Teoría de Probabilidad

Maestría en Estadística Aplicada y Ciencia de datos

Julio Hurtado, Msc.

UTB

2022

Probabilidad elemental – Parte 4

Distribución Uniforme Discreta

- Si Y es una variable aleatoria discreta cuyo soporte es el conjunto $\{y_1, y_2 \ldots, y_n\}$ y tiene distribución uniforme discreta, entoces escribiremos $Y \sim U\{y_1, y_2 \ldots, y_n\}$
- La función de probabilidad de Y es

$$P\{Y = y\} = 1/n$$

paa $y = y_1, y_2 \ldots, y_n$

- Por ejemplo: $Y \sim U(0, 1, \ldots, 9)$ se define como $P(U = j) = 1/10$, para $j = 0, 1, \ldots, 9$.
- Valor Esperado $E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j = \bar{y} = \frac{n+1}{2}$.
- Varianza $V(Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - E(Y))^2 = \frac{n^2-1}{12}$.

Distribución Uniforme Discreta

- Si Y es una variable aleatoria discreta cuyo soporte es el conjunto $\{y_1, y_2 \ldots, y_n\}$ y tiene distribución uniforme discreta, entoces escribiremos $Y \sim U\{y_1, y_2 \ldots, y_n\}$
- La función de probabilidad de Y es

$$P\{Y = y\} = 1/n$$

paa $y = y_1, y_2 \ldots, y_n$

- Por ejemplo: $Y \sim U(0, 1, \ldots, 9)$ se define como $P(U = j) = 1/10$, para $j = 0, 1, \ldots, 9$.
- Valor Esperado $E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j = \bar{y} = \frac{n+1}{2}$.
- Varianza $V(Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - E(Y))^2 = \frac{n^2-1}{12}$.

Distribución Uniforme Discreta

- Si Y es una variable aleatoria discreta cuyo soporte es el conjunto $\{y_1, y_2 \ldots, y_n\}$ y tiene distribución uniforme discreta, entoces escribiremos $Y \sim U\{y_1, y_2 \ldots, y_n\}$
- La función de probabilidad de Y es

  $$P\{Y = y\} = 1/n$$

  paa $y = y_1, y_2 \ldots, y_n$
- Por ejemplo: $Y \sim U(0, 1, \ldots, 9)$ se define como $P(U = j) = 1/10$, para $j = 0, 1, \ldots, 9$.
- Valor Esperado $E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} y_j = \bar{y} = \frac{n+1}{2}$.
- Varianza $V(Y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (y_j - E(Y))^2 = \frac{n^2-1}{12}$.

Distribución Uniforme Discreta

- Si Y es una variable aleatoria discreta cuyo soporte es el conjunto $\{y_1, y_2 \ldots, y_n\}$ y tiene distribución uniforme discreta, entoces escribiremos $Y \sim U\{y_1, y_2 \ldots, y_n\}$
- La función de probabilidad de Y es

$$P\{Y = y\} = 1/n$$

paa $y = y_1, y_2 \ldots, y_n$

- Por ejemplo: $Y \sim U(0, 1, \ldots, 9)$ se define como $P(U = j) = 1/10$, para $j = 0, 1, \ldots, 9$.
- Valor Esperado $E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j = \bar{y} = \frac{n+1}{2}$.
- Varianza $V(Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - E(Y))^2 = \frac{n^2-1}{12}$.

Distribución Uniforme Discreta

- Si Y es una variable aleatoria discreta cuyo soporte es el conjunto $\{y_1, y_2 \ldots, y_n\}$ y tiene distribución uniforme discreta, entoces escribiremos $Y \sim U\{y_1, y_2 \ldots, y_n\}$
- La función de probabilidad de Y es

$$P\{Y = y\} = 1/n$$

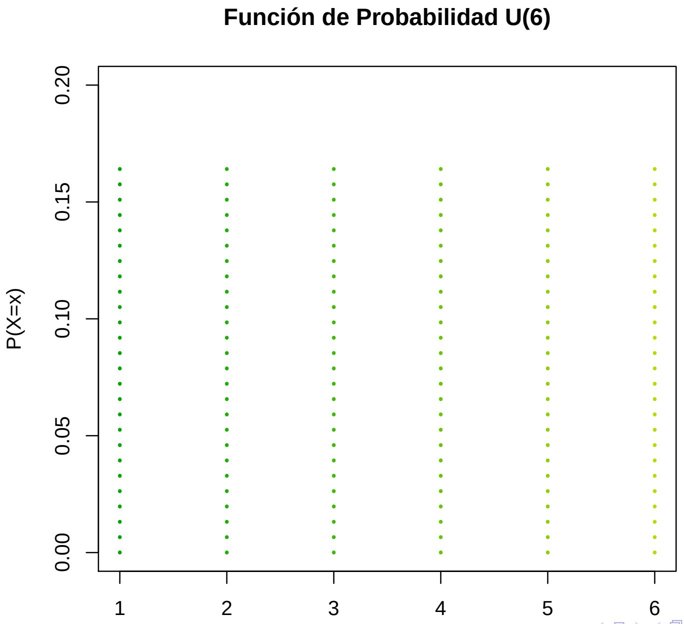
paa $y = y_1, y_2 \ldots, y_n$

- Por ejemplo: $Y \sim U(0, 1, \ldots, 9)$ se define como $P(U = j) = 1/10$, para $j = 0, 1, \ldots, 9$.
- Valor Esperado $E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j = \bar{y} = \frac{n+1}{2}$.
- Varianza $V(Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - E(Y))^2 = \frac{n^2-1}{12}$.

Ejemplo. Sea $X \sim U(6)$. Calcular la probabilidad de que $X = 2$

```
[1] 0.1666667
```

```
> x<-1:6
> plot(x,dunifdisc(x),type="h", lty  = 3, lwd  = 3, pch  = 16,
+      main="Función de Probabilidad U(6)", col=terrain.colors
```


Función de Probabilidad U(6)
P(X=x)
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
1
2
3
4
5
6

Distribución Uniforme

1. Encuentre $M_Y(t)$ si $Y \sim U(0,1,\ldots,9)$
2. Compruebe que la fgm de X_n es

$$M_{X_n}(t) = \begin{cases} \frac{1}{10^n}\frac{1-e^t}{1-e^{t10^{-n}}} & \text{para} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{para} \quad t = 0 \end{cases}$$

3. Compruebe que $M_{X_n}(t) \to \dfrac{e^t-1}{t}$, $n \to \infty$ cuando $t \neq 0$, utilizando la regla de L'Hopital

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{t10^{-n}}}{10^{-n}} = t \lim_{h\to 0} \frac{1-e^h}{h} = -t$$

4. Compruebe que si $X \sim U(0,1)$ entonces

$$M_X(t) = \begin{cases} \frac{e^t-1}{t} & \text{para} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{para} \quad t = 0 \end{cases}$$

5. Concluya que $X_n \xrightarrow{d} X$ donde $X \sim U(0,1)$.

Distribución Uniforme

- 1. Encuentre $M_Y(t)$ si $Y \sim U(0,1,\ldots,9)$
  2. Compruebe que la fgm de X_n es

$$M_{X_n}(t) = \begin{cases} \frac{1}{10^n}\frac{1-e^t}{1-e^{t10^{-n}}} & \text{para} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{para} \quad t = 0 \end{cases}$$

  3. Compruebe que $M_{X_n}(t) \to \dfrac{e^t - 1}{t}$, $n \to \infty$ cuando $t \neq 0$, utilizando la regla de L'Hopital

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{t10^{-n}}}{10^{-n}} = t \lim_{h\to 0} \frac{1-e^h}{h} = -t$$

  4. Compruebe que si $X \sim U(0,1)$ entonces

$$M_X(t) = \begin{cases} \frac{e^t-1}{t} & \text{para} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{para} \quad t = 0 \end{cases}$$

  5. Concluya que $X_n \xrightarrow{d} X$ donde $X \sim U(0,1)$.

.

Distribución Uniforme

- 1. Encuentre $M_Y(t)$ si $Y \sim U(0,1,\ldots,9)$
  2. Compruebe que la fgm de X_n es

$$M_{X_n}(t) = \begin{cases} \frac{1}{10^n}\frac{1-e^t}{1-e^{t10^{-n}}} & \text{para} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{para} \quad t = 0 \end{cases}$$

  3. Compruebe que $M_{X_n}(t) \to \dfrac{e^t - 1}{t}$, $n \to \infty$ cuando $t \neq 0$, utilizando la regla de L'Hopital

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - e^{t10^{-n}}}{10^{-n}} = t \lim_{h\to 0} \frac{1 - e^h}{h} = -t$$

  4. Compruebe que si $X \sim U(0,1)$ entonces

$$M_X(t) = \begin{cases} \frac{e^t-1}{t} & \text{para} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{para} \quad t = 0 \end{cases}$$

  5. Concluya que $X_n \xrightarrow{d} X$ donde $X \sim U(0,1)$.

Distribución Uniforme

- 1. Encuentre $M_Y(t)$ si $Y \sim U(0, 1, \ldots, 9)$
  2. Compruebe que la fgm de X_n es

$$M_{X_n}(t) = \begin{cases} \frac{1}{10^n} \frac{1-e^t}{1-e^{t10^{-n}}} & \text{para} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{para} \quad t = 0 \end{cases}$$

  3. Compruebe que $M_{X_n}(t) \to \dfrac{e^t - 1}{t}, n \to \infty$ cuando $t \neq 0$, utilizando la regla de L'Hopital

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - e^{t10^{-n}}}{10^{-n}} = t \lim_{h\to 0} \frac{1 - e^h}{h} = -t$$

  4. Compruebe que si $X \sim U(0, 1)$ entonces

$$M_X(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{para} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{para} \quad t = 0 \end{cases}$$

  5. Concluya que $X_n \xrightarrow{d} X$ donde $X \sim U(0, 1)$.

Distribución Uniforme

- 1. Encuentre $M_Y(t)$ si $Y \sim U(0, 1, \ldots, 9)$
  2. Compruebe que la fgm de X_n es

$$M_{X_n}(t) = \begin{cases} \frac{1}{10^n} \frac{1-e^t}{1-e^{t10^{-n}}} & \text{para} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{para} \quad t = 0 \end{cases}$$

  3. Compruebe que $M_{X_n}(t) \to \dfrac{e^t - 1}{t}, n \to \infty$ cuando $t \neq 0$, utilizando la regla de L'Hopital

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - e^{t10^{-n}}}{10^{-n}} = t \lim_{h\to 0} \frac{1 - e^h}{h} = -t$$

  4. Compruebe que si $X \sim U(0, 1)$ entonces

$$M_X(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{para} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{para} \quad t = 0 \end{cases}$$

  5. Concluya que $X_n \xrightarrow{d} X$ donde $X \sim U(0, 1)$.

.

Distribución binomial

- En lo que sigue del curso, estudiaremos algunas de las distribuciones de variables discretas mas comunes:
- **Binomial:** $Bin(n, p)$

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, \ldots, n.$$

- $E[X] = np, \; Var(X) = np(1-p)$
- $E[(X-\mu)^3] = np(1-3p+2p^2),$
- $E[(X-\mu)^4] = np(1-p)[1+3(n-2)p(1-p)]$

Distribución binomial

- En lo que sigue del curso, estudiaremos algunas de las distribuciones de variables discretas mas comunes:
- **Binomial:** $Bin(n, p)$

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, \ldots, n.$$

- $E[X] = np,\ Var(X) = np(1-p)$
- $E[(X-\mu)^3] = np(1-3p+2p^2),$
- $E[(X-\mu)^4] = np(1-p)[1+3(n-2)p(1-p)]$

Distribución binomial

- En lo que sigue del curso, estudiaremos algunas de las distribuciones de variables discretas mas comunes:
- **Binomial:** $Bin(n, p)$

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, \ldots, n.$$

- $E[X] = np, \; Var(X) = np(1-p)$
- $E[(X-\mu)^3] = np(1 - 3p + 2p^2),$
- $E[(X-\mu)^4] = np(1-p)[1 + 3(n-2)p(1-p)]$

Distribución binomial

- En lo que sigue del curso, estudiaremos algunas de las distribuciones de variables discretas mas comunes:
- **Binomial:** $Bin(n, p)$

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, \ldots, n.$$

- $E[X] = np$, $Var(X) = np(1-p)$
- $E[(X-\mu)^3] = np(1-3p+2p^2)$,
- $E[(X-\mu)^4] = np(1-p)[1+3(n-2)p(1-p)]$

Distribución binomial

- En lo que sigue del curso, estudiaremos algunas de las distribuciones de variables discretas mas comunes:
- **Binomial:** $Bin(n, p)$

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, \ldots, n.$$

- $E[X] = np,\ Var(X) = np(1-p)$
- $E[(X-\mu)^3] = np(1-3p+2p^2)$,
- $E[(X-\mu)^4] = np(1-p)[1+3(n-2)p(1-p)]$

```
> dbinom(6, 10, 0.5)
```

```
[1] 0.2050781
```

Distribución Geométrica

- **Geométrica:** $Geom(p)$

$$\mathbb{P}(X = x) = p(1-p)^{x-1} \qquad x = 1, 2, 3, \ldots.$$

$$E[X] = \frac{1}{p} \quad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Binomial negativa

- **Binomial negativa:** $NegBin(r, p)$

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, \qquad x = r, r+1, \ldots .$$

- $E[X] = \frac{r}{p}$, $Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

Binomial negativa

- **Binomial negativa:** $NegBin(r, p)$

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, \qquad x = r, r+1, \ldots.$$

- $E[X] = \frac{r}{p}$, $Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

Hipergeométrica

- **Hipergeométrica:** $Hiper(n, D, N)$

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad n - N + D \leq x \leq D.$$

$$E[X] = np, \quad Var(X) = np(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Poisson

- **Poisson:** $Poi(\lambda)$

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots .$$

$$E[X] = \lambda \qquad Var(X) = \lambda$$
$$E[(X-\lambda)^3] = \lambda \qquad E[(X-\lambda)^4] = 3\lambda^2 + \lambda$$


YAHWEH