Conceptos Básicos de Sistemas Dinámicos

Un sistema dinámico puede ser definido como una formula matemática que describe la evolución del estado de un sistema en el correr del tiempo. El tiempo puede ser una variable continua o discreta:

Sistema dinámico de tiempo continuo:

$$\begin{aligned}&\frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2, ..., x_N)\\ &\frac{dx_2}{dt} = F_1(x_1, x_2, ..., x_N) \quad o \quad \dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})\ \mathbf{x} \in \Re^N\\ &...\\ &\frac{dx_N}{dt} = F_1(x_1, x_2, ..., x_N)\end{aligned}$$

Con $\mathbf{x} \in U \subset \Re^N, \boldsymbol{\mu} \in V \subset \Re^P$

Donde y U y V son conjuntos abiertos en $\Re^N$ y $\Re^P$.

Sistema dinámico de tiempo discreto:

$$\mathbf{x}(t+1) = F(\mathbf{x}(t))$$

Donde **x** es un vector N dimensional, dado un estado inicial $\mathbf{x}_0$ podemos generar una orbita de un sistema de tiempo discreto. x_0 , x_1 , x_3 , ... iterando el mapa.

Ejemplo. Mapa logístico $x(t+1) = Ax(\mathrm{t})(1-x(t))$.

Nota:

- **x**, es llamado de vector estados.
- $F(\mathbf{x})$, corresponde a la evolución del sistema (describe la dinámica), y describe la trayectoria del sistema.
- **Trayectoria** es la secuencia de estados exhibida por un sistema dinámico durante su evolución en el tiempo
- Los posibles valores que puede tomar **x** es llamado de **espacio de estados**.
- **Atractor:** Es una región del espacio de estados para donde las trayectorias convergen, a partir de una región mayor del espacio de estados.
- La región del espacio de estados a partir de la cual el sistema evolue para un atractor es llamada de **base de atracción**.

Estabilidad de un sistema dinámico:

- Punto fijo (llamado también punto estacionario o de equilibrio). Es una solución de equilibrio de un punto $\mathbf{x}^* \in \Re^N$ y para un sistema de tiempo continuo esta dado por $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}^*) = 0$.
  Para un sistema de tiempo discreto esta dado por:
  $$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{x}(t).$$
- Búsqueda de puntos fijos, pueden ser encontrados resolviendo las anteriores dependiendo de ser sistemas de tiempo continuo o discreto.
  Por ejemplo para el mapa logístico tenemos que encontrar las raíces de la ecuación cuadrática $x^2+x\,(1-A) / A = 0$, obteniendo como resultado:
  $\mathrm{x}^* = 0$ y $\mathrm{x}^* = (A-1)/A$.

Definición* 1*:
Un punto x^* es dicho de ser estable si dado ε > 0, existe un δ > 0 tal que $|x - x^*| < \delta$ implica que $|f^t(x)\text{-}x| < \varepsilon$ para todo $t > 0$. Si x^* es no estable entonces es llamado de inestable.

Definición* 2*:
El punto fijo x^* es dicho de atracción si existe un η > 0, talque $|x - x^*| < \eta$, implica que : $\lim_{t\to\alpha} x(t) = x^*$.

Definición* 3*:
El punto fijo x^* es dicho de ser asintoticamente estable si es estable y de atracción.
Comportamientos del punto fijo:

Linelización
Una forma de determinar la estabilidad de un sistema dinámico no lineal es la linealización. El propósito de este método es determinar se un punto fijo es estable, la forma de determinar la estabilidad esta en función del tipo de sistema analizado.

Para un sistema dinámico de tiempo continuo:

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$$

$\mathbf{x} \in \Re^N$, tenemos que:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*(t)$$

donde $\mathbf{x}^*$ es un punto fijo entonces:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}^*(t) - \dot{\mathbf{y}}$$

usando la expansión de Taylor en $\mathbf{x}^*$ tenemos que:

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}^*(t)) + DF(\mathbf{x}^*(t))\mathbf{y} + O(|\mathbf{y}^2|)$$

como $\dot{\mathbf{x}}^*(t) = F(\mathbf{x}^*(t))$ tenemos que:

$$\dot{\mathbf{y}} = DF(\mathbf{x}^*(t))\mathbf{y} + O(|\mathbf{y}^2|)$$

dado que la diferencia entre el estado actual y el punto fijo es pequeña (**y**) la estabilidad del sistema puede ser encontrada usando el sistema lineal asociado:

$$\dot{\mathbf{y}} = DF(\mathbf{x}^*(t))\mathbf{y}$$

entonces:

$$\mathbf{y}(t) = e^{DF(\mathbf{x}^*)t}\mathbf{y}(0)$$

desde que $DF(\mathbf{x}^*(t)) = DF(\mathbf{x}^*)$

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$$

Donde A corresponde a la matriz Jacobiana dada por:

$$A = DF(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

para una matriz de A de dimensión $n \times n$. Se dice que un escalar $\lambda \in C$ (conjunto de números complejos) es un auto-valor de si existe un vector no nulo tal que $\boldsymbol{e} \in C^n$ llamado auto-vector asociado a λ tal que:

$$Ae = \lambda e$$

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k e_k \exp(\lambda_k t)$$

donde los valores de A_k están determinados por los valores de la condición inicial

$$y(0) = y_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k e_k$$

λ_k son los autovalores de la $\boldsymbol{A}$

(a) Se alguno de los valores de la parte real de los auto-valores es $\lambda_k > 0$, entonces el punto fijo es dicho de ser inestable.

(b) Se todos los valores de la parte real de los autovalores son $\lambda_k < 0$, entonces el punto fijo es dicho de ser estable.

Para un sistema dinámico de tiempo discreto:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* + \mathbf{y}(t)$$

usando la expansión de Taylor tenemos:

$$\mathbf{y}(t+1) = DF(\mathbf{x}^*)\mathbf{y}(t) + O(\mathbf{y}(t)^2)$$

como la diferencia $\mathbf{y}$ es pequeña y si $DF(\mathbf{x}^*) = \mathbf{A}$ entonces la estbilidada puede estar dada por el sistema lineal:

$$\mathbf{y}(t+1) = A\mathbf{y}(t)$$

dado que:

$$Ae = \lambda e$$

tenemos:

$$y(t+1) = \sum_{k=1}^{n} A_k e_k \lambda_k^n$$

Si alguno de los autovalores $|\lambda_k| > 1$ el punto fijo es inestable

Si todos los autovalores $|\lambda_k| < 1$ el punto fijo es estable

Ejemplo:

Caso continuo:

$$dx/dt = x - x^3/3 - y + I(t)$$

$$dy/dt = c(x + a - by)$$

$$(a = 0.7,\ b = 0.8,\ c = 0.1)$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 - x^2 & -1 \\ c & -bc \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = -[(bc - 1 + x^2) \pm ((x^2 - 1 + bc)^2 - 4c)^{1/2}] / 2$$

Caso discreto:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - x_n^2 + by_n \\ x_n \end{pmatrix}$$

a = 1, b = 1

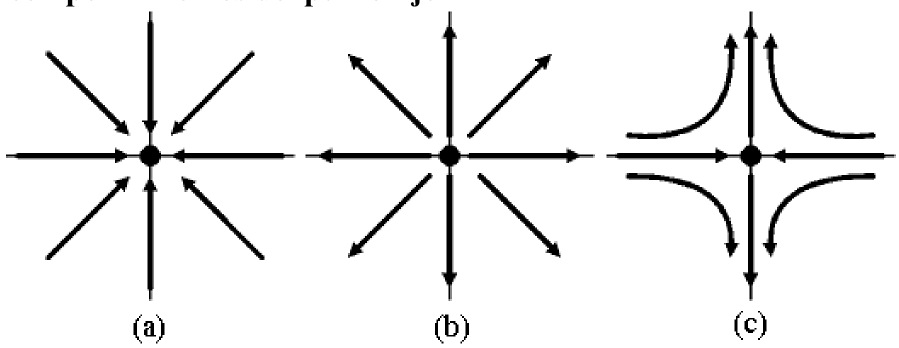
dos puntos fijos (x = 1, y = 1) y (x = -1, y = -1)

$$DF(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = -1 - \sqrt{2},$$

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{2},$$

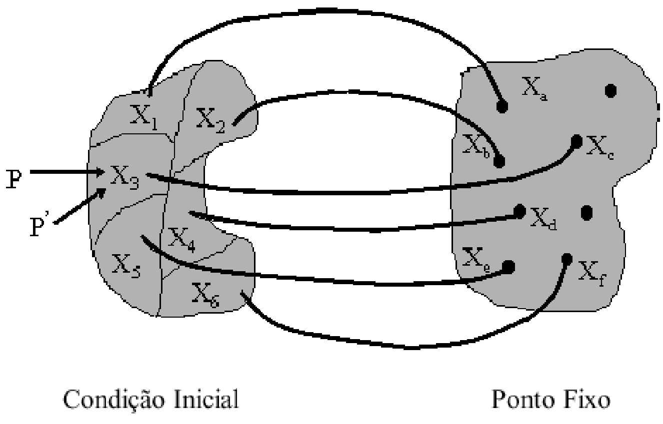
Tipos de comportamientos del punto fijo



(a) Punto fijo de atracción (b)Punto fijo de repulsión (c)Punto silla.

El modelo de Hopfield (Procesamiento de información como sistema dinámico)

Uno de los principales responsables para el desenvolvimiento de redes neuronales por J. Hopfield, que propone un modelo de red recurrente inspirado en conceptos de dinámica no linear y física estadística (Hopfield, 1982). El modelo puede ser usado como *memoria asociativa o memoria dirigido por el contenido.* La idea esencial del modelo de Hopfield es mapear una memoria fundamental en un punto fijo estable de un sistema dinámico representado en forma de una red recurrente.

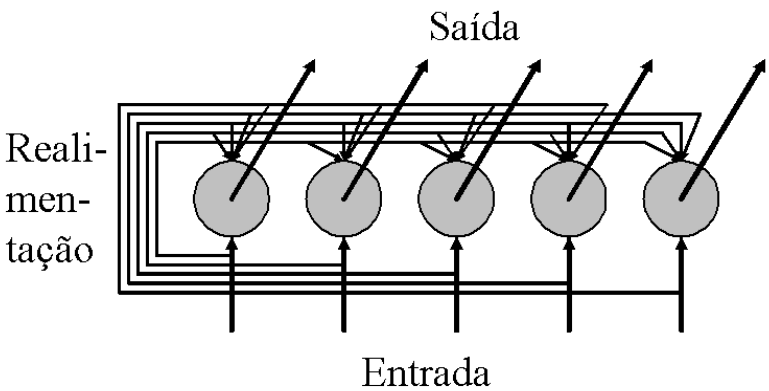


La idea básica del modelo de Hopfield para almacenamiento y reconocimiento de patrones es la siguiente: cualquier sistema físico cuya dinámica en un espacio de fases es denominado por un número substancial de estados localmente estables los cuales son atraídos, pudiendo ser considerados como una memoria dirigida por el contenido. El modelo de Hopfield puede ser considerado, como un sistema físico (sistema dinámico no lineal), por varias coordenadas $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, ...,$\mathbf{X}_n$, que son los componentes del vector de estados **X.** Suponiendo que el sistema posee puntos fijos localmente estables $\mathbf{X}_a$, $\mathbf{X}_b$,...,entonces el sistema es iniciado lo suficientemente cerca de cualquier punto fijo Xa, como en X=Xa+δ y con el pasar del tiempo el sistema recuperara la información deseada, ósea corresponde a un patrón almacenado.

El modelo discreto de Hopfield

Modelo desarrollado por Jhon Hopfield en 1982, utiliza la neurona de McCulloch y Pitts, puede tomar valores binarios o bipolares para las salidas de la neurona.

El modelo de Hopfield discreto corresponde a una red de una sola capa, donde las neuronas están totalmente conectados excepto consigo misma (auto-conexiones).



Las conexiones corresponden a los pesos de red los cuales son simétricos es decir que la conexión de la neurona *i* para la *j* es igual que de la *j* para *i* ($w_{ij} = w_{ji}$).

La idea del funcionamiento de esta red se basa en la minimización de la función de energía

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{(j=1)(j\neq i)}^{N} w_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{N} x_i\theta_i$$

pudiendo ser el valor de θ_i tomado como 0 por simplicidad.

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{(j=1)(j\neq i)}^{N} w_{ij}x_ix_j$$

el funcionamiento de la red puede ser divididos en dos fases almacenamiento y funcionamiento.

Fase de almacenamiento

Es usado para almacenar patrones en estados estables de la red, a través del ajuste de los pesos de la red. El aprendizaje esta basado en la regla de Hebb que defiene el ajuste de los pesos mediante la siguiente ecuación:

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{M} \xi_{\mu,i}\xi_{\mu,j} & se \quad i \neq j \\ 0 & se \quad i = j \end{cases}$$

donde w_{ij} corresponde a los pesos entre las neuronas i y j, M es el número de patrones almacenados y N el numero de neuronas que tiene la red. $\xi_{\mu,i}$ corresponde al i-esimo atributo del u-esimo patrón.

El proceso de aprendizaje corresponde a la minimización de la función de energía.

Supongamos que deseamos almacenar los patrones $\xi^s = \xi_1^s, \xi_2^s, ..., \xi_N^s,$ donde $\xi_i^s = \pm 1$, si deseamos minimizar la función de energía y x corresponde a un patrón almacenado entonces $x = \xi$, y w esta dada por la ecuación anterior, así tenemos que:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \sum_{(j=1)(j\neq i)}^{N} w_{ij}x_i x_j \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \sum_{(j=1)(j\neq i)}^{N} w_{ij}\xi_{\mu,i}\xi_{\mu,j} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \sum_{(j=1)(j\neq i)}^{N} (\xi_{\mu,i})^2(\xi_{\mu,j})^2 \end{aligned}$$

Fase de funcionamiento

Para poder recuperar un patrón almacenado en la red se debe las siguientes ecuaciones:

$$y_i(t+1) = \sum_{j=1}^{N} w_{ij}x_j(t) + \theta_i$$

$$x_i(t+1) = \begin{cases} 1 & y_i(t+1) > 0 \\ -1 & y_i(t+1) < 0 \\ x_i(t) & y_i(t+1) = 0 \end{cases}$$

como puede ser visto primero es calculado el estado de activación de la red que corresponde a $y_i(t+1)$ y después se le aplica la función de activación que en este caso corresponde a la degrado.

La recuperación de un patrón corresponde minimizar la función de energía en cada iteración como puede ser visto en la siguiente ecuación:

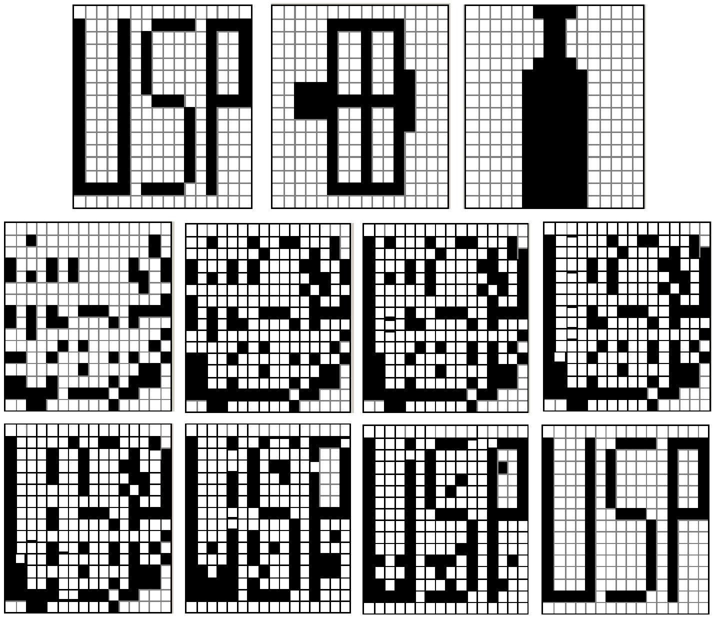
$$
\begin{aligned}
\triangle_t E &= E(t+1) - E(t) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{(j=1)(j\neq i)}^{N} w_{ij}x_i(t+1)x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{(j=1)(j\neq i)}^{N} w_{ij}x_i(t)x_j \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\triangle x_i(t)\sum_{(j=1)(j\neq i)}^{N} w_{ij}x_j
\end{aligned}
$$

donde tres cosas pueden suceder con Δx:

- Que el estado de x cambie de +1 para –1, entonces $\Delta x_i(t) < 0$ e toma valor de –1, entonces la suma es negativa eso implica que la energía disminuye.
- Que la energía varié de –1 para +1, entonces $\Delta x_i(t) > 0$ toma el valor de +1, entonces la sumatoria es mayor que 1, eso implica que la energía tambien disminuye.
- Que la energía no varié, $\Delta x_i(t) = 0$, en ese caso la energía no cambia.

Todo eso garantiza que la energía tiene que caer en un mínimo local.

Ejemplo



Limitaciones del modelo de Hopfield

- La capacidad de almacenamiento es limitada, almacenar muchos patrones puede causar que converja para un estado estable deseado, y converja para algún otro estado que no corresponde a ninguno de los patrones almacenado, este fenómeno es llamado de diafonía. Fue demostrado que la máxima capacidad de almacenamiento de la red de Hopfield es 0.15 del numero total de neuronas.
- Existencia de memorias espurias. Los patrones almacenados en la red Hopfield pueden ser llamados de memorias fundamentales y corresponden a estados estables de la función de Energía también existen otros estados estables pero ellos no corresponden a patrones almacenados los cuales son llamados estados espurios o memorias espurias.