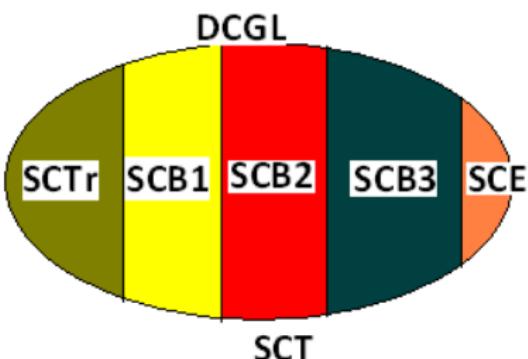
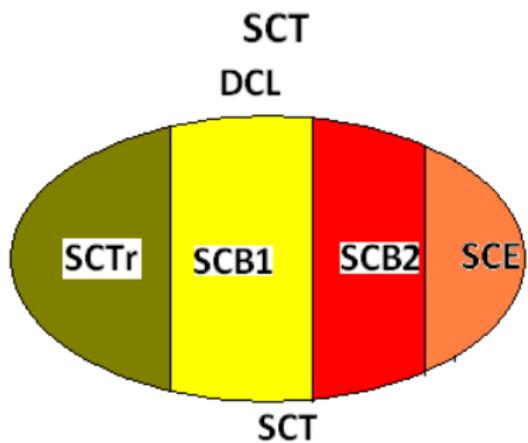
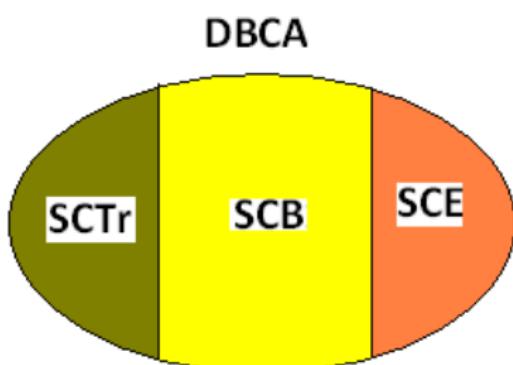
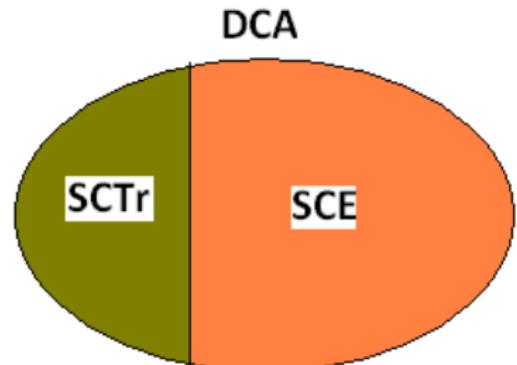


Diseño en Cuadrados Latino - DCL

Msc. Julio Hurtado M

2022



Diseño en cuadro grecolatino



- *Con el diseño en cuadro grecolatino (DCGL) se controlan tres factores de bloque además del factor de tratamientos.*

Diseño en cuadro grecolatino



- *Con el diseño en cuadro grecolatino (DCGL) se controlan tres factores de bloque además del factor de tratamientos.*
- *Se llama cuadro grecolatino porque los cuatro factores involucrados se prueban en la misma cantidad de niveles, de aquí que se pueda escribir como un cuadro (véase tabla 10); y se utilizan letras latinas para denotar a los tratamientos y letras griegas para nombrar los niveles o bloques del tercer factor del bloque.*

Diseño en cuadro grecolatino



- *Con el diseño en cuadro grecolatino (DCGL) se controlan tres factores de bloque además del factor de tratamientos.*
- *Se llama cuadro grecolatino porque los cuatro factores involucrados se prueban en la misma cantidad de niveles, de aquí que se pueda escribir como un cuadro (véase tabla 10); y se utilizan letras latinas para denotar a los tratamientos y letras griegas para nombrar los niveles o bloques del tercer factor del bloque.*
- *Al igual que en el cuadro latino, cada letra (latinas y griegas) debe aparecer sólo una vez en cada renglón y en cada columna.*

Diseño en cuadro grecolatino



- *Con el diseño en cuadro grecolatino (DCGL) se controlan tres factores de bloque además del factor de tratamientos.*
- *Se llama cuadro grecolatino porque los cuatro factores involucrados se prueban en la misma cantidad de niveles, de aquí que se pueda escribir como un cuadro (véase tabla 10); y se utilizan letras latinas para denotar a los tratamientos y letras griegas para nombrar los niveles o bloques del tercer factor del bloque.*
- *Al igual que en el cuadro latino, cada letra (latinas y griegas) debe aparecer sólo una vez en cada renglón y en cada columna.*
- *Además, cada par de letras debe aparecer sólo una vez en todo el arreglo. En la tabla 10 se presenta el aspecto de los datos del diseño en cuadro latino de dimensión $k = 4$.*

Diseño en cuadro grecolatino



Tabla 10 Diseño en cuadro grecolatino (DCGL)

		Columnas			
		1	2	3	4
Renglones	1	$A\alpha$	$B\beta$	$C\gamma$	$D\delta$
	2	$B\delta$	$A\gamma$	$D\beta$	$C\alpha$
	3	$C\beta$	$D\alpha$	$A\delta$	$B\gamma$
	4	$D\gamma$	$C\delta$	$B\alpha$	$A\beta$

Diseño en cuadro grecolatino



- El modelo estadístico que describe a las mediciones en un cuadro grecolatino está dado por

$$Y_{ijlm} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \delta_l + \varphi_m + \varepsilon_{ijlm}$$

donde Y_{ijlm} es la observación o respuesta que se encuentra en el tratamiento i (i -ésima letra latina), en el renglón j , en la columna l y en la m -ésima letra griega; τ_i . es el efecto del tratamiento i ; γ_j es el efecto del renglón j ; δ_l representa el efecto de la columna l ; φ_m representa el efecto de la m -ésima letra griega, que son los niveles del tercer factor de bloque; ε_{ijlm} representa el error aleatorio atribuible a la medición Y_{ijlm} .

Diseño en cuadro grecolatino



- La variabilidad total presente en los datos se puede partir de la manera usual como:

$$SCT = SCTr + SCB1 + SCB2 + SCB3 + SCE$$

donde las sumas $SCB1$, $SCB2$ y $SCB3$ miden la variabilidad debida a los factores de bloque renglón, columna y de letras griegas, respectivamente. Para k tratamientos, los grados de libertad correspondientes a cada suma son

$$k^2 - 1 = (k - 1) + (k - 1) + (k - 1) + (k - 1) + (k - 3)(k - 1)$$

Tabla 11 ANOVA DCGL

variabilidad	SC	GL	F
Tratamientos	$SCTr = \sum_{i=1}^k \frac{Y_{i...}^2}{k} - \frac{Y_{....}^2}{N}$	$k - 1$	$\frac{CMT_r}{CME}$
Renglones	$SCB1 = \sum_{j=1}^k \frac{Y_{j..}^2}{k} - \frac{Y_{....}^2}{N}$	$k - 1$	$\frac{CMB1}{CME}$
Columnas	$SCB2 = \sum_{l=1}^k \frac{Y_{..l.}^2}{k} - \frac{Y_{....}^2}{N}$	$k - 1$	$\frac{CMB2}{CME}$
Letras griegas	$SCB3 = \sum_{m=1}^k \frac{Y_{...m}^2}{k} - \frac{Y_{....}^2}{N}$	$k - 1$	$\frac{CMB3}{CME}$
Error	$SCE = SCT - SCTr - SCB1 - SCB2 - SCB3$	$(k - 3)(k - 1)$	
Total	$SCT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \sum_{m=1}^k Y_{ijlm}^2 - \frac{Y_{....}^2}{N}$	$k^2 - 1$	



- *Suponga que un experimentador estudia los efectos que tienen cinco formulaciones diferentes de la carga propulsora, utilizada en los sistemas de expulsión de la tripulación de un avión basado en la rapidez de combustión. Cada formulación se hace con un lote de materia prima que solo alcanza para probar cinco formulaciones. Además, las formulaciones son preparadas por varios operadores, y puede haber diferencias sustanciales en las habilidades y experiencias de los operadores. Por lo tanto, hay dos factores perturbadores que serán “calculados en promedio” en el diseño: los lotes de materia prima y los operadores. El diseño apropiado para este problema consiste en probar cada formulación exactamente una vez con cada uno de los cinco operadores. Al diseño resultante se llama diseño de cuadro latino (DCL), que usaremos para eliminar las dos fuentes perturbadoras.*



- *Factor de interés: Formulaciones de la carga propulsora.*



- *Factor de interés:* Formulaciones de la carga propulsora.



- *Niveles del Factor:* cinco formulaciones *A, B, C, D, y E*
(cinco niveles $k = 5$)



- *Factor de interés:* Formulaciones de la carga propulsora.
- *Niveles del Factor:* cinco formulaciones A, B, C, D , y E (cinco niveles $k = 5$)
- *Variable de interés* $Y =$ Rápidez de combustión





- *Factor de interés:* Formulaciones de la carga propulsora.
- *Niveles del Factor:* cinco formulaciones $A, B, C, D,$ y E (cinco niveles $k = 5$)
- *Variable de interés* $Y =$ Rápidez de combustión
- *Replicas por nivel* $n = 1.$



- Datos de la rápida de combustión $Y()$

		columnas: l (operadores)				
		1	2	3	4	5
renglones: j (materia prima)	1	A=24	B=20	C=19	D=24	E=24
	2	B=17	C=24	D=30	E=27	A=36
	3	C=18	D=38	E=26	A=27	B=21
	4	D=26	E=31	A=26	B=23	C=22
	5	E=22	A=30	B=20	C=29	D=31



- **Modelo estadístico**

$$Y_{ijl} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \delta_l + \varepsilon_{ijl}$$

donde $Y_{ijl} :=$ rapidez de combustión de la i -ésima formulación, realizada por el j -ésimo operador (factor columna) con el l -ésimo lote de materia prima (factor renglón); $\tau_i :=$ es la medida del efecto de la i -ésima formulación a la rapidez de combustión, $\varepsilon_{ijl} :=$ es el error aleatorio y $\mu :=$ es la media global real de todos las formulaciones.



- Modelo estadístico

$$Y_{ijl} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \delta_l + \varepsilon_{ijl}$$

donde Y_{ijl} := rápidez de combustión de la i -ésima formulación, realizada por el j -ésimo operador (factor columna) con el l -ésimo lote de materia prima (factor renglón); τ_i := es la medida del efecto de la i -ésima formulación a la rápidez de combustión, ε_{ijl} := es el error aleatorio y μ := es la media global real de todos las formulaciones.

- Hipótesis del problema

$$\begin{aligned}H_0 &: \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D = \mu_E = \mu \\H_1 &: \mu_i \neq \mu_j \text{ para algunos } i, j\end{aligned}$$

Aplicación DCGL

Tabla 6. Diseño en cuadro latino (DCL)

renglones: j	columnas: l (operadores)					total	
	1	2	3	4	5	$Y_{\cdot j \cdot}$	$Y_{\cdot j \cdot}^2$
1	A=24	B=20	C=19	D=24	E=24	111	12321
2	B=17	C=24	D=30	E=27	A=36	134	17956
3	C=18	D=38	E=26	A=27	B=21	130	16900
4	D=26	E=31	A=26	B=23	C=22	128	16384
5	E=22	A=30	B=20	C=29	D=31	132	17424
$Y_{\cdot \cdot l}$	107	143	121	130	134		
$Y_{\cdot \cdot l}^2$	11449	20449	14641	16900	17956		
total						635	80985



- Totales de tratamientos

Letra latina	total del tratamiento
A	$Y_{1..} = 143$
B	$Y_{2..} = 101$
C	$Y_{3..} = 112$
D	$Y_{4..} = 149$
E	$Y_{5..} = 130$
	$Y_{i..}^2 = 82295$

Aplicación DCGL

Fuentes de variabilidad: Estadísticos de la ANOVA

$$SCT = \sum_{i,j,l=1}^5 Y_{ijl}^2 - \frac{Y_{...}^2}{N} = 16805 - \frac{635^2}{25} = 676$$

$$SC_{formulaciones} = SCTr = \sum_{i=1}^5 \frac{Y_{i..}^2}{5} - \frac{Y_{...}^2}{N} = \frac{82295}{5} - \frac{635^2}{25} = 330$$

$$SC_{lotes} = SCB1 = \sum_{j=1}^5 \frac{Y_{.j.}^2}{5} - \frac{Y_{...}^2}{N} = \frac{80985}{5} - \frac{635^2}{25} = 68$$

$$SC_{operadores} = SCB2 = \sum_{l=1}^5 \frac{Y_{..l}^2}{5} - \frac{Y_{...}^2}{N} = \frac{81395}{5} - \frac{635^2}{25} = 150$$

$$SCE = SCT - SCTr - SCB1 - SCB2 = 676 - 68 - 150 - 330 = 128$$



- Anova para rápido de combustión

Tabla ANOVA para rápido de combustión en un DCL

Fuente	SC	GI	CM	Cociente-F	valor p
Formulaciones	330	4	82.50	7.73	0.0025
Lotes	68	4	17.00		
Operadores	150	4	37.5		
Error	128	12	10.67		
Total	676	24			



- Como $F_{0.05;4,12} = 3.26 < 7.73$ Se concluye que hay una diferencia significativa en la rapidez de combustión media generada por las diferentes formulaciones de la carga propulsora.



- Como $F_{0.05;4,12} = 3.26 < 7.73$ Se concluye que hay una diferencia significativa en la rapidez de combustión media generada por las diferentes formulaciones de la carga propulsora.
- También hay indicios de que hay diferencias entre los operadores, por lo que la formación en bloques de este factor fue una buena precaución.



- Como $F_{0.05;4,12} = 3.26 < 7.73$ Se concluye que hay una diferencia significativa en la rapidez de combustión media generada por las diferentes formulaciones de la carga propulsora.
- También hay indicios de que hay diferencias entre los operadores, por lo que la formación en bloques de este factor fue una buena precaución.
- No hay evidencia sólida de una diferencia entre los lotes de materia prima, por lo que al parecer en este experimento particular hubo una preocupación innecesaria en esta fuente de variabilidad.



- Como $F_{0.05;4,12} = 3.26 < 7.73$ Se concluye que hay una diferencia significativa en la rapidez de combustión media generada por las diferentes formulaciones de la carga propulsora.
- También hay indicios de que hay diferencias entre los operadores, por lo que la formación en bloques de este factor fue una buena precaución.
- No hay evidencia sólida de una diferencia entre los lotes de materia prima, por lo que al parecer en este experimento particular hubo una preocupación innecesaria en esta fuente de variabilidad.
- Sin embargo, la formación de bloques de los lotes de materia prima es por lo general una buena idea.

Aplicación DCGL

Haciendo uso de Statgraphics:

The screenshot shows the Statgraphics software interface with a menu bar, toolbar, and a main window displaying an Analysis of Variance (ANOVA) table.

Analysis of Variance for Rapidez de combustión - Type III Sums of Squares

Source	Sum of Squares	DF	Mean Square	F-Ratio	P-Value
MAIN EFFECTS					
A:Carga propulsora	330,0	4	82,5	7,73	0,0025
B:Lotes	68,0	4	17,0	1,59	0,2391
C:Operadores	150,0	4	37,5	3,52	0,0404
RESIDUAL	128,0	12	10,6667		
TOTAL (CORRECTED)	676,0	24			

All F-ratios are based on the residual mean square error.

Aplicación DCGL

Contraste LSD

Multiple Range Tests for Rapidez de combustión by Carga propulsora

Method: 95,0 percent LSD

Level	Count	LS Mean	LS Sigma	Homogeneous Groups
-------	-------	---------	----------	--------------------

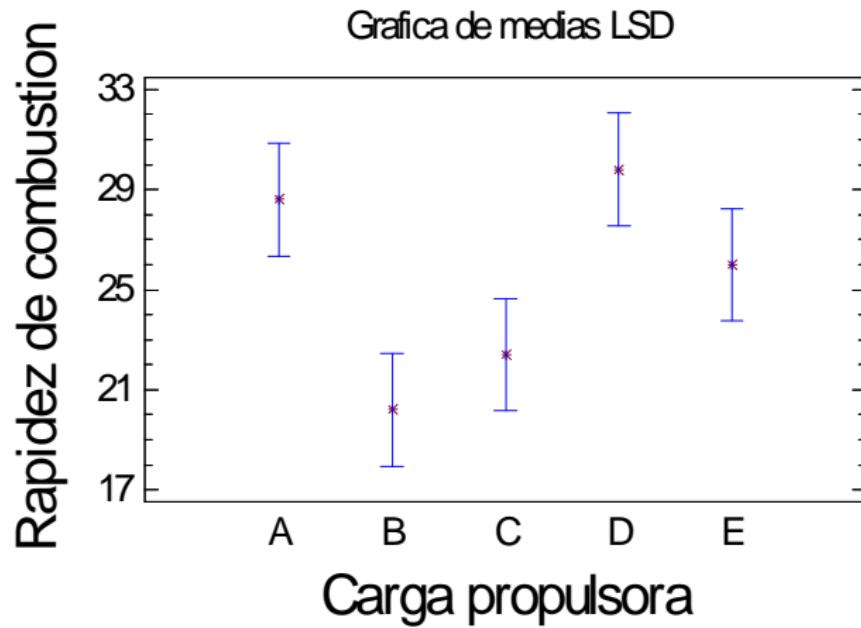
B	5	20,2	1,46059	X
C	5	22,4	1,46059	XX
E	5	26,0	1,46059	XX
A	5	28,6	1,46059	X
D	5	29,8	1,46059	X

Contrast	Difference	+/- Limits
----------	------------	------------

A - B	*8,4	4,50055
A - C	*6,2	4,50055
A - D	-1,2	4,50055
A - E	2,6	4,50055
B - C	-2,2	4,50055
B - D	*-9,6	4,50055
B - E	*-5,8	4,50055
C - D	*-7,4	4,50055
C - E	-3,6	4,50055
D - E	3,8	4,50055

* denotes a statistically significant difference.

Grafica de medias



Aplicación DCGL

- Suponga que en el experimento de la carga propulsora un factor adicional: los montajes de prueba, podría ser importante. Sea que haya cinco montajes de prueba denotados con las letras griegas $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, y ε

Tabla 6. Diseño en cuadro grecolatino (DCGL)

renglones: j	columnas: l (operadores)					total	
	1	2	3	4	5	$Y_{.j..}$	$Y_{.j..}^2$
1	$A\alpha=24$	$B\gamma=20$	$C\varepsilon=19$	$D\beta=24$	$E\delta=24$	111	12321
2	$B\beta=17$	$C\delta=24$	$D\alpha=30$	$E\gamma=27$	$A\varepsilon=36$	134	17956
3	$C\gamma=18$	$D\varepsilon=38$	$E\beta=26$	$A\delta=27$	$B\alpha=21$	130	16900
4	$D\delta=26$	$E\alpha=31$	$A\gamma=26$	$B\varepsilon=23$	$C\beta=22$	128	16384
5	$E\varepsilon=22$	$A\beta=30$	$B\delta=20$	$C\alpha=29$	$D\gamma=31$	132	17424
$Y_{..l..}$	107	143	121	130	134		
$Y_{..l..}^2$	11449	20449	14641	16900	17956		
total						635	80985

Aplicación DCGL

Letra latina	total del tratamiento	Letra griega	total del ensamble
A	$Y_1 \dots = 143$	α	$Y_{\dots 1} = 135$
B	$Y_2 \dots = 101$	β	$Y_{\dots 2} = 119$
C	$Y_3 \dots = 112$	γ	$Y_{\dots 3} = 122$
D	$Y_4 \dots = 149$	δ	$Y_{\dots 4} = 121$
E	$Y_5 \dots = 130$	ε	$Y_{\dots 5} = 138$
	$\sum_{i=1}^5 Y_i^2 = 82295$		$\sum_{k=1}^5 Y_k^2 = 80955$

- Modelo estadístico

$$Y_{ijlk} = \mu + \tau_i + \theta_j + \omega_l + \psi_k + \varepsilon_{ijlk}$$

donde Y_{ijlk} := rapidez de combustión de la i -ésima formulación, realizada por el j -ésimo operador (factor columna) con el l -ésimo lote de materia prima (factor renglón) con el k -ésimo montaje; τ_i := es la medida del efecto de la i -ésima formulación a la rapidez de combustión, ε_{ijl} := es el error aleatorio y μ := es la media global real de todos las formulaciones.

- Modelo estadístico

$$Y_{ijlk} = \mu + \tau_i + \theta_j + \omega_l + \psi_k + \varepsilon_{ijlk}$$

donde Y_{ijlk} := rápidez de combustión de la i -ésima formulación, realizada por el j -ésimo operador (factor columna) con el l -ésimo lote de materia prima (factor renglón) con el k -ésimo montaje; τ_i := es la medida del efecto de la i -ésima formulación a la rápidez de combustión, ε_{ijl} := es el error aleatorio y μ := es la media global real de todos las formulaciones.

- Hipótesis del problema

$$\begin{aligned}H_0 &: \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D = \mu_E = \mu \\H_1 &: \mu_i \neq \mu_j \text{ para algunos } i, j\end{aligned}$$

Aplicación DCGL

Estadísticos para el Anova

$$SCT = \sum_{i,j,l,k=1}^5 Y_{ijkl}^2 - \frac{Y_{...}^2}{N} = 16805 - \frac{635^2}{25} = 676$$

$$SC_{formulaciones} = SCTr = \sum_{i=1}^5 \frac{Y_{i...}^2}{5} - \frac{Y_{...}^2}{N} = \frac{82295}{5} - \frac{635^2}{25} = 330$$

$$SC_{lotes} = SCB1 = \sum_{j=1}^5 \frac{Y_{.j..}^2}{5} - \frac{Y_{...}^2}{N} = \frac{80985}{5} - \frac{635^2}{25} = 68$$

$$SC_{operadores} = SCB2 = \sum_{l=1}^5 \frac{Y_{...l.}^2}{5} - \frac{Y_{...}^2}{N} = \frac{81395}{5} - \frac{635^2}{25} = 150$$

$$SC_{ensambles} = SCB3 = \sum_{k=1}^5 \frac{Y_{...k.}^2}{5} - \frac{Y_{...}^2}{N} = \frac{80955}{5} - \frac{635^2}{25} = 62$$

$$SCE = SCT - SCTr - SCB1 - SCB2 - SCB3 = 66$$

Aplicación DCGL

Tabla ANOVA para rapidez de combustión

Fuente	SC	GI	CM	F	valor p
Formulaciones	330	4	82.50	10	0,0033
Materia prima	68	4	17.00	2,06	0,1783
Operadores	150	4	37.5	4,55	0,0329
Montajes	62	4	15.50	1,88	0,2076
Error	66	8	8.25		
Total	676	24			

Aplicación DCGL

Tabla ANOVA para rapidez de combustión					
Fuente	SC	GI	CM	F	valor p
Formulaciones	330	4	82.50	10	0,0033
Materia prima	68	4	17.00	2,06	0,1783
Operadores	150	4	37.5	4,55	0,0329
Montajes	62	4	15.50	1,88	0,2076
Error	66	8	8.25		
Total	676	24			

- Al comparar los dos diseños DCL y DCGL, se observa que al sacar la variabilidad debida a los montajes de prueba, el error experimental disminuye.

Aplicación DCGL

Tabla ANOVA para rapidez de combustión					
Fuente	SC	GI	CM	F	valor p
Formulaciones	330	4	82.50	10	0,0033
Materia prima	68	4	17.00	2,06	0,1783
Operadores	150	4	37.5	4,55	0,0329
Montajes	62	4	15.50	1,88	0,2076
Error	66	8	8.25		
Total	676	24			

- Al comparar los dos diseños DCL y DCGL, se observa que al sacar la variabilidad debida a los montajes de prueba, el error experimental disminuye.
- Sin embargo, al disminuir el error experimental, se han reducido también los grados de libertad de 12 a 8. Por lo tanto, la estimación de error tiene menos grado de libertad y la prueba puede ser menos sensible.



MONTGOMERY C. DOUGLAS. Diseño y Análisis de Experimentos.
Segunda Edición. LIMUSA WILEY



GUTIERREZ H y DE LA VARA R. Análisis y Diseño de Experimentos.
Segunda Edición. Mc Graw Hill.



KUEHL ROBERT. Diseño de Experimentos. Segunda Edición.
Thomson.



VICENTE M, GIRON P, NIETO C, PÉREZ T. Diseño de
Experimentos. Pearson Prentice Hall.



DEVORE JAY. Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias.
Sexta Edición.



WALPOLE MYERS. Probabilidad y Estadística. Cuarta Edición. Mc
Graw Hill.