Algebra II - 2020

Gonzalo Gutierrez 0

Cuerpos y N° Complejos

Trabajaremos con los siguientes cuerpos de números

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Interés principal: aritmética.

- Como veremos estos cuerpos son muy diferentes en varios aspectos: análisis. $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ en continuidad

  $\mathbb{R} \neq \mathbb{C}$ raíces (alg. cerrado)

  $\mathbb{R}$ (y $\mathbb{Q}$) tienen un orden y $\mathbb{C}$ no

  pero a nivel de aritmética: suma producto (lineal) veremos que se comportan igual es cuerpo.

-

$$\mathbb{Q} = \{ a/b : a, b \in \mathbb{Z} \;\; b \neq 0 \}$$

obs. no hay unicidad en la escritura a/b.

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ $\quad m \to m/1$ y mantiene sus prop básicas

$+.$ $\quad \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{d}$ (manzanas + manzanas ...)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd}$$

• $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

es $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ con propiedades básicas: Cuerpo.

Un cuerpo k = ? operación: $k \times k \to k$.

<u>Definición</u> Un cuerpo k es un conjunto con dos <u>operaciones</u>. "+" y "·" que satisfacen las siguientes propiedades:

+ : 1) conmutativo ($x+y = y+x$)

2) asociativa. $((x+y)+z = x+(y+z))$

3) ∃! elemento neutro "0" ($x+0 = x(= 0+x)\ \forall x \in k$)

4) $\forall\ x \in k$ ∃! opuesto "$-x$" (tq $x+(-x) = 0$)

·) 1) conmutativa

2) Asociativa

3) ∃! elemento "1" tq $1 \cdot x = x (= x \cdot 1)$ identidad.

4) $\forall\ x \neq 0$ ∃! inverso "x^{-1}" tq $x \cdot (x^{-1}) = 1$
(ó $1/x$)

y además $x \cdot (y+z) = xy + xz$ (distributiva)

$\mathbb{Z}$ no es un cuerpo. ¿Por qué?

Notemos que de estas prop. se deducen muchas otras: $(a^{-1})^{-1} = a$. $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$

y en algunos casos, se puede ser más específico:

$p/q \in \mathbb{Q} \rightsquigarrow (p/q)^{-1} = \frac{1}{p/q} = q/p$.

pero $1/\sqrt{2}$. queda así.

Ejemplos:

$$p/q + \left(q/2p - (p/q)^{-1} \right)^{-1} = p/q + \left(q/p \left(\tfrac{1}{2} - 1 \right) \right)^{-1}$$

$$= p/q + p/q \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{-1} = -\, p/q$$

y esto vale para $p, q \in \mathbb{Z}$, o en $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$.

y más aún si $\alpha = p/q$

$$\alpha + \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right)^{-1} = \alpha + \left(-\frac{1}{2\alpha} \right)^{-1} = \alpha - 2\alpha = -\alpha.$$

Ecuaciones:

$$\alpha x + \beta = \delta \qquad \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Q}. \ (\alpha \neq 0)$$

es siempre $\exists$ solución:

Teorema: Si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, $\alpha \neq 0$ entonces la ecuación

$\alpha x + \beta = \gamma$ siempre admite una solución en $\mathbb{Q}$.

que además es única:

$$x = \frac{\gamma - \beta}{\alpha}.$$

Obs: si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ $\alpha \neq 0$ $\leadsto$ la sol. $\exists$ pues $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

pero no necesariamente está en $\mathbb{Z}$ ¿Porqué?

Porque $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo.

Notemos que nuestro teorema es válido en cualquier cuerpo K.

Ejemplos:

i). Sabemos que $2x - 1 = 3$ $\leadsto$ $x = 4/2 = 2$.

pero $\exists$ $x \in \mathbb{Q}$ tq
$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 3 \\ 3x + 1 &= 2 \end{aligned} \quad ?$$

Este sería un sistema de ecuaciones lineales

$\uparrow$
x sólo aparece a la x^1

En este caso como ambas tienen

una única sol, sólo habría que ver si $= \;\text{o}\; \neq$

$\uparrow$ sí $\quad \uparrow$ no!

o bastaría probar si 2 es sol

de la segunda. no!

2) Dado $a \in \mathbb{Q}$ ¿$\exists x$ tq $\frac{1}{2}a - 2x = a + \frac{3}{5} + \frac{1}{2}x$?

$$\rightsquigarrow \quad -\left(2 + \frac{1}{2}\right)x = a - \frac{1}{2}a + \frac{3}{5} = \frac{1}{2}a + 3/5.$$

$$-\frac{5}{2}x = \frac{1}{2}a + 3/5 \quad \rightsquigarrow \quad x = -\frac{1}{5}a - \frac{6}{25}.$$

3) $x, y = ?$ $\quad 2x - y = -1 \rightsquigarrow \alpha x + \beta y = \gamma \qquad \alpha \neq 0 \neq \beta \ \exists \infty$ sol.

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ \frac{1}{2}x - y = 1. \end{cases}$$

ya aprenderemos métodos.
por ahora, ingenio!

. poner uno en términos de otro y reemplazar
pero eso sólo sirve cuando hay pocos "variables"

. mult. toda la ecuación ① por algo conveniente
tq cuando sume la segunda, se simplifique la ecuación (= desaparezco alguna variable!)

$$① + 4② \rightsquigarrow \begin{array}{r} 2x - y = -1 \\ - \ 2x - 4y = 4. \end{array} \rightsquigarrow \overset{3}{(-1+4)}\,y = -5.$$

$$\rightsquigarrow y = -5/3$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{l} 2x + 5/3 = -1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{3} = 1. \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 2x = -8/3 \\ \frac{1}{2}x = -2/3 \end{array}\right\} \qquad \boxed{x = -\frac{4}{3}}$$

único!

$$\begin{cases} 2x - \frac{1}{3}y = -1. \\ x + \frac{1}{6}y = -1 \end{cases}$$

pero $\frac{1}{2}\left(2x - \frac{1}{3}y\right) = x - \frac{1}{6}y.$

$$\rightsquigarrow -1 \neq -\frac{1}{2}$$

3) $\begin{cases} 2x - \frac{1}{3}y = -1 \\ x + \frac{1}{6}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ ② $= \frac{1}{2}$ ① $\rightsquigarrow$ la ② sobra

basta resolver la ①

Siempre $\exists$ ∞ soluciones

$x = \left(-1 + \frac{1}{3}y\right)\frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}y$ $\rightsquigarrow$ cada valor de y $\rightsquigarrow$ x $\Rightarrow$ $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}y, y\right)$

Notemos que si $\exists$ solución, como los coeficientes están en $\mathbb{Q}$, la solución $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$ i.e. x e $y \in \mathbb{Q}$.

Lo mismo podemos hacer en $\mathbb{R}$:

que satisface las mismas propiedades: es un cuerpo.

Algunos $x \in \mathbb{R}$ $x \notin \mathbb{Q}$: $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$, π (trascendente)

usamos la misma notación: $-a$, a^{-1} ....

y valen las mismas propiedades extras: $(-a)^{-1} = -a^{-1}$

y $\left(\alpha + \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\right)^{-1} = -\alpha$. $\quad \alpha = p/q \in \mathbb{Q}$ ✓

$\alpha = \pi \in \mathbb{R}$ ✓

Ecuaciones:

Sigue valiendo nuestro Teorema: $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$\alpha \neq 0$ $\quad \alpha x + \beta = \gamma$ $\rightsquigarrow$ $x = \frac{\gamma - \beta}{\alpha}$ es único y $x \in \mathbb{R}$!

Ej: $\pi x + 2y = e$ ① π ② $\rightsquigarrow$ $0x + (2 - \sqrt{2}\pi)y = e - \pi$

$x + \sqrt{2}y = 1$

$$y = \frac{e-\pi}{2-\sqrt{2}\pi}$$

$$x = 1 - \sqrt{2}\left(\frac{e-\pi}{2-\sqrt{2}\pi}\right)$$

existe una única solución. $(x, y) = \rho \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- Complejos:

Varias formas de definir los números complejos.

Como ya definimos son un cuerpo: un conj $+, \cdot$

Como conjunto $\mathbb{C} = \{ a+ib, \ a, b \in \mathbb{R} \} \leftrightarrow (a, b)$ par ordenado

- identificamos la 2da com con un "i"

Si $z = a+ib$ llamaremos parte real de z: a

parte imaginaria de z: b

$$\mathrm{Re}(a+ib) = a \qquad \mathrm{Im}(a+ib) = b$$

Si alguno es 0: no lo escribimos! $z = a \in \mathbb{R}$

$z = i = 0 + 1i$

Notamos $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$

Ej $z = 2+3i$, $\operatorname{Re} z = 2$ $\operatorname{Im} z = 3$

$z = \sqrt{2}i$ $\operatorname{Re} z = 0$ $\operatorname{Im} z = \sqrt{2}$

$\mathbb{C}$ $\mathbb{R}^2$

Con nuestra identificación: $a+ib \longrightarrow (a,b)$

$\rightsquigarrow$ podemos graficarlo

Suma y producto

<u>Suma</u> $(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$

notemos que esta suma respeta nuestra identificación

i.e. estamos sumando coordenada a coordenada

$a+ib \leftrightarrow (a,b)$

$c+id \leftrightarrow (c,d)$

$\rightsquigarrow$ $\underbrace{(a+ib)+(c+id)}_{(a+c)+i(b+d)} \longleftrightarrow \underbrace{(a,b)+(c,d)}_{(a+c,\ b+d)}$

y así, si $z_1 z_2$ son reales $z_1 = a_1$ $z_2 = a_2$

$\rightsquigarrow$ $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 = (a_1+a_2) + 0i \in \mathbb{R}$

E.d. la suma extiende la suma de $\mathbb{R}$

y tiene las mismas propiedades

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ Conmutativa

2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ Asociativa

3) $\exists$ elemento neutro : $0 = 0 + 0i$

4) $\forall$ $z = a+ib$ $\exists$. $-z = -a-ib$ tq $z+(-z) = 0$

Producto: hacemos que sea distributivo y que $i^2 = -1$

$$(a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc + i^2 bd.$$
$$= (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Ej: . $(1-2i)(1+i) = 1 - 2.i^2 - 2i + i$
$$= 3 - i$$

. Si $a \in \mathbb{R}$ $a(1-2i) = (a+0i)(1-2i) = a - 2ai + 0 \cdot 0$

. $z = a+ib$ ⤳ $z.z = z^2 = (a+ib)(a+ib)$
$$= a^2 + iab + iab - b^2$$
$$= (a^2 - b^2) + 2iab$$

En particular si $a=0$ ⤳ $(ib)^2 = -b^2 \leq 0$

Esto es muy útil a la hora de buscar raíces cuadradas! o en general raíces de polinomios.

$x^2 + 1 = 0$ ahora tiene 2 raíces: $\pm i$

Propiedades:

1) Conmutativo ✓ Ej.

2) Asociativo: $(z_1 \cdot z_2)\, z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ Ej.

3) $\exists$ unidad: $1 = 1 + 0i$

4) $\forall z \neq 0 \;\exists\; z^{-1} = \frac{1}{z}$ tq $z \cdot z^{-1} = 1$.

Afl: $z = a+ib \rightsquigarrow \frac{1}{z} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$.

pues $z \cdot \frac{(a-ib)}{a^2+b^2} = (a+ib)\left(\frac{a}{a^2+b^2} + i\,\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \dots$

$$\text{ó} \overset{\text{conm.}}{=} \underbrace{\frac{1}{a^2+b^2}}_{\in \mathbb{R}} (a+ib)(a+ib) = \frac{1}{a^2+b^2}\left[a^2-(ib)^2\right]$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}(a^2+b^2) = 1 \checkmark$$

Para ver que es un cuerpo nos falta ver que ambas operaciones son "compatibles" ie prop. 9.

$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$. Ej. //

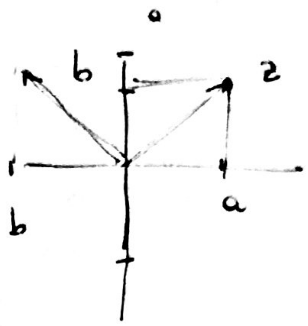
Algunas observaciones:

1) las potencias de i: $i,\; i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1$.

$\rightsquigarrow \; i^{17} = i^{16} \cdot i = 1 \cdot i = i$ ✓

2) mult. por i

$z \in \mathbb{C} \rightsquigarrow z = a+ib$



$\rightsquigarrow iz = ia + i(ib) = -b + ia$

$(a,b) \longrightarrow (-b,a)$ $\rightsquigarrow$ rotamos 90° pues son ortogonales (veremos mejor!)

$i \longrightarrow -1$

$1 \longrightarrow i$

- $\rightsquigarrow$ si mult. de nuevo por i rotamos 180°

  $\rightsquigarrow 270^\circ \rightsquigarrow 360^\circ =$ volvemos a donde estábamos

3) Raíces cuadradas de n° imag.

ya vimos $i^2 = -1$ o equivalentemente $\sqrt{-1} = i$

- $\rightsquigarrow$ con esto $(bi)^2 = -b^2$ $\rightsquigarrow$ $\exists$ raíces cuadradas de todos los núm neg

por ej. $x^2 = -2 \Rightarrow x = \sqrt{2}i$ y $x = -\sqrt{2}i$ $\rightsquigarrow$ -2 tiene 2 raíces cuad.

En general si b es positivo $x^2 = -b \Rightarrow i\sqrt{b} = \pm x$

$\rightsquigarrow$ para b real podríamos elegir una y definir

$$\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{|b|} & \text{si } b>0 \\ \sqrt{|b|}\, i & b<0 \end{cases}$$

pero esto no vale para cualq. $z \in \mathbb{C}$ ojo!

Conjugación y módulo:

Definición: para cada $z \in \mathbb{C}$ definimos 1) el conjugado de z, denotado $\bar{z}$, por:

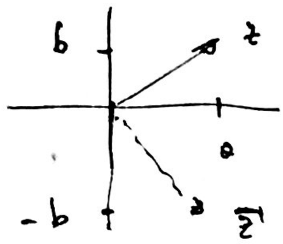
$$\bar{z} = \overline{a+ib} = a - ib.$$

2) El módulo de z, denotado por $|z|$ a

$$|z| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$|z| \in \mathbb{R}$ y es siempre ≥ 0.

Notamos que:



$|z|$ sería el módulo del vector que rep z o la distancia de z al origen.

y el conjugado rep. la reflexión de z con respecto al eje x.

Ej: · $\overline{3+2i} = 3-2i$

· $|3+2i| = \sqrt{9+4}$

· Si $z \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| =$ valor abs.

$\bar{z} = z$.

y eso lo caract.: $\bar{z} = z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$.

Algunas propiedades: 1) $\bar{\bar{z}} = z$

2) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\rightsquigarrow$ si ahora $z \overset{\neq 0}{\in} \mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ $\dfrac{z}{|z|}$ es un elem. del círculo pues $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = \dfrac{|z|}{|z|} = 1$.

$\rightsquigarrow$ $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$ para algún θ.

$\rightsquigarrow$ $z = |z| e^{i\theta}$.

Si denoto $\rho = |z|$ $\rightsquigarrow$ la descomp. polar de z.

- $z = \rho e^{i\theta}$ donde ρ = dist. al origen $= |z|$

  θ = áng que forma el vector z con el eje x = argumento.

Notamos que $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi)} = e^{i(\theta+2k\pi)}$

- $\rightsquigarrow$ conviene restringir $\theta \in [0, 2\pi)$

pues entonces $\underset{\mathbb{C} - \{0\}}{z = (a+ib)} \longleftrightarrow \underset{\mathbb{R}_{>0} \times [0,2\pi)}{re^{i\theta}}$ es una biyección.

Ej: $z = i$ $\rightsquigarrow$ $z = 1\, e^{i\pi/2}$

$z = -2$ $\rightsquigarrow$ $z = 2 \cdot e^{i\pi}$

$z = 1+i$ $\quad \rho = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

θ: $\cos\theta = 1$ $\quad \operatorname{sen}\theta = 1$ $\rightsquigarrow$ $\theta = \pi/4$ $\quad \boxed{z = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}}$

3) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ $\qquad \operatorname{Im} z = \dfrac{z-\bar{z}}{2}.$

4) $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}.$ $\qquad z\bar{z} = |z|^2.$

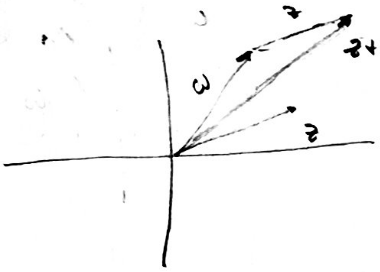
5) $|zw| = |z||w|$

6) $|z+w| \leq |z| + |w|$

Dem: Ej.

6) Son núm reales ≥ 0 $\rightsquigarrow$

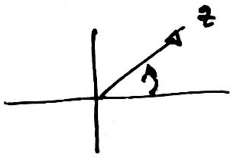
$6 \iff |z+w|^2 \leq \left(|z|+|w|\right)^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \overset{\text{def}}{\rightsquigarrow} \ldots$ ✓



Si fueran ortogonales sería Pitágoras.

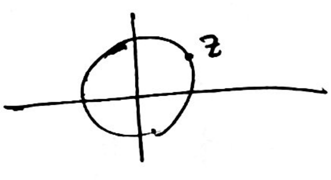
coordenadas polares:

Volviendo a nuestra identificación con $\mathbb{R}^2$ o ref gráfica



cada vector $\equiv$ ang. + long = dist al origen

Notemos primero que si $|z| = 1 \rightsquigarrow z \in$ círculo unidad (pues su dist al origen es 1)



$\rightsquigarrow z \iff (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$

y denotaremos esto por $e^{i\theta}$

Utilidad

La forma polar es particularmente adecuada para entender el producto de números complejos y por lo tanto potencias y raíces.

La razón ppal es que

Si $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$

$$e^{i\theta} e^{i\varphi} = (\cos\theta + i \,\mathrm{sen}\,\theta)(\mathrm{son}\,\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

$$= \cos\theta\cos\varphi - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + i(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + \mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi)$$

$$= \cos(\theta+\varphi) + i\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi) = e^{i(\theta+\varphi)}$$

$\Rightarrow$ $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ $\quad z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$

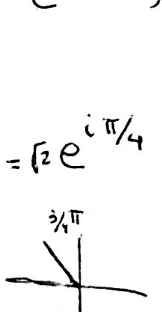
$$\Rightarrow z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

y en particular $z^2 = \rho^2 e^{i2\theta}$ $\rightsquigarrow$ $z^n = \rho^n e^{in\theta}$.

Ejemplos:

- $i = e^{i\pi/2}$ $\rightsquigarrow$ $i^2 = e^{i2\pi/2} = e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi$ $= -1$ $\rightsquigarrow$ $zi = \rho e^{i\theta} i = \rho e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$.

- $(1+i) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ $\rightsquigarrow$ $i(1+i) = i - 1 = 1\cdot\sqrt{2}\, e^{i(\pi/2 + \pi/4)} = \sqrt{2}\, e^{\frac{3}{4}\pi}$



$$= \sqrt{2}\Big(\underbrace{\cos(\tfrac{3}{4}\pi)}_{=-1/\sqrt{2}} + i\,\underbrace{\mathrm{sen}(\tfrac{3}{4}\pi)}_{1/\sqrt{2}}\Big)$$

Ecuaciones:

no! • Si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ $\Rightarrow$ $\alpha X + \beta = \gamma$ siempre admite solución la única y $x \in \mathbb{C}$.

$$X = \frac{\gamma - \beta}{\alpha} \in \mathbb{C}.$$

• Si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\alpha x + \beta y = \gamma$.
$\alpha, \beta \neq 0$

siempre admite (infinitas) soluciones en $\mathbb{C}$.

¿cuándo están en $\mathbb{R}$? si $\alpha, \beta \notin \mathbb{R}$ puede $x, y \in \mathbb{R}$?

y lo mismo para los sistemas!

Resumen.

Si k es un cuerpo (en particular $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

$\Rightarrow$ $\alpha, \beta, \gamma \in k$ $\alpha \neq 0$ $\Rightarrow$ $\alpha x + \beta = \gamma$ siempre tiene ! sol en k.

• si α o $\beta \neq 0$ $\Rightarrow$ $\alpha x + \beta y = \gamma$ siempre tiene (inf) soluciones en k

• un sistema:
$$ax + by = c$$
$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

puede tener ninguna, única o ∞ soluciones.
pero siempre en k. (no puede ser que admita

TRABAJO PRACTICO N° 1.

1 Sea $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un cuerpo y sea 0 el elemento neutro de $+$ Demostrar que:

(a) $a.0=0 \quad \forall a \in \mathbb{K}$

(b) Si $a.b=0$ entonces $a=0$ ó $b=0$

Sol: (a) Tenemos que para todo $b \in \mathbb{K}$, $b+0=0+b=b$. Por lo tanto, usando la ley distributiva sigue que

$$a(b+0)=a(0+b)=a.b$$
$$ab+a0=a.0+ab=ab$$

con lo cual $a.b=0$.

(b) Sean $a,b \in \mathbb{K}$ con $a.b=0$ y supongamos que $a \neq 0$. Como $\mathbb{K}$ es un cuerpo, existe $a^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $aa^{-1}=a^{-1}a=1$. Luego:

$$a^{-1}a.b=a^{-1}.b=0 \Rightarrow b=0.$$

2 Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+ib$. Hallar el módulo, argumento y conjugado de cada uno de ellos

(b) $i^{131}-i^{9}+1$

Tenemos que:

$$\begin{cases} i^0=1 & i^2=-1 \\ i^1=i & i^3=-i \end{cases}$$

De manera general, resulta que

$$i^k=\begin{cases} 1 & k\equiv 0 \mod 4 \\ i & k\equiv 1 \mod 4 \\ -1 & k\equiv 2 \mod 4 \\ -i & k\equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

Como $131 \equiv 3 \mod 4$ y $9 \equiv 1 \mod 4$, se sigue que

$$i^{131}-i^{9}+1=i^{3}-i+1=1-2i$$

Notemos que $\overline{1-2i}=1+2i$ y $|1-2i|^2=5$

3| Encontrar números reales x, y tales que $3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i$

Solución: Tenemos que

$$3x + 2yi - xi + 5y = (3x + 5y) + (-x + 2y)i = 7 + 5i$$

De la igualdad de los números complejos, obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$$

que admite solución $x = -1$, $y = -2$.

5| Sean $a, b \in \mathbb{C}$. Decidir si existe $z \in \mathbb{C}$ tal que:

(a) $a\,\mathrm{Im}(z) = b$ ¿Es único?

Sol: $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R} \Longrightarrow \mathrm{Re}\,z = x$, $\mathrm{Im}\,z = y$. Por lo tanto:

$$a\,\mathrm{Im}\,z = b \Longleftrightarrow a \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ \mathrm{Im}\,z = \frac{b}{a}$$

Luego, $z = x + \frac{b}{a}i$ mostrando que z no es único.

(c) z es imaginario puro y $z^2 = 4$

Sea $z = ci$ un imaginario puro, entonces tenemos que $z^2 = -c^2$ que es un número real negativo $\forall c \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $-c^2 \neq 4$ $\forall c \in \mathbb{R}$ con lo cual tal z no existe.

6| Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$$

Vamos a usar reducción por filas que se verá posteriormente.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 10 & -10 \end{bmatrix}$$

De donde tenemos que $10y = -10 \iff y = -1$ y $x - 2(-1) = 4 \iff x = 2$

Con lo cual la solución es $x = 2$, $y = -1$.

TRABAJO PRACTICO Nº 2

$\boxed{2}$ Encontrar los coeficientes reales del polinomio de grado 2

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

de modo tal que $p(1) = 2$, $p(2) = 7$ y $p(3) = 14$

Solución: Sustituyendo x por $1, 2, 3$ consecuentemente, obtenemos que:

$$\circledast \begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 14 \end{cases}$$

Vamos a escalonar la matriz asociada al sistema $\circledast$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & 1 & 14 \end{bmatrix}}_{\mathrm{I}} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -8 & -4 \end{bmatrix}}_{\mathrm{II}} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathrm{III}}$$

como la matriz III ya se encuentra escalonada, tenemos que.

$$c = 2/_{-2} = -1$$

$$-2b - 3c = -1 \Rightarrow b = (-1-3)/-2 = 2$$

$$a + b + c = 2 \Rightarrow a = 2 + 1 - 2 = 1$$

con lo cual tenemos que la solución es $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$ $\triangledown$

$\boxed{5}$ Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, describir explícitamente todas las soluciones e indicar cual es la MERF asociada a sist.

$$(a) \begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ \quad -y + 3z = 0 \end{cases}$$

Tenemos que el sistema tiene matriz asociada I

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathrm{I}} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathrm{II}} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathrm{III}}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$3y-9z=0 \Rightarrow y=3z$$

$$x-3y+5z=0 \Rightarrow x-9z+5z=0$$

$$\Rightarrow x-4z=0 \Rightarrow x=4z$$

Por lo tanto, $C_S=\{(x,y,z): x=4z,\ y=3z\}=\{(4z,3z,z): z\in\mathbb{R}\}$

(b) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 4x-y+5z=0 \\ 6x+y+3z=0 \end{cases}$

El sistema tiene matriz asociada I

$$\underset{\text{I}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}} \sim \underset{\text{II}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \end{bmatrix}} \sim \underset{\text{III}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$-5y+9z=0 \Rightarrow z=\frac{5}{9}y$$

$$x+y-z=0 \Rightarrow x+y-\frac{5}{9}y=0 \Rightarrow x=-\frac{4}{9}y$$

de donde $C_S=\{(x,y,z): x=-\frac{4}{9}y,\ z=\frac{5}{9}y\}=\{(-\frac{4}{9}y, y, \frac{5}{9}y): y\in\mathbb{R}\}$

$\boxed{7}$ Para cada uno de los siguientes sistemas, describir implícitamente el conjunto de los vectores (b_1,b_2) ó (b_1,b_2,b_3) para los cuales cada sistema tiene solución.

(a) $\begin{cases} x+y=b_1 \\ 2x-2y=b_2 \end{cases}$

Escalonando la matriz asociada, resulta que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 2 & -2 & b_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -4 & b_2-2b_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{2b_1-b_2}{4} \\ x=\dfrac{2b_1+b_2}{4} \end{array}\right.$$

Por lo tanto, el sistema (a) tiene solución para toda $(b_1,b_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

(b) $\begin{cases} x+y=b_1 \\ 2x+2y=b_2 \end{cases}$

De manera similar al ítem (b) tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 2 & 2 & b_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2-2b_1 \end{bmatrix}$$

Para que el sistema sea consistente, pedimos que $b_2-2b_1=0$ y por lo tanto $b_2=2b_1$. Luego $C_3=\{(b_1,2b_1): b_1 \in \mathbb{R}\}$

(c) $\begin{bmatrix} x-y+2z+w=b_1 \\ 2x+2y+z-w=b_2 \\ 3x+y+3z \quad =b_3 \end{bmatrix}$

Escalonando la matriz asociada al sistema resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & b_1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & b_2 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 4 & -3 & -3 & b_2-2b_1 \\ 0 & 4 & -3 & -3 & b_3-3b_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 4 & -3 & -3 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3-b_2-b_1 \end{bmatrix}$$

De este modo, para que el sistema sea consistente, pedimos que $b_3-b_2-b_1=0$

$\boxed{8}$ ¿Para que valores de a el siguiente sistema tiene única o infinitas sol?

$$\begin{bmatrix} ax-y+z=2 \\ x-y+z=2 \\ 2x-2y+(2-a)z=4a \end{bmatrix}$$

Solución: Escalonemos la matriz asociada al sistema:

$$\begin{bmatrix} a & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2-a & 4a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ a & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2-a & 4a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 2-2a \\ 0 & 0 & -a & 4a-4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 2-2a \\ 0 & 0 & -a & 4a-4 \end{bmatrix}$$

Ahora, si $a=0$, en la última fila tendremos $(0,0,0,-4)$ y por lo tanto el sistema será inconsistente.

Por otro lado, si $a\neq 0$, el sistema tiene solución:

[i] Si $a=1$ entonces $z=0$, $x=2-y$, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones

[ii] Si $a\neq 1$, entonces tenemos que:

$$z=\frac{4-4a}{a}$$

$$(a-1)y+(1-a)z=2-2a \Longrightarrow y=\frac{2-2a}{a-1}+\frac{1-a}{1-a}\cdot\frac{4-4a}{a}$$

$$x-y+z=2 \Longrightarrow x=2-\frac{4-4a}{a}+\frac{2-2a}{a-1}+\frac{4-4a}{a}$$

con lo cual el sistema tiene única solución.

[10] Sea $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ i & -3 & 0\end{bmatrix}$. Reduciendo por filas,

[a] encontrar todas las soluciones sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del sistema $AX=0$

[b] encontrar todas las soluciones del sistema $AX=\begin{bmatrix}1\\ i\\ 0\end{bmatrix}$

Solución: Para [a], escalonando la matriz A, resulta que:

$$\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ i & -3 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 5 & -1\\ 0 & -8 & -2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 5 & -1\\ 0 & 0 & -18\end{bmatrix}$$

De la última fila tenemos $-18z=0$ por lo que $z=0$. De la segunda fila resulta que $5y-z=0$ y por lo tanto $y=0$

Finalmente, de la primer fila, $3x-y+2z=0$ y por lo tanto $x=0$. Luego $C_0=\{(0,0,0)\}$ y $AX=0$ tiene solución trivial.

Veamos $\boxed{b}$, escalonando la matriz ampliada resulta que:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & i \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 3i-2 \\ 0 & -8 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 3i-2 \\ 0 & 0 & -18 & -21-24i \end{bmatrix}$$

- De la última fila tenemos que $-18z = -21-24i \Rightarrow z = \frac{21+24i}{18} \Rightarrow$ $z = \frac{7}{6} + \frac{4}{3}i \in \mathbb{C}$
- De la segunda fila tenemos que $5y - z = 3i-2 \Rightarrow 5y = 3i-2+z \Rightarrow$ $5y = -\frac{5}{6} + \frac{13}{3}i \Rightarrow y = -\frac{1}{6} + \frac{13}{15}i \in \mathbb{C}$
- De la primera fila tenemos que $3x - y + 2z = 1 \Rightarrow 3x = 1-2z+y \Rightarrow$ $3x = -\frac{3}{2} - \frac{9}{5}i \Rightarrow x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{5}i \in \mathbb{C}$

Por lo tanto, las soluciones en $\mathbb{C}$ resultan:

$$x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{5}i,\quad y = -\frac{1}{6} + \frac{13}{15}i,\quad z = \frac{7}{6} + \frac{4}{3}i$$

mientras que las soluciones en $\mathbb{R}$ son $\emptyset$ (Es decir, no tiene solución en $\mathbb{R}$).

$\boxed{13}$ En cada caso decidir si los sistemas son equivalentes y si lo son, expresar cada ecuación del primer sistema como combinación lineal de las ecuaciones del segundo sistema.

(a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $\qquad$ (b) $\begin{cases} -x - y + 4z = 0 \\ x + 3y + 8z = 0 \\ \frac{1}{2}x + y + \frac{5}{2}z = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$

Idea de la solución: Para $\boxed{a}$, notemos que los sistemas tienen matrices asociadas A y B donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $A \sim I$, donde I es la identidad. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir, también $B \sim I$. Dado que $\sim$ es una relación de equivalencia se sigue que $A \sim B$.

Para $\boxed{c}$, cada sistema tiene matriz asociada

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1/2 & 1 & 5/2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nuevamente, por su lado:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

con lo cual $A \sim I$. Por otro lado, $B \not\sim I$, que permite concluir que $A \not\sim B$

TRABAJO PRACTICO N°3

1 Sean las matrices

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 5\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(a) Calcular los productos AB, BA, ABC, ACB

Solución: Aplicando la definición de producto de matrices resulta

$$A.B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{5} & 1 & 4\\ 6 & 4 & 9\\ 4 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

Por ejemplo, los elementos de la primera fila de AB se obtienen como:

$$5 = 1.1 + (-2)(-2) + 0.1$$

$$1 = 1.1 + (-2).0 + 0.3$$

$$4 = 1.2 + (-2)(-1) + 0.5$$

y los demás valores de A.B se obtienen de manera similar. Análogamente:

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{4} & -8 & -1\\ -3 & 6 & 1\\ 9 & -18 & -2\end{bmatrix}$$

Por ejemplo, los elementos de la primer fila de B.A se obtienen como:

$$4 = 1.1 + 1.1 + 2.1$$

$$-8 = 1.(-2) + 1.(-2) + 2.(-2)$$

$$-1 = 1.0 + 1.1 + 2.(-1)$$

Notemos que $AB \neq BA$ y por lo tanto el producto de matrices no necesariamente es conmutativo. Ahora:

$$AC=\begin{bmatrix}-7 & -7 & -14\\ -3 & -4 & -13\\ -11 & -5 & -15\end{bmatrix}\qquad ABC=\begin{bmatrix}47 & 1 & 33\\ 90 & 4 & 69\\ 4 & -8 & -3\end{bmatrix}\qquad ACB=\begin{bmatrix}-7 & -49 & -77\\ 2 & -42 & -62\\ -16 & -56 & -92\end{bmatrix}$$

[3] Dar ejemplos de matrices no nulas A y B de orden 2×2 tales que

(a) $A^2 = 0$ (Dar dos ejemplos) (c) $A^2 = -Id$

(b) $AB \neq BA$ (d) $A^2 = A \neq Id$.

Solución: Veamos (a), tomando la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces resulta que:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0+1.0 & 0.1+0.1 \\ 0.0+0.0 & 0.1+0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto $A^2 = 0$. La otra matriz queda como ejercicio.

Veamos (b). Para ello, tomemos A y B como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$A.B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde mostramos que $A.B \neq B.A$.

Para (c), tomemos A como la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces, tenemos que:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De este modo, $A^2 = -Id$. Finalmente, para (d) tomemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y es fácil probar que $A^2 = A \neq Id$.

4 Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $AB = BA$ para todo $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Probar que A es un múltiplo de la identidad Id.

Solución: Tomemos $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, donde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Dado que $A.B = B.A$ para toda matriz $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, en particular se tiene que:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff c = b = 0$$

Luego $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ donde $a, d \in \mathbb{R}$. De manera similar, para $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ resulta que:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff a = d.$$

Así, $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = a\,Id$, $a \in \mathbb{R}$ tal como se quería probar.

5 Probar que si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ entonces $A.(B+C) = A.B + AC$

Solución: Por un lado, denotemos $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $C = (c_{jk})$ respectivamente donde $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, $1 \le k \le p$. Tenemos que:

(i) $B+C$ es una matriz de orden $n\times p$ cuya entrada j,k es igual a

$$(B+C)_{jk} = b_{jk} + c_{jk}$$

(ii) $A.B$ es una matriz de orden $m\times p$ cuya entrada i,k con $1 \le i \le m$, $1 \le k \le p$ es

$$(A.B)_{ik} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sk}$$

(iii) Del mismo modo, $A.C$ es una matriz de orden $m\times n$ donde la entrada i,k es

$$(A.C)_{i,k} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} c_{sk}$$

De este modo, tenemos lo siguiente:

(iv) $A\cdot(B+C)$ es una matriz de orden $m\times p$ cuya entrada i,k es igual a:

$$[A\cdot(B+C)]_{i,k} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot(B+C)_{s,k}$$
$$= \sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot(b_{s,k}+c_{s,k})$$
$$= \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk} + a_{is}c_{sk}$$
$$= \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk} + \sum_{s=1}^{n} a_{is}c_{sk}$$
$$= (A\cdot B)_{ik} + (A\cdot C)_{ik}$$

tal como se quería probar. $\triangledown$

[7] Si A es una matriz cuadrada de orde $n\times n$, se define la traza de A como

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(a) Calcular la traza de las matrices A, B, C del ejercicio [1] y las obtenidas en el ítem [1a]

Solución: Aplicando la definición de traza, resulta que:

- $Tr(A) = 1 + (-2) + (-1) = -2$
- $Tr(B) = 1 + 0 + 5 = 6$
- $Tr(C) = 1 + 0 + 1 = 2$
- $Tr(AB) = 5 + 4 + (-1) = 8$
- $Tr(BA) = 4 + 6 + (-2) = 8$
- $Tr(AC) = -7 + (-4) + (-15) = -26.$

(b) Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces $Tr(AB) = Tr(BA)$

Solución: Nuevamente, recurriendo a la definición de producto de matrices en conjunto con la definición de la traza, resulta que

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} (A\cdot B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} (a_{is}b_{si})$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} (b_{si}a_{is}) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (b_{si}a_{is})$$
$$= \sum_{s=1}^{n} (BA)_{ss} = Tr(BA)$$

con lo cual $Tr(AB) = Tr(BA)$ $\triangledown$

$\boxed{8}$ Para cada una de las siguientes matrices, usar operaciones elementales por filas para decidir si son invertibles y hallar la inversa cuando sea posible.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a aplicar el método de Gauss sobre la matriz ampliada $[A|I]$, donde I es la identidad del mismo orden que A. Si A es invertible entonces es reducible por filas a la identidad

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[3F_3 - F_1]{3F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{5F_3 + 8F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad -18}_{*} & & & -21 & 24 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 8 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{3F_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & -3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 8 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 + F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & -3 & 0 & -4 & 8 & 5 \\ 0 & 5 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 8 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{6F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & -3 & 0 & -4 & 8 & 5 \\ 0 & 30 & -6 & -12 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 8 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & -3 & 0 & -4 & 8 & 5 \\ 0 & 30 & 0 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 8 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{10}F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 3 & 0 & -4 & 8 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 8 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 - F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & -9/2 & 9 & 9/2 \\ 0 & 3 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 8 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\frac{1}{3}F_2 \\ -\frac{1}{6}F_3}]{\frac{1}{9}F_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/3 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 7/6 & -4/3 & -5/6 \end{array}\right] = [I|A^{-1}]$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{**}$$

Tenemos así que la inversa de A está dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/6 & 1/3 & -1/6 \\ 7/6 & -4/3 & -5/6 \end{bmatrix}$$

Para calcular la inversa, cuando sea posible, hacemos lo siguiente:

(i) Tomamos la matriz ampliada $[A|I]$ donde I es la identidad del mismo orden que A

(ii) Mediante operaciones elementales, llevamos a $[A|I]$ para una matriz de la forma $[\tilde{A}|N]$, donde $\tilde{A}$ es triangular superior, tal como podemos ver en *

(iii) Miramos la diagonal de $\tilde{A}$. Si algún elemento en la diagonal es cero entonces terminamos el proceso y A no es invertible.

(iv) Si los elementos de la diagonal de $\tilde{A}$ son todos no nulos, continuamos aplicando operaciones elementales hasta obtener una matriz de la forma $[I|\hat{A}]$

De este modo, resulta que $A^{-1} = \hat{A}$ tal como en **

Veamos ahora la matriz B

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{2F_2-4F_1 \\ 2F_3-6F_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -22 & 8 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -22 & 8 & -6 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}\cdot F_2 \\ \frac{1}{2}F_3}]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[11F_3-11F_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 11 & -11 \end{array}\right]$$

Por lo tanto B no es invertible.

9. Sea A la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hallar matrices elementales $E_1, \dots, E_k$ tales que $E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1 \cdot A = I$.

Solución: Vamos a realizar ciertos pasos y la idea es que el método de Gauss para llevar $[A|I]$ a $[I|A^{-1}]$ como en el ejercicio anterior

(1) Sumar a la fila F_2 la fila $3F_1$ es lo mismo que multiplicar A por:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

En efecto:

$$E_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Resta colocar 0 al valor 2 que está recuadrado en la matriz $E_1 . A$.

(2) Multiplicar por $\frac{1}{4}$ a la segunda fila de $E_1 . A$ es lo mismo que multiplicar por la matriz elemental.

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

En efecto:

$$E_2 . E_1 . A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) Finalmente, restar $2F_2$ a F_1 en $E_2 . E_1 . A$ es lo mismo que multiplicar por la matriz elemental:

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En efecto:

$$E_3 . E_2 . E_1 . A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De donde tenemos calculadas las E_k tales que el producto por A es I.

[11] Sean v, w dos soluciones del sistema homogeneo $AX=0$. Probar que $v+tw$ también es solución para todo $t\in\mathbb{R}$.

Solución: En efecto, como v y w son soluciones, se tiene que

$$Av=0 \ , \ Aw=0$$

Por lo tanto, para todo $t\in\mathbb{R}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} A(v+tw) &= A\cdot v + A\cdot(tw) \\ &= A\cdot v + t(Aw) \\ &= 0+0 = 0 \end{aligned}$$

mostrando que $v+tw$ también es solución de $AX=0$

[12] Sea v una solución del sistema $AX=Y$ y w una solución del sistema homogeneo $AX=0$. Probar que $v+tw$ también es solución de $AX=Y$ para todo $t\in\mathbb{R}$

Solución: De manera similar al ejercicio anterior, resulta que:

$$Av=Y \ ; \ Aw=0$$

Luego, para todo $t\in\mathbb{R}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} A(v+tw) &= Av + t(Aw) \\ &= Y+0 \\ &= Y \end{aligned}$$

mostrando que $v+tw$ es solución de $AX=Y$.

[14] Sean $A\in\mathbb{R}^{r\times n}$ y $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$ respectivamente. Probar que

(a) Si v es solución de $BX=Z$ y Z es solución de $AX=Y$, entonces v es solución de $(AB)X=Y$.

Solución: En efecto, sabemos por hipotesis que

$$Bv=Z \ ; \ AZ=Y$$

Por lo tanto:

$$(A\cdot B)v = A\,(Bv) = AZ = Y$$

mostrando que v es solución de $(A\cdot B).X=Y$.