Álgebra/Álgebra II/Álgebra Lineal
Clase 15 - Espacios vectoriales 1

FAMAF / UNC

11/5/21

1. Objetivos
2. Espacios vectoriales
   - Definición
   - Ejemplo: vectores en $\mathbb{K}^n$ y matrices
   - Ejemplo: Polinomios
   - Ejemplo: Espacio de funciones
   - Ejemplo raro
   - Propiedades
3. Subespacios vectoriales
   - Definición
   - Ejemplos: Conjuntos de soluciones de sistemas homogéneos
   - Propiedades
   - Ejemplos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
   - Ejemplos: Polinomios y funciones

En este archivo introduciremos los espacios vectoriales, los subespacios vectoriales y daremos ejemplos.

Este archivo se basa en la Secciones 3.1 y 3.2 del *Apunte* disponibles en classroom, siguiendo la misma numeración.

Recordar que escribimos $\mathbb{K}$ para referirnos a $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ al mismo tiempo.

1. Objetivos

2. Espacios vectoriales
   - Definición
   - Ejemplo: vectores en $\mathbb{K}^n$ y matrices
   - Ejemplo: Polinomios
   - Ejemplo: Espacio de funciones
   - Ejemplo raro
   - Propiedades

3. Subespacios vectoriales
   - Definición
   - Ejemplos: Conjuntos de soluciones de sistemas homogéneos
   - Propiedades
   - Ejemplos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
   - Ejemplos: Polinomios y funciones

Sabemos sumar y multiplicar por escalares:

- Vectores en $\mathbb{K}^n$
- Matrices
- Polinomios
- Funciones

Estas operaciones satisfacen las mismas propiedades

- asociatividad
- conmutatividad
- distributividad
- neutro y opuesto

Para estudiar todas estas estructuras al mismo tiempo, sin distinguir si son vectores, matrices, polinomios, funciones introducimos el concepto Espacio vectorial.

1 Objetivos

2 Espacios vectoriales
- Definición
- Ejemplo: vectores en $\mathbb{K}^n$ y matrices
- Ejemplo: Polinomios
- Ejemplo: Espacio de funciones
- Ejemplo raro
- Propiedades

3 Subespacios vectoriales
- Definición
- Ejemplos: Conjuntos de soluciones de sistemas homogéneos
- Propiedades
- Ejemplos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Ejemplos: Polinomios y funciones

Definición 3.1.1

Un espacio vectorial (sobre $\mathbb{K}$) o un $\mathbb{K}$-espacio vectorial es un conjunto V que tiene dos operaciones que satisfacen ciertos axiomas. Llamaremos vectores a los elementos de V.

Ejemplo

$\mathbb{R}^n$

Operaciones

- Suma de vectores: Dados $v, w \in V$ los podemos sumar obteniendo un nuevo vector $v + w \in V$ $+$
- Producto por escalares: Dado $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ podemos multiplicar a v por λ obteniendo nuevo vector $\lambda \cdot v \in V$ $\cdot$

Axiomas

- $+$ es conmutativa, asociativa, existe neutro y opuesto
- $\cdot$ es asociativa, distributiva y tiene neutro.

Sean $u, v, w \in W$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Los axiomas son

- Conmutatividad: $v + w = w + v$
- Asociatividad: $u + (v + w) = (u + v) + w$
- Neutro: Existe un vector, que denotaremos 0, tal que $0 + v = v$.
- Opuesto: Para cada vector v, existe otro vector denotado $-v$ tal que $v + (-v) = 0$
- Neutro: $1 \cdot v = v$
- Asociatividad: $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$
- Distributividad: $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$
- Distributividad: $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

Observación

Son como los axiomas de $\mathbb{R}$ salvo que NO multiplicamos vectores entre si.

Convenciones

- $\lambda v = \lambda \cdot v$
- $-v$ se llama el opuesto de v
- Gracias a la asociatividad de $+$ y $\cdot$ podemos obviar los paréntesis
- $w - v = w + (-v)$, en palabras "w menos v" significa "w más el opuesto de v"

1. Objetivos
2. Espacios vectoriales
   - Definición
   - Ejemplo: vectores en $\mathbb{K}^n$ y matrices
   - Ejemplo: Polinomios
   - Ejemplo: Espacio de funciones
   - Ejemplo raro
   - Propiedades
3. Subespacios vectoriales
   - Definición
   - Ejemplos: Conjuntos de soluciones de sistemas homogéneos
   - Propiedades
   - Ejemplos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
   - Ejemplos: Polinomios y funciones

Ejemplo

$V = \mathbb{K}^n$

El conjunto de vectores o n-uplas $\mathbb{K}^n$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con las operaciones que hemos definido en la Clase 02.

- Sumar coordenada a coordenada
- Multiplicar cada coordenada por el escalar dado.

$n = 1$. $V = \mathbb{K}$ es $\mathbb{K}$-esp vect.

$\hookrightarrow$ $\mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-esp vect

Además

$\mathbb{C}$ es $\mathbb{R}$-esp vect

$w + z$ sumamos complejos

$2 \cdot z$ mult complejos por reales

$\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$

Ejemplo

$V = \mathbb{K}^{m \times n}$

El conjunto de matrices $\mathbb{K}^{m \times n}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con las operaciones que hemos definido en la Clase 09.

- Sumar coordenada a coordenada
- Multiplicar cada coordenada por el escalar dado.

1 Objetivos

2 Espacios vectoriales
- Definición
- Ejemplo: vectores en $\mathbb{K}^n$ y matrices
- Ejemplo: Polinomios
- Ejemplo: Espacio de funciones
- Ejemplo raro
- Propiedades

3 Subespacios vectoriales
- Definición
- Ejemplos: Conjuntos de soluciones de sistemas homogéneos
- Propiedades
- Ejemplos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Ejemplos: Polinomios y funciones

Ejemplo

El conjunto de polinomios sobre $\mathbb{K}$

$$V = \mathbb{K}[x] = \left\{ a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N},\, a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{K} \right\}$$

con la suma y multiplicación usual es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

- Suma coeficiente a coeficiente

$$\left(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \right) + \left(b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 \right) =$$
$$= (a_n + b_n) x^n + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

- Multiplicación coeficiente a coeficiente

$$\lambda \cdot (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) =$$
$$= (\lambda a_n) x^n + \cdots + (\lambda a_1) x + (\lambda a_0)$$

Ejemplo

El conjunto de polinomios sobre $\mathbb{K}$

$$\mathbb{K}[x] = \left\{ a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N},\, a_n, ..., a_0 \in \mathbb{K} \right\}$$

con la suma y multiplicación usual es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

- El neutro es el polinomio con todos coeficientes cero

$$0 = 0x^n + \cdots + 0x + 0$$

- El opuesto del polinomio $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ es

$$(-a_n)x^n + \cdots + (-a_1)x + (-a_0)$$

Observación

- Si x^i no aparece en la expresión de un polinomio quiere decir que el respectivo coeficiente a_i es cero. Por ejemplo:

$$x^2 + 1 = x^2 + 0x + 1$$

- Para sumar polinomios no es necesario que tengan el mismos grado. Por ejemplo:

$$(x^2 + 1) + (x^5 + 2x^2 + 5x + 2) = x^5 + 3x^2 + 5x + 3$$

1 Objetivos

2 Espacios vectoriales
- Definición
- Ejemplo: vectores en $\mathbb{K}^n$ y matrices
- Ejemplo: Polinomios
- Ejemplo: Espacio de funciones
- Ejemplo raro
- Propiedades

3 Subespacios vectoriales
- Definición
- Ejemplos: Conjuntos de soluciones de sistemas homogéneos
- Propiedades
- Ejemplos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Ejemplos: Polinomios y funciones

Ejemplo

El espacio de funciones es el conjunto

$$F(\mathbb{R}) = \left\{ \text{funciones } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \right\}.$$

Este es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con con la suma y producto por escalar "punto a punto" (las operaciones definidas en Analisis Matemático I).

Si $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

- $f + g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- $\lambda \cdot f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función definida por

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$

Ejemplo

El espacio de funciones es el conjunto

$$F(\mathbb{R}) = \Big\{\text{funciones } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\Big\}.$$

Este es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con con la suma y producto por escalar "punto a punto" (las operaciones definidas en Analisis Matemático I).

Si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces

- $-f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ es la función definida por

$$(-f)(x) = -f(x)$$

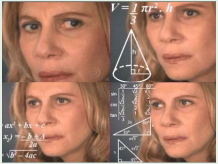
- El elemento neutro es la función constante igual a cero, la cual denotamos 0

1. Objetivos
2. Espacios vectoriales
   - Definición
   - Ejemplo: vectores en $\mathbb{K}^n$ y matrices
   - Ejemplo: Polinomios
   - Ejemplo: Espacio de funciones
   - Ejemplo raro
   - Propiedades
3. Subespacios vectoriales
   - Definición
   - Ejemplos: Conjuntos de soluciones de sistemas homogéneos
   - Propiedades
   - Ejemplos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
   - Ejemplos: Polinomios y funciones

Ejemplo

El conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las siguientes operaciones:

- $x \oplus y = x \cdot y$
  (la "suma" es la multiplicación)
- $\lambda \odot x = x^{\lambda}$
  (la "multiplicación" es la potenciación)



Para demostrar que este conjunto con estas operaciones es un espacio vectorial debemos verificar que satisface todos los axiomas. A modo de ejemplo podemos verificar alguno:

Asoc $\oplus$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (y \cdot z) = x \cdot (y \cdot z)$$
$$= (x \cdot y) \cdot z$$
$$= (x \oplus y) \cdot z$$
$$= (x \oplus y) \oplus z$$

1 Objetivos

2 Espacios vectoriales
- Definición
- Ejemplo: vectores en $\mathbb{K}^n$ y matrices
- Ejemplo: Polinomios
- Ejemplo: Espacio de funciones
- Ejemplo raro
- Propiedades

3 Subespacios vectoriales
- Definición
- Ejemplos: Conjuntos de soluciones de sistemas homogéneos
- Propiedades
- Ejemplos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Ejemplos: Polinomios y funciones

Proposición 3.1.2

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Entonces

1. $\lambda \cdot 0 = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$
2. $0 \cdot v = 0$ para todo $v \in V$
3. Si $\lambda \cdot v = 0$ entonces $\lambda = 0$ ó $v = 0$
4. $(-1) \cdot v = -v$, en palabras, -1 por v es igual al opuesto de v

Demsotración: en las siguientes filminas.

Observación

La demostración es idéntica a las propiedades análogas de los números reales dado que lo único que usamos son los axiomas!

1) $\lambda 0 = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda 0 = \lambda(0+0) = \lambda 0 + \lambda 0$$

elem neutro de V   Dist

sumando miembro a miembro

$-\lambda 0$ (el opuesto de $\lambda 0$)

$$\Rightarrow \quad \lambda 0 - \lambda 0 = \lambda 0 + \lambda 0 - \lambda 0$$

$$\boxed{0 = \lambda 0}$$

2) $0 \cdot v = 0 \quad \forall v \in V$

la demostración es análoga pero usamos $0v = (0+0)v$

3) Si $\lambda \cdot V \overset{*}{=} 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ó $V = 0$

Dm: Tenemos 2 posibilidades

$\lambda = 0 \Rightarrow$ ya esta ✓

ó

$\lambda \neq 0$ Vamos a demostrar que $V = 0$.

$\Rightarrow \exists \lambda^{-1} \in \mathbb{R}$ tq $\lambda^{-1} \cdot \lambda = 1$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{axioma} \\ \text{esp vect.}}}{V = 1 \cdot V} = (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot V \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Asoc}}}{=} \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot V) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hipo } *}}{=} \lambda^{-1} \cdot 0 \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{=} 0$$

$\Downarrow$

$$V = 0$$

(4) $(-1)\cdot v = -v$

Dm $\quad 0 = 1 + (-1)$ en $\mathbb{K}$

$\Rightarrow \underset{\text{en } V}{0 \overset{(2)}{=}} 0\cdot v = (1+(-1))v$ $\downarrow$ Dist

$= 1\cdot v + (-1)v$ $\downarrow$ axioma $1v = v$

$0 = v + (-1)v$

$\Rightarrow (-1)\cdot v$ tiene que ser el op de v

$\Rightarrow (-1)\cdot v = -v$.

1. Objetivos

2. Espacios vectoriales
   - Definición
   - Ejemplo: vectores en $\mathbb{K}^n$ y matrices
   - Ejemplo: Polinomios
   - Ejemplo: Espacio de funciones
   - Ejemplo raro
   - Propiedades

3. Subespacios vectoriales
   - Definición
   - Ejemplos: Conjuntos de soluciones de sistemas homogéneos
   - Propiedades
   - Ejemplos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
   - Ejemplos: Polinomios y funciones

Los subconjuntos de un espacio vectorial que son invariantes o cerrados por la suma y la multiplicación por escalar tienen un rol destacado.

Tal es el caso del conjunto de soluciones de un sistema homogéneo y los autoespacios.

A este tipo de subconjuntos los llamaremos subespacios vectoriales.

Definición 3.2.1

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Un subconjunto $W \subset V$ se dice que es un $\mathbb{K}$-subespacio de V si

1. $W \neq \emptyset$
2. W es cerrado por la suma:
$$\text{Si } v, w \in W, \text{ entonces } v + w \in W$$
3. W es cerrado por la multiplicación por escalares:
$$\text{Si } v \in W \text{ y } \lambda \in \mathbb{K}, \text{ entonces } \lambda \cdot v \in W$$

1 Objetivos

2 Espacios vectoriales
- Definición
- Ejemplo: vectores en $\mathbb{K}^n$ y matrices
- Ejemplo: Polinomios
- Ejemplo: Espacio de funciones
- Ejemplo raro
- Propiedades

3 Subespacios vectoriales
- Definición
- Ejemplos: Conjuntos de soluciones de sistemas homogéneos
- Propiedades
- Ejemplos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Ejemplos: Polinomios y funciones

Ejemplo

$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0,\, x + z = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Demostración: Verifiquemos que satisface los 3 puntos de la definición de subesp.

① $W \neq \emptyset$ $(1,-1,-1) \in W \ni (0,0,0)$

② Cerrado por $+$ Si $v = (x, y, z) \in W$

$w = (a, b, c) \in W$

Tenemos que ver que $v + w = (x+a, y+b, c+z) \in W$

Para saber si $v + w \in W$ debemos ver si satisface las ecuaciones

1) $(x+a)+(y+b) = (x+y)+(a+b) = 0+0 = 0$

2) $(x+a)+(z+c) = (x+z)+(a+c) = 0+0 = 0$

$\Rightarrow v+w \in W$

③ Cerrada por prod por escalar

Sea $v = (x,y,z) \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

¿ $\lambda v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in W$?

1°) $(\lambda x)+(\lambda y) = \lambda(x+y) = \lambda 0 = 0$

2°) $(\lambda x)+(\lambda z) = \lambda(x+z) = \lambda 0 = 0$

$\Rightarrow \lambda \cdot v \in W$

Ej $v = (1,-1,-1)$ y $\lambda = 3$

$\Rightarrow 3v = (3,-3,-3) \in W$

El ejemplo anterior es un caso particular de lo siguiente.

Ejemplo

Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. El conjunto de soluciones del sistema $AX = 0$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$. $W = \text{Sol}(AX = 0)$

Demostración: Ejercicio 11 del Práctico 3.

1) $W \neq \emptyset$ porque 0 siempre es sol

2) Si v y w son sol $\Rightarrow$ $Av = 0$, $Aw = 0$

$\Rightarrow A(v+w) = Av + Aw = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow$ $v + w$ también es sol

3) Si v es sol y $\lambda \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow$ λv también es sol

1 Objetivos

2 Espacios vectoriales
- Definición
- Ejemplo: vectores en $\mathbb{K}^n$ y matrices
- Ejemplo: Polinomios
- Ejemplo: Espacio de funciones
- Ejemplo raro
- Propiedades

3 Subespacios vectoriales
- Definición
- Ejemplos: Conjuntos de soluciones de sistemas homogéneos
- **Propiedades**
- Ejemplos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Ejemplos: Polinomios y funciones

Observación

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Si un subconjunto $W \subset V$ satisface

1. $W \neq \emptyset$ y
2. Si $v, w \in W$ y $t \in \mathbb{K}$, entonces $v + tw \in W$,

entonces W es un subespacio.

Demostración: ① $W \neq \emptyset$ por hipo.

② Cerrado por la suma. Si $t = 1$ en la hipotesis tenemos que

$$v + 1 \cdot w = v + w \in W \quad \forall v, w \in W$$

③ Cerrado por la mult por escalar. Si tomamos $v = 0$ en la hipo

$$0 + t \cdot w = t \cdot w \in W \quad \forall w \in W,\ t \in \mathbb{K}$$

Ejemplo

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalor de A. El autoespacio V_λ asociado a λ es un subespacio de $\mathbb{K}^n$.

Demostración: el conjunto es no vacío porque, por definición de autoespacio, el vector nulo siempre esta.

La segunda condición de la Observación anterior es exactamente el Teorema 2.9.4 que probamos en la Clase 14. Pues este afirmaba que si v y w pertenecen al autoespacio V_λ, entonces $v + tw$ también pertenece para todo $t \in \mathbb{K}$

Observación 3.2.2

Si W un subespacio vectorial de V, entonces $0 \in W$ (es decir, el elemento neutro de V pertence a W).

Demostración: Como $W \neq \emptyset$ podemos tomar algún $v \in W$

$\Rightarrow$ $0 \cdot v \in W$ porque W es cerr por mult por esc.

Proposición $\rightarrow$ $\|$

$0 \in W$ $\boxtimes$

Consecuencia

Sea V es un espacio vectorial y W un subconjunto. Si $0 \notin W$, entonces W no es un subespacio vectorial.

Ejemplo

porq $(0,0) \notin W$

$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{x^2 + y^2 = 1}\}$ NO es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Observación 3.2.3

Si W es un subespacio vectorial de V y $w \in W$, entonces el opuesto de w pertenece al subespacio, es decir $-w \in W$.

Dem Por def de subesp

$$(-1)\cdot w \in W$$
$$\|$$
$$-w \in W \quad \blacksquare$$

Proposición

Teorema 3.2.4

Sea V un espacio vectorial y $W \subset V$ un subespacio. Entonces W es un espacio vectorial con las operaciones suma y producto por escalares de V.

Demostración: para que W sea un espacio vectorial debemos verificar que las operaciones satisfacen los axiomas.

Dado que son las mismas operaciones de V, entonces satisface evidentemente los axiomas de conmutatividad, asociatividad y distributividad.

Además, tiene elemento neutro porque la Observación anterior nos asegura que el vector 0 pertenece a W.

Para finalizar, notemos que todo vector de W tiene un opuesto gracias a la Observación 3.2.3.

Consecuencia

Todos los resultados que probemos para espacios vectoriales valen para subespacios vectoriales.

Teorema 3.2.8

Sea V un espacio vectorial. La intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial

Demostración:

Observación

La unión de subespacios NO es necesariamente un subespacio.

En la Práctica 6 hay ejercicios en lo que van a ver esto.

1 Objetivos

2 Espacios vectoriales
- Definición
- Ejemplo: vectores en $\mathbb{K}^n$ y matrices
- Ejemplo: Polinomios
- Ejemplo: Espacio de funciones
- Ejemplo raro
- Propiedades

3 Subespacios vectoriales
- Definición
- Ejemplos: Conjuntos de soluciones de sistemas homogéneos
- Propiedades
- Ejemplos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Ejemplos: Polinomios y funciones

En los siguientes ejemplos vemos que en subespacios hay que tener en cuenta si los escalares son reales o complejos

Ejemplo

$W = \mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$-subespacio vectorial de $V = \mathbb{C}$

Pues $\mathbb{R} \neq \emptyset$ y si sumamos y multiplicamos números reales siguen siendo números reales.

No ejemplo

$W = \mathbb{R}$ NO es un $\mathbb{C}$-subespacio vectorial de $V = \mathbb{C}$

Por ejemplo, si multiplicamos 1 por i nos salimos de $\mathbb{R}$:

$$i \cdot 1 = i \notin \mathbb{R}.$$

1. Objetivos
2. Espacios vectoriales
   - Definición
   - Ejemplo: vectores en $\mathbb{K}^n$ y matrices
   - Ejemplo: Polinomios
   - Ejemplo: Espacio de funciones
   - Ejemplo raro
   - Propiedades
3. Subespacios vectoriales
   - Definición
   - Ejemplos: Conjuntos de soluciones de sistemas homogéneos
   - Propiedades
   - Ejemplos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
   - Ejemplos: Polinomios y funciones

Ejemplo

El conjunto $\mathbb{K}_n[x]$ formado por los polinomios de grado estrictamente menor que $n \in \mathbb{N}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}[x]$.

Demostración: $\mathbb{K}_n[x]$ es no vacío porque el polinomio nulo tiene grado cero que es menor a n.

Además, si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios de grado estrictamente menor a n entonces el grado de $p(x) + \lambda q(x)$ también es menor estricto a n para todo $t \in \mathbb{K}$.

Ejemplo

Las funciones derivables forman un subespacio del espacio de funciones $F(\mathbb{R})$.

Demostración: la función constantemente cero es derivable.

Además, en Analisis Matemático I han visto que la suma de funciones derivables es derivables y lo mismo pasa si multiplicamos una función derivable por un escalar.


Y recuerden:
lo importante son
los axiomas!
¡Hasta la próxima, amigxs!