Fundamentos de Estadística y Matemáticas.

Temáticas:

- Fundamentos algebra lineal
- Fundamentos probabilidad y estadística

Aritmética matricial y normas

Una ***matriz*** es una tabla rectangular de números reales dispuestos en filas y columnas del modo:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Columnas de la matriz } A} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}}\right\} \text{Filas de la matriz } A$$

Abreviadamente se puede expresar $A = (a_{ij})$.

Cada elemento de la matriz lleva dos subíndices:

- El primero de ellos "i" indica la fila en la que se encuentra el elemento,
- y el segundo, "j", la columna.

Así el elemento a_{23} está en la fila 2 y columna 3.

Las matrices siempre se representarán con letras mayúsculas (A, B, C, ...).

Aritmética matricial y normas

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

A tiene 2 filas y 2 columnas, diremos que su dimensión 2 x 2.
¿Qué elemento es a_{21}?

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

B tiene 2 filas y 3 columnas, diremos que su tamaño es 2 x 3.
¿Qué elemento es b_{23}?

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C tiene 4 filas y 3 columnas, diremos que su dimensión 4 x 3.
¿Qué elemento es c_{32}?

Aritmética matricial y normas

En general, si una matriz A tiene *m* filas y *n* columnas, diremos que su tamaño o **dimensión** es ***m* x *n*** (se lee "*m* por *n*"), siempre en primer lugar el nº de filas y en segundo lugar el de columnas.

Igualdad

Dos matrices A y B son *iguales* cuando contienen los mismos elementos, dispuestos en los mismos lugares:

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\, i, j$$

Lógicamente, para que dos matrices sean iguales es necesario que tengan la misma dimensión.

Aritmética matricial y normas

Tipos de matrices

- **Según su dimensión:**

Se llama ***matriz fila*** a la que sólo tiene una fila, es decir su dimensión es 1 x *n*.

Por ejemplo, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ es una matriz fila de dimensión 1 x 4.

Se llama ***matriz columna*** a la que sólo consta de una columna, es decir su dimensión será *m* x 1.

Por ejemplo, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ es una matriz columna de dimensión 3 x 1.

Una matriz es ***cuadrada*** cuando tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir su dimensión es *n* x *n*.

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de dimensión 2 x 2 o simplemente de orden 2.

$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ matriz cuadrada de orden 3.

Aritmética matricial y normas

Tipos de matrices

Dentro de las matrices cuadradas llamaremos ***diagonal principal*** a la formada por los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$, siendo la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diagonal principal

En la matriz D, la diagonal principal está formada por 1, 5, 0.

La *diagonal secundaria* es la formada por los elementos $a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \ldots, a_{n1}$.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

En la matriz D está formada por 3, 5, -3.

Aritmética matricial y normas

Tipos de matrices

- **Según sus elementos:**

Una clase especial de matrices cuadradas son las ***matrices triangulares***. Una matriz es ***triangular superior*** si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos y ***triangular inferior*** si son nulos todos los elementos situados por encima de dicha diagonal.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 16 & -78 \end{pmatrix}$$

Triangular inferior

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Triangular superior

Si una matriz es a la vez triangular superior e inferior, sólo tiene elementos en la diagonal principal.
Una matriz de este tipo se denomina ***matriz diagonal***.
Un ejemplo de matriz diagonal es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonal principal: de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha.
Diagonal secundaria: de la esquina superior derecha a la esquina inferior izquierda.

Aritmética matricial y normas

Tipos de matrices

Si una matriz diagonal tiene en su diagonal principal sólo unos, se denomina **matriz unidad o identidad**. Se suelen representar por I_n , donde n es el orden o tamaño de la matriz. Algunas matrices identidad son:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se llama ***matriz nula*** a la que tiene todos los elementos cero.

Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz nula de tamaño 2x5.

Aritmética matricial y normas

Tipos de matrices

Matrices escalonadas

Fíjate en las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En ellas se cumple que:

- Si hay filas nulas, están situadas en la parte inferior de la matriz.
- En las filas no nulas, el primer elemento diferente de cero de una fila está situado más a la derecha que el primer elemento diferente de cero de la fila inmediatamente superior.

De ellas se dice que son **matrices escalonadas**.

Aritmética matricial y normas

Tipos de matrices

Forma escalonada reducida

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los 1 principales tienen ceros arriba y por debajo de ellos

Forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los 1 principales se desplazan a la derecha en los renglones sucesivos

No está en la forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los 1 principales no se desplazan a la derecha en los renglones sucesivos

Aritmética matricial y normas

Operaciones con matrices

Dadas dos matrices A y B de la misma dimensión m × n, la **matriz suma**, $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, es la que se obtiene sumando los elementos que en cada una de ellas ocupan la misma posición.

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

De forma abreviada: $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

Aritmética matricial y normas

Operaciones con matrices

Propiedades de la suma de matrices:

a) Conmutativa: $A + B = B + A$

b) Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$

c) Elemento neutro: La matriz nula del tamaño correspondiente. $A + 0 = 0 + A$

d) Elemento opuesto de A: La matriz $-A$, que resulta de cambiar de signo a los elementos de A.

$$A + (-A) = (-A) + A = 0$$

En realidad, la resta hace referencia a la suma de una matriz A, con la matriz diferencia de B

Aritmética matricial y normas

Operaciones con matrices

Dada una matriz cualquiera A de dimensión m × n y un número real k, el producto $k \cdot A$ se realiza multiplicando todos los elementos de A por k, resultando otra matriz de igual dimensión. (Evidentemente la misma regla sirve para dividir una matriz por un número real).

$$k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ k \cdot a_{m1} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Aritmética matricial y normas

Operaciones con matrices

Producto de una matriz fila por una matriz columna.

Sea A una matriz fila y B una matriz columna:

$$\underset{1\times 3}{A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\end{pmatrix}} \qquad \underset{3\times 1}{B=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}}$$

Definimos el producto de la matriz A por la matriz B (en este orden):

$$A\cdot B=\underset{1\times 3}{\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\end{pmatrix}}\cdot\underset{3\times 1}{\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}} = 2\cdot 1+(-3)\cdot 2+1\cdot 5 = 2-6+5=1$$

Hemos emparejado cada elemento de *A* con un elemento de *B*, luego el número de estos elementos (nº de columnas de *A* y nº de filas de *B*) debe coincidir para poder realizar este producto.

Observa que el resultado es un número

Aritmética matricial y normas

Operaciones con matrices

Hay que dejar claro ya desde el principio que no todas las matrices pueden multiplicarse. Dos matrices se pueden multiplicar cuando se cumple la siguiente condición:

"Para multiplicar dos matrices $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{B}$, en este orden, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ *, es condición indispensable que el número de columnas de* $\boldsymbol{A}$ *sea igual al número de filas de* $\boldsymbol{B}$*"*

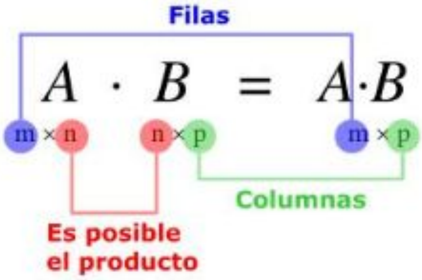
Si no se cumple esta condición, el producto $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ no puede realizarse, de modo que esta es una condición que debemos comprobar previamente a la propia multiplicación.

Una vez comprobado que el producto $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ se puede realizar, si $\boldsymbol{A}$ es una matriz m x n y $\boldsymbol{B}$ es una matriz n x p (observa que el nº de columnas de $\boldsymbol{A}$ = n = nº de filas de $\boldsymbol{B}$), entonces **el producto $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ da como resultado una matriz $\boldsymbol{C}$ de tamaño n x p** del siguiente modo:

"El elemento que se encuentra en la fila i y la columna j de la matriz $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$, se obtiene multiplicando los elementos de la fila i de $\boldsymbol{A}$ por la columna j de $\boldsymbol{B}$ y sumando los resultados"

Aritmética matricial y normas

Operaciones con matrices



La **matriz producto**, $A \cdot B$, si existe, es la que se obtiene de la forma siguiente:

$$A\cdot B=\begin{array}{c}F_1\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mk}\end{pmatrix}\cdot\begin{array}{c}\begin{array}{lll}C_1&&\end{array}\\ \begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ b_{k1}&\cdots&b_{kn}\end{pmatrix}\end{array}=\begin{pmatrix}F_1\cdot C_1&\cdots&F_1\cdot C_n\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ F_m\cdot C_1&\cdots&F_m\cdot C_n\end{pmatrix}$$

El elemento de esta matriz que ocupa la fila *i*-ésima y la columna *j*-ésima es el que se obtiene de multiplicar la fila Fi por la columna Cj.

Aritmética matricial y normas

Determinante

Es una función que establece una correspondencia entre el conjunto de matrices cuadradas y el campo real o complejo.

$$\text{Sea } f: \quad M_{nxn} \longrightarrow K$$
$$A \longrightarrow f(A) = \det(A)$$

Aritmética matricial y normas

Determinante

- Sea la matriz $A=(a_{ij})_n$

El determinante de A se nota así:

$$|A| = \det(A)$$

-Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Aritmética matricial y normas

Determinante

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$\ominus$ $-(a_{12} \cdot a_{21})$

$\oplus$ $a_{11} \cdot a_{22}$

Álgebra vectorial

Norma o Longitud de un vector, se le llama norma de **v** a la longitud del vector ***v***, y se denota por $\|v\|$, aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene que la norma de ***v*** en R^2, es

$\|v\| = \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2}$ y para R^3 $\|v\| = \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2}$

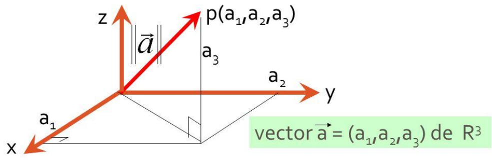
Ahora, si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son puntos en R^3, entonces la distancia ***d*** entre ellos es la norma del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$, luego

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ej: La norma de V=(-3, 1) es igual a

$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10}$$

VECTOR EN R^3



módulo de $\vec{a}$:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$$

Álgebra vectorial

Producto por escalar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad k \in \Re$$

$$kA = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}.$$

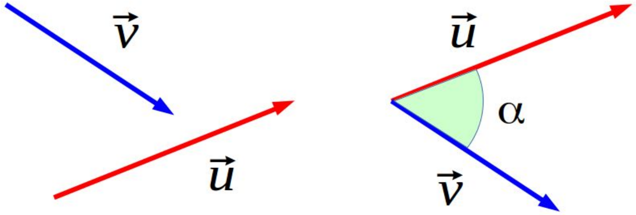
$$\boxed{kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})}$$

El resultado es una matriz en la cual cada uno de los elementos está multiplicado por k

Álgebra vectorial

Producto punto

(Sinónimo producto escalar)



El resultado es un número real

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2$$

Álgebra vectorial

Producto cruz

$$\vec{a} \times \vec{b} = det\begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 0 - 0b_2)i + (0b_1 - a_1 0)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k$$

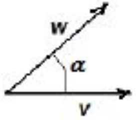
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)k$$

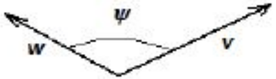
El resultado es un vector perpendicular al vector a y b.

Álgebra vectorial

Producto Punto, se denomina de esta manera a la multiplicación entre dos vectores. Sea ***v*** y ***w*** dos vectores en R^2 o en R^3 y θ el ángulo entre ellos, entonces el producto punto ***v.w*** se define como:

$$\mathbf{v}.\mathbf{w} = \begin{cases} \|v\|.\|w\|\cos\theta\,, si\ v \neq 0\ y\ w \neq 0 \\ 0 \quad si \quad v = 0\ \text{ó}\ \ w = 0 \end{cases}$$





Pero, $\mathbf{v}.\mathbf{w} = v_1.w_1 + v_2.w_2 + v_3.w_3$

Ej: El ángulo entre los vectores *u*=(0,1) y *q*=(2,2) es igual a 45°, entonces

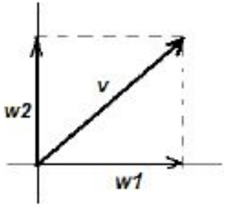
u.q = $\|u\|.\|q\|\cos 45° = \left(\sqrt{0^2+1^2}\right)\left(\sqrt{2^2+2^2}\right)cos45° = 1.\sqrt{8}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = 2$

Teorema 1: Sean ***u*** *y* **v** *dos vectores* en R^2 o en R^3 diferentes de 0 y θ el ángulo entre ellos,

- **i.** $\mathbf{v}.\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$ *, es decir,* $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v}.\mathbf{v})^{\frac{1}{2}}$
- **ii.** $\boldsymbol{\theta}$ *es agudo si y solo si* $\mathbf{u}.\mathbf{v} > 0$
- **iii.** $\boldsymbol{\theta}$ *es obtuso si y solo si* $\mathbf{u}.\mathbf{v} < 0$
- **iv.** $\boldsymbol{\theta} = \frac{\pi}{2}$ *si y solo si* $\mathbf{u}.\mathbf{v} = 0$

De esto último se dice que dos vectores son *Ortogonales* cuando ***u.v*** = 0, o en otras palabras son perpendiculares geométricamente, esto se usa cuando es necesario descomponer un vector en sus componentes rectangulares.

$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ donde $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ son los vectores componentes en los ejes del plano cartesiano, de tal manera que $\mathbf{w}_1 . \mathbf{w}_2 = 0$



Álgebra vectorial

Producto Cruz, operación vectorial para vectores R^3, tiene aplicaciones en la geometría, la física, la ingeniería, el movimiento planetario, la electricidad, el magnetismo y la mecánica.

Si ***v*** y ***w*** son dos vectores no paralelos, entonces las representaciones de los dos vectores con el mismo punto inicial determinan un plano. El resultado del producto cruz de ***v*** y ***w*** es un vector cuyas representaciones son perpendiculares a este plano.

El producto cruz se define a continuación: si $\boldsymbol{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ y $\boldsymbol{w} = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$ son dos vectores en R^3, entonces el ***producto cruz v x w*** es el vector que se define como:

$$\boldsymbol{v} \, x \, \boldsymbol{w} = \langle v_2w_3 - v_3w_2,\ v_3w_1 - v_1w_3,\ v_1w_2 - v_2w_1\rangle$$

Este producto sólo se aplica para R^3.

Se puede aplicar la matriz 2x3, $C = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$, luego el vector producto cruz es:

$$\boldsymbol{v} \, x \, \boldsymbol{w} = \langle det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}, det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}, det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix}\rangle$$

Teorema 2: Si ***v*** y ***w*** son dos vectores en R^3, entonces:

1. *v.(v x w) = 0* (*v x w es ortogonal a v*)
2. *w.(v x w) = 0* (*v x w es ortogonal a w*)
3. $\|\boldsymbol{v} \, x \, \boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2 \, \|\boldsymbol{w}\|^2 - (\boldsymbol{v}.\boldsymbol{w})^2$

Álgebra vectorial

- **VECTOR UNITARIO**

- Un vector es unitario si su módulo es la unidad.
- Si queremos conseguir un vector unitario, v, con el mismo sentido y dirección de otro, u, basta dividir las coordenadas de u entre su módulo.

$$v = \left(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} , \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}} \right)$$

- **EJEMPLOS**

- Hallar el vector unitario de los siguientes vectores:

- **u=(3, -4)**
- v=((3/5), (-4/5))

- **u=(1, 1)**
- v =((1/√2), (1/√2))=((√2/2), (√2/2))

- **u=(-5, 12)**
- v=((-5/13), (12/13))

- **u=(-4, 4)**
- v=((-4/ 4√2), (4/ 4√2)) =((-√2/2), (√2/2))

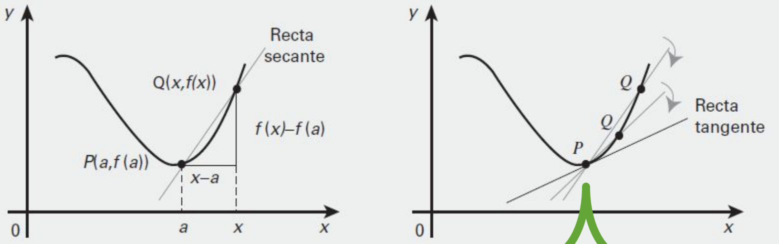
Razones de cambio

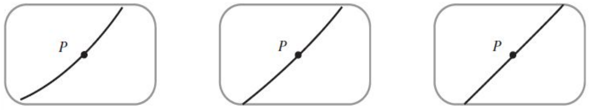
$$m_{PQ} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

para $\quad x \neq a$

Recta tangente. Recta que pasa por el punto $P(a, f(a))$ de la curva $y = f(x)$ y cuya pendiente es el límite

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$





Puede representar un cambio físico, rección, proceso, económico (costo marginal de un producto), cambio poblacional en concentraciones urbanas o cambio biológico en colonia de bacterias.

$h = x - a$

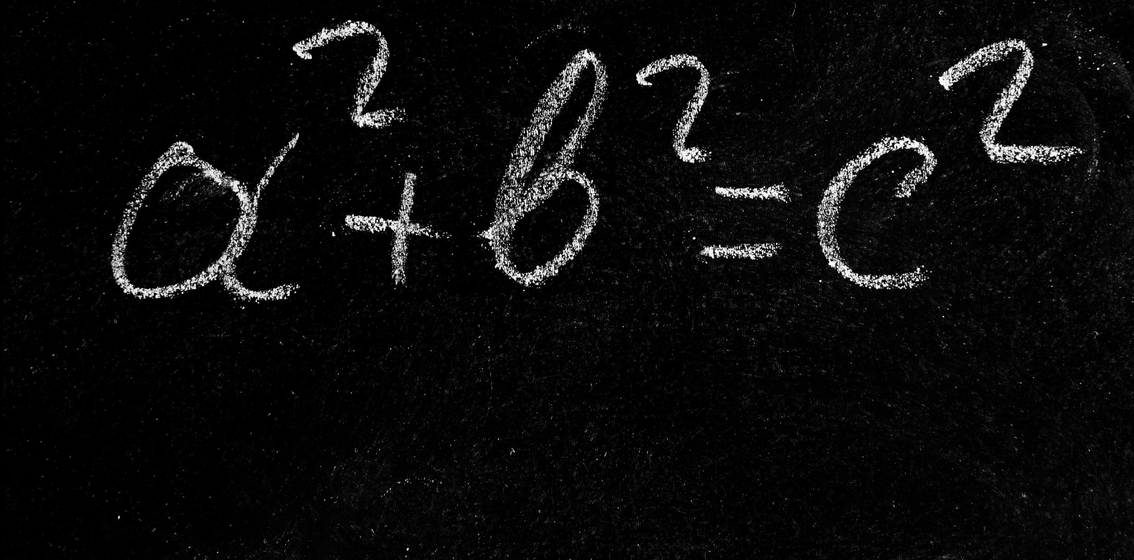
$x = a + h$

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Calcular la derivada de una función a partir de su definición es un proceso tedioso y que demanda mucho tiempo. Esa es la razón por la que se han desarrollado instrumentos (teóricos y tecnológicos) que permiten acortar el largo camino que hemos estudiado hasta aquí.



Derivadas

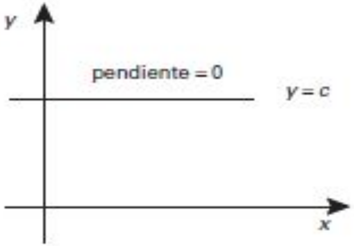
Calcular la derivada de una función a partir de su definición es un proceso tedioso y que demanda mucho tiempo. Esa es la razón por la que se han desarrollado instrumentos (teóricos y tecnológicos) que permiten acortar el largo camino que hemos estudiado hasta aquí.

La derivada de una función f (x) nos produce otra función. Este proceso lo podemos esquematizar de la siguiente manera.

DERIVADAS

Regla 1. La derivada de una **función constante** $f(x) = c$ es cero. Puesto que una función constante no tiene cambios, su pendiente es cero en todo su dominio.

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

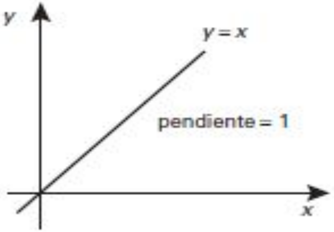


Ejemplo

Si $y = 3$ entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{d(3)}{dx} = 0$

Regla 2. La derivada de la **función identidad** $f(x) = x$ es 1. En este caso, la razón de cambio es 1 a 1.

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$



DERIVADAS

Regla 3. Si $f(x) = x^n$ donde n es cualquier número real entonces su derivada es:

$$\frac{d\left(x^n\right)}{dx} = nx^{n-1}$$

Ejemplos

a) $\dfrac{d\left(x^5\right)}{dx} = 5x^4$ $\qquad n = 5, \qquad n - 1 = 4$

b) $\dfrac{d\left(x^{-3}\right)}{dx} = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$ $\qquad n = -3, \qquad n - 1 = -4$

c) $\dfrac{d\left(\sqrt{x^3}\right)}{dx} = \dfrac{d\left(x^{\frac{3}{2}}\right)}{dx} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad n = \dfrac{3}{2}, \qquad n - 1 = \dfrac{1}{2}$

Regla 4. Regla del múltiplo constante. Si c es una constante y $f(x)$ es una función, entonces su derivada es:

$$\frac{d}{dx}cf(x) = c\frac{d}{dx}f(x)$$

Ejemplo

Si $y = 7x^3$ entonces $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(7x^3\right) = 7\dfrac{d\left(x^3\right)}{dx} = 7\left(3x^2\right) = 21x^2$

Regla 5. Regla de una suma algebraica. Si u, v y w son funciones de x y además son diferenciables, entonces:

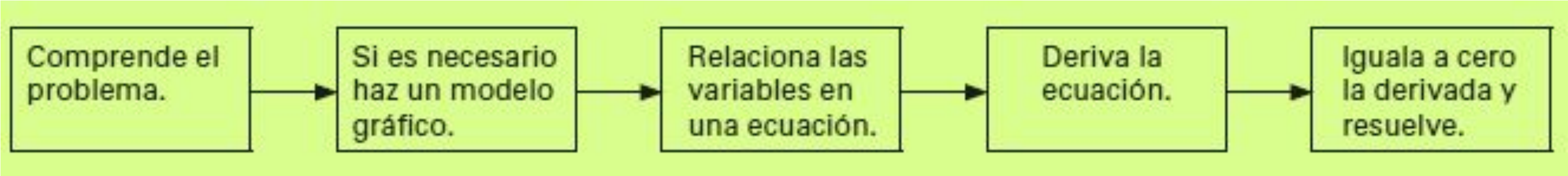
$$\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

Optimización

Aplicaciones del cálculo diferencial que se presentan cuando queremos encontrar la mejor manera de hacer algo. Una persona que hace negocios, desea maximizar sus utilidades y minimizar sus costos.

- Resolución de situaciones de diseño de figuras geométricas para maximizar su área o volumen, o minimizar gastos, distancias y tiempos.
- Generalmente en matemáticas uno de los mayores retos es traducir una situación del lenguaje cotidiano en una ecuación o modelo matemático que permita encontrar la optimización de una función o un recurso.

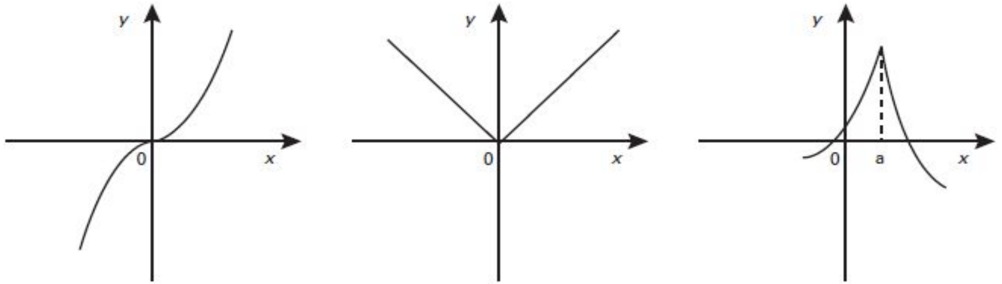
Para tal propósito considera la siguiente secuencia como un sistema de acceso a la solución de problemas de optimización.



Optimización

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Sin embargo, ahora hay que preguntarnos si existen métodos más exhaustivos que nos garanticen cómo encontrar los máximos o mínimos de una función. Y es que hay funciones con valores extremos en donde la derivada no es cero, o bien, donde la derivada en un punto de una gráfica sea igual a cero, y la función no sea un valor máximo o un valor mínimo.



Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(0) = 0$ pero f no tiene máximo ni mínimo.

Si $f(x) = |x|$, entonces $f(0) = 0$ es un valor mínimo, pero en ese punto la derivada no existe.

Esta función tiene un valor máximo en $x = a$, pero la derivada no existe en ese punto.

Optimización

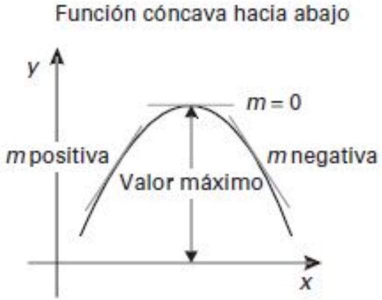
FUNCIONES CRECIENTES O DECRECIENTES

Función creciente. Es una función en la cual si x crece también lo hace y. Su **derivada** o pendiente siempre es **positiva.**

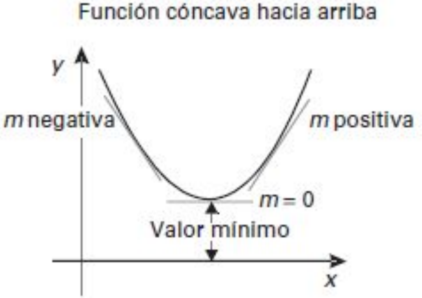
Función decreciente. Es una función en la cual si x crece, la y decrece. Su **derivada** o pendiente siempre es **negativa.**

Optimización

Concavidad



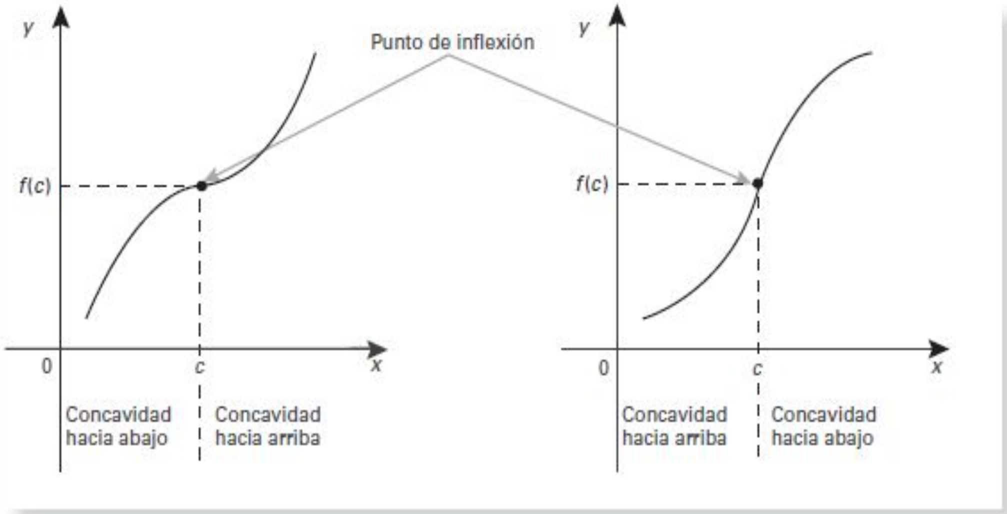
Una función tiene un máximo relativo cuando su pendiente es cero y su derivada pasa de ser positiva a ser negativa haciendo el recorrido de izquierda a derecha.



Una función tiene un mínimo relativo cuando su pendiente es cero y su derivada pasa de ser negativa a ser positiva haciendo el recorrido de izquierda a derecha.

OPTIMIZACIÓN

Punto de inflexión



Por último, un cambio de concavidad se encuentra en un punto llamado punto de inflexión.

Variables aleatorias

Una variable aleatoria es una función que asocia un valor numérico a cada posible resultado de un experimento aleatorio.

El conjunto de valores que puede tomar una variable, se conoce como dominio de la variable. A una variable que sólo puede tomar un valor, se le llama constante.

Variables

Cuantitativas (Numéricas)

Razón: Toma un valor entre los positivos [0..infinito)
Intervalar: Números entre los positivos y negativos (-,+)
Discreto/a: Número entero (1, 2, 3 o 4)
Continuo/a: Número racional (1/2, 5/8, 10/3 o 23/9)

Variables

Cualitativas (Atributos)

Nominal: Sin un orden (Chico, Chica, Mujer, Hombre)
Ordinal: Con un orden (Bajo, Medio, Alto)

Probabilidad clásica

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Es el concepto que mide la probabilidad de que algo suceda o un evento en un espacio muestral, y cada evento tiene la misma probabilidad de suceder.

Un espacio muestral, es el conjunto de posibles resultados de un experimento. En la literatura se puede encontrar como S, Ω, o U (Conjunto Universal)

Tipos de datos (Tendencia)

Promedio

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

Se calcula sumando todos los valores del conjunto de datos y dividiéndolo por la cantidad total de datos

Tipos de datos (Tendencia)

Mediana

- [1,2,3,4,5] = 3
- [1,2,3,4] = (2 + 3) / 2 = 2.5

Es el valor medio de un conjunto de datos

Tipos de datos (Tendencia)

Moda

- [1,2,2,2,3,4,5] = 2

Es el valor más repetido en un conjunto de datos

Tipos de datos (Variabilidad)

Varianza y desviación estándar

$$s^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

- Varianza

- Desviación estándar

- varianza - Es el valor que mide que tan dispersos están los datos alrededor de la media
- Desviación estándar - es la raíz cuadrada de la varianza y representa el rango que puede tomar el valor (Entre bordes = promedio + ds o promedio - ds)

Tipos de datos (Variabilidad)

Mínimo, Máximo y Rango

- [1,2,3,4,5]
  - Min = 1
  - Max = 5
  - Rango = 5 - 1 = 4

Mínimo - Es el valor más bajo del conjunto de datos
Máximo - Es el valor más alto del conjunto de datos
Rango - Es la resta entre el valor máximo y el valor mínimo

Teorema de Bayes

$$P(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{B}|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Probabilidad de que suceda A, sabiendo que ha sucedido B

Expresa la probabilidad condicional de un evento aleatorio A dado B en términos de la distribución de probabilidad condicional del evento B dado A y la distribución de probabilidad marginal de sólo A.

IBERO