Examen resuelto-1er. Parcial del Grupo 1

Ejercicio 1.- (1 pt)

Modulador (sobre 1).- Resuelve el siguiente sistema en Z_7 pasando la matriz del sistema a forma reducida

$$\begin{aligned} 3x - 4y + 2z &= 5 \\ 2x - z &= 2 \\ y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

Solucion.-
Escribimos el sistema en forma matricial y comenzamos a operar

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuya soluciómn es x=1, y=3, z=0.

- **Halla la factorización del número 2190.**

Solucion.-
Observando dicho número vemos que es divisible por 2, a saber 2190 = 2x 1095. Asimismo, 1095 es divisible por 5, 1095 = 5x 219 y a su vez 219 es divisible por 3, 219 = 3x 73.
Tenemos pues que 2190 = 2x3x5x73.
Es obvio que 2, 3 y 5 son primos. Veamos que el 73 también lo es. En efecto,
Los primos menores que la raíz cuadrada de 73 (aproximadamente 8 y pico) son: 2,3 ,5 y 7. Como

73 = 2x36 + 1, luego 2 no divide a 73.
73 = 3x24 + 1, luego 3 no divide a 73.
73 = 5x14 + 3, luego 5 no divide a 73.
73 = 7x10 + 3, luego 7 no divide a 73.

- **Indica qué números de Z_{12} tienen inverso. Para los que tengan, calcula dicho inverso**

Solucion.- Sabemos que a $a \in Z_{12}$ es primo si y sólo si a y 12 son primos entre sí. Como 12 = 2^2x3, los posibles valores para a son: 1,5,7 y 11.
Se tiene además que:

1^{-1} = 1.
5^{-1} = 5 pues 5x5 = 25 = 2x12 + 1 = 1 en Z_{12} .
7^{-1} = 7 pues 7x7 = 49 = 4x12 + 1 = 1 en Z_{12} .
11^{-1} = 11 pues 11x11 = 121 = 10x12 + 1 = 1 en Z_{12} .

- **Calcula el inverso de 31 en Z_{190}**

Solución.-
Dividiendo obtenemos
190 = 6x31 + 4
31 = 7x4 + 3
4 = 1x3 + 1
3 = 3x1
Despejando obtenemos

1 = 4 -1x3 = 4 – 1x(31 - 7x4) = 8x4 – 1x31 = 8x(190 – 6x31) – 1x31 = 8x190 – 49x31.

Pasando a Z_{190} ,   1 = 8x0 +(-49)x31 = (-49)x31. Por tanto 31^{-1} = -49 = 141 en Z_{190} .

- **Calcula la inversa de la siguiente matriz en Z_7 usando operaciones elementales**

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución.-
Ampliamos con la identidad

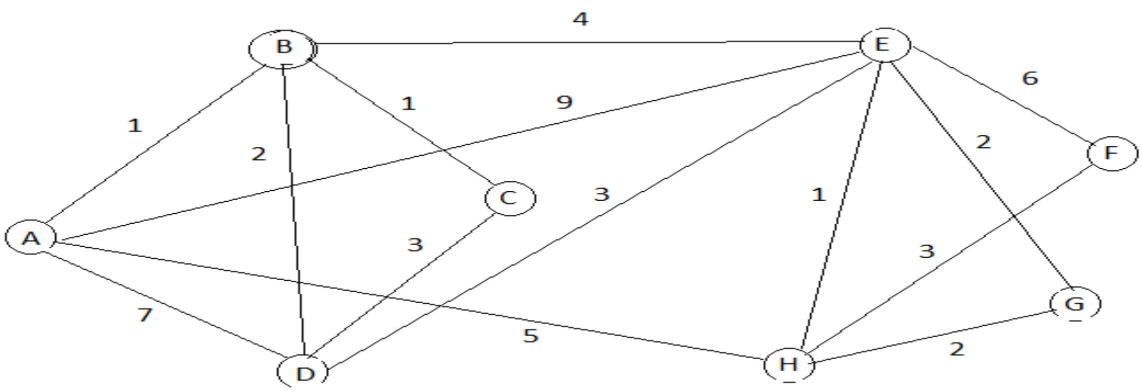
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2

- **Dado el siguiente grafo,**
  - **Encuentra un árbol generador de peso mínimo utilizando el algoritmo de Kruskal.**
  - **¿Es euleriano el grafo? En caso afirmativo encuentra una circuito euleriano del grafo.**
  - **Mediante el algoritmo de Dijkstra, encuentra la ruta más corta (es decir, de peso mínimo) desde el vértice *A* hasta el vértice *G*. ¿Es única esta ruta?.**



Solución.-

– – – El algoritmo de Kruskal en una primera iteración escogería la arista de menor valor, por ejemplo la A– B (de valor 1), el árbol parcial es T = {{A,B}}.

2ª iteracion: escogería otra de valor 1, por ejemplo la B-- C (que no forma ciclo con la anterior y la añade al arbol) el árbol parcial es ahora T = {{A,B},{B, C}}.

3ª iteración: escoge la arista {E,H} también de valor 1 y que no forma ciclo en T. Nuestro árbol parcial ahora es T = {{A,B},{B, C},{E,H}}.

4ª iteración: de entre las arista de valor 2, escogería por ejemplo la arista {B,D} (que no forma ciclo en T),; el árbol sería T = {{A,B},{B, C},{E,H},{B,D}}.

5ª iteración: de entre las arista de valor 2, escogería por ejemplo la arista {E,G} o la {H,G} (ambas no por que formarían ciclo en el árbol). Elegimos la {E,G}. El árbol sería T = {{A,B},{B, C},{E,H},{B,D},{E,G}}.

6ª iteración: de entre las aristas de valor 3 que no formen ciclo en T, elegimos la {E,D}. Nuestro árbol es T = {{A,B},{B, C},{E,H},{B,D},{E,G},{E,D}}.

7ª iteración: de entre las aristas de valor 3 que no formen ciclo en T, elegimos la {H,F}. Nuestro árbol es T = {{A,B},{B, C},{E,H},{B,D},{E,G},{E,D},{H,F}}.

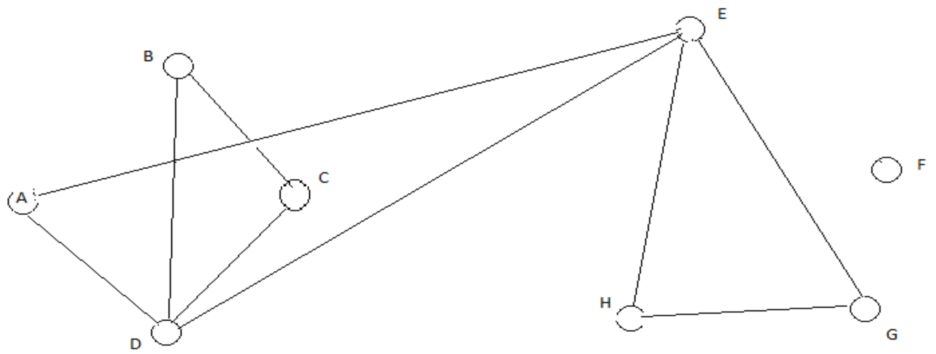
Como el grafo tiene 8 vértices y hemos elegido 7 aristas el proceso termina.

El total del árbol generador minimal es de 13.

— – El grafo es euleriano pues todos los vértices son de grado par. Para obtener el circuito euleriano vamos formando ciclos cerrados, a saber tomamos los ciclos

A-B-E-F-H-A

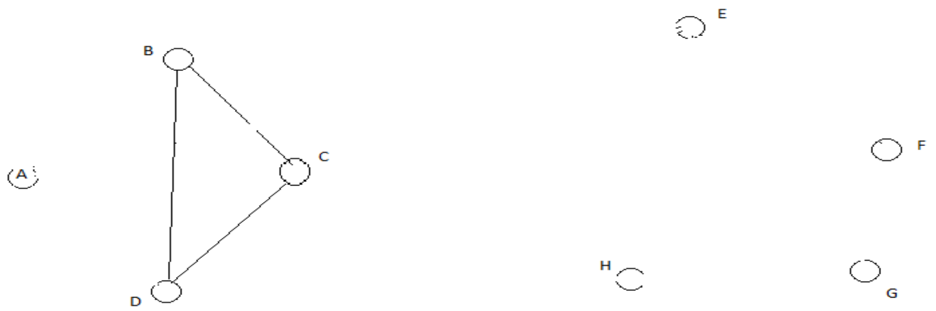
El grafo queda así:



Cogemos el ciclo

A-E-G-H-E-D-A

El grafo queda así:



Por último cogemos el ciclo B-C-D-B

Concatenano los ciclos obtenemos el circuito euleriano:

A-E-G-H-E-D-A-B-C-D-B-E-F-H-A

– – – Por Dijkstra, tenemos la tabla:

Ite.	l(A)	l(B)	l(C)	l(D)	l(E)	l(F)	l(G)	l(H)	u	S
1	0	**1**	?	7	9	?	?	5	B	{A,B}
2			**2**	3	5	?	?	5	C	{B,C}
3				**3**	5	?	?	5	D	{B,D}
4					**5**	?	?	5	E	{B,E}
5						11	7	**5**	H	{A,H}
6						8	7		G	{E,G}

El camino más corto mide 7 y es el siguiente

A – B – E – G

Hay otro camino de igual longitud, a saber A – H – G

Ejercicio 3

- **Dado los siguientes conjuntos de vectores indica si son sistema generador, linealmente independientes, base o ninguna de estas cosas**
  - **{(1,2,-1), (-1,2,3), (2,1,-2)} en $\mathbb{R}^3$**
  - **{$1-x+x^2+x^3, x+x^2+x^3, -1+5x-3x^2+2x^3$} sobre $\mathbb{R}_3[x]$.**

Solución.-
Los escribimos como vectores en una matriz y escalonamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Vemos que tenemos tres pivotes y tenemos tres vectores de tres coordenadas cada uno: son linealmente independientes, es sistema generador y por tanto una base.

Solución.-
Los escribimos como vectores en una matriz y escalonamos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

Vemos que tenemos tres pivotes y tenemos tres vectores de cuatro coordenadas cada uno: son linealmente independientes, no es sistema generador y por tanto no son base.

- **Escribe las coordenadas de (1,2,4) respecto a { (2,0,3), (0,-1,-1), (-1,1,0) } sobre Z_5**

Solución.-

Planteamos el sistema

(1,2,4) = x(2,0,3) + y(0,-1,-1) + z(-1,1,0) = (2x-z, -y +z, 3x-y)

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto la solución es x = 1, y= 4, z = 1.

- **Encuentra las ecuaciones implícitas de W_1 = < (1,2,1), (0,1,2) > en R^3**

Solución.-

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 1 & 2 & z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-2x \\ 0 & 2 & z-x \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-2x \\ 0 & 0 & 3x-2y+z \end{pmatrix}$$

La ecuación implícita es 3x – 2y + z = 0.

- **Encuentra una base y calcula la dimensión de W_2 = { (x,y,z) | 2x + 2y + z = 0 } en R^3**

Solución.-

Para obtener una base resolvemos el sistema 2x + 2y + z = 0.

z= -2x – 2y

soluciones (x,y,-2x-2y) = (x,0,-2x) + (0,y,-2y) = x(1,0,-2) + y(0,1,-2) = <(1,0,-2),(0,1,-2)>

AL estar escalonados son linealmente independientes y por tanto una base de W_2 .

- **Halla una base de la intersección,** $W_1 \cap W_2$.

Solución.-

La base de la intersección se obtiene resolviendo el sistema que representa a las ecuaciones implícitas de dicha intersección.
Ecuaiones implícitas de $W_1 \cap W_2$.

$$3x - 2y + z = 0$$
$$2x + 2y + z = 0$$

Reduciendo tenemos

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 10/3 & 1/3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/10 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 1/10 \end{pmatrix}$$

sistema equivalente: x + 2/5 z = 0
y + 1/10 z = 0
solución (-2/5z, -1/10z, z) = z(-2/5, -1/10, 1) = <(-2/5, -1/10, 1)> = <(-4,-1,10)>.

La intersección es un subespacio de dimensión 1 y con base (-2/5, -1/10, 1) o (-4,-1,10).