TRABAJO PRACTICO N° 1.

1 Sea $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un cuerpo y sea 0 el elemento neutro de $+$ Demostrar que:

(a) $a.0=0 \quad \forall a\in\mathbb{K}$

(b) Si $a.b=0$ entonces $a=0$ ó $b=0$

Sol: (a) Tenemos que para todo $b\in\mathbb{K}$, $b+0=0+b=b$. Por lo tanto, usando la ley distributiva sigue que

$$a(b+0)=a(0+b)=a.b$$
$$ab+a0=a.0+ab=ab$$

con lo cual $a.b=0$.

(b) Sean $a,b\in\mathbb{K}$ con $a.b=0$ y supongamos que $a\neq 0$. Como $\mathbb{K}$ es un cuerpo, existe $a^{-1}\in\mathbb{K}$ tal que $aa^{-1}=a^{-1}a=1$. Luego:

$$a^{-1}a.b=a^{-1}.b=0 \Rightarrow b=0.$$

2 Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+ib$. Hallar el módulo, argumento y conjugado de cada uno de ellos

(b) $i^{131}-i^{9}+1$

Tenemos que:

$$\begin{cases} i^0=1 & i^2=-1 \\ i^1=i & i^3=-i \end{cases}$$

De manera general, resulta que

$$i^k=\begin{cases} 1 & k\equiv 0 \mod 4 \\ i & k\equiv 1 \mod 4 \\ -1 & k\equiv 2 \mod 4 \\ -i & k\equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

Como $131\equiv 3 \mod 4$ y $9\equiv 1 \mod 4$, se sigue que

$$i^{131}-i^{9}+1=i^3-i+1=1-2i$$

Notemos que $\overline{1-2i}=1+2i$ y $|1-2i|^2=5$

3| Encontrar números reales x, y tales que $3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i$

Solución: Tenemos que

$$3x + 2yi - xi + 5y = (3x + 5y) + (-x + 2y)i = 7 + 5i$$

De la igualdad de los números complejos, obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$$

que admite solución $x = -1$, $y = -2$.

5| Sean $a, b \in \mathbb{C}$. Decidir si existe $z \in \mathbb{C}$ tal que:

(a) $a \operatorname{Im}(z) = b$ ¿Es único?

Sol: $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R} \Longrightarrow \operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$. Por lo tanto:

$$a \operatorname{Im} z = b \Longleftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ \operatorname{Im} z = \frac{b}{a}$$

Luego, $z = x + \frac{b}{a} i$ mostrando que z no es único.

(c) z es imaginario puro y $z^2 = 4$

Sea $z = ci$ un imaginario puro, entonces tenemos que $z^2 = -c^2$ que es un número real negativo $\forall c \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $-c^2 \neq 4$ $\forall c \in \mathbb{R}$ con lo cual tal z no existe.

6| Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$$

Vamos a usar reducción por filas que se verá posteriormente.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 10 & -10 \end{bmatrix}$$

De donde tenemos que $10y = -10 \Leftrightarrow y = -1$ y $x - 2(-1) = 4 \Leftrightarrow x = 2$

Con lo cual la solución es $x = 2$, $y = -1$.

TRABAJO PRACTICO Nº 2

2 Encontrar los coeficientes reales del polinomio de grado 2

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

de modo tal que $p(1) = 2$, $p(2) = 7$ y $p(3) = 14$

Solución: Sustituyendo x por 1, 2, 3 consecuentemente, obtenemos que:

$$(*)\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 14 \end{cases}$$

Vamos a escalonar la matriz asociada al sistema $(*)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & 1 & 14 \end{bmatrix}}_{\mathrm{I}} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -8 & -4 \end{bmatrix}}_{\mathrm{II}} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathrm{III}}$$

como la matriz III ya se encuentra escalonada, tenemos que.

$$c = 2/-2 = -1$$

$$-2b - 3c = -1 \Rightarrow b = (-1-3)/-2 = 2$$

$$a + b + c = 2 \Rightarrow a = 2 + 1 - 2 = 1$$

con lo cual tenemos que la solución es $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$ ▽

5 Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, describir explícitamente todas las soluciones e indicar cual es la MERF asociada a sist.

$$(a)\begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}$$

Tenemos que el sistema tiene matriz asociada I

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathrm{I}} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathrm{II}} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathrm{III}}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$3y - 9z = 0 \Rightarrow y = 3z$$

$$x - 3y + 5z = 0 \Rightarrow x - 9z + 5z = 0$$

$$\Rightarrow x - 4z = 0 \Rightarrow x = 4z$$

Por lo tanto, $C_S = \{(x,y,z) : x = 4z,\ y = 3z\} = \{(4z, 3z, z) : z \in \mathbb{R}\}$

(b) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 0 \\ 6x + y + 3z = 0 \end{cases}$

El sistema tiene matriz asociada I

$$\overset{\text{I}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}} \sim \overset{\text{II}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \end{bmatrix}} \sim \overset{\text{III}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$-5y + 9z = 0 \Rightarrow z = \frac{5}{9}y$$

$$x + y - z = 0 \Rightarrow x + y - \frac{5}{9}y = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{9}y$$

de donde $C_S = \{(x,y,z) : x = -\frac{4}{9}y,\ z = \frac{5}{9}y\} = \{(-\frac{4}{9}y, y, \frac{5}{9}y) : y \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{7}$ Para cada uno de los siguientes sistemas, describir implícitamente el conjunto de los vectores (b_1, b_2) ó (b_1, b_2, b_3) para los cuales cada sistema tiene solución.

(a) $\begin{cases} x + y = b_1 \\ 2x - 2y = b_2 \end{cases}$

Escalonando la matriz asociada, resulta que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 2 & -2 & b_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -4 & b_2 - 2b_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{2b_1 - b_2}{4} \\ x = \dfrac{2b_1 + b_2}{4} \end{array} \right.$$

Por lo tanto, el sistema (a) tiene solución para toda $(b_1, b_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(b) $\begin{cases} x+y=b_1 \\ 2x+2y=b_2 \end{cases}$

De manera similar al ítem (b) tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 2 & 2 & b_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2-2b_1 \end{bmatrix}$$

Para que el sistema sea consistente, pedimos que $b_2-2b_1=0$ y por lo tanto $b_2=2b_1$. Luego $C_B=\{(b_1, 2b_1): b_1 \in \mathbb{R}\}$

(c) $\begin{bmatrix} x-y+2z+w=b_1 \\ 2x+2y+z-w=b_2 \\ 3x+y+3z \quad =b_3 \end{bmatrix}$

Escalonando la matriz asociada al sistema resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & b_1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & b_2 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 4 & -3 & -3 & b_2-2b_1 \\ 0 & 4 & -3 & -3 & b_3-3b_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 4 & -3 & -3 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3-b_2-b_1 \end{bmatrix}$$

De este modo, para que el sistema sea consistente, pedimos que $b_3-b_2-b_1=0$

$\boxed{8}$ ¿Para que valores de a el siguiente sistema tiene única o infinitas sol?

$$\begin{bmatrix} ax-y+z=2 \\ x-y+z=2 \\ 2x-2y+(2-a)z=4a \end{bmatrix}$$

Solución: Escalonemos la matriz asociada al sistema:

$$\begin{bmatrix} a & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2-a & 4a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ a & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2-a & 4a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 2-2a \\ 0 & 0 & -a & 4a-4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 2-2a \\ 0 & 0 & -a & 4a-4 \end{bmatrix}$$

Ahora, si $a=0$, en la última fila tendremos $(0,0,0,-4)$ y por lo tanto el sistema será inconsistente.
Por otro lado, si $a\neq 0$, el sistema tiene solución:
[i] Si $a=1$ entonces $z=0$, $x=2-y$, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones
[ii] Si $a\neq 1$, entonces tenemos que:

$$z=\frac{4-4a}{a}$$

$$(a-1)y+(1-a)z=2-2a \Longrightarrow y=\frac{2-2a}{a-1}+\frac{1-a}{1-a}\cdot\frac{4-4a}{a}$$

$$x-y+z=2 \Longrightarrow x=2-\frac{4-4a}{a}+\frac{2-2a}{a-1}+\frac{4-4a}{a}$$

con lo cual el sistema tiene única solución.

[10] Sea $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 0\end{bmatrix}$. Reduciendo por filas,

[a] encontrar todas las soluciones sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del sistema $AX=0$

[b] encontrar todas las soluciones del sistema $AX=\begin{bmatrix}1\\ i\\ 0\end{bmatrix}$

Solución: Para [a], escalonando la matriz A, resulta que:

$$\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 5 & -1\\ 0 & -8 & -2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 5 & -1\\ 0 & 0 & -18\end{bmatrix}$$

De la última fila tenemos $-18z=0$ por lo que $z=0$. De la segunda fila resulta que $5y-z=0$ y por lo tanto $y=0$
Finalmente, de la primer fila, $3x-y+2z=0$ y por lo tanto $x=0$. Luego $C_0=\{(0,0,0)\}$ y $AX=0$ tiene solución trivial.

Veamos $\boxed{b}$, escalonando la matriz ampliada resulta que.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & i \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 3i-2 \\ 0 & -8 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 3i-2 \\ 0 & 0 & -18 & -21-24i \end{bmatrix}$$

- De la última fila tenemos que $-18z = -21-24i \Rightarrow z = \frac{21+24i}{18} \Rightarrow$
  $z = \frac{7}{6} + \frac{4}{3}i \in \mathbb{C}$
- De la segunda fila tenemos que $5y - z = 3i - 2 \Rightarrow 5y = 3i - 2 + z \Rightarrow$
  $5y = -\frac{5}{6} + \frac{13}{3}i \Rightarrow y = -\frac{1}{6} + \frac{13}{15}i \in \mathbb{C}$
- De la primera fila tenemos que $3x - y + 2z = 1 \Rightarrow 3x = 1 - 2z + y \Rightarrow$
  $3x = -\frac{3}{2} - \frac{9}{5}i \Rightarrow x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{5}i \in \mathbb{C}$

Por lo tanto, las soluciones en $\mathbb{C}$ resultan:

$$x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{5}i, \quad y = -\frac{1}{6} + \frac{13}{15}i, \quad z = \frac{7}{6} + \frac{4}{3}i$$

mientras que las soluciones en $\mathbb{R}$ son $\emptyset$ (Es decir, no tiene solución en $\mathbb{R}$).

$\boxed{13}$ En cada caso decidir si los sistemas son equivalentes y si lo son, expresar cada ecuación del primer sistema como combinación lineal de las ecuaciones del segundo sistema.

(a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $\qquad$ (b) $\begin{cases} -x - y + 4z = 0 \\ x + 3y + 8z = 0 \\ \frac{1}{2}x + y + \frac{5}{2}z = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$

Idea de la solución: Para $\boxed{a}$, notemos que los sistemas tienen matrices asociadas A y B donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $A \sim I$, donde I es la identidad. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir, también $B \sim I$. Dado que $\sim$ es una relación de equivalencia se sigue que $A \sim B$.

Para $\boxed{c}$, cada sistema tiene matriz asociada

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1/2 & 1 & 5/2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nuevamente, por un lado:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

con lo cual $A \sim I$. Por otro lado, $B \not\sim I$, que permite concluir que $A \not\sim B$

TRABAJO PRÁCTICO Nº 3

$\boxed{1}$ Sean las matrices

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 5\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(a) Calcular los productos AB, BA, ABC, ACB

Solución: Aplicando la definición de producto de matrices resulta

$$A.B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{5} & 1 & 4\\ 6 & 4 & 9\\ 4 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

Por ejemplo, los elementos de la primera fila de AB se obtienen como:

$$5 = 1.1 + (-2)(-2) + 0.1$$
$$1 = 1.1 + (-2).0 + 0.3$$
$$4 = 1.2 + (-2)(-1) + 0.5$$

y los demás valores de $A.B$ se obtienen de manera similar. Análogamente:

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{4} & -8 & -1\\ -3 & 6 & 1\\ 9 & -18 & -2\end{bmatrix}$$

Por ejemplo, los elementos de la primer fila de $B.A$ se obtienen como:

$$4 = 1.1 + 1.1 + 2.1$$
$$-8 = 1.(-2) + 1.(-2) + 2.(-2)$$
$$-1 = 1.0 + 1.1 + 2.(-1)$$

Notemos que $AB \neq BA$ y por lo tanto el producto de matrices no necesariamente es conmutativo. Ahora:

$$AC=\begin{bmatrix}-7 & -7 & -14\\ -3 & -4 & -13\\ -11 & -5 & -15\end{bmatrix}\qquad ABC=\begin{bmatrix}47 & 1 & 33\\ 90 & 4 & 69\\ 4 & -8 & -3\end{bmatrix}\qquad ACB=\begin{bmatrix}-7 & -49 & -77\\ 2 & -42 & -62\\ -16 & -56 & -92\end{bmatrix}$$

[3] Dar ejemplos de matrices no nulas A y B de orden 2×2 tales que

(a) $A^2 = 0$ (Dar dos ejemplos) (c) $A^2 = -Id$

(b) $AB \neq BA$ (d) $A^2 = A \neq Id$.

Solución: Veamos (a), tomando la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces resulta que:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 + 1.0 & 0.1 + 0.1 \\ 0.0 + 0.0 & 0.1 + 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto $A^2 = 0$. La otra matriz queda como ejercicio.

Veamos (b). Para ello, tomemos A y B como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$A.B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde mostramos que $A.B \neq B.A$.

Para (c), tomemos A como la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces, tenemos que:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De este modo, $A^2 = -Id$. Finalmente, para (d) tomemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y es fácil probar que $A^2 = A \neq Id$.

4| Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $AB = BA$ para todo $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Probar que A es un multiplo de la identidad Id.

Solución: Tomemos $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Dado que $A.B = B.A$ para toda matriz $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, en particular se tiene que:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff c = b = 0$$

Luego $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ donde $a, d \in \mathbb{R}$. De manera similar, para $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ resulta que:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff a = d.$$

Así, $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = a\,\mathrm{Id}$, $a \in \mathbb{R}$ tal como se quería probar.

5| Probar que si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ entonces $A.(B+C) = A.B + AC$

Solución: Por un lado, denotemos $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $C = (c_{jk})$ respectivamente donde $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq p$. Tenemos que:

(i) $B+C$ es una matriz de orden $n\times p$ cuya entrada j,k es igual a

$$(B+C)_{jk} = b_{jk} + c_{jk}$$

(ii) $A.B$ es una matriz de orden $m\times p$ cuya entrada i,k con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq p$ es

$$(A.B)_{ik} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sk}$$

(iii) Del mismo modo, $A.C$ es una matriz de orden $m\times n$ donde la entrada i,k es

$$(A.C)_{i,k} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} c_{sk}$$

De este modo, tenemos lo siguiente:

(iv) $A\cdot(B+C)$ es una matriz de orden $m\times p$ cuya entrada i,k es igual a:

$$[A\cdot(B+C)]_{i,k} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot(B+C)_{s,k}$$
$$= \sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot(b_{s,k}+c_{s,k})$$
$$= \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk} + a_{is}c_{sk}$$
$$= \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk} + \sum_{s=1}^{n} a_{is}c_{sk}$$
$$= (A\cdot B)_{ik} + (A\cdot C)_{ik}$$

tal como se quería probar. ▽

[7] Si A es una matriz cuadrada de orden $n\times n$, se define la traza de A como

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(a) Calcular la traza de las matrices A, B, C del ejercicio [1] y las obtenidas en el ítem [1a]

Solución: Aplicando la definición de traza, resulta que:

- $Tr(A) = 1 + (-2) + (-1) = -2$
- $Tr(B) = 1 + 0 + 5 = 6$
- $Tr(C) = 1 + 0 + 1 = 2$
- $Tr(AB) = 5 + 4 + (-1) = 8$
- $Tr(BA) = 4 + 6 + (-2) = 8$
- $Tr(AC) = -7 + (-4) + (-15) = -26.$

(b) Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces $Tr(AB) = Tr(BA)$

Solución: Nuevamente, recurriendo a la definición de producto de matrices en conjunto con la definición de la traza, resulta que

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} (A\cdot B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} (a_{is}b_{si})$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} (b_{si}a_{is}) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (b_{si}a_{is})$$
$$= \sum_{s=1}^{n} (BA)_{ss} = Tr(BA)$$

con lo cual $Tr(AB) = Tr(BA)$ ▽

$\boxed{8}$ Para cada una de las siguientes matrices, usar operaciones elementales por filas para decidir si son invertibles y hallar la inversa cuando sea posible.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a aplicar el método de Gauss sobre la matriz ampliada $[A|I]$, donde I es la identidad del mismo orden que A. Si A es invertible entonces es reducible por filas a la identidad

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[3F_3 - F_1]{3F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{5F_3 + 8F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad -18}_{*} & & & -21 & 24 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 8 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{3F_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & -3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 8 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 + F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & -3 & 0 & -4 & 8 & 5 \\ 0 & 5 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 8 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{6F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & -3 & 0 & -4 & 8 & 5 \\ 0 & 30 & -6 & -12 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 8 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & -3 & 0 & -4 & 8 & 5 \\ 0 & 30 & 0 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 8 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{10}F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 3 & 0 & -4 & 8 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 8 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 - F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & -9/2 & 9 & 9/2 \\ 0 & 3 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 8 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\frac{1}{3}F_2 \\ -\frac{1}{6}F_3}]{\frac{1}{9}F_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/3 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 7/6 & -4/3 & -5/6 \end{array}\right] = [I \mid A^{-1}]$$

$$\underbrace{}_{**}$$

Tenemos así que la inversa de A está dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/6 & 1/3 & -1/6 \\ 7/6 & -4/3 & -5/6 \end{bmatrix}$$

Para calcular la inversa, cuando sea posible, hacemos lo siguiente:

(i) Tomamos la matriz ampliada $[A|I]$ donde I es la identidad del mismo orden que A

(ii) Mediante operaciones elementales, llevamos a $[A|I]$ para una matriz de la forma $[\tilde{A}|N]$, donde $\tilde{A}$ es triangular superior, tal como podemos ver en *

(iii) Miramos la diagonal de $\tilde{A}$. Si algún elemento en la diagonal es cero entonces terminamos el proceso y A no es invertible.

(iv) Si los elementos de la diagonal de $\tilde{A}$ son todos no nulos, continuamos aplicando operaciones elementales hasta obtener una matriz de la forma $[I|\hat{A}]$

De este modo, resulta que $A^{-1} = \hat{A}$ tal como en **

Veamos ahora la matriz B

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{2F_2-4F_1 \\ 2F_3-6F_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -22 & 8 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -22 & 8 & -6 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}\cdot F_2 \\ \frac{1}{2} F_3}]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[11F_3-11F_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 11 & -11 \end{array}\right]$$

Por lo tanto B no es invertible.

9) Sea A la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hallar matrices elementales $E_1, \ldots, E_k$ tales que $E_k . E_{k-1} . \ldots . E_1 . A = I$.

Solución: Vamos a realizar ciertos pasos y la idea es que el método de Gauss para llevar $[A|I]$ a $[I|A^{-1}]$ como en el ejercicio anterior

(1) Sumar a la fila F_2 la fila $3F_1$ es lo mismo que multiplicar A por:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

En efecto:

$$E_1 . A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Resta volver 0 el valor 2 que esta recuadrado en la matriz $E_1 . A$.

(2) Multiplicar por $\frac{1}{4}$ a la segunda fila de $E_1 . A$ es lo mismo que multiplicar por la matriz elemental.

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

En efecto:

$$E_2 . E_1 . A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) Finalmente, restar $2F_2$ a F_1 en $E_2 . E_1 . A$ es lo mismo que multiplicar por la matriz elemental:

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En efecto:

$$E_3 . E_2 . E_1 . A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De donde tenemos calculadas las E_k tales que el producto por A es I.

11 Sean v, w dos soluciones del sistema homogeneo $AX=0$. Probar que $v+tw$ también es solución para todo $t\in\mathbb{R}$.

Solución: En efecto, como v y w son soluciones, se tiene que

$$Av=0 \quad , \quad Aw=0$$

Por lo tanto, para todo $t\in\mathbb{R}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} A(v+tw) &= A\cdot v + A\cdot(tw) \\ &= A\cdot v + t(Aw) \\ &= 0+0=0 \end{aligned}$$

mostrando que $v+tw$ también es solución de $AX=0$

12 Sea v una solución del sistema $AX=Y$ y w una solución del sistema homogeneo $AX=0$. Probar que $v+tw$ también es solución de $AX=Y$ para todo $t\in\mathbb{R}$

Solución: De manera similar al ejercicio anterior, resulta que:

$$Av=Y \; ; \; Aw=0$$

Luego, para todo $t\in\mathbb{R}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} A(v+tw) &= Av+t(Aw) \\ &= Y+0 \\ &= Y \end{aligned}$$

mostrando que $v+tw$ es solución de $AX=Y$.

14 Sean $A\in\mathbb{R}^{r\times n}$ y $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$ respectivamente. Probar que

(a) Si v es solución de $BX=Z$ y Z es solución de $AX=Y$, entonces v es solución de $(AB)X=Y$.

Solución: En efecto, sabemos por hipotesis que

$$Bv=Z \; ; \; AZ=Y$$

Por lo tanto:

$$(A\cdot B)v = A\cdot(Bv) = AZ = Y$$

mostrando que v es solución de $(A\cdot B).X=Y$.

TRABAJO PRÁCTICO N° 4

1 Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}4 & 7\\ 5 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 4.3 - 5.7 = -23$$

$$B=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 4 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \det(B) = -3.\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 4 & 0\end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix} + 4.\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix}$$

$$\det(B) = -3.(-1.0-4.2) - 2.(1.0+1.2) + 4.(1.4-1.1) = 32$$

$$C=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 5 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow \det(C) = 2\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 5 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 5\end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 5 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

Donde tenemos que

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 5 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 5\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 57.$$

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 5 & 1 & 1\end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & 1\end{vmatrix} = 8$$

Por lo tanto $\det(C) = 2.57 - 8 = 106$.

2 Determinar todos los valores de $c \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz sea invertible:

$$B=\begin{bmatrix}4 & c & 3\\ c & 2 & c\\ 5 & c & 4\end{bmatrix}$$

Solución: Recordemos que una matriz B es invertible si y solo si $\det(B) \neq 0$. Por lo tanto, tenemos que ver para cuales $c \in \mathbb{R}$, $\det(B) \neq 0$

$$\det(B) = 4\begin{vmatrix} 2 & c \\ c & 4 \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} c & c \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} c & 2 \\ 5 & c \end{vmatrix}$$
$$= 4(2.4 - c^2) - c(4c - 5c) + 3(c^2 - 10)$$
$$= 32 - 4c^2 - 4c^2 + 5c^2 + 3c^2 - 30 = 2$$

Por lo tanto, tenemos que $\det(B) = 2 \neq 0$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Es decir, B es inversible siempre, independiente del valor de $c \in \mathbb{R}$ tomado.

$\boxed{3}$ Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que $\det(A) = -1$, $\det(B) = 2$ y $\det(C) = 3$. Calcular:

(a) $\det(A^2 B C^t B^{-1})$

Solución: Sabemos que el determinante es invariante por el producto de matrices, por lo tanto:

$$\det(A^2 B C^t B^{-1}) = \det(A^2)\det(B)\det(C^t)\det(B^{-1})$$
$$= \det(A)^2 \det(B)\det(C)\det(B)^{-1}$$
$$= (-1)^2 . 2 . 3 . \frac{1}{2} = 3$$

(b) $\det(B^2 C^{-1} A B^{-1} C^t)$

Solución: Análogamente a lo anterior realizado:

$$\det(B^2 C^{-1} A B^{-1} C^t) = \det(B^2)\det(C^{-1})\det(A)\det(B^{-1})\det(C^t)$$
$$= \det(B)^2 \det(C)^{-1}\det(A)\det(B)^{-1}\det(C)$$
$$= 2^2 . \frac{1}{3} . (-1) . \frac{1}{2} . 3 = -2.$$

$\boxed{4}$ Sean A y B matrices de $n\times n$. Probar que:

(a) $\det(A.B) = \det(BA)$

Proof: En efecto, puesto que el determinante del producto de matrices es el producto de los determinantes, tenemos que:

$$\det(A.B) = \det(A).\det(B) \overset{\#}{=} \det(B)\det(A) = \det(BA)$$

donde $\#$ vale por la conmutatividad en los números reales.

(b) $\det(BAB^{-1}) = \det(A)$ para B inversible.

Proof: Nuevamente aplicando la propiedad del producto:

$$\det(BAB^{-1}) = \det(B)\det(A).\det(B^{-1})$$
$$= \det(B)\det(A)\det(B)^{-1} = \det(B)\det(B)^{-1}\det(A)$$
$$= \det(A)$$

(c) $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$

Proof. Vamos a probar el siguiente resultado mas general:

$$\det(kA) = k^n \det(A) \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

En efecto, notemos que para cualquier $k \in \mathbb{R}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k & 0 & & 0 \\ 0 & k & & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & & k \end{bmatrix}}_{kId} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & & ka_{2n} \\ & & & \\ ka_{n1} & ka_{n2} & & ka_{nn} \end{bmatrix}}_{kA}$$

Es decir, $kA = kId\,A$ y además, puesto que kId es una matriz diagonal, su determinante resulta igual a:

$$\det(kId) = k^n$$

Por lo tanto, $\det(kA) = \det(kId\,A) = \det(kId)\det(A) = k^n \det(A)$. Ahora el ítem (c) se obtiene considerando $k = -1$.

$\boxed{5}$ Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar con una demostración o un contraejemplo, según corresponda.

(a) Sean A y B matrices de $n \times n$. Entonces $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

Solución: <u>Falso</u>. En efecto, consideremos $n = 2$ y sean A, B las matrices definidas por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notemos que $A + B = 0$ y por lo tanto $\det(A+B) = 0$. Por otro lado, $\det(A) = \det(B) = -1$ y así, $\det(A) + \det(B) = -2 \neq 0$.

Para el caso de cualquier n, tome el ejemplo anterior y generalice la idea considerando matrices diagonales con 1 y -1.

(b) Existen matrices $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ y $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ tales que $\det(A.B) \neq 0$.

Solución: Falso. Vamos a probar que para toda $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ y $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, resulta que $\det(A.B) = 0$.

Para ello, consideremos las matrices generales

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, realizando el producto, tenemos que:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} & a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} & a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} \\ a_{31} b_{11} + a_{32} b_{21} & a_{31} b_{12} + a_{32} b_{22} & a_{31} b_{13} + a_{32} b_{23} \end{bmatrix}$$

y calculando el determinante por el desarrollo de Laplace, tenemos que

$$\det(A.B) = (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21})(a_{21} a_{32} b_{12} b_{23} - a_{21} a_{32} b_{13} b_{22} - a_{22} a_{31} b_{12} b_{23} + a_{22} a_{31} b_{13} b_{22}) -$$
$$(a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22})(a_{21} a_{32} b_{11} b_{23} - a_{21} a_{32} b_{13} b_{21} - a_{22} a_{31} b_{11} b_{23} + a_{22} a_{31} b_{13} b_{21}) +$$
$$(a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23})(a_{21} a_{32} b_{11} b_{22} - a_{21} a_{32} b_{12} b_{21} - a_{22} a_{31} b_{11} b_{22} + a_{22} a_{31} b_{12} b_{21})$$

$\det(A.B) = 0 \longleftarrow$ Hacer con mucha paciencia la cuenta

Por lo tanto, no existen A y B que satisfacen la condición (b).

7 Una matriz A de $n\times n$ se dice antisimétrica si $A^t = -A$.

(a) Probar que si n es impar y A es antisimétrica, entonces $\det(A) = 0$.

Solución: En efecto, sabemos que para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, vale que

$$\det(A^t) = \det(A)$$

Por otro lado, si n es impar, aplicando el ejercicio **4c**, resulta que

$$\det(A^t) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$$

y por lo tanto $\det(A) = -\det(A)$ que solamente es cierto cuando $\det(A) = 0$.

Trabajo Práctico N° 6 $\boxed{11}$

$\boxed{1}$ Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son subespacios vectoriales

(a) $S=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1=x_n\}$

Solución: Para ver si S es un subespacio vectorial, basta verificar las siguientes propiedades:

i- $0\in S$

Notemos que $x_1=0=x_n$ y por lo tanto $0=(0,\ldots,0)\in S$

ii- Si $u,v\in S$ entonces $u+v\in S$.

Sean $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,\ldots,v_n)\in S$, entonces $u_1=v_1$, $u_n=v_n$. Como $u+v=(u_1+v_1,\ldots,u_n+v_n)$ y $u_1+v_1=u_n+v_n$, se tiene que $u+v\in S$

iii- Si $u\in S$, $k\in\mathbb{R}$ entonces $ku\in S$

En efecto, sea $u=(u_1,\ldots,u_n)\in S$ y $k\in\mathbb{R}\Rightarrow ku=(ku_1,\ldots,ku_n)$ y $ku_1=ku_n$. Por lo tanto $ku\in S$

Como se satisfacen las condiciones i-iii, se sigue que S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$

(b) $L=\{(x_1,\ldots,x_n): x_1+\cdots+x_n=1\}$

Solucion: Claramente L no es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ puesto que $0\notin L$. En efecto, note que $0+\cdots+0=0\neq 1$

(d) $N=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1\leq x_2\}$

Solución:

i- $0\in N$

Notemos que $0=(0,\ldots,0)$ y $0\leq 0$, por lo que $0\in N$

ii- Si $u,v\in N$, entonces $u+v\in N$

En efecto, sean $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,\ldots,v_n)\in N$. Luego $u_1\leq u_2$, $v_1\leq v_2$

Puesto que $u+v=(u_1+v_1,\ldots,u_n+v_n)$ y $u_1+v_1\leq u_2+v_1\leq u_2+v_2$, sigue que $u+v\in N$

iii- Si $u\in N$, $k\in\mathbb{R}$, entonces $ku\in N$.

Notemos que esta condición no necesariamente vale, puesto que $u=(1,2,0,\ldots,0)\in N^r$ $-1\in\mathbb{R}$ y $-1.u=(-1,-2,0,\ldots,0)$ con $-1>-2$

Luego N^r no es un subespacio vectorial.

$\boxed{5}$ Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial del espacio de las matrices cuadradas $M_n(\mathbb{R})$

(a) El conjunto de las matrices inversibles, denotado por $Gl_n(\mathbb{R})$

Solución: $Gl_n(\mathbb{R})$ no es un subespacio vectorial puesto que la matriz nula 0 no es invertible y por lo tanto $0\notin Gl_n(\mathbb{R})$.

(e) El conjunto de las matrices triangulares superiores, denotado por $TS_n(\mathbb{R})$

Solución: Veamos si se satisfacen las condiciones para que sea subespacio vectorial:

i- $0\in TS_n(\mathbb{R})$

En efecto, puesto que 0 es la matriz nula, claramente $0_{ij}=0$ para todo $i>j$

ii- Si $A,B\in TS_n(\mathbb{R})$ entonces $A+B\in TS_n(\mathbb{R})$.

En efecto, puesto que $A,B\in TS_n(\mathbb{R})$, se sigue que $a_{ij}=b_{ij}=0$ para todo $i>j$

Luego, $(A+B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}=0$, $\forall i>j$, de donde $A+B\in TS_n(\mathbb{R})$

iii- Si $A\in TS_n(\mathbb{R})$ y $k\in\mathbb{R}$, entonces $kA\in TS_n(\mathbb{R})$.

En efecto, si $A\in TS_n(\mathbb{R})$, entonces $a_{ij}=0$ para todo $i>j$. Por lo tanto, $(kA)_{ij}=ka_{ij}=0$, para todo $i>j$ y $kA\in TS_n(\mathbb{R})$

Así, dado que $TS_n(\mathbb{R})$ satisface i-iii, sigue que $TS_n(\mathbb{R})$ es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{3}$ Probar que los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}[x]$ son subespacios vectoriales.

(a) El conjunto $\mathbb{R}_{<n}[x]$ formado por los polinomios de grado estrictamente menor que $n\in\mathbb{N}$, junto con el polinomio nulo.

Solución: En efecto, notemos que

i- $0\in\mathbb{R}_{<n}[x]$ por su propia definición

ii- Si $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$, $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_lx^l$ con $0 \leq k \leq l < n$, entonces tenemos que:

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_k + b_k)x^k + \cdots + b_lx^l$$

de donde $p+q$ tiene grado $gr(p+q) = l$ si es no nulo; es decir $p+q \in \mathbb{R}_{<n}[x]$

iii- Finalmente, si $p(x) \in \mathbb{R}_{<n}[x]$ y $k \in \mathbb{R}$, con $gr(p(x)) = l < n$, entonces $kp(x)$ o bién es el polinomio nulo, o bien $gr(kp(x)) = l < n$. Luego, $kp(x) \in \mathbb{R}_{<n}[x]$

Asi, $\mathbb{R}_{<n}[x]$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x]$

$\boxed{4}$ Sea $V = F[0,1]$ el espacio de las funciones de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de V.

(a) $C[0,1] = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$

Solución: Veamos que $C[0,1]$ es un subespacio vectorial de V, puesto que:

i- $0 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 0$ es una función continua $\Longrightarrow 0 \in C[0,1]$

ii- Si $f, g \in C[0,1]$, sabemos que la suma $f+g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) + g(x)$ es una función continua, es decir, $f+g \in C[0,1]$

iii- Del mismo modo, $\forall k \in \mathbb{R}$, $f \in C[0,1]$, entonces $kf \in C[0,1]$

$\boxed{5}$ Sean V un espacio vectorial, $v \in V$ no nulo y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda v = \mu v$.

Probar que $\lambda = \mu$

Solución: Supongamos por el absurdo que $\lambda \neq \mu$; es decir, $\lambda - \mu \neq 0$. Como todo elemento no nulo en $\mathbb{R}$ tiene inverso multiplicativo (pues $\mathbb{R}$ es cuerpo), existe el inverso $\theta = (\lambda - \mu)^{-1} \in \mathbb{R}$. De este modo, usando los axiomas que definen un espacio vectorial, sigue que:

$$\theta . 0 = \theta . (\lambda - \mu) . v = (\theta . (\lambda - \mu)) . v = 1 . v = v$$

Es decir, $\theta \cdot 0 = v$. Por otro lado, se sigue que $\forall k \in \mathbb{R}$, $k \cdot 0 = 0$ y por consiguiente $\theta \cdot 0 = 0 = v \Rightarrow v = 0$ lo que contradice la hipotesis.

Luego $\lambda = \mu$ tal como se quería probar.

|6| Sean W_1, W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Probar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y solo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

Solución: ($\Rightarrow$) Supongamos que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V y $W_1 \nsubseteq W_2$.
Veamos que $W_2 \subseteq W_1$: Sea $w_2 \in W_2$, como $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V, sigue que $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$ para todo $w_1 \in W_1$.
En particular, para todo $w_1 \in W_1 \setminus W_2$ vale que $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$.
Ahora, por definición de unión de conjuntos, tenemos que $w_1 + w_2 \in W_1$ ó $w_1 + w_2 \in W_2$.
Puesto que tomamos $w_1 \in W_1 \setminus W_2$, la única elección posible es que $w_1 + w_2 \in W_1$.
Como W_1 es subespacio y $w_1, w_1 + w_2 \in W_1$, entonces $(w_1 + w_2) - w_1 \in W_1$; es decir $w_2 \in W_1$, mostrando que $W_2 \subseteq W_1$.
($\Leftarrow$) Si $W_1 \subseteq W_2$ ó $W_2 \subseteq W_1$, entonces $W_1 \cup W_2 = W_1$ ó $W_1 \cup W_2 = W_2$ que claramente eran subespacios de V por hipotesis. ∇

Trabajo Práctico N° 7

3 Sean $u=(1,1)$, $v=(1,0)$, $w=(0,1)$ y $z=(3,4)$ vectores de $\mathbb{R}^2$.

(a) Escribir a z como combinación lineal de u, v y w, con coeficientes todos no nulos.

Solución: Queremos hallar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,0) + \alpha_3(0,1) = (3,4)$$

Es decir:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 3 - \alpha_1 \\ \alpha_3 = 4 - \alpha_1 \end{cases}$$

Tomando por ejemplo $\alpha_1 = 1$, obtenemos que $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$ tal como fue solicitado.

(b) Escribir a z como combinación lineal de u y v.

Solución: De manera similar al ítem anterior, queremos hallar $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\beta_1(1,1) + \beta_2(1,0) = (3,4)$$

Es decir:

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 &= 3 \\ \beta_1 &= 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos que $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = -1$ y tal combinación es única ¿Porque?

5 Sean p, q y r los polinomios $p(x) = (1-x)(x+2)$, $q(x) = x^2-1$, $r(x) = x(x^2-1)$.

(a) Escribir, si es posible, el polinomio x como combinación lineal de p, q y r.

Solución: Queremos hallar escalares (de ser posible) $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\mu_1 p(x) + \mu_2 q(x) + \mu_3 r(x) = x$$

Es decir, operando convenientemente:

$$\mu_1(1-x)(x+2) + \mu_2(x^2-1) + \mu_3 x(x^2-1) = x$$

$$\mu_1(-x^2-x+2) + \mu_2(x^2-1) + \mu_3(x^3-x) = x$$

$$\mu_3 x^3 + (-\mu_1+\mu_2)x^2 + (-\mu_3-\mu_1)x + (2\mu_1-\mu_2) = x$$

y puesto que la igualdad de polinomios es coeficiente a coeficiente, se sigue que:

$$\left.\begin{array}{r} \mu_3 = 0 \\ -\mu_1+\mu_2 = 0 \\ -\mu_1-\mu_3 = 1 \\ 2\mu_1-\mu_2 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \mu_1 = -1 \,,\; \mu_2 = \mu_1 = -2\mu_1$$

de donde no existe tal combinación lineal.

(c) Escribir, si es posible, el polinomio x^3+x^2+x+1 como combinación lineal de p, q y r respectivamente

Solución: Tal como el item anterior, queremos hallar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lambda_1(-x^2-x+2) + \lambda_2(x^2-1) + \lambda_3(x^3+x) = x^3+x^2+x+1$$

y realizando el mismo procedimiento anterior, obtenemos que:

$$\begin{array}{r} \lambda_3 = 1 \\ -\lambda_1+\lambda_2 = 1 \\ -\lambda_1+\lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_1-\lambda_2 = 1 \end{array}$$

de donde se sigue que $\lambda_3 = 1, \lambda_1 = 0$, pero no existe λ_2 tal que $\lambda_2 = 1 = -\lambda_2$

Por lo tanto, no existe tal combinación lineal

$\boxed{4}$ En cada caso que sigue, caracterizar con ecuaciones al subespacio vectorial dado por los generadores

(a) $W = \langle (1,0,3),(0,1,-2) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$

Solución: Un vector $v=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$ pertenece al subespacio W generado por $v_1=(1,0,3)$ y $v_2=(0,1,-2)$ si existen escalares x,y tales que:

$$x(1,0,3)+y(0,1,-2)=(b_1,b_2,b_3)$$

que da origen al sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} x = b_1 \\ y = b_2 \\ 3x-2y = b_3 \end{bmatrix}$$

Así, $(b_1, b_2, b_3) \in W$ si y solo si $3b_1 - 2b_2 = b_3$

(b) $W = \langle (1,2,0,1), (0,-1,-1,0), (2,3,-1,4) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$

Solución: Tal como el ítem anterior, un vector $v = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ está en W si existen escalares reales x, y, z tales que:

$$x(1,2,0,1) + y(0,-1,-1,0) + z(2,3,-1,4) = (b_1\ b_2\ b_3\ b_4)$$

y esta expresión da lugar al sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} x + z = b_1 \\ 2x - y + 3z = b_2 \\ -y - z = b_3 \\ x + 4z = b_4 \end{bmatrix}$$

Aplicando método de Gauss a la matriz asociada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 2 & -1 & 3 & b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 \\ 1 & 0 & 4 & b_4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 \\ 0 & 0 & 3 & b_4 - b_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & b_2 - 2b_1 - b_3 \\ 0 & 0 & 3 & b_4 - b_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & b_2 - 2b_1 - b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2b_4 - 3b_3 - 3b_2 + 4b_1 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in W$ si y sólo si $2b_4 - 3b_3 - 3b_2 + 4b_1 = 0$

$\boxed{5}$ En cada caso, determinar si el conjunto indicado es linealmente independiente

(a) $A = \{(1,0,-1), (1,2,1), (0,-3,2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Solución: Por definición, el conjunto A será linealmente independiente si no existen escalares no triviales a_1, a_2, a_3 tales que

$$a_1(1,0,-1) + a_2(1,2,1) + a_3(0,-3,2) = (0,0,0)$$

Planteamos así el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} a_1 + a_2 = 0 \\ 2a_2 - 3a_3 = 0 \\ -a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando Gauss para reducir la matriz asociada, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde resulta que $a_3 = a_2 = a_1 = 0$. Es decir que la única combinación lineal de los vectores de A que da el vector nulo es la trivial. Por lo tanto A es un conjunto linealmente independiente.

(b') $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

Solución: Tal como el item anterior, planteamos la combinación lineal:

$$b_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esto da origen al sistema de ecuaciones:

$$b_1 + 2b_2 = 0$$
$$-b_1 + b_2 = 0$$
$$2b_1 + b_2 = 0$$

y por procedimiento similar al anterior, obtenemos que $b_1 = b_2 = 0$; es decir, el conjunto B es linealmente independiente.

[6] Extender de ser posible, los siguientes conjuntos a una base de los respectivos espacios vectoriales

(b) $\mathcal{N} = \{(1,2,0,0), (1,0,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

Solución: Notemos primeramente que el conjunto $\mathcal{N}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^4$. Estudiemos ahora el subespacio generado por $\mathcal{N}$:

$$\alpha(1,2,0,0) + \beta(1,0,1,0) = (\alpha+\beta, 2\alpha, \beta, 0)$$

Notemos que el vector $(0,0,0,1)$ no pertenece al subespacio generado por $\mathcal{N}$, puesto que si esto fuera el caso, entonces tendríamos que:

$$\alpha+\beta = 0 = 2\alpha = \beta$$
$$1 = 0$$

lo que resulta absurdo. Así, $\mathcal{N}_2 = \{(1,2,0,0),(1,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ es linealmente independiente

Nota: La dimensión de $\mathbb{R}^4$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial es 4; esto es, toda base de $\mathbb{R}^4$ debe tener 4 generadores linealmente independientes.

Nuevamente, estudiando el subespacio generado por $\mathcal{N}_2$, tenemos que

$$\alpha(1,2,0,0)+\beta(1,0,1,0)+\gamma(0,0,0,1) = (\alpha+\beta, 2\alpha, \beta, \gamma)$$

y podemos notar que $(0,0,1,0)$ no pertenece al subespacio generado por $\mathcal{N}_2$, puesto que si este fuera el caso, entonces

$$\alpha+\beta = 0$$
$$\gamma = 2\alpha = 0$$
$$\beta = 1$$

lo que es absurdo. Así, $\mathcal{N}_3 = \{(1,2,0,0),(1,0,1,0),(0,0,0,1),(0,0,1,0)\}$ es un conjunto linealmente independiente y forma una base de $\mathbb{R}^4$.

(c) $G = \{(1,2,3),(1,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Solución: Tal como el item anterior, notemos que G es linealmente independiente

Por otro lado, el subespacio vectorial generado por G es, en esencia, dado por:

$$(\alpha+\beta, 2\alpha, 3\alpha+\beta) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

y podemos notar que el vector $(0,0,1)$ no pertenece al subespacio generado por G

En efecto, si este fuera el caso, entonces

$$\alpha+\beta = 0$$
$$2\alpha = 0$$
$$3\alpha+\beta = 1$$

que es un sistema sin solución. Por lo tanto el conjunto $\{(1,2,3),(1,0,1),(0,0,1)\}$ es linealmente independiente y forma una base de $\mathbb{R}^3$

[7] Exhibir una base y calcular la dimensión de los siguientes subespacios

(b) $W=\{(x,y,z,\omega,\mu)\in\mathbb{R}^5 : y=x-z,\ \omega=x+z,\ \mu=2x-3z\}$

Solución: Notemos que $(x,y,z,\omega,\mu)\in W \Leftrightarrow (x,y,z,\omega,\mu)=(x,x-z,z,x+z,2x-3z)$ y por lo tanto, por álgebra entre vectores, sigue que:

$$(x,y,z,\omega,\mu)=x(1,1,0,1,2)+z(0,-1,1,1,-3)$$

Así $\beta_W=\{(1,1,0,1,2),(0,-1,1,1,-3)\}$ es un conjunto generador de W, y puesto que β_W es linealmente independiente, forma una base de W. Así, $\dim W=2$

(d) Las matrices triangulares superior de 2×2 y 3×3

Solución: Sean T_2 el subespacio de las matrices triangulares superiores de 2×2 y T_3 el subespacio de las triangulares superiores de 3×3. Luego, $A\in T_2$ si

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad a,b,c\in\mathbb{R}$$

Por lo tanto, usando algebra de matrices, tenemos que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [*1]$$

Resulta fácil probar que las matrices en la descomposición $*1$ forma una base para T_2 y por lo tanto, $\dim T_2=3$.

Analogamente, podemos ver que el conjunto de matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

forma una base de T_3 y por lo tanto $\dim T_3=6$