Respuestas a ejercicios impares seleccionados

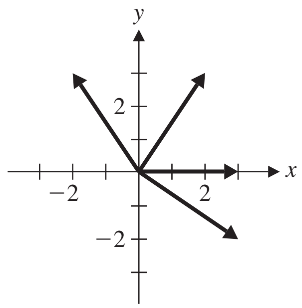
Las respuestas son sencillas. Plantear las preguntas correctas [es lo que es] difícil

—Doctor Who
"The Face of Evil,"
Por Chris Boucher
BBC, 1977

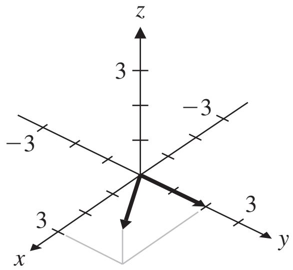
Capítulo 1

Ejercicios 1.1

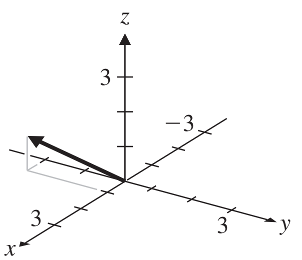
1.



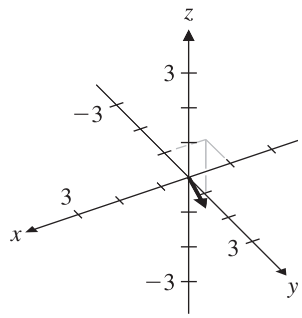
3. **(a)**, **(b)**



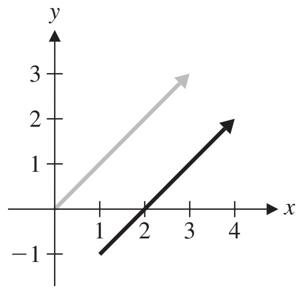
(c)



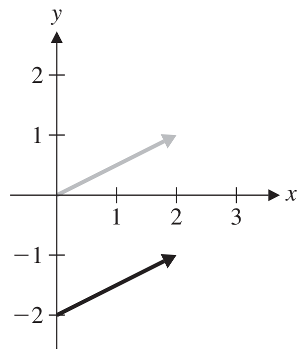
(d)



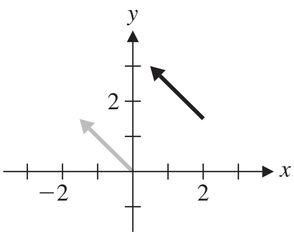
5. **(a)**



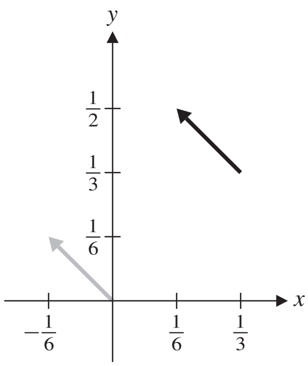
(b)



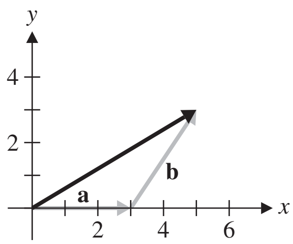
(c)



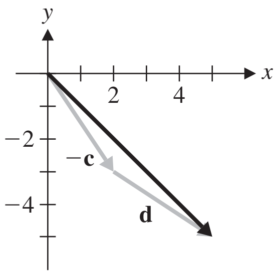
(d)



7. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [5, 3]$



9. $\mathbf{d} - \mathbf{c} = [5, -5]$



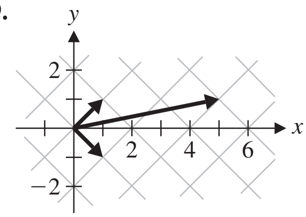
11. $[3, -2, 3]$

13. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} (1 - \sqrt{3})/2 \\ (\sqrt{3} - 1)/2 \end{bmatrix}, \mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{bmatrix} (1 + \sqrt{3})/2 \\ (1 + \sqrt{3})/2 \end{bmatrix}$

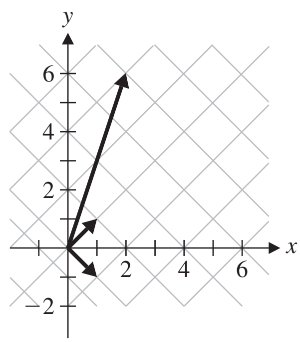
15. $5\mathbf{a}$

17. $\mathbf{x} = 3\mathbf{a}$

19.



21. $\mathbf{w} = -2\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$



25. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1$

27. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = [0, 1, 0, 0], \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1$

29.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

31. 0 **33.** 1

35. 0 **37.** 2, 0, 3

39. 5 **41.** $[1, 1, 0]$

43. 3, 2 **45.** $x = 2$

47. No hay solución **49.** $x = 3$

51. No hay solución **53.** $x = 2$

55. $x = 1$ o $x = 5$

57. **(a)** Toda $a \neq 0$ **(b)** $a = 1, 5$
(c) a y m no pueden tener factores comunes distintos de 1 [esto es, el máximo común divisor (mcd) de a y m es 1.]

Ejercicios 1.2

1. -1 **3.** 11 **5.** 2

7. $\sqrt{5}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ **9.** $\sqrt{14}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{bmatrix}$

11. $\sqrt{6}$, $[1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{2}, 0]$

13. $\sqrt{17}$ **15.** $\sqrt{6}$

17. (a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ es un escalar, no un vector.

(c) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ es un escalar y $\mathbf{u}$ es un vector.

19. Agudo **21.** Agudo **23.** Agudo

25. 60° **27.** ≈88.10° **29.** ≈14.34°

31. Puesto que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 0$, $\angle BAC$ es un ángulo recto.

33. Si se toma el cubo como un cubo unitario (como en la figura 1.34), las cuatro diagonales están dadas por los vectores

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{d}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dado que $\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_j \neq 0$ para toda $i \neq j$ (seis posibilidades), ningún par de diagonales es perpendicular.

35. $D = (-2, 1, 1)$

37. 5 mi/h a un ángulo de ≈ 53.13° hacia la orilla

39. 60°

41. $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ **43.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ **45.** $\begin{bmatrix} -0.301 \\ 0.033 \\ -0.252 \end{bmatrix}$

47. $\mathcal{A} = \sqrt{45}/2$ **49.** $k = -2, 3$

51. $\mathbf{v}$ es de la forma $k\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$, donde k es un escalar.

53. Se violaría la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Ejercicios 1.3

1. (a) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$ **(b)** $3x + 2y = 0$

3. (a) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) $x = 1 - t$
$y = 3t$

5. (a) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ **(b)** $x = t$
$y = -t$
$z = 4t$

7. (a) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2$ **(b)** $3x + 2y + z = 2$

9. (a) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $x = 2s - 3t$
$y = s + 2t$
$z = 2s + t$

11. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

15. (a) $x = t$
$y = -1 + 3t$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

17. Los vectores directores para las dos recta están dados por $\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ m_1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ m_2 \end{bmatrix}$. Las rectas son perpendiculares si y sólo si $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ son ortogonales. Pero $\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 = 0$ si y sólo si $1 + m_1 m_2 = 0$ o, de manera equivalente $m_1 m_2 = -1$.

19. (a) Perpendicular **(b)** Paralelo
(c) Perpendicular **(d)** Perpendicular

21. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

25. (a) $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$
(b) $x - y = 0$ **(c)** $x + y - z = 0$

27. $3\sqrt{2}/2$ **29.** $2\sqrt{3}/3$ **31.** $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

33. $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3})$ **35.** $18\sqrt{13}/13$ **37.** $\frac{5}{3}$

43. ≈78.9° **45.** ≈80.4°

Ejercicios 1.4

1. 13 N a aproximadamente N 67.38 E

3. $8\sqrt{3}$ N a un ángulo de 30° hacia $\mathbf{f}_1$

5. 4 N a un ángulo de 60° hacia $\mathbf{f}_2$

7. 5 N a un ángulo de 60° a la fuerza dada, $5\sqrt{3}$ N perpendicular hacia la fuerza de 5 N.

9. $750\sqrt{2}$ N

11. 980 N

13. ≈ 117.6 N en el alambre de 15 cm, ≈ 88.2 N en el alambre de 20 cm

15. [1, 0, 1, 1, 1]

17. No hay error

19. No hay error

21. $d = 2$

23. $d = 0$

27. $d = 0$

31. $d = X$

33. (b) $[0, 4, 4, 9, 9, 0, 8, 3, 5, 6]$

35. (b) $[0, 3, 8, 7, 0, 9, 9, 0, 2, 6]$

Preguntas de repaso

1. **(a)** V **(c)** F **(e)** V **(g)** F **(i)** V

3. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}$ **5.** 120° **7.** $\begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}$

9. $2x + 3y - z = 7$ **11.** $\sqrt{6}/2$

13. Se violaría la desigualdad de Cauchy-Schwarz

15. $2\sqrt{6}/3$ **17.** $x = 2$ **19.** 3

Capítulo 2

Ejercicios 2.1

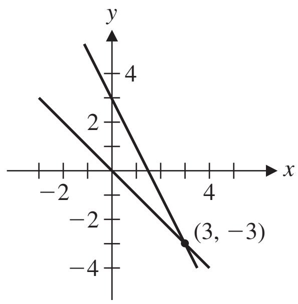
1. Lineal **3.** No es lineal debido al término x^{-1}

5. Lineal **7.** $2x + 4y = 7$

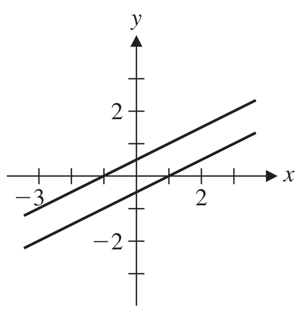
9. $x + y = 4 (x, y \neq 0)$

11. $\left\{ \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} \right\}$ **13.** $\left\{ \begin{bmatrix} 4 - 2s - 3t \\ s \\ t \end{bmatrix} \right\}$

15. Solución única, $x = 3, y = -3$



17. No hay solución



19. $[7, 3]$ **21.** $[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}]$

23. $[5, -2, 1, 1]$ **25.** $[2, -7, -32]$

27. $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$ **29.** $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 4 \end{array}\right]$

31.
$$\begin{aligned} y + z &= 1 \\ x - y &= 1 \\ 2x - y + z &= 1 \end{aligned}$$

33. $[1, 1]$

35. $[4, -1]$ **37.** No hay solución

39. **(a)** $\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 4x + 2y &= 6 \end{aligned}$ **(b)** $\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}s \\ y &= s \end{aligned}$

41. Sean $u = \dfrac{1}{x}$ y $v = \dfrac{1}{y}$. La solución es $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{2}$.

43. Sean $u = \tan x$, $v = \operatorname{sen} y$, $w = \cos z$. Una solución es $x = \pi/4, y = -\pi/6, z = \pi/3$. (Existe un número infinito de soluciones.)

Ejercicios 2.2

1. No **3.** Forma escalonada reducida por renglón

5. No **7.** No

9. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **11.** **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

13. **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

15. Realice operaciones elementales con renglón en el orden $R_4 + 29R_3, 8R_3, R_4 - 3R_2, R_2 \leftrightarrow R_3, R_4 - R_1, R_3 + 2R_1$, y, finalmente, $R_2 + 2R_1$.

17. Una posibilidad es realizar operaciones elementales con renglón sobre A en el orden $R_2 - 3R_1, \frac{1}{2}R_2, R_1 + 2R_2, R_2 + 3R_1, R_1 \leftrightarrow R_2$.

19. *Sugerencia:* escoja una matriz aleatoria de 2×2 e intente esto, ¡cuidadosamente!

21. En realidad estas son dos operaciones elementales con renglón combinadas: $3R_2$ y $R_2 - 2R_1$.

23. Ejercicio 1: 3; ejercicio 3: 2; ejercicio 5: 2; ejercicio 7: 3

25. $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ **27.** $t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **29.** $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 24 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 12 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

33. No hay solución

35. Solución única

37. Número infinito de soluciones

39. *Sugerencia:* demuestre que si $ad - bc \neq 0$, el rank de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es 2. (Existen dos casos: $a = 0$ y $a \neq 0$.) Use el teorema del rank para deducir que el sistema dado debe tener una solución única.

41. **(a)** No hay solución si $k = -1$
(b) Una solución única si $k \neq \pm 1$
(c) Número infinito de soluciones si $k = 1$

43. **(a)** No hay solución si $k = 1$
(b) Una solución única si $k \neq -2, 1$
(c) Número infinito de soluciones si $k = -2$

45. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 9 \\ -10 \\ -7 \end{bmatrix}$

49. No hay intersección

51. Los vectores requeridos $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ son las soluciones del sistema homogéneo con matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{array}\right]$$

Por el Teorema 3, existe un número infinito de soluciones. Si $u_1 \neq 0$ y $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$, las soluciones están dadas por

$$t\begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$$

Pero una comprobación directa demuestra que éstas todavía son soluciones incluso si $u_1 = 0$ y/o $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$.

53. $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ **55.** $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **57.** $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

Ejercicios 2.3

1. Sí **3.** No **5.** Sí **7.** Sí

9. Es necesario demostrar que la ecuación vectorial $x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ tiene una solución para todos los valores de a y b. Esta ecuación vectorial es equivalente al sistema lineal cuya matriz aumentada es

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \end{array}\right]$. La reducción por renglón produce

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & b - a \end{array}\right]$, de donde se puede ver que existe una solución (única). [Más operaciones con renglón producen $x = (a + b)/2$, $y = (a - b)/2$.] Por tanto, $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$.

11. Es necesario demostrar que la ecuación vectorial $x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ tiene una solución para todos los valores de a, b y c. Esta ecuación vectorial es equivalente al sistema lineal cuya matriz aumentada es

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$. La reducción por renglón produce

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 & b + c - a \end{array}\right]$, de donde puede ver que existe una solución (única). [Más operaciones con renglón producen $x = (a - b + c)/2$, $y = (a + b - c)/2$, $z = (-a + b + c)/2$.]

Por tanto, $\mathbb{R}^3 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

13. **(a)** La recta a través del origen con vector director $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
(b) La recta con ecuación general $2x + y = 0$

15. **(a)** El plano que pasa por el origen con vectores directores $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$
(b) El plano con ecuación general $2x - y + 4z = 0$

17. La sustitución produce el sistema lineal

$$\begin{aligned} a \qquad + 3c &= 0 \\ -a + b - 3c &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es $t\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Se tiene que existe un número infinito de soluciones, siendo acaso la más simple $a = -3$, $b = 0$, $c = 1$.

19. $\mathbf{u} = \mathbf{u} + 0(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + 0(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w})$
$\mathbf{v} = (-1)\mathbf{u} + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + 0(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w})$
$\mathbf{w} = 0\mathbf{u} + (-1)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w})$

21. **(c)** Debe demostrar que gen$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ = gen$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$. Se sabe que gen$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \subseteq \mathbb{R}^3$ = gen$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Del ejercicio 19, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ todos pertenecen a gen$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$. Por tanto, por el ejercicio 21(b), gen$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ = gen$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$.

23. Linealmente independiente

25. Linealmente dependiente, $-\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$

27. Linealmente dependiente, puesto que el conjunto contiene el vector cero

29. Linealmente independiente

31. Linealmente dependiente, $\begin{bmatrix}3\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\3\\1\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\end{bmatrix}$

43. **(a)** Sí **(b)** No

Ejercicios 2.4

1. $x_1 = 160, x_2 = 120, x_3 = 160$

3. dos pequeños, tres medianos, cuatro grandes

5. 65 bolsas de mezcla de la casa, 30 bolsas de mezcla especial, 45 bolsas de mezcla gourmet

7. $4FeS_2 + 11O_2 \longrightarrow 2Fe_2O_3 + 8SO_2$

9. $2C_4H_{10} + 13O_2 \longrightarrow 8CO_2 + 10H_2O$

11. $2C_5H_{11}OH + 15O_2 \longrightarrow 12H_2O + 10CO_2$

13. $Na_2CO_3 + 4C + N_2 \longrightarrow 2NaCN + 3CO$

15. **(a)** $\begin{aligned} f_1 &= 30 - t \\ f_2 &= -10 + t \\ f_3 &= t \end{aligned}$ **(b)** $f_1 = 15, f_3 = 15$

(c) $\begin{aligned} 0 &\le f_1 \le 20 \\ 0 &\le f_2 \le 20 \\ 10 &\le f_3 \le 30 \end{aligned}$

(d) Flujo negativo significaría que el agua fluye hacia atrás, contra la dirección de la flecha.

17. **(a)** $\begin{aligned} f_1 &= -200 + s + t \\ f_2 &= 300 - s - t \\ f_3 &= s \\ f_4 &= 150 - t \\ f_5 &= t \end{aligned}$ **(b)** $200 \le f_3 \le 300$

(c) Si $f_3 = s = 0$, entonces $f_5 = t \ge 200$ (de la ecuación f_1), pero $f_5 = t \le 150$ (de la ecuación f_4). Esto es una contradicción.

(d) $50 \le f_3 \le 300$

19. $I_1 = 3$ amps, $I_2 = 5$ amps, $I_3 = 2$ amps

21. **(a)** $I = 10$ amps, $I_1 = I_5 = 6$ amps, $I_2 = I_4 = 4$ amps, $I_3 = 2$ amps

(b) $R_{eff} = \frac{7}{5}$ ohms

(c) Sí; lo cambia a 4 ohms.

23. Agrícola: Manufacturera = 2 : 3

25. El pintor cobra \$39/h, el plomero \$42/h, el electricista \$54/h.

27. **(a)** El carbón debe producir \$100 millones y el acero \$160 millones.

(b) El carbón debe reducir la producción en $\approx$ \$4.2 millones y el acero debe aumentar la producción en $\approx$ \$5.7 millones.

29. **(a)** Sí; presione los interruptores 1, 2 y 3 o los interruptores 3, 4 y 5.

(b) No

31. Los estados que pueden obtenerse se representan mediante estos vectores

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$

en $\mathbb{Z}_2^5$ para el cual $x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0$. (Existen 16 de tales posibilidades.)

33. Si 0 = apagada, 1 = azul claro y 2 = azul oscuro, entonces el sistema lineal que surge tiene matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&0&0&0&2\\ 1&1&1&0&0&1\\ 0&1&1&1&0&2\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&2 \end{array}\right]$$

que se reduce sobre $\mathbb{Z}_3$ a

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&2&1\\ 0&0&1&0&0&2\\ 0&0&0&1&1&2\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right]$$

Esto produce las soluciones

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde t está en $\mathbb{Z}_3$. Por tanto, existen exactamente tres soluciones:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

donde cada entrada indica el número de veces que debe oprimir el interruptor correspondiente.

35. **(a)** Oprima los cuadrados 3 y 7.
(b) La matriz de coeficientes A de 9×9 es equivalente por renglones a $\mathbb{Z}_2$, de modo que para cualquier $\mathbf{b}$ en $\mathbb{Z}_2^9$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única.

37. Grace tiene 15 y Hans 5.

39. 1200 y 600 yardas cuadradas.

41. **(a)** $a = 4 - d, b = 5 - d, c = -2 + d, d$ es arbitrario
(b) No hay solución

43. **(a)** No hay solución
(b) $[a, b, c, d, e, f] = [4, 5, 6, -3, -1, 0] + f[-1, -1, -1, 1, 1, 1]$

45. **(a)** $y = x^2 - 2x + 1$ **(b)** $y = x^2 + 6x + 10$

47. $A = 1, B = 2$

49. $A = -\frac{1}{5}, B = \frac{1}{3}, C = 0, D = -\frac{2}{15}, E = -\frac{1}{5}$

51. $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 0$

Ejercicios 2.5

1.

n	0	1	2	3	4	5
x_1	0	0.8571	0.9714	0.9959	0.9991	0.9998
x_2	0	0.8000	0.9714	0.9943	0.9992	0.9998

Solución exacta: $x_1 = 1, x_2 = 1$

3.

n	0	1	2	3	4	5	6
x_1	0	0.2222	0.2539	0.2610	0.2620	0.2622	0.2623
x_2	0	0.2857	0.3492	0.3582	0.3603	0.3606	0.3606

Solución exacta (a cuatro lugares decimales): $x_1 = 0.2623, x_2 = 0.3606$

5.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1	0	0.3333	0.2500	0.3055	0.2916	0.3009	0.2986	0.3001	0.2997
x_2	0	0.2500	0.0834	0.1250	0.0972	0.1042	0.0996	0.1008	0.1000
x_3	0	0.3333	0.2500	0.3055	0.2916	0.3009	0.2986	0.3001	0.2997

Solución exacta: $x_1 = 0.3, x_2 = 0.1, x_3 = 0.3$

7.

n	0	1	2	3	4
x_1	0	0.8571	0.9959	0.9998	1.0000
x_2	0	0.9714	0.9992	1.0000	1.0000

Después de tres iteraciones, el método de Gauss-Seidel está dentro de 0.001 de la solución exacta. El método de Jacobi requiere cuatro iteraciones para alcanzar la misma precisión.

9.

n	0	1	2	3	4
x_1	0	0.2222	0.2610	0.2622	0.2623
x_2	0	0.3492	0.3603	0.3606	0.3606

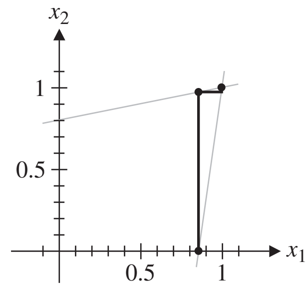
Después de tres iteraciones, el método de Gauss-Seidel está dentro de 0.001 de la solución exacta. El método de Jacobi requiere cuatro iteraciones para alcanzar la misma precisión.

11.

n	0	1	2	3	4	5	6
x_1	0	0.3333	0.2777	0.2962	0.2993	0.2998	0.3000
x_2	0	0.1667	0.1112	0.1020	0.1004	0.1000	0.1000
x_3	0	0.2777	0.2962	0.2993	0.2998	0.3000	0.3000

Después de cuatro iteraciones, el método de Gauss-Seidel está dentro de 0.001 de la solución exacta. El método de Jacobi requiere siete iteraciones para alcanzar la misma precisión.

13.



15.

n	0	1	2	3	4
x_1	0	3	-5	19	-53
x_2	0	-4	8	-28	80

Si las ecuaciones se intercambian y se aplica el método de Gauss-Seidel al sistema equivalente

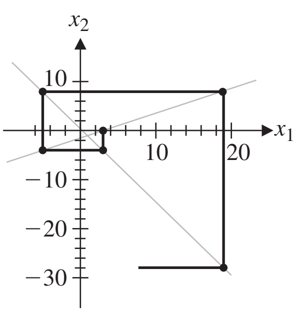
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

se obtiene

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1	0	0.3333	1.2222	0.9260	1.0247	0.9918	1.0027	0.9991	1.0003
x_2	0	-1.3333	-0.8889	-1.0370	-0.9876	-1.0041	-0.9986	-1.0004	-0.9998

Después de siete iteraciones, el proceso converge hasta dentro de 0.001 de la solución exacta $x_1 = 1, x_2 = -1$.

17.



19.

n	0	1	2	3	4	5	6
x_1	0	-1.6	14.97	8.550	10.740	9.839	10.120
x_2	0	25.9	11.408	14.051	11.615	11.718	11.249
x_3	0	-10.35	-9.311	-11.200	-11.322	-11.721	-11.816

n	7	8	9	10	11	12
x_1	9.989	10.022	10.002	10.005	10.001	10.001
x_2	11.187	11.082	11.052	11.026	11.015	11.008
x_3	-11.912	-11.948	-11.973	-11.985	-11.992	-11.996

Después de 12 iteraciones, el método de Gauss-Seidel converge dentro de 0.01 de la solución exacta $x_1 = 10, x_2 = 11, x_3 = -12$.

21.

n	13	14	15	16
x_1	10.0004	10.0003	10.0001	10.0001
x_2	11.0043	11.0023	11.0014	11.0007
x_3	−11.9976	−11.9986	−11.9993	−11.9996

23. El método de Gauss-Seidel produce

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	0	0	12.5	21.875	24.219	24.805	24.951	24.988	24.997	24.999
x_2	0	0	18.75	21.438	24.609	24.902	24.976	24.994	24.998	24.999
x_3	0	50	68.75	73.438	74.609	74.902	74.976	74.994	74.998	74.999
x_4	0	62.5	71.875	74.219	74.805	74.951	74.988	74.997	74.999	75.000

La solución exacta es $x_1 = 25, x_2 = 25, x_3 = 75, x_4 = 75$.

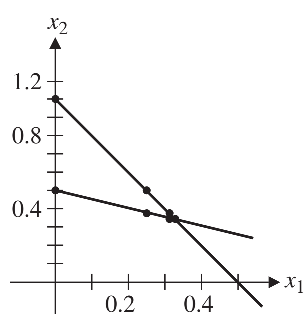
25. El método de Gauss-Seidel produce las siguientes iteraciones:

n	0	1	2	3	4	5	6
t_1	0	20	21.25	22.8125	23.3301	23.6596	23.7732
t_2	0	5	11.25	13.3203	14.6386	15.0926	15.2732
t_3	0	21.25	24.6094	26.9873	27.7303	27.9626	28.0352
t_4	0	2.5	5.8594	8.2373	8.9804	9.2126	9.2852
t_5	0	7.1875	14.6289	16.2829	16.7578	16.9036	16.9491
t_6	0	23.0469	24.9072	25.3207	25.4394	25.4759	25.4873

n	7	8	9	10	11	12
t_1	23.8093	23.8206	23.8242	23.8252	23.8256	23.8257
t_2	15.2824	15.2966	15.3010	15.3024	15.3029	15.3029
t_3	28.0579	28.0650	28.0671	28.0678	28.0681	28.0681
t_4	9.3079	9.3150	9.3172	9.3178	9.3181	9.3181
t_5	16.9633	16.9677	16.9690	16.9695	16.9696	16.9696
t_6	25.4908	25.4919	25.4922	25.4924	25.4924	25.4924

27. (a)

n	0	1	2	3	4	5	6
x_1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{21}{64}$
x_2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{11}{32}$



(b) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$

(c)

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0	0	0.25	0.3125	0.3281	0.3320	0.3330	0.3332
x_2	1	0.5	0.375	0.3438	0.3360	0.3340	0.3335	0.3334

[Las columnas 1, 2 y 3 de esta tabla son las columnas *impares* 1, 3 y 5 de la tabla en el inciso (a). Las iteraciones convergen en $x_1 = x_2 = 0.3333$.

(d) $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$

Preguntas de repaso

1. (a) F **(c)** F **(e)** V **(g)** V **(i)** F

3. $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ **7.** $k = -1$ **9.** $(0, 3, 1)$

11. $x - 2y + z = 0$ **13. (a)** Si **15.** 1 o 2

17. Si $c_1(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + c_2(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}$, entonces $(c_1 + c_2)\mathbf{u} + (c_1 - c_2)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. La independencia lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ implica $c_1 + c_2 = 0$ y $c_1 - c_2 = 0$. Al resolver este sistema, se obtiene $c_1 = c_2 = 0$. Por tanto, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ son linealmente independientes.

19. Sus rangos deben ser iguales.

Capítulo 3

Ejercicios 3.1

1. $\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$ **3.** No es posible

5. $\begin{bmatrix} 12 & -6 & 3 \\ -4 & 12 & 14 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 19 & 27 \end{bmatrix}$

9. $[10]$ **11.** $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 27 & 0 \\ -49 & 125 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

19. $B = \begin{bmatrix} 1.50 & 1.00 & 2.00 \\ 1.75 & 1.50 & 1.00 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 650.00 & 462.50 \\ 675.00 & 406.25 \end{bmatrix}$

La columna i corresponde al almacén i, el renglón 1 contiene los costos de embarque por camión y el renglón 2 contiene los costos de embarcar por tren.

21. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

23. $AB = [2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 \quad 3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 6\mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_2 + 4\mathbf{a}_3]$ (donde $\mathbf{a}_i$ es la i-ésima columna de A)

25. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -6 & -9 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -12 & -8 \\ -1 & 6 & 4 \\ 1 & -6 & -4 \end{bmatrix}$

27. $BA = \begin{bmatrix} 2\mathbf{A}_1 + 3\mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 \\ -\mathbf{A}_1 + 6\mathbf{A}_2 + 4\mathbf{A}_3 \end{bmatrix}$ (donde $\mathbf{A}_i$ es el i-ésimo renglón de A)

29. Si $\mathbf{b}_i$ es la i-ésima columna de B, entonces $A\mathbf{b}_i$ es la i-ésima columna de AB. Si las columnas de B son linealmente dependientes, entonces existen escalares $c_1, \ldots, c_n$ (no todos cero) tales que $c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$. Pero entonces $c_1(A\mathbf{b}_1) + \cdots + c_n(A\mathbf{b}_n) = A(c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, de modo que las columnas de AB son linealmente dependientes.

31. $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$ **33.** $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$

35. (a) $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$

$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A^5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$

$A^7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A^{2001} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

37. $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

39. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \end{bmatrix}$

Ejercicios 3.2

1. $X = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ **3.** $X = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} & 4 \end{bmatrix}$

5. $B = 2A_1 + A_2$ **7.** No es posible

9. $\text{gen}(A_1, A_2) = \left\{\begin{bmatrix} c_1 & 2c_1 + c_2 \\ -c_1 + 2c_2 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} w & x \\ 2x - 5w & x - w \end{bmatrix}\right\}$

11. $\text{gen}(A_1, A_2, A_3) = \left\{\begin{bmatrix} c_1 - c_2 + c_3 & 2c_2 + c_3 & -c_1 + c_3 \\ 0 & c_1 + c_2 & 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} -3b + 4c + 5e & b & c \\ 0 & e & 0 \end{bmatrix}\right\}$

13. Linealmente independiente

15. Linealmente independiente

23. $a = d, c = 0$ **25.** $3b = 2c, a = d - c$

27. $a = d, b = c = 0$

29. Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ matrices triangulares superiores de $n \times n$ y sea $i > j$. Entonces, por la definición de matriz triangular superior,

$a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{i,\,i-1} = 0$ y

$b_{ij} = b_{i+1,\,j} = \cdots = b_{nj} = 0$

Ahora sea $C = AB$. Entonces

$$\begin{aligned} c_{ij} = {} & a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots a_{i,\,i-1}b_{i-1,\,j} + a_{ii}b_{ij} \\ & + a_{i,\,i+1}b_{i+1,\,j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \\ = {} & 0 \cdot b_{1j} + 0 \cdot b_{2j} + \cdots 0 \cdot b_{i-1,\,j} + a_{ii} \cdot 0 \\ & + a_{i,\,i+1} \cdot 0 + \cdots + a_{in} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

de donde se concluye que C es triangular superior.

35. (a) A, B simétrica $\Rightarrow (A + B)^T = A^T + B^T = A + B \Rightarrow A + B$ es simétrica

37. Las matrices (b) y (c) son antisimétricas.

41. A o B (o ambas) deben ser la matriz cero.

43. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

47. *Sugerencia:* use la traza.

Ejercicios 3.3

1. $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ **3.** No es invertible

5. No es invertible **7.** $\begin{bmatrix} -1.6 & -2.8 \\ 0.\overline{3} & 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} a/(a^2 + b^2) & b/(a^2 + b^2) \\ -b/(a^2 + b^2) & a/(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -5 \\ 9 \end{bmatrix}$

13. (a) $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$

(c) El método en el inciso (b) usa menos multiplicaciones

17. (b) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ si y sólo si $AB = BA$

21. $X = A^{-1}(BA)^2B^{-1}$

23. $X = (AB)^{-1}BA + A$

25. $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **27.** $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

29. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **31.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **35.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **37.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

39. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

43. (a) Si A es invertible, entonces $BA = CA \Rightarrow (BA)A^{-1} = (CA)A^{-1} \Rightarrow B(AA^{-1}) = C(AA^{-1}) \Rightarrow BI = CI \Rightarrow B = C$.

45. *Sugerencia:* reescriba $A^2 - 2A + I = O$ como $A(2I - A) = I$.

47. Si AB es invertible, entonces existe una matriz X tal que $(AB)X = I$. Pero entonces $A(BX) = I$ también, de modo que A es invertible (con inverso BX).

49. $\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ **51.** $\begin{bmatrix} 1/(a^2 + 1) & -a/(a^2 + 1) \\ a/(a^2 + 1) & 1/(a^2 + 1) \end{bmatrix}$

53. No es invertible

55. $\begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ -1/a^2 & 1/a & 0 \\ 1/a^3 & -1/a^2 & 1/a \end{bmatrix}, a \neq 0$

57. $\begin{bmatrix} -11 & -2 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 2 \\ 9 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

59. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a/d & -b/d & -c/d & 1/d \end{bmatrix}, d \neq 0$

61. No es invertible **63.** $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

69. $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$ **71.** $\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Ejercicios 3.4

1. $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} -3/2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} -7 \\ -15 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

15. $L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, U^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} -5/12 & 1/12 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ **31.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicios 3.5

1. Subespacio **3.** Subespacio

5. Subespacio **7.** No es subespacio

11. $\mathbf{b}$ está en col(A), $\mathbf{w}$ no está en renglón(A).

15. No

17. $\{[1 \quad 0 \quad -1], [0 \quad 1 \quad 2]\}$ es una base para renglón(A); $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ es una base par col(A); $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ es una base para nulo(A).

19. $\{[1 \quad 0 \quad 1 \quad 0], [0 \quad 1 \quad -1 \quad 0], [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]\}$ es una base para renglón(A); $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ es una base para col(A); $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ es una base para nulo(A).

21. $\{[1 \quad 0 \quad -1], [1 \quad 1 \quad 1]\}$ es una base para renglón(A); $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ es una base para col(A)

23. $\{[1 \quad 1 \quad 0 \quad 1], [0 \quad 1 \quad -1 \quad 1], [0 \quad 1 \quad -1 \quad -1]\}$ es una base para renglón(A); $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ es una base para col(A)

25. Tanto $\{[1 \quad 0 \quad -1], [0 \quad 1 \quad 2]\}$ como $\{[1 \quad 0 \quad -1], [1 \quad 1 \quad 1]\}$ son conjuntos generadores linealmente independientes para renglón$(A) = \{[a \quad b \quad -a + 2b]\}$. Tanto $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ como $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ son conjuntos generadores linealmente independientes para col$(A) = \mathbb{R}^2$.

27. $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

29. $\{[1 \quad 0 \quad 0], [0 \quad 1 \quad 0], [0 \quad 0 \quad 1]\}$

31. $\{[2 \quad -3 \quad 1], [1 \quad -1 \quad 0], [4 \quad -4 \quad 1]\}$

35. rank$(A) = 2$, nulidad$(A) = 1$

37. rank$(A) = 3$, nulidad$(A) = 1$

39. Si A es de 3×5 entonces rank$(A) \leq 3$, de modo que no puede haber más de tres columnas linealmente independientes.

41. nulidad$(A) = 2, 3, 4$ o 5

43. Si $a = -1$, entonces $\text{rank}(A) = 1$; si $a = 2$, entonces $\text{rank}(A) = 2$; para $a \neq -1, 2$, $\text{rank}(A) = 3$.

45. Sí **47.** Sí **49.** No

51. $\mathbf{w}$ está en gen($\mathcal{B}$) si y sólo si el sistema lineal con matriz aumentada $[\mathcal{B} \mid \mathbf{w}]$ es consistente, lo que es verdadero en este caso, pues

$$[\mathcal{B} \mid \mathbf{w}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A partir de esta forma escalonada reducida por renglón, también es claro que $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

53. $\text{rank}(A) = 2$, nulidad$(A) = 1$

55. $\text{rank}(A) = 3$, nulidad$(A) = 1$

57. Sean $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ los vectores renglón de A, de modo que renglón $(A) = \text{gen}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m)$. Si $\mathbf{x}$ está en nulo(A), entonces, dado que $A\mathbf{x} = 0$, también se tiene $\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x} = 0$ para $i = 1 \ldots, m$, por la definición renglón-columna de multiplicación matricial. Si $\mathbf{r}$ está en renglón(A), entonces $\mathbf{r}$ es de la forma $\mathbf{r} = c_1\mathbf{A}_1 + \cdots + c_m\mathbf{A}_m$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{x} &= (c_1\mathbf{A}_1 + \cdots + c_m\mathbf{A}_m) \cdot \mathbf{x} \\ &= c_1(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x}) + \cdots + c_m(\mathbf{A}_m \cdot \mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

59. (a) Si un conjunto de columnas de AB es linealmente independiente, entonces las correspondientes columnas de B son linealmente independientes (por un argumento similar al necesario para probar el ejercicio 29 de la sección 3.1). Se tiene que el *máximo* número k de columnas linealmente independientes de AB [esto es, $k = \text{rank}(AB)$] no es más que el *máximo* número r de columnas linealmente independientes de B [esto es, $r = \text{rank}(B)$]. En otras palabras, $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$.

61. (a) Del ejercicio 59(a), rank(UA)$\leq$ rank(A) y rank(A) = rank$((U^{-1}U)A)$ = rank$(U^{-1}(UA))\leq$ rank(UA). Por tanto, rank(UA) = rank(A).

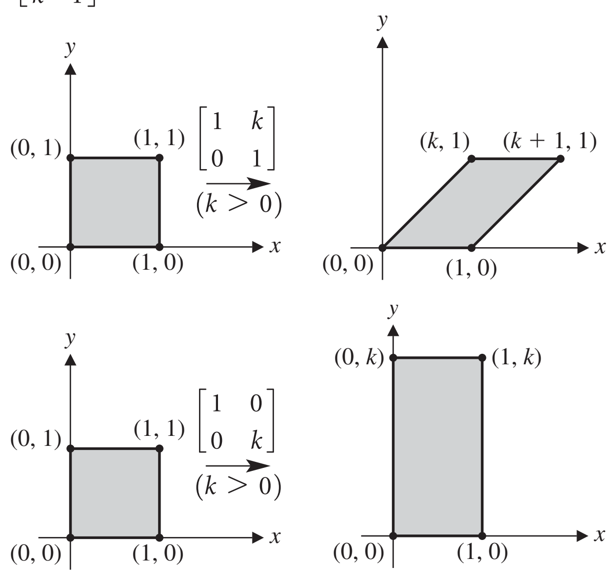
Ejercicios 3.6

1. $T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

15. $[F] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **17.** $[D] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ estira o contrae en la dirección x (combinado con una reflexión en el eje y si $k < 0$); $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ estira o contrae en la dirección y (combinado con una reflexión en el eje x si $k < 0$); $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es una reflexión en la recta $y = x$; $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es un *corte* en la dirección x; $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ es un *corte* en la dirección y. Por ejemplo,



21. $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **27.** $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

31. $[S \circ T] = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

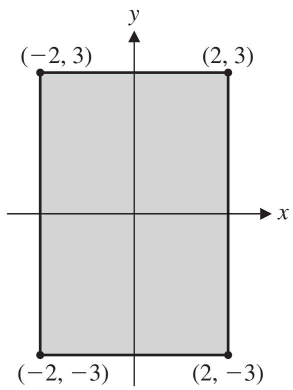
33. $[S \circ T] = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

35. $[S \circ T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

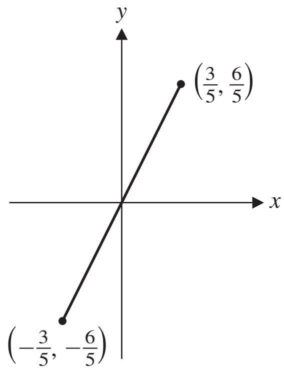
37. $\begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ **39.** $\begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

45. En forma vectorial, sean las rectas paralelas dadas por $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$ y $\mathbf{x}' = \mathbf{p}' + t\mathbf{d}$. Sus imágenes son $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{p} + t\mathbf{d}) = T(\mathbf{p}) + tT(\mathbf{d})$ y $T(\mathbf{x}') = T(\mathbf{p}' + t\mathbf{d}) = T(\mathbf{p}') + tT(\mathbf{d})$. Suponga que $T(\mathbf{d}) \neq \mathbf{0}$. Si $T(\mathbf{p}') - T(\mathbf{p})$ es paralela a $T(\mathbf{d})$, entonces las imágenes representan la misma recta; de otro modo, las imágenes representan distintas rectas paralelas. Por otra parte, si $T(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$, entonces las imágenes representan dos puntos distintos si $T(\mathbf{p}') \neq T(\mathbf{p})$ y un punto individual de otra manera.

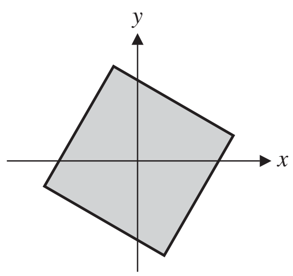
47.



49.



51.



Ejercicios 3.7

1. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.38 \\ 0.62 \end{bmatrix}$ **3.** 64%

5. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 150 \\ 120 \\ 120 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 155 \\ 120 \\ 115 \end{bmatrix}$ **7.** $\frac{5}{18}$

9. (a) $P = \begin{bmatrix} 0.662 & 0.250 \\ 0.338 & 0.750 \end{bmatrix}$ **(b)** 0.353

(c) 42.5% húmedo, 57.5% seco

11.(a) $P = \begin{bmatrix} 0.08 & 0.09 & 0.11 \\ 0.07 & 0.11 & 0.05 \\ 0.85 & 0.80 & 0.84 \end{bmatrix}$

(b) 0.08, 0.1062, 0.1057, 0.1057, 0.1057

(c) 10.6% bueno, 5.5% adecuado, 83.9% pobre

13. Las entradas del vector $\mathbf{j}P$ son justo las sumas de columna de la matriz P. De modo que P es estocástica si y sólo si $\mathbf{j}P = \mathbf{j}$.

15. 4 **17.** 9.375

19. Sí, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **21.** No

23. No **25.** Sí, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 27 \\ 35 \end{bmatrix}$

27. Productiva **29.** No productiva

31. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix}$ **33.** Sí, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

37. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 500 \\ 70 \\ 50 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 720 \\ 350 \\ 35 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1175 \\ 504 \\ 175 \end{bmatrix}$

39. (a) Para L_1 se tiene $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 50 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \end{bmatrix},$

$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 200 \\ 32 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 160 \\ 160 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 800 \\ 128 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 640 \\ 640 \end{bmatrix},$

$\mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 3200 \\ 512 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} 2560 \\ 2560 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_9 = \begin{bmatrix} 12800 \\ 2048 \end{bmatrix},$

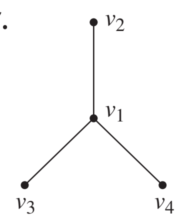
$\mathbf{x}_{10} = \begin{bmatrix} 10240 \\ 10240 \end{bmatrix}.$

(b) La primera población oscila entre dos estados, mientras que la segunda tiende a un estado estacionario.

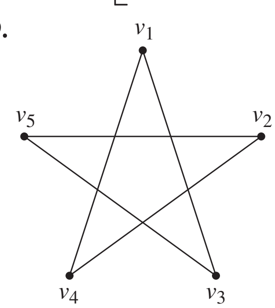
41. La población oscila a lo largo de un ciclo de tres estados (para la población relativa): si $0.1 < s \leq 1$, la población real crece; si $s = 0.1$, la población real pasa por un ciclo de longitud 3; y si $0 \leq s < 0.1$, la población real declina (y a la larga morirá).

43. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **45.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

47.

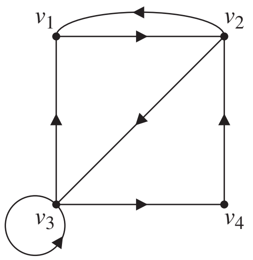


49.

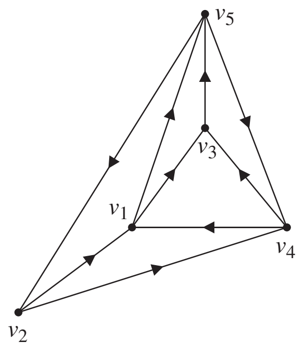


51. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **53.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

55.



57.

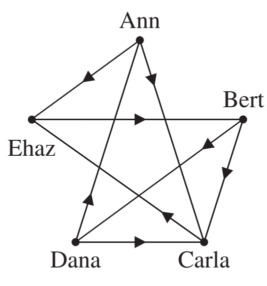


59. 2 **61.** 3 **63.** 0 **65.** 3

67. **(a)** El vértice i no es adyacente a algún otro vértice.

69. Si sólo se usan victorias directas, P_2 está en primer lugar; P_3, P_4 y P_6 empatan en segundo lugar; y P_1 y P_5 empatan en tercer lugar. Si se combinan victorias directas e indirectas, los jugadores se clasifican del modo siguiente: P_2 en primer lugar, seguido por P_6, P_4, P_3, P_5 y P_1.

71. **(a)**



$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) dos pasos; todas las entradas fuera de la diagonal del segundo renglón de $A + A^2$ son distintas de cero.

(d) Si la gráfica tiene n vértices, compruebe que la entrada (i, j) de las potencias A^k para $k = 1, \ldots, n - 1$. El vértice i está conectado al vértice j mediante una trayectoria de longitud k si y sólo si $(A^k)_{ij} \neq 0$.

73. $(AA^T)_{ij}$ cuenta el número de vértices adyacentes a *ambos* vértices, el i y el j.

75. Bipartita **77.** Bipartita

79. Un solo error podría cambiar el vector código $\mathbf{c}_2 = [0, 1, 0, 1]$ en $\mathbf{c}' = [1, 1, 0, 1]$. Sin embargo, $\mathbf{c}'$ también podría obtenerse del vector código $\mathbf{c}_4 = [1, 1, 1, 1]$ vía un solo error, de modo que el error no puede corregirse.

81. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **83.** $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

85. $P\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es la segunda columna de P, de modo que el error está en el segundo componente de $\mathbf{c}'$. Por tanto, el vector de mensaje correcto (de los primeros cuatro componentes del vector corregido) es $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

87. **(a)** $P = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$

(b) $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) Las columnas de P no son distintas.

89. **(a)** $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; no es un código de corrección de error.

91. Un conjunto de candidatos para P y G es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Preguntas de repaso

1. **(a)** V **(c)** F **(e)** V **(g)** V **(i)** V

3. Imposible

5. $\begin{bmatrix} \frac{17}{83} & -\frac{1}{83} \\ -\frac{1}{83} & \frac{5}{166} \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 25 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 2 & 4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$

11. Porque $(I - A)(I + A + A^2) = I - A^3 = I - O = I$, $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$.

13. Una base para renglón(A) es $\{[1, -2, 0, -1, 0], [0, 0, 1, 2, 0], [0, 0, 0, 0, 1]\}$; una base para col$(A)$ es $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ (o la base estándar para $\mathbf{R}^3$); y una base para nulo(A) es $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

15. Una matriz invertible tiene un espacio nulo trivial (cero). Si A es invertible, entonces también lo es A^T, y en consecuencia tanto A como A^T tienen espacios nulos triviales. Si A no es invertible, entonces A y A^T no necesitan tener el mismo espacio nulo. Por ejemplo, considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

17. Puesto que A tiene n columnas linealmente independientes, rank$(A) = n$. Por tanto, rank$(A^TA) = n$ por el Teorema 3.28. Puesto que A^TA es de $n \times n$, esto implica que A^TA es invertible, por el teorema fundamental de las matrices invertibles. AA^T no necesita ser invertible. Por ejemplo, considere $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

19. $\begin{bmatrix} -1/5\sqrt{2} & -3/5\sqrt{2} \\ 2/5\sqrt{2} & 6/5\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Capítulo 4

Ejercicios 4.1

1. $A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\mathbf{v}, \lambda = 3$

3. $A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} = -3\mathbf{v}, \lambda = -3$

5. $A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\mathbf{v}, \lambda = 3$

7. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

13. $\lambda = 1, E_1 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right); \lambda = -1, E_{-1} = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

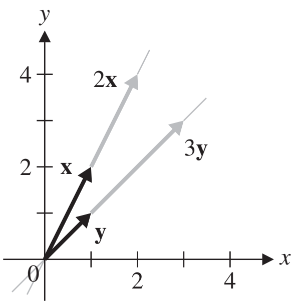
15. $\lambda = 0, E_0 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right); \lambda = 1, E_1 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

17. $\lambda = 2, E_2 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right); \lambda = 3, E_3 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

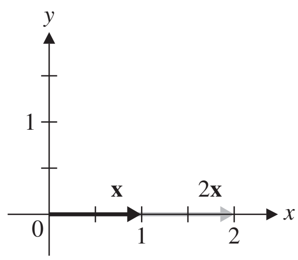
19. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda = 1; \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda = 2$

21. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \lambda = 2; \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \lambda = 0$

23. $\lambda = 2, E_2 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right); \lambda = 3, E_3 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$



25. $\lambda = 2, E_2 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$



27. $\lambda = 1 + i, E_{1+i} = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}\right); \lambda = 1 - i, E_{1-i} = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}\right)$

29. $\lambda = 1 + i, E_{1+i} = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right); \lambda = 1 - i, E_{1-i} = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)$

31. $\lambda = 1, 2$ **33.** $\lambda = 4$

Ejercicios 4.2

1. 16 **3.** 0 **5.** -18 **7.** 6
9. -12 **11.** $a^2b + ab^2$ **13.** 4 **15.** $abdg$
17. 0 **25.** 2 **27.** -24 **29.** 0
31. 0 **33.** -24 **35.** 8 **37.** -4
39. -8 **45.** $k \neq 0, 2$ **47.** -6 **49.** $-\frac{3}{2}$
51. $(-2)3^n$
53. $\det(AB) = (\det A)(\det B) = (\det B)(\det A) = \det(BA)$
55. 0, 1 **57.** $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}$
59. $x = -1, y = 0, z = 1$ **61.** $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

63. $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Ejercicios 4.3

1. **(a)** $\lambda^2 - 7\lambda + 12$ **(b)** $\lambda = 3, 4$
(c) $E_3 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right); E_4 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$
(d) Las multiplicidades algebraica y geométrica son todas 1.

3. **(a)** $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$
(b) $\lambda = -2, 1, 3$
(c) $E_{-2} = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}1\\-3\\0\end{bmatrix}\right); E_1 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right);$ $E_3 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\10\end{bmatrix}\right)$
(d) Las multiplicidades algebraica y geométrica son todas 1.

5. **(a)** $-\lambda^3 + \lambda^2$ **(b)** $\lambda = 0, 1$
(c) $E_0 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}\right); E_1 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$
(d) $\lambda = 0$ tiene multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1; $\lambda = 1$ tiene multiplicidades algebraica y geométrica 1.

7. **(a)** $-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27$
(b) $\lambda = 3$
(c) $E_3 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$
(d) $\lambda = 3$ tiene multiplicidad algebraica 3 y multiplicidad geométrica 2.

9. **(a)** $\lambda^4 - 6\lambda^3 + 9\lambda^2 + 4\lambda - 12$
(b) $\lambda = -1, 2, 3$
(c) $E_{-1} = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\-2\\1\end{bmatrix}\right); E_2 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}\right);$ $E_3 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\2\\1\end{bmatrix}\right)$
(d) $\lambda = -1$ y $\lambda = 3$ tienen multiplicidades algebraica y geométrica 1; $\lambda = 2$ tiene multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1.

11. **(a)** $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 3$

(b) $\lambda = -1, 1, 3$

(c) $E_{-1} = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$;

$E_1 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$;

$E_3 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

(d) $\lambda = -1$ y $\lambda = 3$ tienen multiplicidades algebraica y geométrica 1; $\lambda = 1$ tiene multiplicidades algebraica y geométrica 2.

15. $\begin{bmatrix} 2^{-9} + 3 \cdot 2^{10} \\ -2^{-9} + 3 \cdot 2^{10} \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 2 \\ (2 \cdot 3^{20} - 1)/3^{20} \\ 2 \end{bmatrix}$

23. **(a)** $\lambda = -2, E_{-2} = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}\right)$; $\lambda = 5, E_5 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

(b) **(i)** $\lambda = -\frac{1}{2}, E_{-1/2} = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}\right)$; $\lambda = \frac{1}{5}, E_{1/5} = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

(iii) $\lambda = 0, E_0 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}\right)$; $\lambda = 7$, $E_7 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

27. $\begin{bmatrix} -3 & 4 & -12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 12$

35. $A^2 = 4A - 5I, A^3 = 11A - 20I$

$A^4 = 24A - 55I$

37. $A^{-1} = -\dfrac{1}{5}A + \dfrac{4}{5}I, A^{-2} = -\dfrac{4}{25}A + \dfrac{11}{25}I$

Ejercicios 4.4

1. El polinomio característico de A es $\lambda^2 - 5\lambda + 1$, pero el de B es $\lambda^2 - 2\lambda + 1$.

3. Los eigenvalores de A son $\lambda = 2$ y $\lambda = 4$, pero los de B son $\lambda = 1$ y $\lambda = 4$.

5. $\lambda_1 = 4, E_4 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$; $\lambda_2 = 3, E_3 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$

7. $\lambda_1 = 6, E_6 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$; $\lambda_2 = -2, E_{-2} = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$

9. No es diagonalizable

11. $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. No es diagonalizable

15. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 35839 & -69630 \\ -11605 & 24234 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} (3^k + 3(-1)^k)/4 & (3^{k+1} - 3(-1)^k)/4 \\ (3^k - (-1)^k)/4 & (3^{k+1} + (-1)^k)/4 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

23.
$$\begin{bmatrix} (5 + 2^{k+2} + (-3)^k)/10 & (2^k - (-3)^k)/5 & (-5 + 2^{k+2} + (-3)^k)/10 \\ (2^{k+1} - 2(-3)^k)/5 & (2^k + 4(-3)^k)/5 & (2^{k+1} - 2(-3)^k)/5 \\ (-5 + 2^{k+2} + (-3)^k)/10 & (2^k - (-3)^k)/5 & (5 + 2^{k+2} + (-3)^k)/10 \end{bmatrix}$$

25. $k = 0$ **27.** $k = 0$

29. Todos los valores reales de k

35. If $A \sim B$, entonces existe una matriz invertible P tal que $B = P^{-1}AP$. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned} \text{tr}(B) &= \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(P^{-1}(AP)) = \text{tr}((AP)P^{-1}) \\ &= \text{tr}(APP^{-1}) = \text{tr}(AI) = \text{tr}(A) \end{aligned}$$

al usar el ejercicio 45 de la sección 3.2.

37. $P = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$

39. $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$

49. (b) $\dim E_{-1} = 1, \dim E_1 = 2, \dim E_2 = 3$

Ejercicios 4.5

1. (a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2.5 \end{bmatrix}$, 6.000

(b) $\lambda_1 = 6$

3. (a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0.618 \end{bmatrix}$, 2.618

(b) $\lambda_1 = (3 + \sqrt{5})/2 \approx 2.618$

5. (a) $m_5 = 11.001, \mathbf{y}_5 = \begin{bmatrix} -0.333 \\ 1.000 \end{bmatrix}$

7. (a) $m_8 = 10.000, \mathbf{y}_8 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

9.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 26 \\ 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 17.692 \\ 5.923 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18.018 \\ 6.004 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 17.999 \\ 6.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18.000 \\ 6.000 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.308 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.335 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.333 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.333 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.333 \end{bmatrix}$
m_k	1	26	17.692	18.018	17.999	18.000

Por tanto, $\lambda_1 \approx 18, \mathbf{v}_1 \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 0.333 \end{bmatrix}$.

11.

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.571 \\ 2.857 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.755 \\ 3.132 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.808 \\ 3.212 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.823 \\ 3.234 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.827 \\ 3.240 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.286 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.377 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.404 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.411 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.413 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.414 \end{bmatrix}$
m_k	1	7	7.571	7.755	7.808	7.823	7.827

Por tanto, $\lambda_1 \approx 7.827, \mathbf{v}_1 \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 0.414 \end{bmatrix}$.

13.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 21 \\ 15 \\ 13 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 16.809 \\ 12.238 \\ 10.714 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 17.011 \\ 12.371 \\ 10.824 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 16.999 \\ 12.363 \\ 10.818 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 17.000 \\ 12.363 \\ 10.818 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.714 \\ 0.619 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.728 \\ 0.637 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.727 \\ 0.636 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.727 \\ 0.636 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.727 \\ 0.636 \end{bmatrix}$
m_k	1	21	16.809	17.011	16.999	17.000

Por tanto, $\lambda_1 \approx 17, \mathbf{v}_1 \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 0.727 \\ 0.636 \end{bmatrix}$.

15. $\lambda_1 \approx 5, \mathbf{v}_1 \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.333 \end{bmatrix}$

17.

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.571 \\ 2.857 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.755 \\ 3.132 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.808 \\ 3.212 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.823 \\ 3.234 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.827 \\ 3.240 \end{bmatrix}$
$R(\mathbf{x}_k)$	7	7.755	7.823	7.828	7.828	7.828	7.828
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.286 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.377 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.404 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.411 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.413 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.414 \end{bmatrix}$

19.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 21 \\ 15 \\ 13 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 16.809 \\ 12.238 \\ 10.714 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 17.011 \\ 12.371 \\ 10.824 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 16.999 \\ 12.363 \\ 10.818 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 17.000 \\ 12.363 \\ 10.818 \end{bmatrix}$
$R(\mathbf{x}_k)$	16.333	16.998	17.000	17.000	17.000	17.000
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.714 \\ 0.619 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.728 \\ 0.637 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.727 \\ 0.636 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.727 \\ 0.636 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.727 \\ 0.636 \end{bmatrix}$

21.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.8 \\ 3.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.667 \\ 2.667 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.571 \\ 2.286 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.500 \\ 2.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.444 \\ 1.778 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.400 \\ 1.600 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.364 \\ 1.455 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.667 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.571 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.500 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.444 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.400 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.364 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.333 \end{bmatrix}$
m_k	1	5	4.8	4.667	4.571	4.500	4.444	4.400	4.364

Puesto que $\lambda_1 = \lambda_2 = 4, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, m_k converge lentamente en la respuesta exacta.

23.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.2 \\ 3.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.048 \\ 3.048 \\ 0.048 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.012 \\ 3.012 \\ 0.012 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.003 \\ 3.003 \\ 0.003 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.001 \\ 3.001 \\ 0.001 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.000 \\ 3.000 \\ 0.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.000 \\ 3.000 \\ 0.000 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.762 \\ 0.048 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.753 \\ 0.012 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.751 \\ 0.003 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.750 \\ 0.001 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.750 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.750 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.750 \\ 0 \end{bmatrix}$
m_k	1	5	4.2	4.048	4.012	4.003	4.001	4.000	4.000

En este caso, $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ y $E_4 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$.

Claramente, m_k converge en 4 y $\mathbf{y}_k$ converge en un vector en el eigenespacio E_4, a saber, $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 0.75\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$.

25.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
m_k	1	1	-1	1	-1	1

Los eigenvalores exactos son complejos (i y $-i$), de modo que el método de potencias posiblemente no pueda convergir en el eigenvalor dominante o en el eigenvector dominante si comienza con una iteración inicial *real*. En vez de ello, el método de potencia oscila entre dos conjuntos de vectores reales.

27.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2.500\\4.000\\2.500\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2.250\\4.000\\2.250\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2.125\\4.000\\2.125\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2.063\\4.000\\2.063\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.750\\1\\0.750\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.625\\1\\0.625\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.562\\1\\0.562\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.531\\1\\0.531\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.516\\1\\0.516\end{bmatrix}$
m_k	1	4	4	4	4	4

Los eigenvalores son $\lambda_1 = -12$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$, con eigenvectores correspondientes

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Puesto que $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3$, el vector inicial $\mathbf{x}_0$ tiene un componente cero en la dirección del eigenvector dominante, de modo que el método de potencia no puede convergir en el eigenvalor/eigenvector dominante. En vez de ello, converge en un *segundo* par eigenvalor/eigenvector, como muestran los cálculos.

29. Aplique el método de potencia a $A - 18I = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 5 & -15 \end{bmatrix}$.

k	0	1	2	3
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ -10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 15.2 \\ -19 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 15.2 \\ -19 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.8 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.8 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.8 \\ 1 \end{bmatrix}$
m_k	1	-10	-19	-19

Por ende, -19 es el eigenvalor dominante de $A - 18I$, y $\lambda_2 = -19 + 18 = -1$ es el segundo eigenvalor de A.

31. Aplique el método de potencia a $A - 17I = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 8 \\ 4 & -2 & -4 \\ 8 & -4 & -8 \end{bmatrix}$.

k	0	1	2	3
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -18 \\ 9 \\ 18 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -18 \\ 9 \\ 18 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -1 \end{bmatrix}$
m_k	1	4	-18	-18
$R(\mathbf{x}_k)$	-0.667	-18	-18	-18

En este caso, no existe eigenvalor dominante. (Podría elegir 18 o -18 para m_k, $k \geq 2$.) Sin embargo, el método de cociente de Rayleigh (ejercicios 17-20) converge en -18. Por ende, -18 es el eigenvalor dominante de $A - 17$I y $\lambda_2 = -18 + 17 = -1$ es el segundo eigenvalor de A.

33.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.833 \\ 1.056 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.798 \\ -0.997 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.800 \\ -1.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.800 \\ -1.000 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.789 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.801 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.800 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.800 \\ 1 \end{bmatrix}$
m_k	1	0.5	1.056	-0.997	-1.000	-1.000

Por tanto, el eigenvalor de A que es más pequeño en magnitud es $1/(-1) = -1$.

35.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.500 \\ 0.000 \\ 0.500 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.500 \\ 0.333 \\ -0.500 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.500 \\ 0.111 \\ -0.500 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.500 \\ 0.259 \\ -0.500 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.500 \\ 0.160 \\ -0.500 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.000 \\ 0.000 \\ 1.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.000 \\ -0.667 \\ 1.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.000 \\ -0.222 \\ 1.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.000 \\ -0.518 \\ 1.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.000 \\ -0.321 \\ 1.000 \end{bmatrix}$
m_k	1	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500

Claramente, m_k converge en -0.5, de modo que el eigenvalor más pequeño de A es $1/(-0.5) = -2$.

37. Los cálculos son los mismos que los del ejercicio 33.

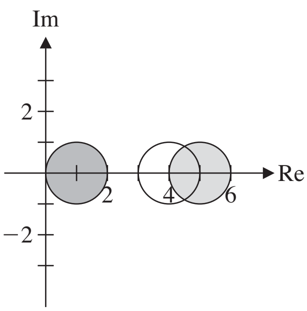
39. Aplique el método de potencia inverso a $A - 5I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Al tomar $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, se tiene

k	0	1	2	3
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.200 \\ -0.500 \\ 0.200 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.080 \\ -0.500 \\ -0.080 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.032 \\ -0.500 \\ 0.032 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.400 \\ 1 \\ -0.400 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.160 \\ 1 \\ 0.160 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.064 \\ 1 \\ -0.064 \end{bmatrix}$
m_k	1	-0.500	-0.500	-0.500

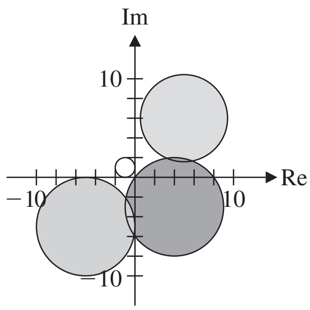
Claramente, m_k converge en -0.5, de modo que el eigenvalor de A más cercano a 5 es $5 + 1/(-0.5) = 5 - 2 = 3$.

41. 0.732 **43.** -0.619

47.



49.



51. *Sugerencia:* demuestre que 0 no está contenido en algún disco de Gerschgorin y luego aplique el Teorema 4.16.

53. El ejercicio 52 implica que $|\lambda|$ es menor o igual a todas las sumas de columna de A para todo eigenvalor λ. Pero, para una matriz estocástica, todas las sumas de columna son 1. Por tanto $|\lambda| \leq 1$.

Ejercicios 4.6

1. No es regular **3.** Regular

5. No es regular **7.** $L = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

9. $L = \begin{bmatrix} 0.304 & 0.304 & 0.304 \\ 0.354 & 0.354 & 0.354 \\ 0.342 & 0.342 & 0.342 \end{bmatrix}$

11. $1, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **13.** $2, \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

15. La población aumenta, disminuye y es constante, respectivamente.

17.

$$P^{-1}LP = \begin{bmatrix} b_1 & b_2s_1 & b_3s_1s_2 & \cdots & b_{n-1}s_1s_2\cdots s_{n-2} & b_ns_1s_2\cdots s_{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de L es $(\lambda^n - b_1\lambda^{n-1} - b_2s_1\lambda^{n-2} - b_3s_1s_2\lambda^{n-3} - \cdots - b_ns_1s_2\cdots s_{n-1})(-1)^n$.

19. $\lambda \approx 1.746$, $\mathbf{p} \approx \begin{bmatrix} 0.660 \\ 0.264 \\ 0.076 \end{bmatrix}$

21. $\lambda \approx 1.092$, $\mathbf{p} \approx \begin{bmatrix} 0.535 \\ 0.147 \\ 0.094 \\ 0.078 \\ 0.064 \\ 0.053 \\ 0.029 \end{bmatrix}$

25. (a) $h \approx 0.082$ **29.** $3, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

31. $3, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ **33.** Reducible

35. Irreductible **43.** 1, 2, 4, 8, 16

45. 0, 1, 1, 0, -1 **47.** $x_n = 4^n - (-1)^n$

49. $y_n = (n - \frac{1}{2})2^n$

51. $b_n = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}[(1 + \sqrt{3})^n - (1 - \sqrt{3})^n]$

57. **(a)** $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3, d_4 = 5, d_5 = 8$
(b) $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$
(c) $d_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$

59. La solución general es $x(t) = -3C_1e^{-t} + C_2e^{4t}$, $y(t) = 2C_1e^{-t} + C_2e^{4t}$. La solución específica es $x(t) = -3e^{-t} + 3e^{4t}$, $y(t) = 2e^{-t} + 3e^{4t}$.

61. La solución general es $x_1(t) = (1+\sqrt{2})C_1e^{\sqrt{2}t} + (1-\sqrt{2})C_2e^{-\sqrt{2}t}$, $x_2(t) = C_1e^{\sqrt{2}t} + C_2e^{-\sqrt{2}t}$. La solución específica es $x_1(t) = (2+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t}/4 + (2-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t}/4$, $x_2(t) = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}t}/4 - \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t}/4$.

63. La solución general es $x(t) = -C_1 + C_3e^{-t}$, $y(t) = C_1 + C_2e^{t} - C_3e^{-t}$, $z(t) = C_1 + C_2e^{t}$. La solución específica es $x(t) = 2 - e^{-t}$, $y(t) = -2 + e^{t} + e^{-t}$, $z(t) = -2 + e^{t}$.

65. **(a)** $x(t) = -120e^{8t/5} + 520e^{11t/10}$, $y(t) = 240e^{8t/5} + 260^{11t/10}$. La cepa X muere después de aproximadamente 2.93 días; la cepa Y sigue creciendo.

67. $a = 10, b = 20$; $x(t) = 10e^{t}(\cos t + \operatorname{sen} t) + 10$, $y(t) = 10e^{t}(\cos t - \operatorname{sen} t) + 20$. La especie Y muere cuando $t \approx 1.22$.

71. $x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$

77. **(a)** $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}9\\9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}27\\27\end{bmatrix}$ **(c)** Repelente

79. **(a)** $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ **(c)** Ninguno

81. **(a)** $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0.5\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.75\\-0.5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3.125\\-1.75\end{bmatrix}$ **(c)** Punto de silla

83. **(a)** $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0.6\\0.6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0.36\\0.36\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0.216\\0.216\end{bmatrix}$ **(c)** Atractor

85. $r = \sqrt{2}, \theta = 45°$, repelente espiral

87. $r = 2, \theta = -60°$, repelente espiral

89. $P = \begin{bmatrix}-1 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix}0.2 & -0.1\\0.1 & 0.2\end{bmatrix}$, atractor espiral

91. $P = \begin{bmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\1 & 0\end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\\sqrt{3}/2 & 1/2\end{bmatrix}$, centro orbital

Preguntas de repaso

1. **(a)** F **(c)** F **(e)** F **(g)** V **(i)** F

3. -18

5. Puesto que $A^T = -A$, se tiene $\det A = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$ por el Teorema 4.7 y el hecho de que n es impar. Se tiene que $\det A = 0$.

7. $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix}5\\10\end{bmatrix} = 5\mathbf{x}, \lambda = 5$

9. **(a)** $4 - 3\lambda^2 - \lambda^3$

(c) $E_1 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right), E_{-2} = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$

11. $\begin{bmatrix}162\\158\end{bmatrix}$ **13.** No es similar **15.** No es similar

17. 0, 1, o -1

19. Si $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, entonces $(A^2 - 5A + 2I)\mathbf{x} = A^2\mathbf{x} - 5A\mathbf{x} + 2\mathbf{x} = 3^2\mathbf{x} - 5(3\mathbf{x}) + 2\mathbf{x} = -4\mathbf{x}$.

Capítulo 5

Ejercicios 5.1

1. Ortogonal **3.** No es ortogonal **5.** Ortogonal

7. $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\end{bmatrix}$ **9.** $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}0\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ **11.** Ortonormal

13. $\begin{bmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2/\sqrt{5}\\-1/\sqrt{5}\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2/3\sqrt{5}\\4/3\sqrt{5}\\-5/3\sqrt{5}\end{bmatrix}$

15. Ortonormal

17. Ortogonal, $\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

19. Ortogonal, $\begin{bmatrix}\cos\theta\operatorname{sen}\theta & \cos^2\theta & \operatorname{sen}\theta\\-\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0\\-\operatorname{sen}^2\theta & -\cos\theta\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

21. No es ortogonal

27.
$$\begin{aligned}\cos(\angle(Q\mathbf{x}, Q\mathbf{y})) &= \frac{(Q\mathbf{x})\cdot(Q\mathbf{y})}{\|Q\mathbf{x}\|\|Q\mathbf{y}\|}\\ &= \frac{(Q\mathbf{x})^TQ\mathbf{y}}{\sqrt{(Q\mathbf{x})^TQ\mathbf{x}}\sqrt{(Q\mathbf{y})^TQ\mathbf{y}}}\\ &= \frac{\mathbf{x}^TQ^TQ\mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{x}^TQ^TQ\mathbf{x}}\sqrt{\mathbf{y}^TQ^TQ\mathbf{y}}}\\ &= \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}\sqrt{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}} = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\\ &= \cos(\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}))\end{aligned}$$

29. Rotación, $\theta = 45°$ **31.** Reflexión, $y = \sqrt{3}x$

33. (a) $A(A^T + B^T)B = AA^TB + AB^TB = IB + AI = B + A = A + B$

(b) Del inciso (a),

$$\begin{aligned}\det(A + B) &= \det(A(A^T + B^T)B)\\ &= \det A \det(A^T + B^T)\det B\\ &= \det A \det((A + B)^T)\det B\\ &= \det A \det(A + B)\det B\end{aligned}$$

Suponga que $\det A + \det B = 0$ (de modo que $\det B = -\det A$) pero que $A + B$ es invertible. Entonces $\det(A + B) \neq 0$, de modo que $1 = \det A \det B = \det A(-\det A) = -(\det A)^2$. Esto es imposible, así que se concluye que $A + B$ no puede ser invertible.

Ejercicios 5.2

1. $W^\perp = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x + 2y = 0\right\}, \mathcal{B}^\perp = \left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

3. $W^\perp = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x = t, y = t, z = -t\right\}, \mathcal{B}^\perp = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

5. $W^\perp = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x - y + 3z = 0\right\}, \mathcal{B}^\perp = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

7. renglón(A): $\{[1 \;\; 0 \;\; 1], [0 \;\; 1 \;\; -2]\}$, nulo($A$): $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

9. col(A): $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$, nulo($A^T$): $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

11. $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -10 \\ -4 \end{bmatrix}\right\}$ **13.** $\left\{\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

15. $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$

19. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$ **21.** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

25. No

Ejercicios 5.3

1. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}; \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{bmatrix},$

$\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

5. $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ **7.** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{8}{9} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{38}{9} \\ -\frac{38}{9} \\ \frac{19}{9} \end{bmatrix}$

9. $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}\right\}$

11. $\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{3}{35} \\ \frac{34}{35} \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{15}{34} \\ 0 \\ \frac{9}{34} \end{bmatrix}\right\}$

13. $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 3/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

17. $R = \begin{bmatrix} 3 & 9 & \frac{1}{3} \\ 0 & 6 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$

19. $A = AI$

21. $A^{-1} = (QR)^{-1} = R^{-1}Q^{-1} = R^{-1}Q^T =$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3/2\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

23. Sea $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Entonces $A\mathbf{x} = QR\mathbf{x} = Q\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Puesto que $A\mathbf{x}$ representa una combinación lineal de las columnas de A (que son linealmente independientes), debe tener $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Por tanto, R es invertible, por el teorema fundamental.

Ejercicios 5.4

1. $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

3. $Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

5. $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

7. $Q = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9. $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$

$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

11. $Q^TAQ = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$

$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{bmatrix} = D$

13. (a) Si A y B son diagonalizables ortogonalmente, entonces cada una es simétrica, por el teorema espectral. Por tanto, $A + B$ es simétrica, por el ejercicio 35 de la sección 3.2, y por tanto es diagonalizable ortogonalmente, por el teorema espectral.

15. Si A y B son diagonalizables ortogonalmente, entonces cada una es simétrica, por el teorema espectral. Puesto que $AB = BA$, AB también es simétrica, por el ejercicio 36 de la sección 3.2. Por tanto, AB es diagonalizable ortogonalmente, por el teorema espectral.

17. $A = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$

Ejercicios 5.5

1. $G' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C' = C$

3. $G' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, C' es equivalente a C, pero $C' \neq C$

5. $P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, C' es equivalente a C, pero $C' \neq C$

7. $P' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, C' es equivalente a C, pero $C' \neq C$

9. $C^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

11. $C^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

13. $G^\perp = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, P^\perp = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

15. $G^\perp = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, P^\perp = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. $G^\perp = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, P^\perp = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

23. $2x^2 + 6xy + 4y^2$ **25.** 123

27. -5 **29.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$ **33.** $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

35. $Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}, y_1^2 + 6y_2^2$

37. $Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & -1/3 \\ 0 & 5/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 1/\sqrt{5} & -4/3\sqrt{5} & 2/3 \end{bmatrix}, 9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$

39. $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$, $2(x')^2 + (y')^2 - (z')^2$

41. Definida positiva **43.** Definida negativa

45. Definida positiva **47.** Indefinida

51. Para cualquier vector $\mathbf{x}$, se tiene $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T B^T B\mathbf{x} = (B\mathbf{x})^T(B\mathbf{x}) = \|B\mathbf{x}\|^2 \geq 0$. Si $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$, entonces $\|B\mathbf{x}\|^2 = 0$, de modo que $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Puesto que B es invertible, esto implica que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Por tanto $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, y en consecuencia $A = B^T B$ es definida positiva.

53. **(a)** Todo eigenvalor de cA es de la forma $c\lambda$ para algún eigenvalor λ de A. Por el Teorema 5.24, $\lambda > 0$, de modo que $c\lambda > 0$, puesto que c es positivo. En consecuencia, cA es definida positiva, por el Teorema 5.24.

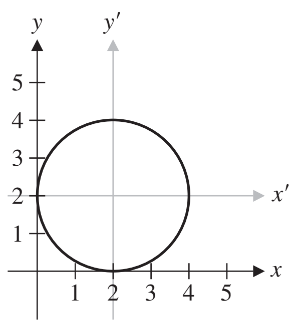
(c) Sea $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Entonces $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ y $\mathbf{x}^T B\mathbf{x} > 0$, puesto que A y B son definidas positivas. Pero entonces $\mathbf{x}^T(A + B)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{x}^T B\mathbf{x} > 0$, de modo que $A + B$ es definida positiva.

55. El valor máximo de $f(\mathbf{x})$ es 2 cuando $\mathbf{x} = \pm\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$; el valor mínimo de $f(\mathbf{x})$ es 0 cuando $\mathbf{x} = \pm\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

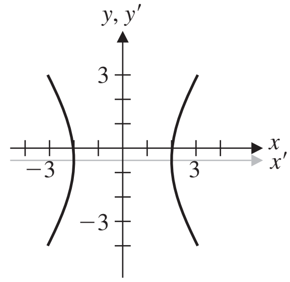
57. El valor máximo de $f(\mathbf{x})$ es 4 cuando $\mathbf{x} = \pm\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$; el valor mínimo de $f(\mathbf{x})$ es 1 cuando $\mathbf{x} = \pm\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ o $\pm\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$.

61. Elipse **63.** Parábola **65.** Hipérbola

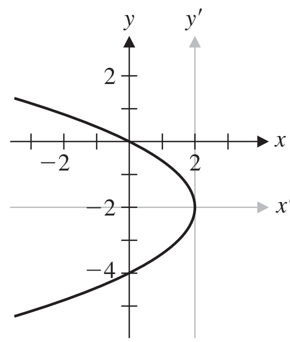
67. Circunferencia $x' = x - 2$, $y' = y - 2$, $(x')^2 + (y')^2 = 4$



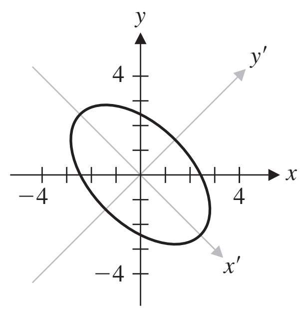
69. Hipérbola, $x' = x$, $y' = y + \frac{1}{2}$, $(x')^2/4 - (y')^2/9 = 1$



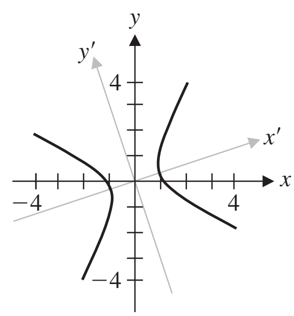
71. Parábola, $x' = x - 2$, $y' = y + 2$, $x' = -\frac{1}{2}(y')^2$



73. Elipse, $(x')^2/4 + (y')^2/12 = 1$



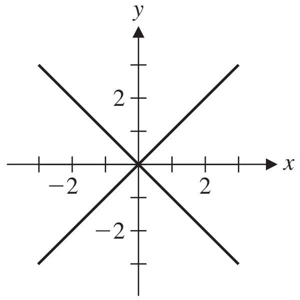
75. Hipérbola, $(x')^2 - (y')^2 = 1$



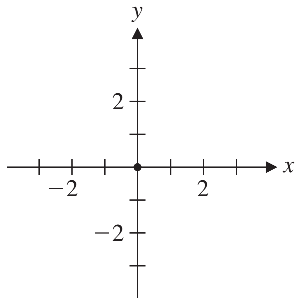
77. Elipse, $(x'')^2/50 + (y'')^2/10 = 1$

79. Hipérbola, $(x'')^2 - (y'')^2 = 1$

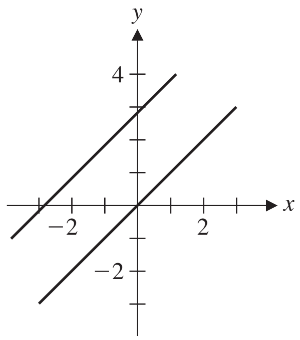
81. Degenerada (dos rectas)



83. Degenerada (un punto)



85. Degenerada (dos rectas)



89. Hiperboloide de una hoja, $(x')^2 - (y')^2 + 3(z')^2 = 1$

91. Paraboloide hiperbólico, $z = -(x')^2 + (y')^2$

93. Paraboloide hiperbólico, $x' = -\sqrt{3}(y')^2 + \sqrt{3}(z')^2$

95. Elipsoide, $3(x'')^2 + (y'')^2 + 2(z'')^2 = 4$

Preguntas de repaso

1. **(a)** V **(c)** V **(e)** F **(g)** F **(i)** F

3. $\begin{bmatrix} 9/2 \\ 2/3 \\ -11/6 \end{bmatrix}$ **5.** Verifique que $Q^TQ = I$.

7. El Teorema 5.6(c) muestra que si $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, entonces $Q\mathbf{v}_i \cdot Q\mathbf{v}_j = 0$. El Teorema 5.6(b) muestra que $\{Q\mathbf{v}_1, \ldots, Q\mathbf{v}_k\}$ consiste de vectores unitarios, igual que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. Por tanto, $\{Q\mathbf{v}_1, \ldots, Q\mathbf{v}_k\}$ es un conjunto ortonormal.

9. $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}\right\}$ **11.** $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

13. renglón(A): $\{[1 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \quad 4], [0 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 1]\}$

col(A): $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}\right\}$

nulo(A): $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

nulo(A^T): $\left\{\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

15. **(a)** $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

17. $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

19. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Capítulo 6

Ejercicios 6.1

1. Espacio vectorial

3. No es un espacio vectorial; falla el axioma 1.

5. No es un espacio vectorial; falla el axioma 8.

7. Espacio vectorial **9.** Espacio vectorial

11. Espacio vectorial **15.** Espacio vectorial complejo

17. No es un espacio vectorial complejo; falla el axioma 6.

19. No es un espacio vectorial; fallan los axiomas 1, 4 y 6.

21. No es un espacio vectorial; las operaciones de suma y multiplicación ni siquiera son las mismas.

25. Subespacio **27.** No es un subespacio

29. No es un subespacio **31.** Subespacio

33. Subespacio **35.** Subespacio

37. No es un subespacio **39.** Subespacio

41. Subespacio **43.** No es un subespacio

45. No es un subespacio

47. Tome U como el eje x y W como el eje y, por ejemplo. Entonces $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ están en $U \cup W$, pero $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ no lo está.

51. No

53. Sí; $s(x) = (3 + 2t)p(x) + (1 + t)q(x) + tr(x)$ para cualquier escalar t.

55. Sí; $h(x) = f(x) + g(x)$

57. No

59. No

61. Sí

Ejercicios 6.2

1. Linealmente independiente

3. Linealmente dependiente; $\begin{bmatrix}-1 & 0\\-1 & 7\end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix}-1 & 1\\-2 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 0\\1 & 1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}0 & 2\\-3 & 1\end{bmatrix}$

5. Linealmente independiente

7. Linealmente dependentiente; $3x + 2x^2 = 7x - 2(2x - x^2)$

9. Linealmente independiente

11. Linealmente dependiente; $1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$

13. Linealmente dependiente; $\ln(x^2) = -2 \ln 2 \cdot 1 + 2 \cdot \ln(2x)$

17. **(a)** Linealmente independiente
(b) Linealmente dependiente

19. Base **21.** No es una base

23. No es una base **25.** No es una base

27. $[A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\4\end{bmatrix}$ **29.** $[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}6\\-1\\3\end{bmatrix}$

35. $\dim V = 2, \mathcal{B} = \{1 - x, 1 - x^2\}$

37. $\dim V = 3, \mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$

39. $\dim V = 2, \mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right\}$

41. $(n^2 - n)/2$

43. **(a)** $\dim(U \times V) = \dim U + \dim V$
(b) Demuestre que si $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ es una base para W, entonces $\{(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1), \ldots, (\mathbf{w}_n, \mathbf{w}_n)\}$ es una base para Δ.

45. $\{1 + x, 1 + x + x^2, 1\}$

47. $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right\}$

49. $\{1, 1 + x\}$

51. $\{1 - x, x - x^2\}$

53. $\{\operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x\}$

59. **(a)** $p_0(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3, p_1(x) = -x^2 + 4x - 3,$
$p_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$

61. **(c)** (i) $3x^2 - 16x + 19$ (ii) $x^2 - 4x + 5$

63. $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \cdots (p^n - p^{n-1})$

Ejercicios 6.3

1. $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}, P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}, P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$

3. $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}, P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{bmatrix},$
$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

5. $[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}, [p(x)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}, P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix},$
$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$

7. $[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, [p(x)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix},$
$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}$

9. $[A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, [A]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ -3 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}, P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} =$

$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 & -2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

11. $[f(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}, [f(x)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$

$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

13. **(a)** $\begin{bmatrix} (3-2\sqrt{3})/2 \\ (-3\sqrt{3}+2)/2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3.232 \\ -1.598 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2+2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}-2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 5.464 \\ 1.464 \end{bmatrix}$

15. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

17. $-2 - 8(x-1) - 5(x-1)^2$

19. $-1 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3$

Ejercicios 6.4

1. Transformación lineal **3.** Transformación lineal

5. Transformación lineal

7. No es una transformación lineal

9. Transformación lineal

11. No es una transformación lineal

13. Se tiene

$$\begin{aligned} S(p(x)+q(x)) &= S((p+q)(x)) = x((p+q)(x)) \\ &= x(p(x)+q(x)) = xp(x) + xq(x) \\ &= S(p(x)) + S(q(x)) \end{aligned}$$

y
$$\begin{aligned} S(cp(x)) &= S((cp)(x)) = x((cp)(x)) \\ &= x(cp(x)) = cxp(x) = cS(p(x)) \end{aligned}$$

Por tanto, S es lineal. De igual modo,

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) &= T\begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix} \\ &= (a+c) + ((a+c)+(b+d))x \\ &= (a+(a+b)x) + (c+(c+d)x) \\ &= T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

y
$$\begin{aligned} T\left(k\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) &= T\begin{bmatrix} ka \\ kb \end{bmatrix} = (ka) + (ka+kb)x \\ &= k(a+(a+b)x) = kT\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

Por tanto, T es lineal.

15. $T\begin{bmatrix} -7 \\ 9 \end{bmatrix} = 5 - 14x - 8x^2, T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \left(\frac{a+3b}{4}\right) - \left(\frac{a+7b}{4}\right)x + \left(\frac{a-b}{2}\right)x^2$

17. $T(4 - x + 3x^2) = 4 + 3x + 5x^2, T(a + bx + cx^2) = a + cx + \left(\frac{3a-b-c}{2}\right)x^2$

19. *Sugerencia:* sea $a = T(E_{11}), b = T(E_{12}), c = T(E_{21}), d = T(E_{22})$.

23. *Sugerencia:* considere el efecto de T y D sobre la base estándar para $\mathscr{P}_n$.

25. $(S \circ T)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, (S \circ T)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -y \\ 0 & 2x+2y \end{bmatrix}.$

$(T \circ S)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ no tiene sentido.

27. $(S \circ T)(p(x)) = p'(x+1), (T \circ S)(p(x)) = (p(x+1))' = p'(x+1)$

29.
$$\begin{aligned} (S\circ T)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= S\left(T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = S\left(\begin{bmatrix} x-y \\ -3x+4y \end{bmatrix}\right) = \\ &\begin{bmatrix} 4(x-y)+(-3x+4y) \\ 3(x-y)+(-3x+4y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} (T\circ S)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= T\left(S\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 4x+y \\ 3x+y \end{bmatrix}\right) = \\ &\begin{bmatrix} (4x+y)-(3x+y) \\ -3(4x+y)+4(3x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, $S \circ T = I$ y $T \circ S = I$, de modo que S y T son inversos.

Ejercicios 6.5

1. **(a)** Sólo (ii) está en $\ker(T)$.
(b) Sólo (iii) está en el rango(T).
(c) $\ker(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \right\}$, rango$(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right\}$

3. **(a)** Sólo (iii) está en $\ker(T)$.
(b) Todos ellos están en dominio(T).
(c) $\ker(T) = \{a + bx + cx^2 : a = -c, b = -c\} = \{t + tx - tx^2\}$, rango$(T) = \mathbb{R}^2$

5. Una base para $\ker(T)$ es $\left\{\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right\}$ y una base para dominio (T) es $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$; $\operatorname{rank}(T) =$ nulidad $(T) = 2$, y $\operatorname{rank}(T) +$ nulidad $(T) = 4 = \dim M_{22}$.

7. Una base para $\ker(T)$ es $\{1 + x - x^2\}$ y una base para dominio(T) es $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$; $\operatorname{rank}(T) = 2$, nulidad$) = 1$, y $\operatorname{rank}(T) +$ nulidad $(T) = 3 = \dim \mathscr{P}_2$.

9. $\operatorname{rank}(T) = \text{nulidad}(T) = 2$

11. $\operatorname{rank}(T) = \text{nulidad}(T) = 2$

13. $\operatorname{rank}(T) = 1$, $\text{nulidad}(T) = 2$

15. Inyectiva y sobreyectiva

17. Ni inyectiva ni sobreyectiva

19. Inyectiva mas no sobreyectiva

21. Isomórfica, $T\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$

23. No es isomórfica

25. Isomórfica, $T(a + bi) = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$

31. *Sugerencia:* defina $T: \mathscr{C}[0, 1] \to \mathscr{C}[0, 2]$ al hacer $T(f)$ la función cuyo valor en x es $(T(f))(x) = f(x/2)$ para x en $[0, 2]$.

33. **(a)** Sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ que están en V y sea $(S \circ T)(\mathbf{v}_1) = (S \circ T)(\mathbf{v}_2)$. Entonces $S(T(\mathbf{v}_1)) = S(T(\mathbf{v}_2))$, por tanto $T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2)$, puesto que S es inyectiva. Pero ahora $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, pues T es inyectiva. En consecuencia, $S \circ T$ es inyectiva.

35. **(a)** Por el teorema del rank, $\operatorname{rank}(T) + \text{nulidad}(T) = \dim V$. Si T es sobreyectiva, entonces rango(T) $= W$, de modo que $\operatorname{rank}(T) = \dim(\operatorname{rank}(T)) = \dim W$. Por tanto, $\dim \text{V} + \text{nulidad}(T) < \dim W + \text{nulidad}(T) = \operatorname{rank}(T) + \text{nulidad}(T) = \dim V$ de modo que $\text{nulidad}(T) < 0$, lo cual es imposible. Por tanto, T no puede ser sobreyectiva.

Ejercicios 6.6

1. $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$, $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[4 + 2x]_{\mathcal{B}} =$
$\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix} = [2 - 4x]_{\mathcal{C}} = [T(4 + 2x)]_{\mathcal{C}}$

3. $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[a + bx + cx^2]_{\mathcal{B}} =$
$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = [a + b(x + 2) + c(x + 2)^2)]_{\mathcal{C}} = [T(a + bx + cx^2)]_{\mathcal{C}}$

5. $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}$, $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[a + bx + cx^2]_{\mathcal{B}} =$
$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\a+b+c\end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix}a + b\cdot 0 + c\cdot 0^2\\a + b\cdot 1 + c\cdot 1^2\end{bmatrix}_{\mathcal{C}} = [T(a + bx + cx^2)]_{\mathcal{C}}$

7. $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}6&4\\-3&-2\\2&-1\end{bmatrix}$, $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\begin{bmatrix}-7\\7\end{bmatrix}_{\mathcal{B}} =$
$\begin{bmatrix}6&4\\-3&-2\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\7\\7\end{bmatrix}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}7\\7\\7\end{bmatrix}_{\mathcal{C}} =$
$\left[T\begin{bmatrix}-7\\7\end{bmatrix}\right]_{\mathcal{C}}$

9. $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[A]_{\mathcal{B}} =$
$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\c\\b\\d\end{bmatrix} =$
$\left[\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}\right]_{\mathcal{C}} = [T(A)]_{\mathcal{C}}$

11. $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}0&-1&1&0\\-1&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&1&-1&0\end{bmatrix}$, $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[A]_{\mathcal{B}} =$
$\begin{bmatrix}0&-1&1&0\\-1&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c-b\\d-a\\a-d\\b-c\end{bmatrix} =$
$\left[\begin{bmatrix}c-b&d-a\\a-d&b-c\end{bmatrix}\right]_{\mathcal{C}} = [AB - BA]_{\mathcal{C}} = [T(A)]_{\mathcal{C}}$

13. (b) $[D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $[D]_{\mathcal{B}}[3 \operatorname{sen} x - 5 \cos x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = [3 \cos x + 5 \operatorname{sen} x]_{\mathcal{B}} = [D(3 \operatorname{sen} x - 5 \cos x)]_{\mathcal{B}}$

15. (a) $[D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

17. $[S \circ T]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

19. Invertible, $T^{-1}(a + bx) = -b + ax$

21. Invertible, $T^{-1}(p(x)) = p(x - 2)$

23. Invertible, $T^{-1}(a + bx + cx^2) = (a - b + 2c) + (b - 2c)x + cx^2$ o $T^{-1}(p(x)) = p(x) - p'(x) + p''(x)$

25. No es invertible

27. $-3 \operatorname{sen} x - \cos x + C$

29. $\frac{4}{5}e^{2x} \cos x - \frac{3}{5}e^{2x} \operatorname{sen} x + C$

31. $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

33. $\mathcal{C} = \{1 - x, 2 + x\}$

35. $\mathcal{C} = \{1, x\}$

37. $[T]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} (d_1^2 - d_2^2)/(d_1^2 + d_2^2) & 2d_1d_2/(d_1^2 + d_2^2) \\ 2d_1d_2/(d_1^2 + d_2^2) & (d_2^2 - d_1^2)/(d_1^2 + d_2^2) \end{bmatrix}$

Ejercicios 6.7

1. $y(t) = 2e^{3t}/e^3$

3. $y(t) = ((1 - e^4)e^{3t} + (e^3 - 1)e^{4t})/(e^3 - e^4)$

5. $f(t) = \left(\dfrac{e^{(\sqrt{5}-1)/2}}{e^{\sqrt{5}} - 1} \right)[e^{(1+\sqrt{5})t/2} - e^{(1-\sqrt{5})t/2}]$

7. $y(t) = e^t - (1 - e^{-1})te^t$

9. $y(t) = ((k + 1)e^{kt} + (k - 1)e^{-kt})/2k$

11. $y(t) = e^t \cos(2t)$

13. (a) $p(t) = 100e^{\ln(16)t/3} \approx 100e^{0.924t}$
(b) 45 minutos
(c) En 9.968 horas

15. (a) $m(t) = 50e^{-ct}$, donde $c = \ln 2/1590 \approx 4.36 \times 10^{-4}$; después de 1000 años quedan 32.33 mg
(b) Después de 3691.9 años

17. $x(t) = \dfrac{5 - 10\cos(10\sqrt{K})}{\operatorname{sen}(10\sqrt{K})} \operatorname{sen}(\sqrt{K}t) + 10\cos(\sqrt{K}t)$

19. (b) No

23. No es lineal

25. No es lineal

27. Lineal

29. Lineal

31. $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

35. $R_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\1\\1\\1\\1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\1\\0\\0\\1\\1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\1\\1\\1\\0\\0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\\1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\1\\1\\0\\1\\0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\\1\\1\\0\\0\\1\\1\\0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\\1\\1\\0\\1\\0\\0\\1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\0\\1\\0\\1\\0\\1\\0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\0\\1\\0\\0\\1\\0\\1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\0\\0\\1\\1\\0\\0\\1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\0\\0\\1\\0\\1\\1\\0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\1\\0\\0\\1\\1\\0\\0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\1\\0\\0\\0\\0\\1\\1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1 \end{bmatrix} \right\}$

37. $[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$

Preguntas de repaso

1. (a) F **(c)** V **(e)** F **(g)** F **(i)** V

3. Subespacio

5. Subespacio

7. Sea $c_1A + c_2B = O$. Entonces $c_1A - c_2B = c_1A^T + c_2B^T = (c_1A + c_2B)^T = O$. Al sumar, se tiene $2c_1A = O$, de modo que $c_1 = 0$ puesto que A es distinto de cero. Por tanto $c_2B = O$, y en consecuencia $c_2 = 0$. Por ende, $\{A, B\}$ es linealmente independiente.

9. $\{1, x^2, x^4\}$, $\dim W = 3$

11. Transformación lineal

13. Transformación lineal

15. $n^2 - 1$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

19. $S \circ T$ es la transformación cero.

Capítulo 7

Ejercicios 7.1

1. (a) 0 **(b)** $\sqrt{11}$ **(c)** $\sqrt{77}$

3. Cualquier múltiplo escalar distinto de cero de $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

5. (a) -1 **(b)** $\sqrt{14}$ **(c)** $\sqrt{26}$

7. $1 - 2x^2$

9. (a) π **(b)** $\sqrt{\pi}$ **(c)** $\sqrt{\pi}$

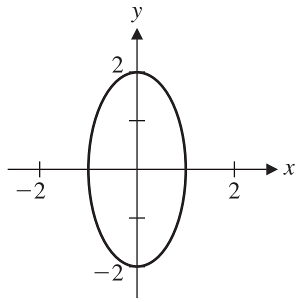
13. Falla el axioma (4): $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$, pero $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$.

15. Falla el axioma (4): $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$, pero $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$.

17. Falla el axioma (4): $p(x) = 1 - x$ no es el polinomio cero, pero $\langle p(x), p(x)\rangle = 0$.

19. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

21.



25. -8

27. $\sqrt{6}$

29.
$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 &= \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}-\mathbf{w}, \mathbf{u}+\mathbf{v}-\mathbf{w}\rangle \\ &= \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{w},\mathbf{w}\rangle \\ &\quad + 2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle - 2\langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle - 2\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle \\ &= 1+3+4+2-10-0 = 0\end{aligned}$$

Por tanto, $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}-\mathbf{w}\| = 0$, de modo que, por el axioma (4), $\mathbf{u}+\mathbf{v}-\mathbf{w} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

31. $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle - \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$

33. Al usar el ejercicio 32 y una identidad similar para $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$, se tiene

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\quad + \|\mathbf{u}\|^2 - 2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2\end{aligned}$$

Al dividir por 2 produce la identidad que se quiere.

35.
$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| &\Leftrightarrow \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 \\ &\Leftrightarrow \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\qquad = \|\mathbf{u}\|^2 - 2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\Leftrightarrow 2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = -2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \Leftrightarrow \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0\end{aligned}$$

37. $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

39. $\{1, x, x^2\}$

41. **(a)** $1/\sqrt{2}, \sqrt{3}x/\sqrt{2}, \sqrt{5}(3x^2-1)/2\sqrt{2}$
(b) $\sqrt{7}(5x^3-3x)/2\sqrt{2}$

Ejercicios 7.2

1. $\|\mathbf{u}\|_E = \sqrt{42}$, $\|\mathbf{u}\|_s = 10$, $\|\mathbf{u}\|_m = 5$

3. $d_E(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sqrt{70}$, $d_s(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 14$, $d_m(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 6$

5. $\|\mathbf{u}\|_H = 4$, $\|\mathbf{v}\|_H = 5$

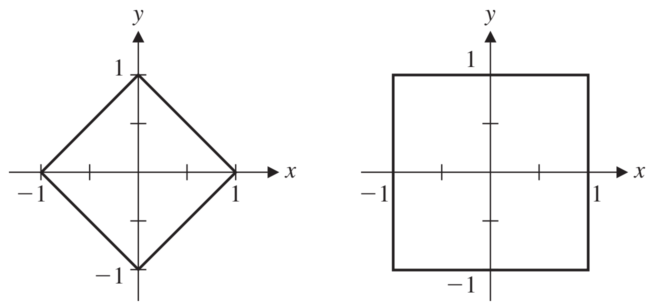
7. **(a)** Como máximo un componente de $\mathbf{v}$ es distinto de cero.

9. Suponga $\|\mathbf{v}\|_m = |v_k|$. Entonces $\|\mathbf{v}\|_E = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_k^2 + \cdots + v_n^2} \geq \sqrt{v_k^2} = |v_k| = \|\mathbf{v}\|_m$.

11. Suponga $\|\mathbf{v}\|_m = |v_k|$. Entonces $|v_i| \leq |v_k|$ para $i = 1, \ldots, n$, de modo que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|_s &= |v_1| + \cdots + |v_n| \leq |v_k| + \cdots + |v_k| \\ &= n|v_k| = n\|\mathbf{v}\|_m\end{aligned}$$

13.



21. $\|A\|_F = \sqrt{19}$, $\|A\|_1 = 4$, $\|A\|_\infty = 6$

23. $\|A\|_F = \sqrt{31}$, $\|A\|_1 = 6$, $\|A\|_\infty = 6$

25. $\|A\|_F = 2\sqrt{11}$, $\|A\|_1 = 7$, $\|A\|_\infty = 7$

27. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

29. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

31. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

33. **(a)** Por la definición de operador norma, $\|I\| = \max\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} \|I\mathbf{x}\| = \max\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{x}\| = 1$.

35. $\operatorname{cond}_1(A) = \operatorname{cond}_\infty(A) = 21$; bien condicionada

37. $\operatorname{cond}_1(A) = \operatorname{cond}_\infty(A) = 400$; mal condicionada

39. $\operatorname{cond}_1(A) = 77$, $\operatorname{cond}_\infty(A) = 128$; moderadamente mal condicionada

41. **(a)** $\operatorname{cond}_\infty(A) = (\text{máx}\{|k| + 1, 2\}) \cdot \left(\text{máx}\left\{\left|\dfrac{k}{k-1}\right| + \left|\dfrac{1}{k-1}\right|, \left|\dfrac{2}{k-1}\right|\right\}\right)$

43. **(a)** $\operatorname{cond}_\infty(A) = 40$
(b) Como máximo 400% de cambio relativo

45. Al usar el ejercicio 33(a) se tiene $\operatorname{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|I\| = 1$.

49. $k \geq 6$

51. $k \geq 10$

Ejercicios 7.3

1. $\|\mathbf{e}\| = \sqrt{2} \approx 1.414$ **3.** $\|\mathbf{e}\| = \sqrt{6}/2 \approx 1.225$

5. $\|\mathbf{e}\| = \sqrt{7} \approx 2.646$

7. $y = -3 + \frac{5}{2}x,\ \|\mathbf{e}\| \approx 1.225$

9. $y = \frac{11}{3} - 2x,\ \|\mathbf{e}\| \approx 0.816$

11. $y = \frac{7}{10} + \frac{8}{25}x,\ \|\mathbf{e}\| \approx 0.447$

13. $y = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}x,\ \|\mathbf{e}\| \approx 0.632$

15. $y = 3 - \frac{18}{5}x + x^2$ **17.** $y = \frac{18}{5} - \frac{17}{10}x - \frac{1}{2}x^2$

19. $\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{15} \end{bmatrix}$ **21.** $\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$

23. $\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 + t \\ -5 - t \\ -5 - 2t \\ t \end{bmatrix}$ **25.** $\begin{bmatrix} \frac{42}{11} \\ \frac{19}{11} \\ \frac{42}{11} \end{bmatrix}$

27. $\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -2 \end{bmatrix}$ **29.** $y = 0.92 + 0.73x$

31. **(a)** Si se hace que el año 1920 corresponda a $t = 0$, entonces $y = 56.6 + 2.9t$; 79.9 años

33. **(a)** $p(t) = 150e^{0.131t}$

35. 139 días

37. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$ **39.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

41. $\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$ **45.** $A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

47. $A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ **49.** $A^+ = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

51. $A^+ = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

53. **(a)** Si A es invertible, también lo es A^T, y se tiene $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T = A^{-1}(A^T)^{-1}A^T = A^{-1}$.

Ejercicios 7.4

1. 2, 3 **3.** $\sqrt{2}, 0$ **5.** 5 **7.** 2, 3

9. $\sqrt{5}, 2, 0$

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

21. $A = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ (Ejercicio 3)

23. (Ejercicio 7) $A = 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

33. El segmento de recta $[-1, 1]$

35. La elipse sólida $\dfrac{y_1^2}{5} + \dfrac{y_2^2}{4} \leq 1$

37. **(a)** $\|A\|_2 = \sqrt{2}$ **(b)** $\mathrm{cond}_2(A) = \infty$

39. **(a)** $\|A\|_2 = 1.95$ **(b)** $\mathrm{cond}_2(A) = 38.11$

41. $A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ **43.** $A^+ = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$

45. $A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{4}{25} \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0.52 \\ 1.04 \end{bmatrix}$

47. $A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

61. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

63. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Ejercicios 7.5

1. $g(x) = \frac{1}{3}$ **3.** $g(x) = \frac{3}{5}x$

5. $g(x) = \frac{3}{16} + \frac{15}{16}x^2$ **7.** $\{1, x - \frac{1}{2}\}$

9. $g(x) = x - \frac{1}{6}$

11. $g(x) = (4e - 10) + (18 - 6e)x \approx 0.87 + 1.69x$

13. $g(x) = \frac{1}{20} - \frac{3}{5}x + \frac{3}{2}x^2$

15. $g(x) = 39e - 105 + (588 - 216e)x + (210e - 570)x^2 \approx 1.01 + 0.85x + 0.84x^2$

21. $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\left(\cos x + \dfrac{\cos 3x}{9}\right)$

23. $a_0 = \frac{1}{2}, a_k = 0, b_k = \dfrac{1 - (-1)^k}{k\pi}$

25. $a_0 = \pi, a_k = 0, b_k = \dfrac{2(-1)^k}{k}$

29. $\mathrm{d}(C) = 1$ **31.** $\mathrm{d}(C) = 2$ **33.** $\mathrm{d}(C) = 3$

35. $\mathrm{d}(C) = 3$; si $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4\}$, entonces **u** se decodifica como $\mathbf{c}_2$, **v** no puede decodificarse y **w** se decodifica como $\mathbf{c}_3$.

37. $C = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, donde **0** es el vector cero y **1** es el vector de todos los números 1 en $\mathbb{Z}_2^8$.

39. Una matriz de control de paridad P para tal código es $(8 - 5) \times 8 = 3 \times 8$. Por tanto, $\mathrm{rank}(P) \leq 3$, de modo que cualesquiera cuatro columnas de P deben ser linealmente dependientes. Por tanto, el entero *más pequeño d* para el cual existen d columnas linealmente dependientes satisface $d \leq 4$. Por el Teorema 7.21, esto significa que $\mathrm{d}(C) \leq 4$, de modo que no existe un código lineal $(8, 5, 5)$.

Preguntas de repaso

1. **(a)** V **(c)** F **(e)** V **(g)** V **(i)** V

3. Producto interno **5.** $\sqrt{3}$ **7.** $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

9. No es una norma **11.** $\mathrm{cond}_\infty(A) \approx 2432$

13. $y = 1.7x$ **15.** $\begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$

17. **(a)** $\sqrt{2}, \sqrt{2}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

19. Los valores singulares de PAQ son las raíces cuadradas de los eigenvalores de $(PAQ)^T(PAQ) = Q^TA^TP^TPAQ = Q^T(A^TA)Q$. Pero $Q^T(A^TA)Q$ es similar a A^TA porque $Q^T = Q^{-1}$, y en consecuencia tiene los mismos eigenvalores que A^TA. Por tanto, PAQ y A tienen los mismos valores singulares.