 0$. Resuelva para a, b y c.

18. Demuestre que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ están todos en $\text{gen}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.

19. Demuestre que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ están todos en $\text{gen}(\mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w})$.

20. **(a)** Demuestre que si $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ son vectores en $\mathbb{R}^n$, $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$, y $T = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_m\}$, entonces; $\text{gen}(S) \subseteq \text{gen}(T)$. [*Sugerencia:* vuelva a escribir esta ecuación en términos de combinaciones lineales.]

(b) Deduzca que, si $\mathbb{R}^n = \text{gen}(S)$, entonces $\mathbb{R}^n = \text{gen}(T)$ también.

21. **(a)** Suponga que el vector $\mathbf{w}$ es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ y que cada $\mathbf{u}_i$ es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$. Demuestre que $\mathbf{w}$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ y por tanto $\text{gen}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) \subseteq \text{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$.

(b) En el inciso (a), suponga además que cada $\mathbf{v}_j$ también es una combinación lineal de $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$. Demuestre que $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) = \text{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$.

(c) Use el resultado del inciso (b) para demostrar que

$$\mathbb{R}^3 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

[*Sugerencia:* Se sabe que $\mathbb{R}^3 = \text{gen}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.]

Use el método del ejemplo 2.23 y el Teorema 2.6 para determinar si los conjuntos de vectores en los ejercicios 22-31 son linealmente independientes. Si, para alguno de ellos la respuesta puede determinarse por inspección (esto es, sin cálculo), establezca por qué. Para cualquier conjunto que sea linealmente dependiente, encuentre una relación de dependencia entre los vectores.

22. $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 32-41, determine si los conjuntos de vectores en el ejercicio dado son linealmente independientes al convertir los vectores a vectores renglón y usar el método del ejemplo

2.25 y el Teorema 2.7. Para cualquier conjunto que sea linealmente independiente, encuentre una relación de dependencia entre los vectores.

32. Ejercicio 22 **33.** Ejercicio 23

34. Ejercicio 24 **35.** Ejercicio 25

36. Ejercicio 26 **37.** Ejercicio 27

38. Ejercicio 28 **39.** Ejercicio 29

40. Ejercicio 30 **41.** Ejercicio 31

42. (a) Si las columnas de una matriz A de $n \times n$ son linealmente independientes como vectores en $\mathbb{R}^n$, ¿cuál es el rank de A? Explique.

(b) Si los renglones de una matriz A de $n \times n$ son linealmente independientes como vectores en $\mathbb{R}^n$, ¿cuál es el rank de A? Explique.

43. (a) Si los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son linealmente independientes, ¿$\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ y $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ también son linealmente independientes? Justifique su respuesta.

(b) Si los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son linealmente independientes, ¿$\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{w}$ también son linealmente independientes? Justifique su respuesta.

44. Demuestre que dos vectores son linealmente dependientes si y sólo si uno es un múltiplo escalar del otro. [*Sugerencia:* considere por separado el caso en que uno de los vectores es $\mathbf{0}$.]

45. Ofrezca una "demostración de vector renglón" del Teorema 2.8.

46. Demuestre que todo subconjunto de un conjunto linalmente independiente es linealmente independiente.

47. Suponga que $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}\}$ es un conjunto de vectores en algún $\mathbb{R}^n$ y que $\mathbf{v}$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$.. Si $S' = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, demuestre que gen$(S)$ = gen(S'). [*Sugerencia:* el ejercicio 21(b) es útil aquí.]

48. Sea $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores en $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v}$ un vector en $\mathbb{R}^n$. Suponga que $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$ con $c_1 \neq 0$. Pruebe que $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es linealmente independiente.

2.4 Aplicaciones

Existen demasiadas aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales para hacerles justicia en una sola sección. Esta sección presentará algunas aplicaciones para ilustrar la diversidad de escenarios en que surgen.

Asignación de recursos

Una gran cantidad de aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales involucran asignar recursos limitados sujetos a un conjunto de restricciones.

Ejemplo 2.27 Una bióloga colocó tres cepas de bacterias (denominadas I, II y III) en un tubo de ensayo, donde se alimentarán de tres diferentes fuentes alimenticias (A, B y C). Cada día, 2300 unidades de A, 800 unidades de B y 1500 unidades de C se colocan en el tubo de ensayo y cada bacteria consume cierto número de unidades de cada alimento por día, como se muestra en la tabla 2.2. ¿Cuántas bacterias de cada cepa pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir todo el alimento?

Tabla 2.2

	Bacteria cepa I	Bacteria cepa II	Bacteria cepa III
Alimento A	2	2	4
Alimento B	1	2	0
Alimento C	1	3	1

Solución Sean x_1, x_2 y x_3 los números de bacterias de las cepas I, II y III, respectivamente. Dado que cada una de las bacterias x_1 de la cepa I consumen 2 unidades de A por día, la cepa I consume un total de $2x_1$ unidades por día. De igual modo, las cepas II y III consumen un total de $2x_2$ y $4x_3$ unidades de alimento A diariamente. Puesto que se quiere consumir las 2300 unidades de A, se tiene la ecuación

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2300$$

Del mismo modo, se obtienen ecuaciones correspondientes para el consumo de B y C:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 800 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1500 \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables. La reducción por renglones de la matriz aumentada correspondiente produce

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2300 \\ 1 & 2 & 0 & 800 \\ 1 & 3 & 1 & 1500 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 1 & 350 \end{array}\right]$$

En consecuencia, $x_1 = 100$, $x_2 = 350$ y $x_3 = 350$. La bióloga debe colocar 100 bacterias de cepa I y 350 de cada una de las cepas II y II en su tubo de ensayo si quiere que consuman todo el alimento.

Ejemplo 2.28

Repita el ejemplo 2.27 y use los datos de consumo diario de alimento (unidades por día) que se muestran en la tabla 2.3. Suponga esta vez que en el tubo de ensayo se colocan diariamente 1500 unidades de A, 3000 unidades de B y 4500 unidades de C.

Tabla 2.3

	Bacteria cepa I	Bacteria cepa II	Bacteria cepa III
Alimento A	1	1	1
Alimento B	1	2	3
Alimento C	1	3	5

Solución Sean nuevamente x_1, x_2 y x_3 los números de bacterias de cada tipo. La matriz aumentada para el sistema lineal resultante y la correspondiente forma escalonada reducida son

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1500 \\ 1 & 2 & 3 & 3000 \\ 1 & 3 & 5 & 4500 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se ve que, en este caso, se tiene más de una solución, dadas por

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 1500 \end{aligned}$$

Al hacer $x_3 = t$, se obtiene $x_1 = t$, $x_2 = 1500 - 2t$ y $x_3 = t$. En cualquier problema de aplicación, debe tener cuidado de interpretar adecuadamente las soluciones. Ciertamente el número de bacterias no puede ser negativo. Por tanto, $t \geq 0$ y $1500 - 2t \geq 0$. La última desigualdad implica que $t \leq 750$, de modo que se tiene $0 \leq t \leq 750$. Presumiblemente, el número de bacterias debe ser un número entero, de modo que existen exactamente 751 valores de t que satisfacen la desigualdad. Por ende, las 751 soluciones son de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1500 - 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1500 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

una para cada valor entero de t tal que $0 \leq t \leq 750$.(De este modo, aunque matemáticamente este sistema tiene un número infinito de soluciones, *físicamente* sólo existe un número finito.)

Balanceo de ecuaciones químicas

Cuando ocurre una reacción química, ciertas moléculas (los *reactivos*) se combinan para formar nuevas moléculas (los *productos*). Una ***ecuación química balanceada*** es una ecuación algebraica que proporciona los números relativos de reactivos y productos en la reacción, y tiene el mismo número de átomos de cada tipo en los lados izquierdo y derecho. La ecuación usualmente se escribe con los reactivos a la izquierda, los productos a la derecha y una flecha entre ellos para mostrar la dirección de la reacción.

Por ejemplo, para la reacción en la que se combinan gas hidrógeno (H_2) y oxígeno (O_2) para formar agua (H_2O), una ecuación química balanceada es

$$2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$$

que indica que dos moléculas de hidrógeno se combinan con una molécula de oxígeno para formar dos moléculas de agua. Observe que la ecuación está balanceada, pues existen cuatro átomos de hidrógeno y dos átomos de oxígeno en cada lado. Note que nunca habrá una sola ecuación balanceada para una reacción, pues cualquier múltiplo entero positivo de una ecuación balanceada también lo estará. Por ejemplo, $6H_2 + 3O_2 \longrightarrow 6H_2O$ también está balanceada. Por tanto, por lo general se busca la ecuación balanceada *más simple* para una reacción dada.

Aunque frecuentemente ensayo y error funcionan en los ejemplos simples, el proceso de balancear ecuaciones químicas en realidad involucra resolver un sistema homogéneo de ecuaciones lineales, de modo que pueden usarse las técnicas desarrolladas para remover las conjeturas.

Ejemplo 2.29

La combustión de amoniaco (NH_3) en oxígeno produce nitrógeno (N_2) y agua. Encuentre una ecuación química balanceada para esta reacción.

Solución Si el número de moléculas de amoniaco, oxígeno, nitrógeno y agua se denotan w, x, y y z, respectivamente, entonces se busca una ecuación de la forma

$$wNH_3 + xO_2 \longrightarrow yN_2 + zH_2O$$

Al comparar el número de átomos de nitrógeno, hidrógeno y oxígeno en los reactivos y productos, se obtienen tres ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} &\text{Nitrógeno:} && w = 2y \\ &\text{Hidrógeno:} && 3w = 2z \\ &\text{Oxígeno:} && 2x = z \end{aligned}$$

Al reescribir estas ecuaciones en forma estándar se obtiene un sistema homogéneo de tres ecuaciones lineales con cuatro variables. [Note que el Teorema 2.3 garantiza que tal sistema tendrá (un número infinito de) soluciones no triviales.] Reduzca la correspondiente matriz aumentada mediante eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} w \quad\quad - 2y \quad\quad &= 0 \\ 3w \quad\quad\quad\quad -2z &= 0 \\ 2x \quad\quad - z &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$$

Por tanto, $w = \frac{2}{3}z$, $x = \frac{1}{2}z$ y $y = \frac{1}{3}z$. El valor positivo más pequeño de z que producirá valores *enteros* para las cuatro variables es el mínimo común denominador de las fracciones $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, a saber, 6, lo que produce $w = 4$, $x = 3$, $y = 2$ y $z = 6$. Por tanto, la ecuación química balanceada es

$$4NH_3 + 3O_2 \longrightarrow 2N_2 + 6H_2O$$

Análisis de redes

Muchas situaciones prácticas originan redes: redes de transporte, redes de comunicaciones y redes económicas, por nombrar algunas. De particular interés son los posibles *flujos* a través de las redes. Por ejemplo, los vehículos que fluyen a través de una red de carreteras, la información que fluye a través de una red de datos, y los bienes y servicios que fluyen a través de una red económica.

En este texto, una ***red*** consistirá de un número finito de ***nodos*** (también llamados ***uniones*** o ***vértices***) conectados mediante una serie de aristas dirigidas llamadas ***ramas*** o ***arcos***. Cada rama se marcará con un ***flujo*** que representa la cantidad de algún objeto que puede fluir a lo largo o a través de cada rama en la dirección indicada. (Piense en los automóviles que viajan a lo largo de una red de calles de un sentido.) La regla fundamental que gobierna el flujo a través de una red es la ***conservación del flujo***:

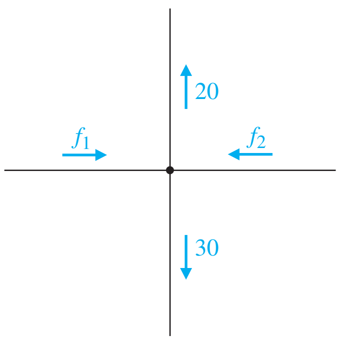


Figura 2.10
Flujo en un nodo: $f_1 + f_2 = 50$

En cada nodo, el flujo de entrada es igual al flujo de salida.

La figura 2.10 muestra una porción de una red, con dos ramas que entran a un nodo y dos que salen. La regla de conservación del flujo implica que el flujo entrante total, $f_1 + f_2$ unidades, debe coincidir con el flujo saliente total, $20 + 30$ unidades. Por tanto, se tiene la ecuación lineal $f_1 + f_2 = 50$ que corresponde a este nodo.

Puede analizar el flujo a través de toda una red al construir dichas ecuaciones y resolver el sistema resultante de ecuaciones lineales.

Ejemplo 2.30

Describa los posibles flujos a través de la red de tuberías de agua que se muestra en la figura 2.11, donde el flujo se mide en litros por minuto.

Solución En cada nodo, escriba la ecuación que representa la conservación del flujo. Luego reescriba cada ecuación con las variables a la izquierda y la constante a la derecha, para obtener un sistema lineal en forma estándar.

$$\begin{array}{ll} \text{Node } A\text{:} & 15 = f_1 + f_4 \\ \text{Node } B\text{:} & f_1 = f_2 + 10 \\ \text{Node } C\text{:} & f_2 + f_3 + 5 = 30 \\ \text{Node } D\text{:} & f_4 + 20 = f_3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rcl} f_1 \quad\quad\quad + f_4 &=& 15 \\ f_1 - f_2 \quad\quad\quad\quad &=& 10 \\ f_2 + f_3 \quad\quad &=& 25 \\ f_3 - f_4 &=& 20 \end{array}$$

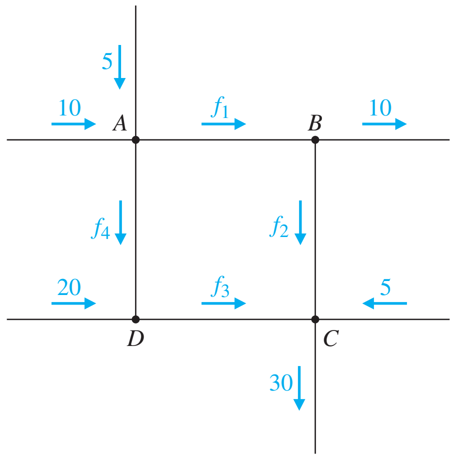


Figura 2.11

Con eliminación de Gauss-Jordan, reduzca la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(Compruebe esto.) Se ve que existe una variable libre, f_4, de modo que se tiene un número infinito de soluciones. Al hacer $f_4 = t$ y expresar las variables pivote en términos de f_4, se obtiene

$$\begin{aligned} f_1 &= 15 - t \\ f_2 &= 5 - t \\ f_3 &= 20 + t \\ f_4 &= \phantom{20 + {}} t \end{aligned}$$

Estas ecuaciones describen todos los flujos posibles y permiten analizar la red. Por ejemplo, se ve que, si se controla el flujo en la rama AD de modo que $t = 5$ L/min, entonces los otros flujos son $f_1 = 10, f_2 = 0$, y $f_3 = 25$.

Puede hacerlo todavía mejor. Puede encontrar los posibles flujos mínimo y máximo en cada rama. Cada uno de los flujos debe ser no negativo. Al examinar la primera y segunda ecuaciones a la vez, se ve que $t \leq 15$ (de otro modo f_1 sería negativo) y $t \leq 5$ (de otro modo f_2 sería negativo). La segunda de estas desigualdades es más restrictiva que la primera, de modo que debe usarla. La tercera ecuación no aporta más restricciones al parámetro t, así se deduce que $0 \leq t \leq 5$. Al combinar este resultado con las cuatro ecuaciones, se ve que

$$\begin{aligned} 10 \leq f_1 &\leq 15 \\ 0 \leq f_2 &\leq 5 \\ 20 \leq f_3 &\leq 25 \\ 0 \leq f_4 &\leq 5 \end{aligned}$$

Ahora se tiene una descripción completa de los posibles flujos a través de esta red.

Redes eléctricas

Las redes eléctricas son un tipo especializado de red que proporciona información acerca de fuentes de energía, como las baterías, y dispositivos impulsados por dichas fuentes, como las bombillas eléctricas o motores. Una fuente de energía "fuerza" a una corriente de electrones a fluir a través de la red, donde encuentran varios *resistores*, cada uno de los cuales requiere que se aplique cierta cantidad de fuerza para que la corriente fluya a través de él.

La ley fundamental de la electricidad es la ley de Ohm, que establece exactamente cuánta fuerza E se necesita para impulsar una corriente I a través de un resistor con resistencia R:

Ley de Ohm

$$\text{fuerza} = \text{resistencia} \times \text{corriente}$$

o

$$E = RI$$

La fuerza se mide en *volts*, la resistencia en *ohms* y la corriente en *amperes* (o *amps*, para abreviar). Por tanto, en términos de dichas unidades, la ley de Ohm se convierte en "volts = ohms × amps", y dice que es la "caída de voltaje" cuando una corriente pasa a través de un resistor; esto es: cuánto voltaje se usa.

La corriente fluye desde la terminal positiva de una batería y viaja de vuelta hacia la terminal negativa, recorriendo uno o más circuitos cerrados en el proceso. En un diagrama de red eléctrica, las baterías se representan como (donde la terminal positiva es la barra vertical más larga) y los resistores se representan como . Las siguientes dos leyes, cuyo descubrimiento se debe a Kirchhoff, gobiernan las redes eléctricas. La primera es una ley de "conservación de flujo" en cada nodo; la segunda es una ley de "balanceo de voltaje" alrededor de cada circuito.

Leyes de Kirchhoff

Ley de corriente (nodos)
La suma de las corrientes que fluyen hacia cualquier nodo es igual a la suma de las corrientes que salen de dicho nodo.

Ley de voltaje (circuitos)
La suma de las caídas de voltaje alrededor de cualquier circuito es igual al voltaje total alrededor del circuito (proporcionado por las baterías).

La figura 2.12 ilustra las leyes de Kirchhoff. En el inciso (a), la ley de corriente produce $I_1 = I_2 + I_3$ (o $I_1 - I_2 - I_3 = 0$, como se le escribirá); el inciso (b) produce $4I = 10$, donde se usó la ley de Ohm para calcular la caída de voltaje de $4I$ en el resistor. Al usar las leyes de Kirchhoff, puede establecer un sistema de ecuaciones lineales que permitirán determinar las corrientes en una red eléctrica.

Ejemplo 2.31

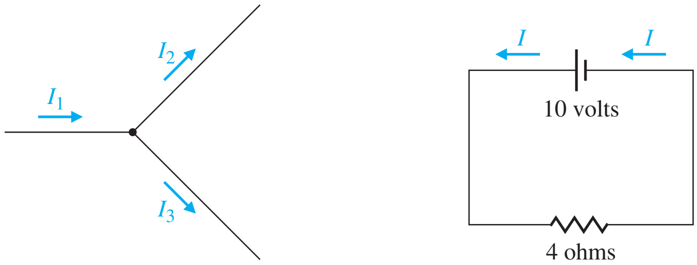
Determine las corrientes I_1, I_2 e I_3 en la red eléctrica que se muestra en la figura 2.13.

Solución Esta red tiene dos baterías y cuatro resistores. La corriente I_1 fluye a través de la rama superior BCA, la corriente I_2 fluye a través de la rama media AB y la corriente I_3 fluye a través de la rama inferior BDA.

En el nodo A, la ley de corriente produce $I_1 + I_3 = I_2$ o

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

(Observe que se obtiene la misma ecuación en el nodo B.)



(a) $I_1 = I_2 + I_3$ (b) $4I = 10$

Figura 2.12

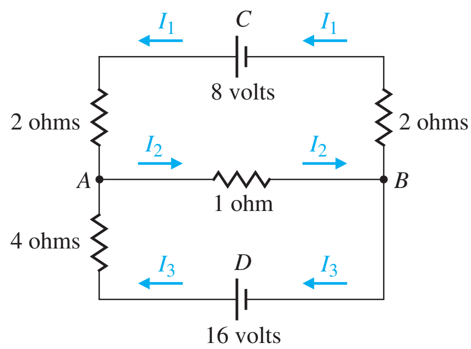


Figura 2.13

A continuación se aplica la ley de voltaje para cada circuito. Para el circuito *CABC*, las caídas de voltaje en los resistores son $2I_1$, I_2 y $2I_1$. Por tanto, se tiene la ecuación

$$4I_1 + I_2 = 8$$

De igual modo, para el circuito *DABD*, se obtiene

$$I_2 + 4I_3 = 16$$

(Note que en realidad hay un tercer circuito, *CADBC*, si va "contra la corriente". En este caso, debe tratar los voltajes y resistencias en las trayectorias "invertidas" como negativas. Al hacerlo se obtiene $2I_1 + 2I_1 - 4I_3 = 8 - 16 = -8$ o $4I_1 - 4I_3 = -8$, que se observa es justo la diferencia de las ecuaciones de voltaje para los otros dos circuitos. En consecuencia, puede omitir esta ecuación, pues no aporta nueva información. Por otra parte, incluirla no hace daño.)

Ahora se tiene un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\ 4I_1 + I_2 &= 8 \\ I_2 + 4I_3 &= 16 \end{aligned}$$

La eliminación de Gauss-Jordan produce

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 16 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Por tanto, las corrientes son $I_1 = 1$ amp, $I_2 = 4$ amps e $I_3 = 3$ amps.

Comentario En algunas redes eléctricas, las corrientes pueden tener valores fraccionarios o incluso pueden ser negativas. Un valor negativo simplemente significa que la corriente en la rama correspondiente fluye en la dirección opuesta a la que se muestra en el diagrama de la red.

CAS

Ejemplo 2.32

La red que se muestra en la figura 2.14 tiene una sola fuente de poder *A* y cinco resistores. Encuentre las corrientes $I, I_1, \ldots, I_5$. Este es un ejemplo de lo que en ingeniería eléctrica se conoce como *circuito puente de Wheatstone.*

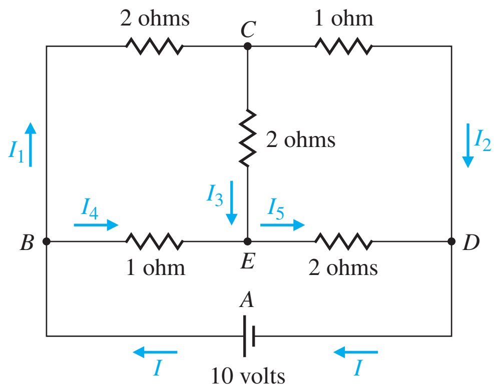


Figura 2.14
Un circuito puente

Solución La ley de corriente de Kirchhoff produce las siguientes ecuaciones en los cuatro nodos:

$$\begin{aligned}
&\text{Node } B: && I - I_1 - I_4 = 0\\
&\text{Node } C: && I_1 - I_2 - I_3 = 0\\
&\text{Node } D: && I - I_2 - I_5 = 0\\
&\text{Node } E: && I_3 + I_4 - I_5 = 0
\end{aligned}$$

Para los tres circuitos básicos, la ley de voltaje produce

$$\begin{aligned}
&\text{Circuit } ABEDA: && I_4 + 2I_5 = 10\\
&\text{Circuit } BCEB: && 2I_1 + 2I_3 - I_4 = 0\\
&\text{Circuit } CDEC: && I_2 - 2I_5 - 2I_3 = 0
\end{aligned}$$

(Observe que la rama *DAB* no tiene resistor y por tanto no hay caída de voltaje; por ende, no hay término *I* en la ecuación para el circuito *ABEDA*. Note también que se cambiaron los signos tres veces, porque se avanzó "contra la corriente". Esto no plantea problemas, pues se dejará que el signo de la respuesta determine la dirección del flujo de corriente.)

Ahora se tiene un sistema de siete ecuaciones con seis variables. La reducción por renglones produce

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 10\\
0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 0
\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

(Use su calculadora o CAS para comprobar esto.) Por tanto, la solución (en amps) es $I = 7, I_1 = I_5 = 3, I_2 = I_4 = 4$ e $I_3 = -1$. El significado del valor negativo aquí es que la corriente a través de la rama *CE* fluye en dirección opuesta a la que se marcó en el diagrama.

Comentario En este ejemplo sólo hay una fuente de poder, de modo que la única batería de 10 volts envía una corriente de 7 amps a través de la red. Si dichos valores se sustituyen en la ley de Ohm, $E = RI$, se obtiene $10 = 7R$ o $R = \frac{10}{7}$. Por tanto, toda la red se comporta como si hubiese un solo resistor de $\frac{10}{7}$ ohms. Este valor se conoce como *resistencia efectiva* (R_{ef}) de la red.

Modelos económicos lineales

Una economía es un sistema muy complejo con muchas interrelaciones entre sus diversos sectores y los bienes y servicios que se producen y consumen. Determinar los precios óptimos y los niveles de producción sujetos a las metas económicas deseadas requiere sofisticados modelos matemáticos. El álgebra lineal resulta ser una poderosa herramienta en el desarrollo y análisis de tales modelos económicos.

En esta sección se introducen dos modelos basados en el trabajo del economista de Harvard, Wassily Leontief, en la décda de 1930. Sus métodos, a los que con frecuencia se les refiere como ***análisis input-output***, ahora son herramientas estándar en la economía matemática y los usan ciudades, corporaciones y países completos para planificación y pronósticos económicos.

Comience con un ejemplo simple.

Ejemplo 2.33

La economía de una región consiste de tres industrias o sectores: servicios, electricidad y producción de petróleo. Por simplicidad, se supone que cada industria produce un solo artículo (bienes o servicios) en un año dado y que el ***ingreso*** (***output***) se genera a partir de la venta de este artículo. Cada industria compra artículos de las otras industrias, incluida ella misma, para generar su output. Ningún artículo se compra fuera de la región y ninguna salida (output) se vende fuera de la región. Más aún, para cada industria se supone que la producción iguala exactamente al consumo (output igual a input, ingreso igual a gasto). En este sentido, esta es una ***economía cerrada*** que está en ***equilibrio***. La tabla 2.4 resume cuánta output de cada industria consume cada industria.

Tabla 2.4

		Producido por (output)		
		Servicios	**Electricidad**	**Petróleo**
Consumido por (input)	**Servicios**	1/4	1/3	1/2
	Electricidad	1/4	1/3	1/4
	Petróleo	1/2	1/3	1/4

Wassily Leontief (1906–1999) nació en San Petersburgo, Rusia. Estudió en la Universidad de Leningrado y recibió su doctorado de la Universidad de Berlín. Emigró a Estados Unidos en 1931 e impartió clases en la Universidad de Harvard y más tarde en la Universidad de New York. En 1932, Leontief comenzó a recopilar datos para la monumental tarea de realizar un análisis *input-output* de la economía de Estados Unidos, cuyos resultados se publicaron en 1941. Fue también uno de los primeros usuarios de computadoras, que necesitaba para resolver los sistemas lineales de gran escala de sus modelos. Por su trabajo pionero, Leontief recibió el Premio Nobel de Economía en 1973.

De la primera columna de la tabla se ve que la industria de servicios consume 1/4 de su propia output, la electricidad consume otro 1/4 y la industria petrolera usa 1/2 de la output de la industria de servicios. Las otras dos columnas tienen interpretaciones similares. Note que la suma de cada columna es 1, lo que indica que se consumen todas las output de cada industria.

Sean x_1, x_2 y x_3 que denotan el output (ingreso) anual de las industrias de servicios, electricidad y petróleo, respectivamente, en millones de dólares. Dado que el consumo corresponde al gasto, la industria de servicios gasta $\frac{1}{4}x_1$ en su propio artículo, $\frac{1}{3}x_2$ en electricidad y $\frac{1}{2}x_3$ en petróleo. Esto significa que el gasto total anual de la industria de servicios es $\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3$. Dado que la economía está en equilibrio, el gasto de la industria de servicios debe ser igual a su ingreso anual x_1. Esto genera la primera de las siguientes ecuaciones; las otras dos ecuaciones se obtienen al analizar los gastos de las industrias de electricidad y petróleo.

$$\begin{aligned}
&\text{Servicios:} && \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 = x_1\\
&\text{Electricidad:} && \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 = x_2\\
&\text{Petróleo:} && \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 = x_3
\end{aligned}$$

Al reordenar cada ecuación, se obtiene un sistema homogéneo de ecuaciones lineales, que entonces se resuelven. (¡Compruebe esto!)

$$\begin{aligned}
-\tfrac{3}{4}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 0\\
\tfrac{1}{4}x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 - \tfrac{1}{4}x_3 &= 0\\
\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 - \tfrac{3}{4}x_3 &= 0
\end{aligned}
\quad\longrightarrow\quad
\left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{3}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{4} & 0 \end{array}\right]
\longrightarrow
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Al hacer $x_3 = t$, se encuentra que $x_1 = t$ y $x_2 = \frac{3}{4}t$. Por tanto, se ve que las outputs *relativas* de las industrias de servicios, electricidad y petrolera deben estar en las proporciones $x_1 : x_2 : x_3 = 4 : 3 : 4$ para que la economía esté en equilibrio.

Comentarios

- El último ejemplo ilustra lo que comúnmente se conoce como ***modelo cerrado de Leontief***.
- Dado que las output corresponden a ingreso, también puede considerar a x_1, x_2 y x_3 como los *precios* de los tres artículos.

Ahora se modifica el modelo del ejemplo 2.33 para acomodar una ***economía abierta***, una en la que haya tanto demanda *externa* como interna por los artículos que se producen. No es de sorprender que esta versión se conozca como ***modelo abierto de Leontief***.

Ejemplo 2.34

Considere las tres industrias del ejemplo 2.33, pero con consumo dado por la tabla 2.5. Se ve que, de los artículos producidos por la industria de servicios, 20% los consume la industria de servicios, 40% la industria eléctrica y 10% la industria petrolera. Por tanto, sólo 70% de la output de la industria de servicios lo consume esta economía. La implicación de este cálculo es que hay un exceso de output (ingreso) sobre el input (gasto) para la industria de servicios. Se dice que la industria de servicios es ***productiva***. Del mismo modo, la industria petrolera es productiva, pero la industria eléctrica es ***no productiva***. (Esto se refleja en el hecho de que las sumas de la primera y tercera columnas son menos que 1, pero la suma de la segunda columna es igual a 1.) El exceso de output puede aplicarse para satisfacer una demanda externa.

Tabla 2.5

		Producido por (output)		
		Servicios	**Electricidad**	**Petróleo**
Consumido por (input)	**Servicios**	0.20	0.50	0.10
	Electricidad	0.40	0.20	0.20
	Petróleo	0.10	0.30	0.30

Por ejemplo, suponga que hay una demanda externa anual (en millones de dólares) de 10, 10 y 30 de las industrias de servicios, eléctrica y petrolera, respectivamente. Entonces, al igualar los gastos (demanda interna y demanda externa) con el ingreso (output), se obtienen las siguientes ecuaciones:

	output	**demanda interna**	**demanda externa**
Servicios	x_1	$= 0.2x_1 + 0.5x_2 + 0.1x_3$	$+ 10$
Eléctrica	x_2	$= 0.4x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3$	$+ 10$
Petrolera	x_3	$= 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.3x_3$	$+ 30$

Al reordenar, se obtienen los siguientes sistemas lineal y matriz aumentada:

$$\begin{aligned} 0.8x_1 - 0.5x_2 - 0.1x_3 &= 10 \\ -0.4x_1 + 0.8x_2 - 0.2x_3 &= 10 \\ -0.1x_1 - 0.3x_2 + 0.7x_3 &= 30 \end{aligned} \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 0.8 & -0.5 & -0.1 & 10 \\ -0.4 & 0.8 & -0.2 & 10 \\ -0.1 & -0.3 & 0.7 & 30 \end{array}\right]$$

CAS La reducción por renglón produce

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 61.74 \\ 0 & 1 & 0 & 63.04 \\ 0 & 0 & 1 & 78.70 \end{array}\right]$$

de donde se ve que las industrias de servicios, eléctrica y petrolera deben tener una producción anual de \$61.74, \$63.04 y \$78.70 (millones), respectivamente, para satisfacer las demandas interna y externa de sus artículos.

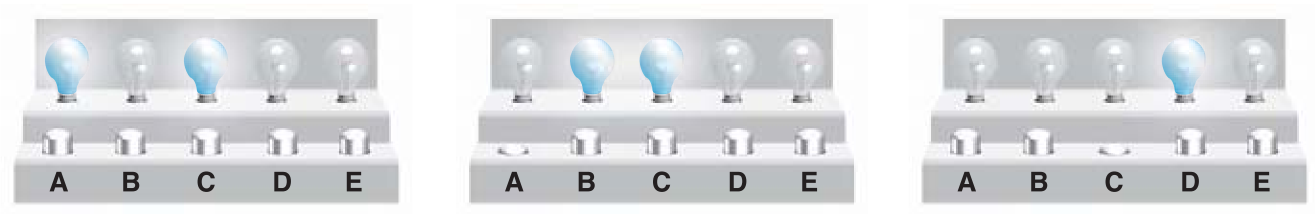
En la sección 3.7 se volverá a revisar estos modelos.

Juegos lineales finitos

Existen muchas situaciones en las que se debe considerar un sistema físico que sólo tenga un número finito de *estados*. En ocasiones, dichos estados pueden alterarse con la aplicación de ciertos procesos, cada uno de los cuales produce resultados finitos. Por ejemplo, una bombilla puede estar encendida o apagada, y un interruptor puede cambiar el estado de la bombilla de encendido a apagado y viceversa. Los sistemas digitales que surgen en ciencias de la computación con frecuencia son de este tipo. De manera más frívola, muchos juegos de computadora presentan acertijos en los que cierto dispositivo debe ser manipulado por varios interruptores para producir un resultado deseado. La finitud de tales situaciones es perfectamente adecuada para el análisis mediante aritmética modular, y con frecuencia los sistemas lineales sobre algún $\mathbb{Z}_p$ desempeñan un papel. Los problemas que involucran este tipo de situación con frecuencia se llaman ***juegos lineales finitos***.

Ejemplo 2.35

Una hilera de cinco luces se controla mediante cinco interruptores. Cada interruptor cambia el estado (encendido o apagado) de la luz directamente arriba de él y los estados de las luces inmediatamente adyacentes a izquierda y derecha. Por ejemplo, si la primera y tercera luces están encendidas, como en la figura 2.15(a), entonces oprimir el interruptor A cambia el estado del sistema al que se muestra en la figura 2.15(b). Si a continuación se oprime el interruptor C, entonces el resultado es el estado que se muestra en la figura 2.15(c).



(a) (b) (c)

Figura 2.15

Suponga que, inicialmente, todas las luces están apagadas. ¿Puede oprimir los interruptores en algún orden de modo que sólo la primera, tercera y quinta luces estén encendidas? ¿Puede oprimir los interruptores en algún orden de modo que sólo la primera luz esté encendida?

Solución La naturaleza encendido/apagado de este problema sugiere que la notación binaria será útil y que debe trabajar con $\mathbb{Z}_2$. En concordancia, los estados de las cinco luces se representan mediante un vector en $\mathbb{Z}_2^5$, donde 0 representa apagado y 1 representa encendido. Por tanto, por ejemplo, el vector

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

corresponde a la figura 2.15(b).

También puede usar vectores en $\mathbb{Z}_2^5$ para representar la acción de cada interruptor. Si un interruptor cambia el estado de una luz, el componente correspondiente es un 1; de otro modo, es 0. Con esta convención, las acciones de los cinco interruptores están dados por

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La situación que se muestra en la figura 2.15(a) corresponde al estado inicial

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

seguido por

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es la suma vectorial (en $\mathbb{Z}_2^5$)

$$\mathbf{s} + \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observe que este resultado concuerda con la figura 2.15(b).

A partir de cualquier configuración inicial **s**, suponga que se oprimen los interruptores en el orden A, C, D, A, C, B. Esto corresponde a la suma vectorial $\mathbf{s} + \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{b}$. Pero, en $\mathbb{Z}_2^5$, la suma es conmutativa, de modo que se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{s} + \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{b} &= \mathbf{s} + 2\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c} + \mathbf{d} \\ &= \mathbf{s} + \mathbf{b} + \mathbf{d} \end{aligned}$$

donde se usó el hecho de que $2 = 0$ en $\mathbb{Z}_2$. Por ende, se lograría el mismo resultado al oprimir sólo B y D, y el orden no importa. (Compruebe que esto es correcto.) Por tanto, en este ejemplo no es necesario oprimir algún interruptor más de una vez.

De este modo, para ver si es posible lograr una configuración objetivo **t** a partir de una configuración inicial **s**, es necesario determinar si existen escalares $x_1, \ldots, x_5$ en $\mathbb{Z}_2$ tales que

$$\mathbf{s} + x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b} + \cdots + x_5\mathbf{e} = \mathbf{t}$$

En otras palabras, es necesario resolver (si es posible) el sistema lineal sobre $\mathbb{Z}_2$ que corresponde a la ecuación vectorial

$$x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b} + \cdots + x_5\mathbf{e} = \mathbf{t} - \mathbf{s} = \mathbf{t} + \mathbf{s}$$

En este caso, $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ y la primera configuración objetivo es

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz aumentada de este sistema tiene como columnas los vectores dados:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Al reducir sobre $\mathbb{Z}_2$ se obtiene

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Por tanto, x_5 es una variable libre. En consecuencia, existen exactamente dos soluciones (que corresponden a $x_5 = 0$ y $x_5 = 1$). Al despejar las otras variables en términos de x_5, se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 &= \phantom{1 +{}} x_5 \\ x_2 &= 1 + x_5 \\ x_3 &= 1 \\ x_4 &= 1 + x_5 \end{aligned}$$

De modo que, cuando $x_5 = 0$ y $x_5 = 1$, se tienen las soluciones

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

respectivamente. (Compruebe que estas dos funcionan.)

De igual modo, en el segundo caso se tiene

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz aumentada se reduce del modo siguiente:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que muestra que no hay solución en este caso; esto es: es imposible comenzar con todas las luces apagadas y sólo encender la primera luz.

El ejemplo 2.35 muestra el poder del álgebra lineal. Aun cuando haya encontrado mediante ensayo y error que no había solución, comprobar todas las formas posibles de oprimir los interruptores habría sido extremadamente tedioso. También podría haberse pasado por alto el hecho de que ningún interruptor necesita oprimirse más de una vez.

Ejemplo 2.36

Considere una hilera sólo con tres luces, cada una de las cuales puede estar apagado, ser azul claro o azul oscuro. Abajo de las luces hay tres interruptores, A, B y C, cada uno de los cuales cambia los estados de luces particulares al *siguiente* estado, en el orden que muestra la figura 2.16. El interruptor A cambia los estados de las primeras dos luces, el interruptor B las tres luces y el interruptor C las últimas dos luces. Si las tres luces inicialmente están apagadas, ¿es posible oprimir los interruptores en cierto orden de modo

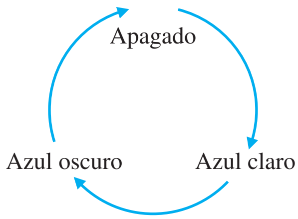


Figura 2.16

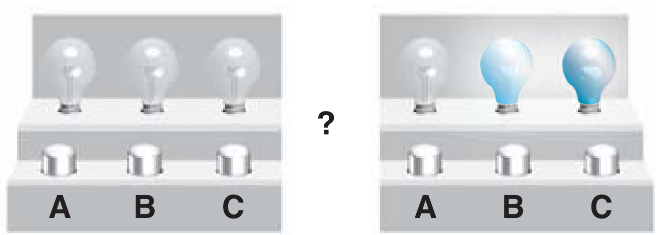


Figura 2.17

que las luces estén apagadas, azul claro y azul oscuro, en ese orden (como en la figura 2.17)?

Solución Mientras que el ejemplo 2.35 involucraba $\mathbb{Z}_2$, este claramente (¿es claro?) involucra $\mathbb{Z}_3$. En concordancia, los interruptores corresponden a los vectores

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en $\mathbb{Z}_3^3$, y la configuración final que se busca es $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. (Apagado es 0, azul claro es 1 y azul oscuro es 2.) Se quiere encontrar escalares x_1, x_2, x_3 en $\mathbb{Z}_3$ tales que

$$x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b} + x_3\mathbf{c} = \mathbf{t}$$

(donde x_i representa el número de veces que se oprime el i-ésimo interruptor). Esta ecuación da lugar a la matriz aumentada $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c} \mid \mathbf{t}]$, que se reduce sobre $\mathbb{Z}_3$ del modo siguiente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto, existe una solución única: $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1$. En otras palabras, debe oprimir el interruptor A dos veces y los otros dos interruptores una vez cada uno. (Compruébelo.)

Ejercicios 2.4

Asignación de recursos

1. Suponga que, en el ejemplo 2.27, en el tubo de ensayo se colocan cada día 400 unidades de alimento A, 600 unidades de B y 600 unidades de C, y que los datos del consumo diario de alimento por bacteria (en unidades por día) son los que se muestran en la tabla 2.6. ¿Cuántas bacterias de cada cepa pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir todo el alimento?

Tabla 2.6

	Bacteria cepa I	Bacteria cepa II	Bacteria cepa III
Alimento A	1	2	0
Alimento B	2	1	1
Alimento C	1	1	2

2. Suponga que, en el ejemplo 2.27, en el tubo de ensayo se colocan cada día 400 unidades de alimento A, 500 unidades de B y 600 unidades de C, y que los datos del consumo diario de alimento por bacteria (en unidades por día) son los que se muestran en la tabla 2.7. ¿Cuántas

Tabla 2.7

	Bacteria cepa I	Bacteria cepa II	Bacteria cepa III
Alimento A	1	2	0
Alimento B	2	1	3
Alimento C	1	1	1

bacterias de cada cepa pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir todo el alimento?

3. Una florista ofrece tres tamaños de arreglos florales que contienen rosas, margaritas y crisantemos. Cada arreglo pequeño contiene una rosa, tres margaritas y tres crisantemos. Cada arreglo mediano contiene dos rosas, cuatro margaritas y seis crisantemos. Cada arreglo grande contiene cuatro rosas, ocho margaritas y seis crisantemos. Un día, la florista nota que usó un total de 24 rosas, 50 margaritas y 48 crisantemos para surtir pedidos de estos tres tipos de arreglos. ¿Cuántos arreglos de cada tipo elaboró?

4. **(a)** En su bolsillo usted tiene algunas monedas de cinco, diez y 25 centavos. En total tiene 20 monedas y exactamente el doble de monedas de diez centavos que de cinco. El valor total de las monedas es \$3.00. Encuentre el número de monedas de cada tipo.

(b) Encuentre *todas* las posibles combinaciones de 20 monedas (de cinco, diez y 25 centavos) que sumarían exactamente \$3.00.

5. Un cafetalero vende tres mezclas de café. Una bolsa de la mezcla de la casa contiene 300 gramos de grano colombiano y 200 gramos de grano rostizado francés. Una bolsa de la mezcla especial contiene 200 gramos de grano colombiano, 200 gramos de grano keniano y 100 gramos de grano rostizado francés. Una bolsa de mezcla gourmet contiene 100 gramos de grano colombiano, 200 gramos de grano keniano y 200 gramos de grano rostizado francés. El comerciante tiene a la mano 30 kilogramos de grano colombiano, 15 kilogramos de grano keniano y 25 kilogramos de grano rostizado francés. Si quiere usar todos los granos, ¿cuántas bolsas de cada tipo de mezcla puede elaborar?

6. Vuelva a hacer el ejercicio 5 y suponga que la mezcla de la casa contiene 300 gramos de grano colombiano, 50 gramos de grano keniano y 150 gramos de grano rostizado francés, y que la mezcla gourmet contiene 100 gramos de grano colombiano, 350 gramos de grano keniano y 50 gramos de grano rostizado francés. Esta vez el comerciante tiene 30 kilogramos de grano colombiano, 15 kilogramos de grano keniano y 15 kilogramos de grano rostizado francés. Suponga que una bolsa de la mezcla de la casa produce una ganancia de \$0.50, una bolsa de la mezcla especial produce una ganancia de \$1.50 y una bolsa de la mezcla gourmet produce una ganancia de \$2.00. ¿Cuántas bolsas de cada tipo debe preparar el comerciante si quiere usar todos los granos *y* maximizar su ganancia? ¿Cuál es la ganancia máxima?

Balanceo de ecuaciones químicas

En los ejercicios 7-14, balancee la ecuación química para cada reacción.

7. $FeS_2 + O_2 \longrightarrow Fe_2O_3 + SO_2$

8. $CO_2 + H_2O \longrightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$ (Esta reacción tiene lugar cuando una planta verde convierte dióxido de carbono y agua en glucosa y oxígeno durante la fotosíntesis.)

9. $C_4H_{10} + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$ (Esta reacción ocurre cuando butano, C_4H_{10}, se quema en presencia de oxígeno para formar dióxido de carbono y agua.)

10. $C_7H_6O_2 + O_2 \longrightarrow H_2O + CO_2$

11. $C_5H_{11}OH + O_2 \longrightarrow H_2O + CO_2$ (Esta ecuación representa la combustión de alcohol amílico.)

12. $HClO_4 + P_4O_{10} \longrightarrow H_3PO_4 + Cl_2O_7$

13. $Na_2CO_3 + C + N_2 \longrightarrow NaCN + CO$

CAS **14.** $C_2H_2Cl_4 + Ca(OH)_2 \longrightarrow C_2HCl_3 + CaCl_2 + H_2O$

Análisis de redes

15. La figura 2.18 muestra una red de tuberías con flujos medidos en litros por minuto.

(a) Establezca y resuelva un sistema de ecuaciones lineales para encontrar los flujos posibles.

(b) Si el flujo a través de *AB* se restringe a 5 L/min, ¿cuáles serán los flujos a través de las otras ramas?

(c) ¿Cuáles son los posibles flujos mínimo y máximo a través de cada rama?

(d) Se supuso que el flujo siempre es *positivo*. ¿Qué significaría flujo *negativo*, si supone que se permite? Proporcione una ilustración para este ejemplo.

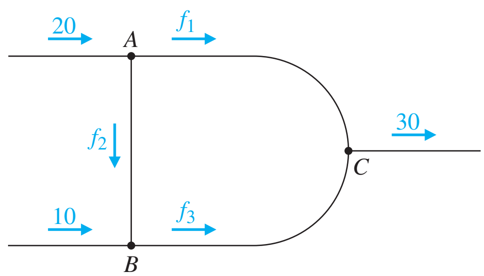


Figura 2.18

16. La parte central de Ciudad Gótica consiste de calles de un sentido, y el flujo de tráfico se midió en cada intersección. Para el bloque de ciudad que se muestra en la figura 2.19, los números representan la cantidad promedio de vehículos por minuto que entran y salen de las intersecciones A, B, C y D durante, las horas de oficina.

(a) Establezca y resuelva un sistema de ecuaciones lineales para encontrar los flujos posibles $f_1, \ldots, f_4$.

(b) Si el tráfico se regula en CD de modo que $f_4 = 10$ vehículos por minuto, ¿cuáles son los flujos promedio en las otras calles?

(c) ¿Cuáles son los posibles flujos mínimo y máximo en cada calle?

(d) ¿Cómo cambiaría la solución si *todas* las direcciones se invirtieran?

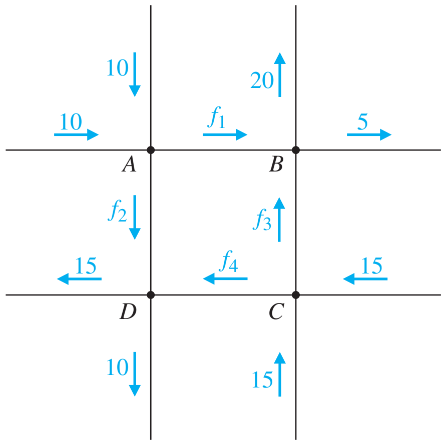


Figura 2.19

17. Una red de diques de irrigación se muestra en la figura 2.20, con flujos medidos en miles de litros por día.

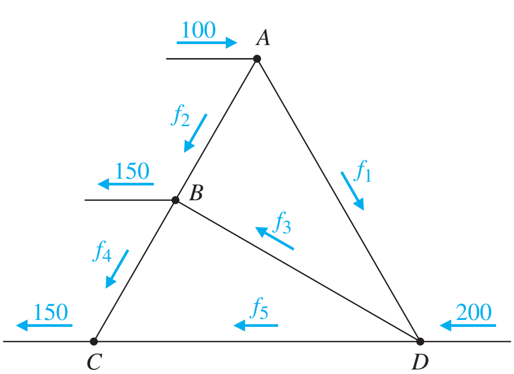


Figura 2.20

(a) Establezca y resuelva un sistema de ecuaciones lineales para encontrar los posibles flujos $f_1, \ldots, f_5$.

(b) Suponga que DC está cerrado. ¿Qué intervalo de flujo se necesitará mantener a través de DB?

(c) De la figura 2.20 es claro que DB no puede cerrarse. (¿Por qué no?) ¿Cómo su solución al inciso (a) demuestra esto?

(d) De su solución al inciso (a), determine los flujos mínimo y máximo a través de DB.

18. **(a)** Establezca y resuelva un sistema de ecuaciones lineales para encontrar los posibles flujos en la red que se muestra en la figura 2.21.

(b) ¿Es posible que $f_1 = 100$ y $f_6 = 150$? (Primero responda esta pregunta con referencia a su solución del inciso (a), y luego directamente de la figura 2.21.)

(c) Si $f_4 = 0$, ¿cuál será el rango de flujo en cada una de las otras ramas?

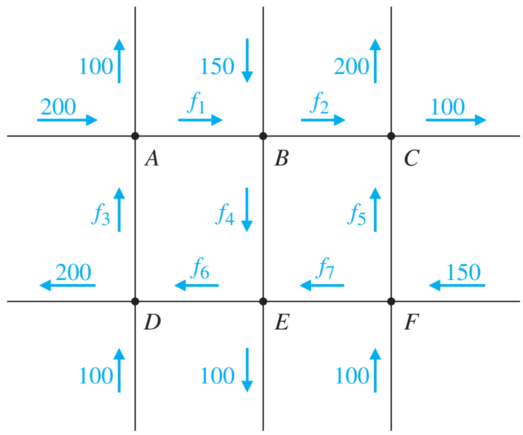
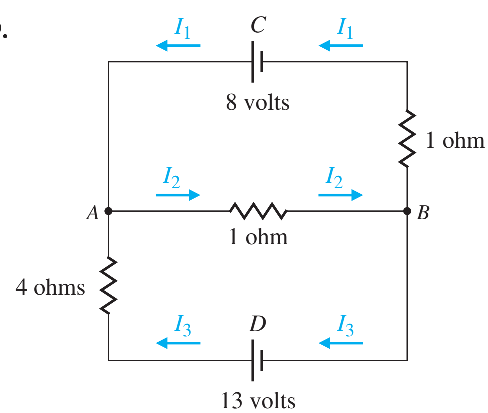


Figura 2.21

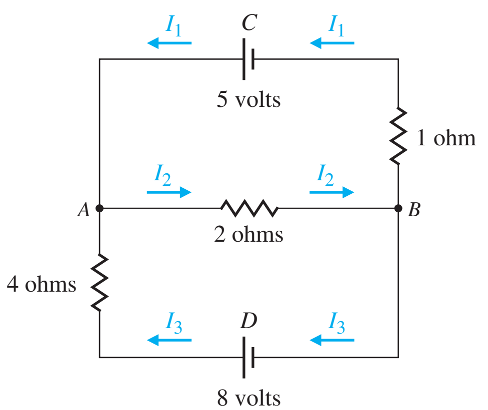
Redes eléctricas

Para los ejercicios 19 y 20, determine las corrientes para las redes eléctricas dadas.

19.



20.



21. **(a)** Encuentre las corrientes $I, I_1, \ldots, I_5$ en el circuito puente de la figura 2.22.

(b) Encuentre la resistencia efectiva de esta red.

(c) ¿Puede cambiar la resistencia en la rama BC (y dejar todo lo demás invariable) de modo que la corriente a través de la rama CE se vuelva 0?

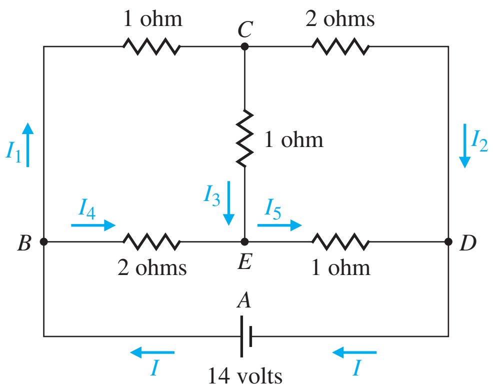


Figura 2.22

22. Las redes de los incisos (a) y (b) de la figura 2.23 muestran dos resistores acoplados en *serie* y en *paralelo*, respectivamente. Se quiere encontrar una fórmula general para la resistencia efectiva de cada red; esto es, encontrar R_{ef} de manera que $E = R_{ef}I$.

(a) Demuestre que la resistencia efectiva R_{ef} de una red con dos resistores acoplados en serie [figura 2.23(a)] está dada por

$$R_{ef} = R_1 + R_2$$

(b) Demuestre que la resistencia efectiva R_{ef} de una red con dos resistores acoplados en paralelo [figura 2.23(b)] está dada por

$$R_{eff} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$$

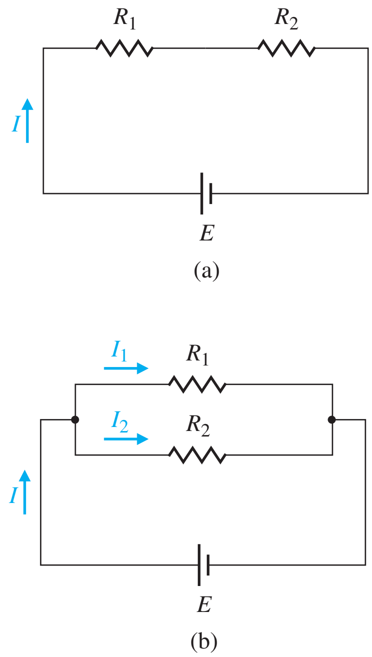


Figura 2.23
Resistores en serie y en paralelo

Modelos económicos lineales

23. Considere una economía simple con sólo dos industrias: agrícola y manufacturera. La agrícola consume 1/2 de los alimentos y 1/3 de los bienes manufacturados. La manufacturera consume 1/2 de los alimentos y 2/3 de los bienes manufacturados. Si supone que la economía está cerrada y en equilibrio, encuentre las salidas relativas (outputs) de las industrias agrícola y manufacturera.

24. Suponga que las industrias del carbón y el acero forman una economía cerrada. Cada \$1 producido por la industria del carbón requiere \$0.30 de carbón y \$0.70 de acero. Cada \$1 producido por la del acero requiere \$0.80 de carbón y \$0.20 de acero. Encuentre la producción anual (output) de carbón y acero si la producción anual total es de \$20 millones.

25. Un pintor, un plomero y un electricista entran a una cooperativa en la que cada uno de ellos está de acuerdo en trabajar para sí mismo y los otros dos por un total de 10 horas a la semana, de acuerdo con el horario que se muestra en la tabla 2.8. Para propósitos fiscales, cada persona debe establecer un valor para sus servicios. Están de acuerdo en hacerlo, de modo que cada uno de ellos quede a la par, es decir: de modo que el importe total pagado por cada persona sea igual al importe que recibe. ¿Qué tarifa horaria debe cobrar cada persona si todas las tarifas son números enteros entre \$30 y \$60 por hora?

Tabla 2.8

		Proveedor		
		Pintor	**Plomero**	**Electricista**
	Pintor	2	1	5
Consumidor	**Plomero**	4	5	1
	Electricista	4	4	4

26. Cuatro vecinos, cada uno con un jardín de vegetales, está de acuerdo en compartir sus productos. Uno cosechará frijoles (B), otro lechuga (L), otro tomates (T) y otro calabazas (Z). La tabla 2.9 muestra qué fracción de cada cultivo recibirá cada vecino. ¿Qué precios deben cobrar los vecinos por sus cultivos, si cada persona debe quedar a la par y el cultivo de menor precio tiene un valor de \$50?

Tabla 2.9

		Productor			
		B	**L**	**T**	**Z**
	B	0	1/4	1/8	1/6
Cosumidor	**L**	1/2	1/4	1/4	1/6
	T	1/4	1/4	1/2	1/3
	Z	1/4	1/4	1/8	1/3

27. Suponga que las industrias del carbón y del acero forman una economía abierta. Cada \$1 producido por la industria del carbón requiere \$0.15 de carbón y \$0.20 de acero. Cada \$1 producido por la del acero requiere \$0.25 de carbón y \$0.10 de acero. Suponga que hay una demanda exterior anual por \$45 millones de carbón y \$124 millones de acero.
(a) ¿Cuánto debe producir cada industria para satisfacer las demandas?
(b) Si la demanda de carbón disminuye en \$5 millones al año, mientras que la demanda de acero aumenta en \$6 millones al año, ¿cómo deben ajustar su producción las industrias del carbón y del acero?

28. En Ciudad Gótica, los departamentos de Administración (A), Salud (H) y Transporte (T) son independientes. Para cada dólar de servicios que producen, cada departamento usa cierta cantidad de servicios producidos por los otros departamentos y por él mismo, como se muestra en la tabla 2.10. Suponga que, durante el año, otros departamentos de la ciudad requieren \$1 millón en servicios administrativos, \$1.2 millones en servicios de salud y \$0.8 millones en servicios de transporte. ¿Cuál debe ser el valor anual en dólares de los servicios producidos por cada departamento, con la finalidad de satisfacer las demandas?

Tabla 2.10

		Departmento		
		A	**H**	**T**
	A	\$0.20	0.10	0.20
Compra	**H**	0.10	0.10	0.20
	T	0.20	0.40	0.30

Juegos lineales finitos

29. **(a)** En el ejemplo 2.35, suponga que todas las luces inicialmente están apagadas. ¿Puede oprimir los interruptores en algún orden para que sólo enciendan la segunda y cuarta luces?
(b) ¿Puede oprimir los interruptores en algún orden de modo que sólo se encienda la segunda luz?

30. **(a)** En el ejemplo 2.35, suponga que la cuarta luz inicialmente está encendida y que las otras cuatro luces están apagadas. ¿Puede oprimir los interruptores en algún orden de modo que sólo enciendan la segunda y cuarta luces?
(b) Puede oprimir las interruptores en algún orden de modo que sólo se encienda la segunda luz?

31. En el ejemplo 2.35, describa todas las posibles configuraciones de luces que pueden obtenerse si comienza con todas las luces apagadas.

32. **(a)** En el ejemplo 2.36, suponga que todas las luces inicialmente están apagadas. Demuestre que es posible presionar los interruptores en cierto orden de modo que las luces están apagadas, azul oscuro y azul claro, en ese orden.
(b) Demuestre que es posible oprimir los interruptores en cierto orden de modo que las luces estén azul claro, apagadas y azul oscuro, en ese orden.
(c) Pruebe que puede lograrse *cualquier* configuración de tres luces.

33. Suponga que las luces del ejemplo 2.35 pueden estar apagadas, azul claro o azul oscuro, y que los interruptores funcionan como se describe en el ejemplo 2.36. (Esto es: los interruptores controlan las mismas luces que en el ejemplo 2.35, pero los colores avanzan en ciclo como en el ejemplo 2.36.) Demuestre que es posible comenzar con todas las luces apagadas y oprimir los interruptores en cierto orden de modo que las luces sean azul oscuro, azul claro, azul oscuro, azul claro y azul oscuro, en ese orden.

34. Para el ejercicio 33, describa todas las posibles configuraciones de luces que pueden obtenerse, iniciando con todas las luces apagadas.

CAS **35.** Nueve cuadrados, cada uno negro o blanco, se ordenan en una retícula de 3 × 3. La figura 2.24 muestra un posible arreglo.

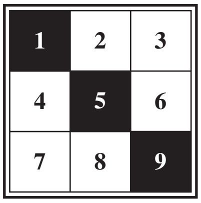


Figura 2.24
El acertijo de nueve cuadrados

Cuando se toca, cada cuadrado cambia su estado y los estados de alguno de sus vecinos (negro → blanco y blanco → negro). La figura 2.25 muestra cómo funciona el cambio de estado. (Tocar el cuadrado cuyo número está en un círculo, hace que cambie el estado del cuadro marcado *.) El objeto del juego es volver negros los nueve cuadrados. [Los ejercicios 35 y 36 se adaptaron de acertijos que pueden encontrarse en el CD-ROM de juego interactivo *The Seventh Guest* (Trilobyte Software/Virgin Games, 1992).]

(**a**) Si la configuración inicial es la que se muestra en la figura 2.24, demuestre que puede ganar el juego y describa una secuencia de movimientos ganadora.

(**b**) Pruebe que el juego siempre puede ganarse, sin importar cuál sea la configuración inicial.

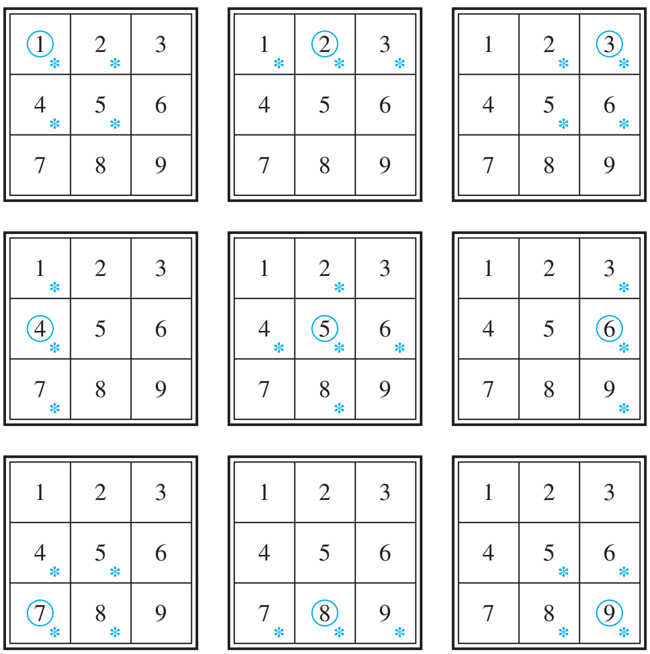


Figura 2.25
Cambios de estado para el acertijo de nueve cuadrados

CAS **36.** Considere una variación del acertijo de nueve cuadrados. El juego es el mismo que se describe en el ejercicio 35, excepto que hay tres posibles estados para cada cuadrado: blanco, gris o negro. Los cuadrados cambian como se muestra en la figura 2.25, pero ahora el estado cambia siguiendo el ciclo blanco → gris → negro → blanco. Demuestre cómo puede lograrse la combinación ganadora todos negros a partir de la configuración inicial que se muestra en la figura 2.26.

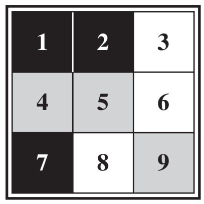


Figura 2.26
Acertijo de nueve cuadrados con más estados

Problemas varios

En los ejercicios 37-53, establezca y resuelva un sistema adecuado de ecuaciones lineales para responder las preguntas.

37. Grace es tres veces mayor que Hans, pero en 5 años tendrá el doble de la edad que Hans tiene ahora. ¿Qué edades tienen ahora?

38. La suma de las edades de Annie, Bert y Chris es 60. Annie es mayor que Bert por el mismo número de años que Bert es mayor que Chris. Cuando Bert sea tan viejo como ahora es Annie, Annie será tres veces más vieja de lo que Chris es ahora. ¿Cuáles son sus edades?

Los dos problemas anteriores son típicos de los que se encuentran en libros populares de acertijos matemáticos. Sin embargo, tienen sus orígenes en la antigüedad. Una tablilla de arcilla de Babilonia, que sobrevive desde aproximadamente 300 a.C., contiene el siguiente problema.

39. Existen dos campos cuya área total es 1800 yardas cuadradas. Un campo produce grano a razón de 2/3 de fanega por yarda cuadrada; el otro campo produce grano a razón de $\frac{1}{2}$ fanega por yarda cuadrada. Si la producción total es de 1100 fanegas, ¿cuál es el tamaño de cada campo?

Hace más de 2000 años, los chinos desarrollaron métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, incluida una versión de la eliminación gaussiana que no fue muy conocida en Europa sino hasta el siglo XIX. (No hay evidencia de que Gauss estuviese al tanto de los métodos chinos cuando desarrolló lo que ahora se conoce como eliminación gaussiana. Sin embargo, es claro que los chinos conocían la esencia del método, aun cuando no justificaron su uso.) El siguiente problema se toma del texto chino Jiuzhang suanshu (Nueve capítulos en el arte matemático)*, escrito durante la temprana dinastía Han, alrededor de 200 a.C.*

40. Existen tres tipos de maíz. Tres gavillas del primer tipo, dos del segundo y una del tercero constituyen 39 medidas. Dos gavillas del primer tipo, tres del segundo y una del tercero constituyen 34 medidas. Y una gavilla del primer tipo, dos del segundo y tres del tercero constituyen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de maíz contiene una gavilla de cada tipo?

41. Describa todos los posibles valores de a, b, c y d que harán que cada una de las siguientes sea una tabla de sumas válida. [Los problemas 41-44 se basan en el artículo "An Application of Matrix Theory" de Paul Glaister en *The Mathematics Teacher*, 85 (1992), pp. 220-223.]

(a)

+	a	b
c	2	3
d	4	5

(b)

+	a	b
c	3	6
d	4	5

42. ¿Qué condiciones de w, x, y y z garantizarán que puedan encontrarse a, b, c y d de modo que la siguiente sea una tabla de sumas válida?

+	a	b
c	w	x
d	y	z

43. Describa todos los posibles valores de a, b, c, d, e y f que harán de cada una de las siguientes una tabla de sumas válida.

(a)

+	a	b	c
d	3	2	1
e	5	4	3
f	4	3	1

(b)

+	a	b	c
d	1	2	3
e	3	4	5
f	4	5	6

44. Al generalizar el ejercicio 42, encuentre las condiciones para las entradas de una tabla de sumas 3×3 que garantizarán que pueda resolverse para a, b, c, d, e y f como antes.

45. De la geometría elemental se sabe que hay una sola línea recta que pasa a través de dos puntos cualesquiera en un plano. Menos conocido es el hecho de que existe una parábola única a través de cualesquiera *tres* puntos no colineales en un plano. Para cada de los siguientes conjuntos de puntos, encuentre una parábola con una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$ que pase a través de los puntos dados. (Grafique la parábola resultante para comprobar la validez de su respuesta.)

(a) $(0, 1), (-1, 4)$ y $(2, 1)$
(b) $(-3, 1), (-2, 2)$ y $(-1, 5)$

46. A través de cualesquiera tres puntos no colineales también pasa una circunferencia única. Encuentre las circunferencias (cuyas ecuaciones generales sean de la forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$) que pasan a través de los conjuntos de puntos del ejercicio 45. (Para comprobar la validez de su respuesta, encuentre el centro y el radio de cada circunferencia y dibuje una gráfica.)

El proceso de sumar funciones racionales (razones de polinomios) al colocarlos sobre un denominador común es el análogo de sumar números racionales. El proceso inverso, de descomponer una función racional al escribirla como una suma de funciones racionales más simples, es útil en muchas áreas de las matemáticas; por ejemplo, surge en cálculo cuando se debe integrar una función racional y en matemáticas discretas cuando se usan funciones generadoras para resolver relaciones de recurrencia. La descomposición de una función racional como una suma de fracciones parciales conduce a un sistema de ecuaciones lineales. En los ejercicios 47-50, encuentre la descomposición en fracciones parciales de la forma dada. (Las letras mayúsculas denotan constantes.)

47. $$\frac{3x + 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3}$$

48. $$\frac{x^2 - 3x + 3}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$

CAS **49.** $$\frac{x - 1}{(x + 1)(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{x^2 + 4}$$

CAS **50.** $$\frac{x^3 + x + 1}{x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1} + \frac{Gx + H}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Ix + J}{(x^2 + 1)^3}$$

A continuación hay dos fórmulas útiles para las sumas de potencias de números naturales consecutivos:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

y

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

La validez de estas fórmulas para todos los valores de $n \geq 1$ (o incluso $n \geq 0$) puede establecerse usando inducción matemática (vea el Apéndice B). Sin embargo, una forma de hacer una suposición educada acerca de cuáles son las fórmulas, es observar que puede reescribir las dos fórmulas anteriores como

$$\tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n \quad y \quad \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n$$

respectivamente. Esto conduce a la conjetura de que la suma de las p-ésimas potencias de los primeros números naturales es un polinomio de grado $p + 1$ en la variable n.

51. Si supone que $1 + 2 + \cdots + n = an^2 + bn + c$, encuentre a, b y c al sustituir tres valores para n y por tanto obtener un sistema de ecuaciones lineales con a, b y c.

52. Suponga que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = an^3 + bn^2 + cn + d$. Encuentre a, b, c y d. [*Sugerencia:* es legítimo usar $n = 0$. ¿Cuál es el lado izquierdo en este caso?]

53. Demuestre que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (n(n+1)/2)^2$.

El sistema de posicionamiento global

El sistema de posicionamiento global (GPS, por sus siglas en inglés) se usa en muchas situaciones para determinar ubicaciones geográficas. Militares, topógrafos, líneas aéreas, compañías de transporte y excursionistas lo usan. La tecnología GPS se ha convertido en lugar común, a tal grado que algunos automóviles, teléfonos celulares y varios dispositivos manuales ahora están equipados con él.

La idea básica del GPS es una variante de la triangulación tridimensional: un punto sobre la superficie de la Tierra está determinado de manera exclusiva al conocer su distancia desde otros tres puntos. Aquí el punto que se quiere determinar es la ubicación del receptor GPS, los otros puntos son satélites y las distancias se calculan mediante los tiempos de recorrido de señales de radio enviadas de los satélites al receptor.

Se supondrá que la Tierra es una esfera sobre la cual se superpone un sistema de coordenadas xyz, con el centro de la Tierra en el origen y con el eje z positivo que corre a lo largo del polo norte y está fijo en relación con la Tierra.

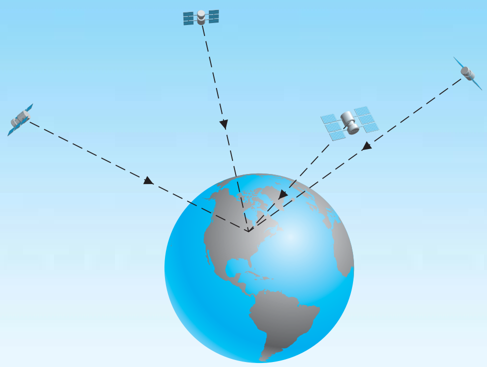
Por simplicidad, considere que una unidad es igual al radio de la Tierra. Por tanto, la superficie de la Tierra se convierte en la esfera unitaria con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. El tiempo se medirá en centésimas de segundo. El GPS encuentra las distancias al conocer cuánto tarda una señal de radio en ir desde un punto a otro. Para esto es necesario conocer la rapidez de la luz, que es aproximadamente igual a 0.47 (radios terrestres por centésimas de segundo).

Imagine que usted es un excursionista perdido en el bosque en el punto (x, y, z) en cierto momento t. No sabe dónde está y, más aún, no tiene reloj, así que no sabe qué hora es. Sin embargo, tiene su dispositivo GPS y recibe señales simultáneas de cuatro satélites, que le dan sus posiciones y tiempos como se muestra en la tabla 2.11. (Las distancias se miden en radios terrestres y el tiempo en centésimas de segundo después de medianoche.)

Esta aplicación se basa en el artículo "An Underdetermined Linear System for GPS" por Dan Kalman en *The College Mathematics Journal*, 33 (2002), pp. 384-290. Para un tratamiento más profundo de las ideas aquí presentadas, vea G. Strang y K. Borre, *Linear Algebra, Geodesy, and GPS* (Wellesley-Cambridge Press, MA, 1997).

Tabla 2.11 Datos satelitales

Satélite	Posición	Tiempo
1	(1.11, 2.55, 2.14)	1.29
2	(2.87, 0.00, 1.43)	1.31
3	(0.00, 1.08, 2.29)	2.75
4	(1.54, 1.01, 1.23)	4.06



Sea (x, y, z) su posición, y sea t el tiempo cuando llegan las señales. La meta es resolver para x, y, z y t. Su distancia al satélite 1 puede calcularse del modo siguiente. La señal, que viaja a una rapidez de 0.47 radios terrestres/10^{-2} s, se envió en el tiempo 1.29 y llegó en el tiempo t, de modo que tardó $t - 1.29$ centésimas de segundo en llegar a usted. La distancia es igual a la velocidad multiplicada por el tiempo (transcurrido), de modo que

$$d = 0.47(t - 1.29)$$

También puede expresar d en términos de (x, y, z) y la posición del satélite (1.11, 2.55, 2.14) con el uso de la fórmula de distancia:

$$d = \sqrt{(x - 1.11)^2 + (y - 2.55)^2 + (z - 2.14)^2}$$

Combinar estos resultados conduce a la ecuación

$$(x - 1.11)^2 + (y - 2.55)^2 + (z - 2.14)^2 = 0.47^2(t - 1.29)^2 \qquad (1)$$

Al desarrollar, simplificar y reordenar, se encuentra que la ecuación (1) se convierte en

$$2.22x + 5.10y + 4.28z - 0.57t = x^2 + y^2 + z^2 - 0.22t^2 + 11.95$$

De igual modo, puede obtener una ecuación correspondiente para cada uno de los otros tres satélites. Termina con un sistema de cuatro ecuaciones con x, y, z y t:

$$\begin{aligned}
2.22x + 5.10y + 4.28z - 0.57t &= x^2 + y^2 + z^2 - 0.22t^2 + 11.95\\
5.74x \phantom{{}+ 5.10y} + 2.86z - 0.58t &= x^2 + y^2 + z^2 - 0.22t^2 + 9.90\\
2.16y + 4.58z - 1.21t &= x^2 + y^2 + z^2 - 0.22t^2 + 4.74\\
3.08x + 2.02y + 2.46z - 1.79t &= x^2 + y^2 + z^2 - 0.22t^2 + 1.26
\end{aligned}$$

No son ecuaciones lineales, pero los términos no lineales son los mismos en cada ecuación. Si resta la primera ecuación de cada una de las otras tres ecuaciones, obtiene un sistema lineal:

$$\begin{aligned}
3.52x - 5.10y - 1.42z - 0.01t &= 2.05\\
-2.22x - 2.94y + 0.30z - 0.64t &= 7.21\\
0.86x - 3.08y - 1.82z - 1.22t &= -10.69
\end{aligned}$$

La matriz aumentada se reduce por renglones a

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.52 & -5.10 & -1.42 & -0.01 & -2.05\\ -2.22 & -2.94 & 0.30 & -0.64 & -7.21\\ 0.86 & -3.08 & -1.82 & -1.22 & -10.69 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.36 & 2.97\\ 0 & 1 & 0 & 0.03 & 0.81\\ 0 & 0 & 1 & 0.79 & 5.91 \end{array}\right]$$

De donde se ve que

$$
\begin{aligned}
x &= 2.97 - 0.36t \\
y &= 0.81 - 0.03t \\
z &= 5.91 - 0.79t
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

con t libre. Al sustituir estas ecuaciones en (1) se obtiene

$$
\begin{gathered}
(2.97 - 0.36t - 1.11)^2 + (0.81 - 0.03t - 2.55)^2 \\
+ (5.91 - 0.79t - 2.14)^2 = 0.47^2(t - 1.29)^2
\end{gathered}
$$

que se simplifica en la ecuación cuadrática

$$0.54t^2 - 6.65t + 20.32 = 0$$

Existen dos soluciones:

$$t = 6.74 \quad \text{y} \quad t = 5.60$$

Al sustituir en (2), se encuentra que la primera solución corresponde a $(x, y, z) = (0.55, 0.61, 0.56)$ y la segunda solución a $(x, y, z) = (0.96, 0.65, 1.46)$. Claramente, la segunda solución no está sobre la esfera unitaria (Tierra), de modo que se le rechaza. La primera solución produce $x^2 + y^2 + z^2 = 0.99$, así que se satisface que, dentro de un error de redondeo aceptable, sus coordenadas se ubican como (0.55, 0.61, 0.56).

En la práctica, los GPS toman en cuenta muchos más factores, como el hecho de que la superficie de la Tierra no es exactamente esférica, de modo que se necesitan refinamientos adicionales que involucran técnicas como la aproximación por mínimos cuadrados (vea el capítulo 7). Además, los resultados de los cálculos GPS se convierten de coordenadas rectangulares (cartesianas) a latitud y longitud, un ejercicio interesante en sí mismo y que involucra incluso a otras ramas de las matemáticas.

CAS 2.5 Métodos iterativos para resolver sistemas lineales

Los métodos directos para resolver sistemas lineales, con el uso de operaciones elementales de renglón, conducen a soluciones exactas en muchos casos, pero están sujetas a errores debido a factores de redondeo y otros, como se ha visto. La tercera vía en el "trivium" lleva por una ruta de hecho muy diferente. En esta sección se exploran los métodos que proceden *iterativamente* al generar sucesivamente sucesiones de vectores que aproximan una solución para un sistema lineal. En muchas instancias (como cuando la matriz coeficiente es *dispersa*, esto es: contiene muchas entradas cero), los métodos iterativos pueden ser más rápidos y más precisos que los métodos directos. Además, los métodos iterativos pueden detenerse siempre que la solución aproximada que generen sea suficientemente precisa. Asimismo, los métodos iterativos con frecuencia se *benefician* de la imprecisión: en realidad, el error de redondeo puede acelerar su convergencia hacia una solución.

Se explorarán dos métodos iterativos para resolver sistemas lineales: el ***método de Jacobi*** y un refinamiento del mismo, el ***método de Gauss-Seidel***. En todos los ejemplos se considerarán sistemas lineales con el mismo número de variables que de ecuaciones y se supondrá que hay una solución única. El interés es encontrar esta solución mediante métodos iterativos.

Ejemplo 2.37

Considere el sistema

$$\begin{aligned} 7x_1 - x_2 &= 5 \\ 3x_1 - 5x_2 &= -7 \end{aligned}$$

El método de Jacobi comienza con la resolución de la primera ecuación para x_1 y la segunda ecuación para x_2, para obtener

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5 + x_2}{7} \\ x_2 &= \frac{7 + 3x_1}{5} \end{aligned} \qquad (1)$$

Ahora se necesita una ***aproximación inicial*** a la solución. Es evidente que no importa cuál sea esta aproximación inicial, así que podría tomarse $x_1 = 0, x_2 = 0$. Estos valores se usan en las ecuaciones (1) para obtener nuevos valores de x_1 y x_2:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5 + 0}{7} = \frac{5}{7} \approx 0.714 \\ x_2 &= \frac{7 + 3 \cdot 0}{5} = \frac{7}{5} = 1.400 \end{aligned}$$

Ahora se sustituyen estos valores en (1) para obtener

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5 + 1.4}{7} \approx 0.914 \\ x_2 &= \frac{7 + 3 \cdot \frac{5}{7}}{5} \approx 1.829 \end{aligned}$$

(escritas con tres lugares decimales). Este proceso se repite (con los anteriores valores de x_2 y x_1 para obtener nuevos valores de x_1 y x_2), lo que produce la sucesión de aproximaciones dadas en la tabla 2.12.

Carl Gustav Jacobi (1804-1851) fue un matemático alemán que realizó importantes aportaciones a muchos campos de las matemáticas y la física, incluidas geometría, teoría de números, análisis, mecánica y dinámica de fluidos. Aunque gran parte de su trabajo fue en matemáticas aplicadas, Jacobi creía en la importancia de hacer matemáticas puras. Excelente profesor, dio cátedra en las Universidades de Berlín y Königsberg, y fue uno de los más famosos matemáticos de Europa.

Tabla 2.12

n	0	1	2	3	4	5	6
x_1	0	0.714	0.914	0.976	0.993	0.998	0.999
x_2	0	1.400	1.829	1.949	1.985	1.996	1.999

Los vectores sucesivos $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ se llaman ***iterados***, de modo que, por ejemplo, cuando $n = 4$, el cuarto iterado es $\begin{bmatrix} 0.993 \\ 1.985 \end{bmatrix}$. Puede ver que los iterados de este ejemplo se aproximan a $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, que es la solución exacta del sistema dado. (Compruébelo.)

En este caso se dice que el método de Jacobi ***converge***.

El método de Jacobi calcula los iterados sucesivos en un sistema de dos variables, de acuerdo con el patrón cruzado que se muestra en la tabla 2.13.

Tabla 2.13

n	0	1	2	3
x_1				
x_2				

El método de Gauss-Seidel recibe su nombre en honor de C. F. Gauss y Philipp Ludwig von Seidel (1821–1896). Seidel trabajó en análisis, teoría de probabilidad, astronomía y óptica. Por desgracia, sufrió de problemas oculares y se retiró a una edad joven. El ensayo en el que describió el método ahora conocido como de Gauss-Seidel se publicó en 1874. Gauss, al parecer, ¡no estaba al tanto del método!

Antes de considerar el método de Jacobi en el caso general, observe una modificación del mismo que con frecuencia converge con más rapidez a la solución. El *método de Gauss-Seidel* es igual que el método de Jacobi, excepto que usa cada nuevo valor *tan pronto como se puede*. De este modo, en el ejemplo, comience por calcular $x_1 = (5 + 0)/7 = \frac{5}{7} \approx 0.714$ como antes, pero ahora use este valor de x_1 para obtener el siguiente valor de x_2:

$$x_2 = \frac{7 + 3 \cdot \frac{5}{7}}{5} \approx 1.829$$

Luego use este valor de x_2 para recalcular x_1 y así sucesivamente. Esta vez los iterados se muestran en la tabla 2.14.

Observe que el método de Gauss-Seidel converge más rápido hacia la solución. Esta vez los iterados se calculan de acuerdo con el patrón en zigzag que se muestra en la tabla 2.15.

Tabla 2.14

n	0	1	2	3	4	5
x_1	0	0.714	0.976	0.998	1.000	1.000
x_2	0	1.829	1.985	1.999	2.000	2.000

Tabla 2.15

n	0	1	2	3
x_1				
x_2				

El método de Gauss-Seidel también tiene una agradable interpretación geométrica en el caso de dos variables. Puede considerar a x_1 y x_2 como las coordenadas de puntos en el plano. El punto de partida es el punto correspondiente a la aproximación inicial $(0, 0)$. El primer cálculo produce $x_1 = \frac{5}{7}$, de modo que se avanza al punto $(\frac{5}{7}, 0) \approx (0.714, 0)$. Después se calcula $x_2 = \frac{64}{35} \approx 1.829$, que avanza hacia el punto $(\frac{5}{7}, \frac{64}{35}) \approx (0.714, 1.829)$. Al continuar de esta forma, los cálculos del método de Gauss-Seidel dan lugar a una sucesión de puntos, cada uno de los cuales difiere del punto anterior en exactamente una coordenada. Si se trazan las rectas $7x_1 - x_2 = 5$ y $3x_1 - 5x_2 = -7$ correspondientes a las dos ecuaciones dadas, se descubre que los puntos calculados arriba caen alternativamente en las dos rectas, como se muestra en la figura 2.27. Más aún, se aproximan al punto de intersección de las rectas, que corresponde a la solución del sistema de ecuaciones. ¡Esto es lo que significa *convergencia*!

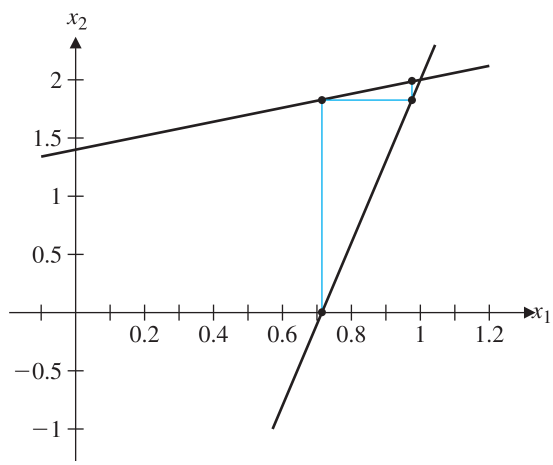


Figura 2.27
Iterados convergentes

Los casos generales de los dos métodos son análogos. Dado un sistema de n ecuaciones lineales con n variables,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{2}$$

la primera ecuación se resuelve para x_1, la segunda para x_2, etcétera. Entonces, al comenzar con una aproximación inicial, se usan estas nuevas ecuaciones para actualizar iterativamente cada variable. El método de Jacobi usa *todos* los valores en la k-ésima iteración para calcular el $(k + 1)$-ésimo iterado, mientras que el método de Gauss-Seidel siempre usa el valor *más reciente* de cada variable en cada cálculo. El ejemplo 2.39 más adelante ilustra el método de Gauss-Seidel en un problema de tres variables.

En este punto, acaso tenga algunas preguntas y preocupaciones acerca de estos métodos iterativos. (¿Las tiene?) Muchas vienen a la mente: ¿estos métodos deben converger? Si no, ¿*cuándo* convergen? *Si* convergen, ¿deben converger a la solución? La respuesta a la primera pregunta es no, como ilustra el ejemplo 2.38.

Ejemplo 2.38 Aplique el método de Gauss-Seidel al sistema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$$

con aproximación inicial $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución Al reordenar las ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + x_2 \\ x_2 &= 5 - 2x_1 \end{aligned}$$

Los primeros iterados se proporcionan en la tabla 2.16. (Compruébelos.)

La solución real al sistema dado es $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Claramente, los iterados en la tabla 2.16 no se aproximan a este punto, como la figura 2.28 deja gráficamente claro en un ejemplo de ***divergencia***.

Tabla 2.16

n	0	1	2	3	4	5
x_1	0	1	4	-2	10	-14
x_2	0	3	-3	9	-15	33

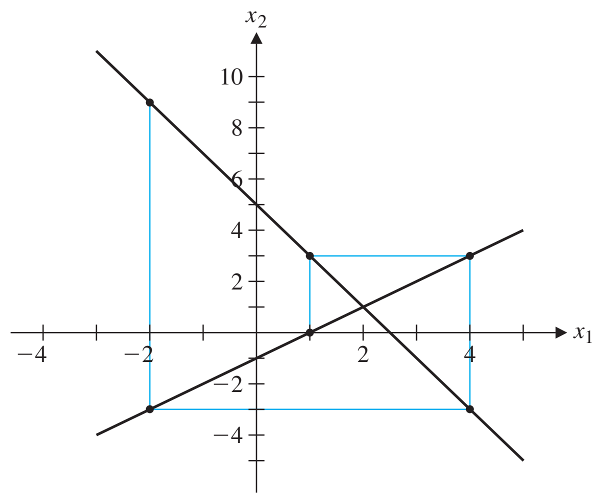


Figura 2.28
Iterados divergentes

De modo que, ¿cuándo convergen estos métodos iterativos? Por desgracia, la respuesta a esta pregunta es más bien complicada. Se le responderá por completo en el capítulo 7, pero por ahora se dará una respuesta parcial, sin demostración.

Sea A la matriz $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Se dice que A es ***estrictamente diagonal dominante*** si

$$\begin{aligned} |a_{11}| &> |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}| \\ |a_{22}| &> |a_{21}| + |a_{23}| + \cdots + |a_{2n}| \\ &\vdots \\ |a_{nn}| &> |a_{n1}| + |a_{n2}| + \cdots + |a_{n,n-1}| \end{aligned}$$

Esto es: el valor absoluto de cada entrada diagonal $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ es mayor que la suma de los valores absolutos de las entradas restantes en dicho renglón.

Teorema 2.9 Si un sistema de n ecuaciones lineales con n variables tiene una matriz coeficiente estrictamente diagonal dominante, entonces tiene una solución única y tanto el método de Jacobi como el de Gauss-Seidel convergen en ella.

Comentario ¡Atención! Este teorema es una implicación unidireccional. El hecho de que un sistema *no* sea estrictamente diagonal dominante *no* significa que los métodos iterativos diverjan. Pueden o no converger. (Vea los ejercicios 15-19.) De hecho, existen ejemplos en los que uno de los métodos converge y el otro diverge. Sin embargo, *si* alguno de los métodos converge, entonces debe converger en la solución: no puede converger en algún otro punto.

Teorema 2.10 Si el método de Jacobi o el de Gauss-Seidel convergen para un sistema de n ecuaciones lineales con n variables, entonces debe converger en la solución del sistema.

Demostración Se ilustrará la idea detrás de la demostración al bosquejarla para el caso del método de Jacobi, mediante el sistema de ecuaciones del ejemplo 2.37. La demostración general es similar.

Convergencia significa que "conforme aumentan las iteraciones, los valores de los iterados se acercan más a un valor límite". Esto significa que x_1 y x_2 convergen en r y s, respectivamente, como se muestra en la tabla 2.17.

Debe demostrar que $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$ es la solución del sistema de ecuaciones. En otras palabras, en la $(k+1)$-ésima iteración, los valores de x_1 y x_2 deben permanecer igual que en la k-ésima iteración. Pero los cálculos producen $x_1 = (5 + x_2)/7 = (5 + s)/7$ y $x_2 = (7 + 3x_1)/5 = (7 + 3r)/5$. Por tanto,

Tabla 2.17

n	$\cdots$	k	$k+1$	$k+2$	$\cdots$
x_1	$\cdots$	r	r	r	$\cdots$
x_2	$\cdots$	s	s	s	$\cdots$

$$\frac{5+s}{7} = r \quad \text{y} \quad \frac{7+3r}{5} = s$$

Al reordenar, se ve que

$$\begin{aligned} 7r - s &= 5 \\ 3r - 5s &= -7 \end{aligned}$$

Por tanto, $x_1 = r$, $x_2 = s$ satisfacen las ecuaciones originales, como se requiere.

Por ahora puede preguntarse: si los métodos iterativos no siempre convergen en la solución, ¿qué tan buenos son? ¿Por qué no se usa la eliminación gaussiana? Primero, se vio que la eliminación gaussiana es sensible a errores de redondeo, y esta sensibilidad puede conducir a imprecisiones o incluso a respuestas enormemente equivocadas. Además, incluso si la eliminación gaussiana no se desviará, una solución no puede mejorarse una vez encontrada. Por ejemplo, si se usa la eliminación gaussiana para calcular una solución a dos lugares decimales, no hay forma de obtener la solución a cuatro lugares decimales, excepto comenzar nuevamente y trabajar con una precisión creciente.

En contraste, puede lograrse una precisión adicional con los métodos iterativos al simplemente hacer más iteraciones. Para sistemas grandes, en particular para aquellos con matrices de coeficientes dispersos, los métodos iterativos son mucho más rápidos que los métodos directos cuando se implementan en una computadora. En muchas aplicaciones, los sistemas que surgen son estrictamente diagonales dominantes, y por tanto está garantizado que los métodos iterativos converjan. El siguiente ejemplo ilustra una de tales aplicaciones.

Ejemplo 2.39 Suponga que se calienta el borde de una placa metálica a una temperatura constante, como se muestra en la figura 2.29.

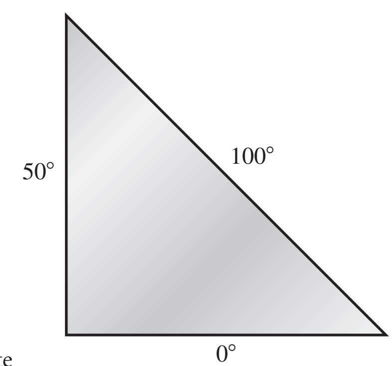


Figura 2.29
Una placa de metal caliente

Con el tiempo, la temperatura en los puntos interiores llegará al *equilibrio*, donde puede demostrarse que se cumple la siguiente propiedad:

La temperatura en cada punto interior P sobre una placa es el promedio de las temperaturas en la circunferencia de cualquier círculo con centro en P dentro de la placa (figura 2.30).

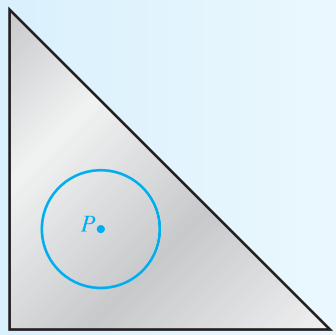


Figura 2.30

Aplicar esta propiedad en un ejemplo real requiere técnicas de cálculo. Como alternativa, puede aproximarse la situación al superponer a la placa una rejilla o malla, que tenga un número finito de puntos interiores, como se muestra en la figura 2.31.

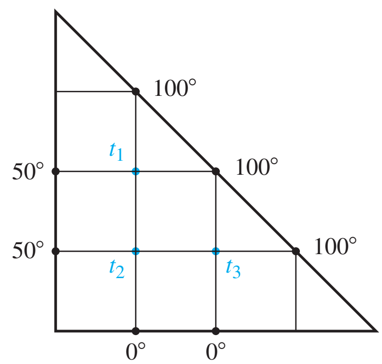


Figura 2.31
Versión discreta del problema de la placa caliente

A continuación se enuncia el análogo discreto de la propiedad promedio que gobierna las temperaturas de equilibrio:

La temperatura en cada punto interior P es el promedio de las temperaturas en los puntos adyacentes a P.

Para el ejemplo que se muestra en la figura 2.31, hay tres puntos interiores, y cada uno es adyacente a otros cuatro puntos. Sean t_1, t_2 y t_3 las temperaturas de equilibrio de los puntos interiores, como se muestra. Entonces, por la propiedad de temperatura promedio, se tiene

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{100 + 100 + t_2 + 50}{4} \\ t_2 &= \frac{t_1 + t_3 + 0 + 50}{4} \\ t_3 &= \frac{100 + 100 + 0 + t_2}{4} \end{aligned} \tag{3}$$

o

$$\begin{aligned} 4t_1 - t_2 \qquad &= 250 \\ -t_1 + 4t_2 - t_3 &= 50 \\ - t_2 + 4t_3 &= 200 \end{aligned}$$

Note que este sistema es estrictamente diagonal dominante. Observe también que las ecuaciones (3) están en la forma requerida por la iteración de Jacobi o Gauss-Seidel. Con una aproximación inicial de $t_1 = 0, t_2 = 0, t_3 = 0$, el método de Gauss-Seidel produce los siguientes iterados.

Iteración 1:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{100 + 100 + 0 + 50}{4} = 62.5 \\ t_2 &= \frac{62.5 + 0 + 0 + 50}{4} = 28.125 \\ t_3 &= \frac{100 + 100 + 0 + 28.125}{4} = 57.031 \end{aligned}$$

Iteración 2:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{100 + 100 + 28.125 + 50}{4} = 69.531 \\ t_2 &= \frac{69.531 + 57.031 + 0 + 50}{4} = 44.141 \\ t_3 &= \frac{100 + 100 + 0 + 44.141}{4} = 61.035 \end{aligned}$$

A continuación, se encuentran los iterados que se mencionan en la tabla 2.18. Se trabaja con una precisión de cinco dígitos significativos y se detiene cuando dos iterados sucesivos concuerdan dentro de 0.001 en todas la variables.

Por ende, las temperaturas de equilibrio en los puntos interiores son (con una precisión de 0.001): $t_1 = 74.108$, $t_2 = 46.430$, y $t_3 = 61.607$. (Compruebe estos cálculos.)

Al usar una retícula más fina (con más puntos interiores), puede obtener una información tan precisa como desee acerca de las temperaturas de equilibrio en varios puntos sobre la placa.

Tabla 2.18

n	0	1	2	3	⋯	7	8
t_1	0	62.500	69.531	73.535	⋯	74.107	74.107
t_2	0	28.125	44.141	46.143	⋯	46.429	46.429
t_3	0	57.031	61.035	61.536	⋯	61.607	61.607

Ejercicios 2.5

En los ejercicios 1-6, aplique el método de Jacobi al sistema dado. Tome el vector cero como la aproximación inicial y trabaje con una precisión de cuatro dígitos significativos hasta que dos iterados sucesivos concuerden dentro de 0.001 en cada variable. En cada caso, compare su respuesta con la solución exacta que encuentre usando cualquier método directo de su elección.

1. $\begin{aligned} 7x_1 - x_2 &= 6 \\ x_1 - 5x_2 &= -4 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 4.5x_1 - 0.5x_2 &= 1 \\ x_1 - 3.5x_2 &= -1 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 20x_1 + x_2 - x_3 &= 17 \\ x_1 - 10x_2 + x_3 &= 13 \\ -x_1 + x_2 + 10x_3 &= 18 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \qquad &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 \qquad\qquad &= 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad &= 0 \\ -x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$

En los ejercicios 7-12, repita el ejercicio dado usando el método de Gauss-Seidel. Tome el vector cero como la aproximación inicial y trabaje con una precisión de cuatro dígitos significativos hasta que dos iterados sucesivos concuerden dentro de 0.001 en cada variable. Compare el número de iteraciones requeridas por los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel para alcanzar tal solución aproximada.

7. Ejercicio 1

8. Ejercicio 2

9. Ejercicio 3

10. Ejercicio 4

11. Ejercicio 5

12. Ejercicio 6

En los ejercicios 13 y 14, dibuje diagramas para ilustrar la convergencia del método de Gauss-Seidel con el sistema dado.

13. El sistema del ejercicio 1

14. El sistema del ejercicio 2

En los ejercicios 15 y 16, calcule los primeros cuatro iterados, con el vector cero como la aproximación inicial, para demostrar que el método de Gauss-Seidel diverge. Luego demuestre que las ecuaciones pueden reordenarse para dar una matriz de coeficientes estrictamente diagonal dominante y aplique el método de Gauss-Seidel para obtener una solución aproximada que sea precisa hasta dentro de 0.001.

15. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$

17. Dibuje un diagrama para ilustrar la divergencia del método de Gauss-Seidel en el ejercicio 15.

En los ejercicios 18 y 19, la matriz de coeficientes no es estrictamente diagonal dominante, ni pueden reordenarse las ecuaciones para hacerlas de ese modo. Sin embargo, tanto el método de Jacobi como el de Gauss-Seidel convergen de cualquier forma. Demuestre que esto es verdadero para el método de Gauss-Seidel, comience con el vector cero como la aproximación inicial y obtenga una solución que sea precisa hasta dentro de 0.01.

18. $\begin{aligned} -4x_1 + 5x_2 &= 14 \\ x_1 - 3x_2 &= -7 \end{aligned}$

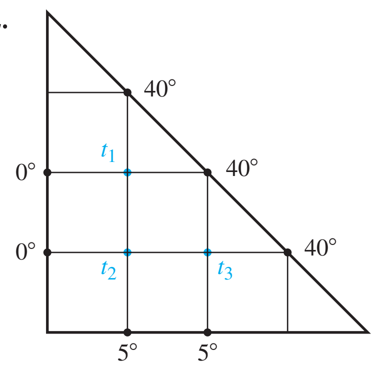
19. $\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -8 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 102 \\ -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= -90 \end{aligned}$

20. Continúe con las iteraciones en el ejercicio 18 hasta obtener una solución que sea precisa hasta dentro de 0.001.

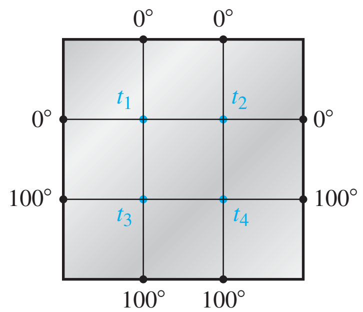
21. Continúe con las iteraciones en el ejercicio 19 hasta obtener una solución que sea precisa hasta dentro de 0.001.

En los ejercicios 22-24, la placa metálica tiene las temperaturas constantes que se muestran en sus fronteras. Encuentre la temperatura de equilibrio en cada uno de los puntos interiores indicados al establecer un sistema de ecuaciones lineales y aplicar el método de Jacobi o el de Gauss-Seidel. Obtenga una solución que sea precisa hasta dentro de 0.001.

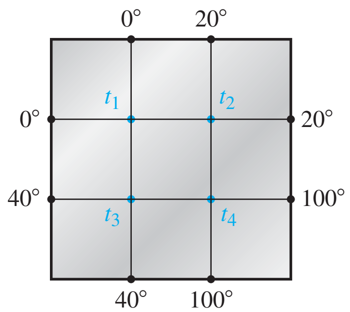
22.



23.

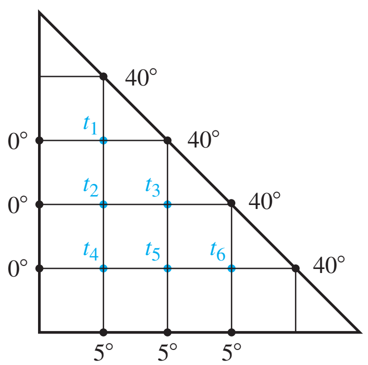


24.

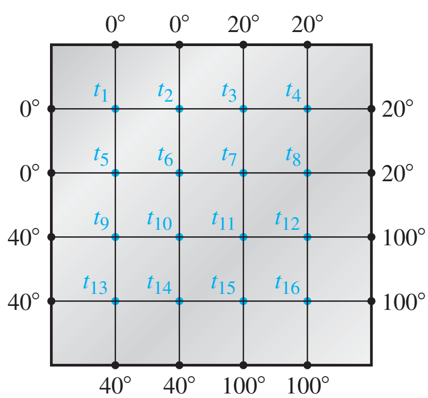


En los ejercicios 25 y 26, se refinan las retículas usadas en los ejercicios 22 y 24 para obtener información más precisa acerca de las temperaturas de equilibrio en los puntos interiores de las placas. Obtenga soluciones que sean precisas hasta dentro de 0.001, usando o el método de Jacobi o el de Gauss-Seidel.

25.



26.



Los ejercicios 27 y 28 demuestran que, a veces, si se tiene suerte, la forma de un problema iterativo puede permitir el uso de un poco de intuición para obtener una solución exacta.

27. Una tira estrecha de papel, de 1 unidad de longitud, se coloca a lo largo de una recta numérica, de modo que sus extremos están en 0 y 1. El papel se dobla a la mitad, con el extremo derecho sobre el izquierdo, de modo que sus extremos están ahora en 0 y $\frac{1}{2}$. A continuación, se dobla nuevamente a la mitad, esta vez con el extremo izquierdo sobre el derecho, de modo que sus extremos están en $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$. La figura 2.32 muestra este proceso. Siga doblando el papel a la mitad, alternando derecha sobre izquierda e izquierda sobre derecha. Si pudiera continuar indefinidamente, es claro que los extremos del papel convergerían en un punto. Este punto es el que se quiere encontrar.

(a) Sea x_1 el extremo correspondiente al lado izquierdo del papel y x_2 el del extremo derecho. Elabore una tabla con los primeros seis valores de $[x_1, x_2]$ y grafique los correspondientes puntos sobre ejes coordenados x_1, x_2.

(b) Encuentre dos ecuaciones lineales de la forma $x_2 = ax_1 + b$ y $x_1 = cx_2 + d$ que determinen los nuevos valores de los puntos finales de cada iteración. Dibuje las rectas correspondientes en sus ejes coordenados y demuestre que este diagrama resultaría de aplicar el método de Gauss-Seidel al sistema de ecuaciones lineales que encontró. (Su diagrama debe parecerse al de la figura 2.27, de la página 132.)

(c) Cambie a representación decimal y siga aplicando el método de Gauss-Seidel para aproximar el punto donde convergen los extremos del papel hasta dentro de 0.001 de precisión.

(d) Resuelva el sistema de ecuaciones exactamente y compare sus respuestas.

28. Una hormiga está parada sobre una recta numérica en el punto A. Camina a la mitad hacia el punto B y da vuelta. Luego camina la mitad de vuelta al punto A, da vuelta nuevamente y camina a la mitad hacia el punto B. Y sigue haciendo esto indefinidamente. Sea que el punto A está en 0 y el punto B en 1. El paseo de la hormiga está constituido por una sucesión de segmentos de recta que se traslapan. Sea x_1 el registro de las posiciones de los puntos finales izquierdos de dichos segmentos y x_2 sus puntos finales derechos. (Por tanto, comience con $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{1}{2}$. Luego se tiene $x_1 = \frac{1}{4}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$, etcétera.) La figura 2.33 muestra el inicio del paseo de la hormiga.

(a) Elabore una tabla con los primeros seis valores de $[x_1, x_2]$ y grafique los puntos correspondientes en ejes coordenados x_1, x_2.

(b) Encuentre dos ecuaciones lineales de la forma $x_2 = ax_1 + b$ y $x_1 = cx_2 + d$ que determinen los nuevos valores de

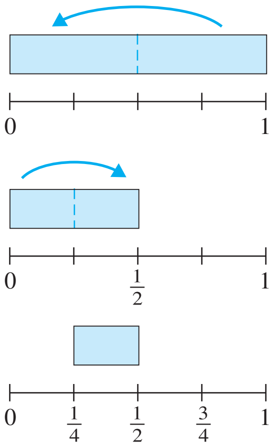


Figura 2.32
Doblado de una tira de papel

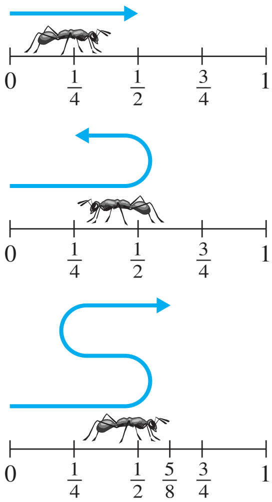


Figura 2.33
El paseo de la hormiga

los puntos finales en cada iteración. Dibuje las rectas correspondientes sobre sus ejes coordenados y demuestre que este diagrama resultaría de aplicar el método de Gauss-Seidel al sistema de ecuaciones lineales que encontró. (Su diagrama debe parecerse al de la figura 2.27 de la página 132.)

(c) Cambie a representación decimal y siga aplicando el método de Gauss-Seidel para aproximar los valores en los cuales convergen x_1 y x_2 hasta una precisión dentro de 0.001.

(d) Resuelva el sistema de ecuaciones exactamente y compare sus respuestas. Interprete sus resultados.

Repaso del capítulo

Definiciones y conceptos clave

Preguntas de repaso

1. Marque cada uno de los siguientes enunciados como verdadero o falso:

(a) Todo sistema de ecuaciones lineales tiene una solución.

(b) Todo sistema homogéneo de ecuaciones lineales tiene una solución.

(c) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene más variables que ecuaciones, entonces tiene un número infinito de soluciones.

(d) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene más ecuaciones que variables, entonces no tiene solución.

(e) Determinar si $\mathbf{b}$ está en gen$(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ es equivalente a determinar si el sistema $[A \mid \mathbf{b}]$ es consistente, donde $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$.

(f) En $\mathbb{R}^3$, gen$(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ siempre es un plano que pasa por el origen.

(g) En $\mathbb{R}^3$, si los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ distintos de cero no son paralelos, entonces son linealmente independientes.

(h) En $\mathbb{R}^3$, si un conjunto de vectores puede dibujarse punta a origen, uno después del otro, de modo que se forme una trayectoria cerrada (polígono), entonces los vectores son linealmente dependientes.

(i) Si un conjunto de vectores tiene la propiedad de que ningún par de vectores en el conjunto son múltiplos escalares mutuos, entonces el conjunto de vectores es linealmente independiente.

(j) Si en un conjunto de vectores existen más vectores que el número de elementos en cada vector, entonces el conjunto de vectores es linealmente dependiente.

2. Encuentre el rank de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Resuelva el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 4 \\ x + 3y - z &= 7 \\ 2x + y - 5z &= 7 \end{aligned}$$

4. Resuelva el sistema lineal

$$\begin{aligned} 3w + 8x - 18y + z &= 35 \\ w + 2x - 4y &= 11 \\ w + 3x - 7y + z &= 10 \end{aligned}$$

5. Resuelva el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

sobre $\mathbb{Z}_7$.

6. Resuelva el sistema lineal

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ x + 4y &= 2 \end{aligned}$$

sobre $\mathbb{Z}_5$.

7. ¿Para qué valor(es) de k es inconsistente el sistema lineal con matriz aumentada $\left[\begin{array}{cc|c} k & 2 & 1 \\ 1 & 2k & 1 \end{array}\right]$?

8. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta de intersección de los planos $x + 2y + 3z = 4$ y $5x + 6y + 7z = 8$.

9. Encuentre el punto de intersección de las siguientes rectas, si existe.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

10. Determine si $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ está en el generador de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

11. Encuentre la ecuación general del plano generado por $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

12. Determine si $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}$ son linealmente independientes.

13. Determine si $\mathbb{R}^3 = \text{gen}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ si:

(a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

14. Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, y sea $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

(a) La forma escalonada reducida por renglones de A es I_3.

(b) El rank de A es 3.

(c) El sistema $[A \mid \mathbf{b}]$ tiene una solución única para cualquier vector $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^3$.

(d) (a), (b) y (c) son verdaderos.

(e) (a) y (b) son verdaderos, pero (c) no lo es.

15. Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$, no todos cero, y sea $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$. ¿Cuáles son los posibles valores del rank de A?

16. ¿Cuál es el rank máximo de una matriz de 5×3? ¿Cuál es el rango mínimo de una matriz de 5×3?

17. Demuestre que, si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores linealmente independientes, entonces también lo son $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

18. Demuestre que $\text{gen}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{span}(\mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{v})$ para cualesquiera vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

19. Con la finalidad de que un sistema lineal con matriz aumentada $[A \mid \mathbf{b}]$ sea consistente, ¿qué debe ser cierto acerca de los ranks de A y $[A \mid \mathbf{b}]$?

20. ¿Las matrices $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ son equivalentes por renglones? ¿Por qué sí o por qué no?