Teoría de Probabilidad

Maestría en Estadística Aplicada

Julio Hurtado, Msc.

UTB

2020

Probabilidad elemental – Parte 5

variables continuas

- *Una variable aleatoria continua, toma valores en subintervalos o dentro de conjuntos generados por subintervalos de* $\mathbb{R}$.
- Algunos ejemplos de variables aleatorias continuas son:
  - Precio de un instrumento financiero.
  - Tiempo para que una compañía caiga en incumplimiento de sus obligaciones contractuales.
  - Rendimientos de un portafolio.
  - Considere el experimento de elegir un punto al azar dentro del disco de radio R centrado en el origen. Sea X la variable aleatoria que denota la distancia entre el punto elegido y el origen. Encuentre la función de distribución de X.

variables continuas

- U*na variable aleatoria continua, toma valores en subintervalos o dentro de conjuntos generados por subintervalos de* $\mathbb{R}$.
- Algunos ejemplos de variables aleatorias continuas son:
  - Precio de un instrumento financiero.
  - Tiempo para que una compañía caiga en incumplimiento de sus obligaciones contractuales.
  - Rendimientos de un portafolio.
  - Considere el experimento de elegir un punto al azar dentro del disco de radio R centrado en el origen. Sea X la variable aleatoria que denota la distancia entre el punto elegido y el origen. Encuentre la función de distribución de X.

variables continuas

- U*na variable aleatoria continua, toma valores en subintervalos o dentro de conjuntos generados por subintervalos de* $\mathbb{R}$.
- Algunos ejemplos de variables aleatorias continuas son:
  - Precio de un instrumento financiero.
  - Tiempo para que una compañía caiga en incumplimiento de sus obligaciones contractuales.
  - Rendimientos de un portafolio.
  - Considere el experimento de elegir un punto al azar dentro del disco de radio R centrado en el origen. Sea X la variable aleatoria que denota la distancia entre el punto elegido y el origen. Encuentre la función de distribución de X.

variables continuas

- U*na variable aleatoria continua, toma valores en subintervalos o dentro de conjuntos generados por subintervalos de* $\mathbb{R}$.
- Algunos ejemplos de variables aleatorias continuas son:
  - Precio de un instrumento financiero.
  - Tiempo para que una compañía caiga en incumplimiento de sus obligaciones contractuales.
  - Rendimientos de un portafolio.
  - Considere el experimento de elegir un punto al azar dentro del disco de radio R centrado en el origen. Sea X la variable aleatoria que denota la distancia entre el punto elegido y el origen. Encuentre la función de distribución de X.

variables continuas

- U*na variable aleatoria continua, toma valores en subintervalos o dentro de conjuntos generados por subintervalos de* $\mathbb{R}$.
- Algunos ejemplos de variables aleatorias continuas son:
  - Precio de un instrumento financiero.
  - Tiempo para que una compañía caiga en incumplimiento de sus obligaciones contractuales.
  - Rendimientos de un portafolio.
  - Considere el experimento de elegir un punto al azar dentro del disco de radio R centrado en el origen. Sea X la variable aleatoria que denota la distancia entre el punto elegido y el origen. Encuentre la función de distribución de X.

variables continuas

- U*na variable aleatoria continua, toma valores en subintervalos o dentro de conjuntos generados por subintervalos de* $\mathbb{R}$.
- Algunos ejemplos de variables aleatorias continuas son:
  - Precio de un instrumento financiero.
  - Tiempo para que una compañía caiga en incumplimiento de sus obligaciones contractuales.
  - Rendimientos de un portafolio.
  - Considere el experimento de elegir un punto al azar dentro del disco de radio R centrado en el origen. Sea X la variable aleatoria que denota la distancia entre el punto elegido y el origen. Encuentre la función de distribución de X.

variables continuas

Teorema

Una variable aleatoria, X, es una variable aleatoria continua si y sólo si su función de distribución, F, es continua en todo punto x.

- Como consecuencia del teorema anterior, tenemos que para cualesquiera números $a \leq b$.

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b)$$

variables continuas

Teorema

Una variable aleatoria, X, es una variable aleatoria continua si y sólo si su función de distribución, F, es continua en todo punto x.

- Como consecuencia del teorema anterior, tenemos que para cualesquiera números $a \leq b$.

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b)$$

Función de densidad caso continuo

- Una función de densidad (con respecto a la integración) es una función no negativa, $f \geq 0$, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

- Observemos que si f es una función de densidad, entonces la función, F, definida por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy, \qquad -\infty < x < \infty.$$

  es una función de distribución.

- No todas las funciones de distribución tienen asociadas una función de densidad, aquellas que sí la tienen son llamadas **absolutamente continuas**.

Función de densidad caso continuo

- Una función de densidad (con respecto a la integración) es una función no negativa, $f \geq 0$, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

- Observemos que si f es una función de densidad, entonces la función, F, definida por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy, \qquad -\infty < x < \infty.$$

  es una función de distribución.

- No todas las funciones de distribución tienen asociadas una función de densidad, aquellas que sí la tienen son llamadas **absolutamente continuas**.

Función de densidad caso continuo

- Una función de densidad (con respecto a la integración) es una función no negativa, $f \geq 0$, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

- Observemos que si f es una función de densidad, entonces la función, F, definida por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy, \qquad -\infty < x < \infty.$$

  es una función de distribución.

- No todas las funciones de distribución tienen asociadas una función de densidad, aquellas que sí la tienen son llamadas **absolutamente continuas**.

Función de densidad caso continuo

- De lo anterior, se sigue que para una variable aleatoria continua X con densidad f

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

- o de manera más general, si A es la unión (numerable) de intervalos disjuntos

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)dx.$$

- Finalmente, es importante señalar que si F es absolutamente continua, la densidad f no es única, ya que puede ser modificada en un conjunto finito de puntos (de manera más general, cualquier conjunto de medida cero) sin alterar el valor de la integral.

Función de densidad caso continuo

- De lo anterior, se sigue que para una variable aleatoria continua X con densidad f

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

- o de manera más general, si A es la unión (numerable) de intervalos disjuntos

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)dx.$$

- Finalmente, es importante señalar que si F es absolutamente continua, la densidad f no es única, ya que puede ser modificada en un conjunto finito de puntos (de manera más general, cualquier conjunto de medida cero) sin alterar el valor de la integral.

Función de densidad caso continuo

- De lo anterior, se sigue que para una variable aleatoria continua X con densidad f
$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$
- o de manera más general, si A es la unión (numerable) de intervalos disjuntos
$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)dx.$$
- Finalmente, es importante señalar que si F es absolutamente continua, la densidad f no es única, ya que puede ser modificada en un conjunto finito de puntos (de manera más general, cualquier conjunto de medida cero) sin alterar el valor de la integral.

Función de densidad caso continuo

- De lo anterior, se sigue que para una variable aleatoria continua X con densidad f
$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$
- o de manera más general, si A es la unión (numerable) de intervalos disjuntos
$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)dx.$$
- Finalmente, es importante señalar que si F es absolutamente continua, la densidad f no es única, ya que puede ser modificada en un conjunto finito de puntos (de manera más general, cualquier conjunto de medida cero) sin alterar el valor de la integral.
-

Función de densidad caso continuo: Ejemplo1

- Una variable aleatoria continua X tiene una función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k(6-3x) & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } x > 2. \end{cases}$$

1. Determinar el valor de k.
2. Hallar $P(X \leq 1)$; $P(X > 2)$; $P(X = 1/4)$; $P(1/3 \leq X \leq 2/3)$.
3. Calcular μ y σ.
4. Hallar la función de distribución $F(x)$.

Función de densidad caso continuo: Ejemplo1

- Una variable aleatoria continua X tiene una función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k(6-3x) & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } x > 2. \end{cases}$$

1. Determinar el valor de k.
2. Hallar $P(X \leq 1)$; $P(X > 2)$; $P(X = 1/4)$; $P(1/3 \leq X \leq 2/3)$.
3. Calcular μ y σ.
4. Hallar la función de distribución $F(x)$.

Función de densidad caso continuo: Ejemplo1

- Una variable aleatoria continua X tiene una función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k(6-3x) & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } x > 2. \end{cases}$$

1. Determinar el valor de k.
2. Hallar $P(X \leq 1)$; $P(X > 2)$; $P(X = 1/4)$; $P(1/3 \leq X \leq 2/3)$.
3. Calcular μ y σ.
4. Hallar la función de distribución $F(x)$.

Función de densidad caso continuo: Ejemplo1

- Una variable aleatoria continua X tiene una función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k(6-3x) & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } x > 2. \end{cases}$$

1. Determinar el valor de k.
2. Hallar $P(X \leq 1)$; $P(X > 2)$; $P(X = 1/4)$; $P(1/3 \leq X \leq 2/3)$.
3. Calcular μ y σ.
4. Hallar la función de distribución $F(x)$.

Función de densidad caso continuo: Ejemplo1

- Una variable aleatoria continua X tiene una función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k(6-3x) & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } x > 2. \end{cases}$$

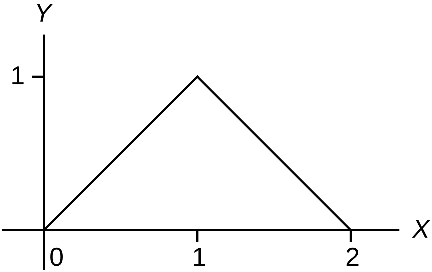
1. Determinar el valor de k.
2. Hallar $P(X \leq 1)$; $P(X > 2)$; $P(X = 1/4)$; $P(1/3 \leq X \leq 2/3)$.
3. Calcular μ y σ.
4. Hallar la función de distribución $F(x)$.

Función de densidad caso continuo: Solución (Ejemplo1)

1. $k = 1/6$.
2. $P(X \leq 1) = 0.75$, $P(X > 2) = 0$, $P(X = 1/4) = 0$ y $P(1/3 \leq X \leq 2/3) = 1/4$.
3. $\mu = 2/3$, $\sigma^2 = 2/9$ y $\sigma = \sqrt{2}/3$.
4. $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x - \frac{x^2}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{si } 2 < x. \end{cases}$$

Función de densidad caso continuo: Ejemplo2

- La función de densidad de la variable aleatoria continua X viene dada por la gráfica siguiente:

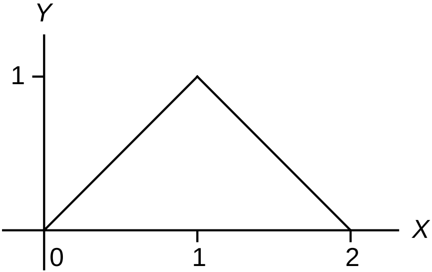


Calcular:

1. $P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{5}{4})$.
2. Función de distribución.
3. Media y desviación típica.

Función de densidad caso continuo: Ejemplo2

- La función de densidad de la variable aleatoria continua X viene dada por la gráfica siguiente:

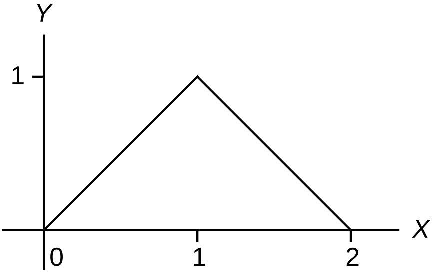


Calcular:

1. $P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{5}{4})$.
2. Función de distribución.
3. Media y desviación típica.

Función de densidad caso continuo: Ejemplo2

- La función de densidad de la variable aleatoria continua X viene dada por la gráfica siguiente:

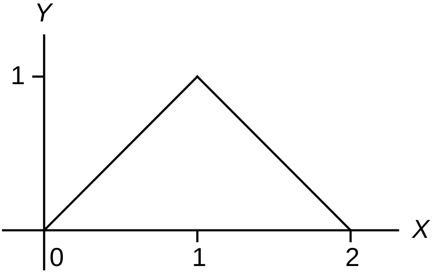


Calcular:

1. $P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{5}{4})$.
2. Función de distribución.
3. Media y desviación típica.

Función de densidad caso continuo: Ejemplo2

- La función de densidad de la variable aleatoria continua X viene dada por la gráfica siguiente:



Calcular:

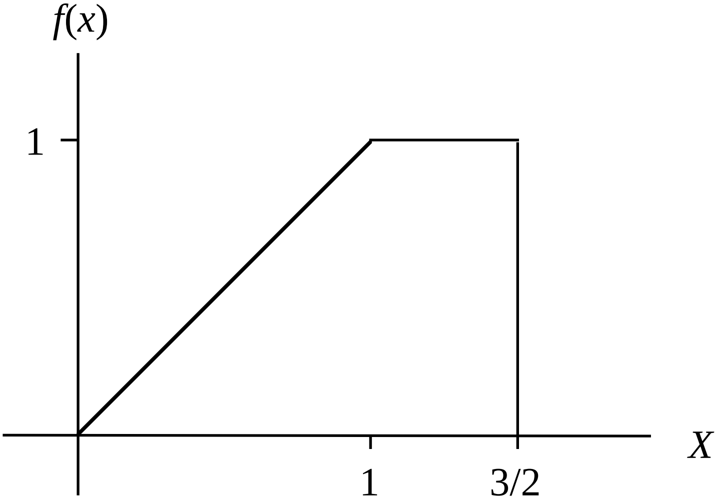
1. $P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{5}{4})$.
2. Función de distribución.
3. Media y desviación típica.

Función de densidad caso continuo: Solución (Ejemplo2)

1. $P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{5}{4}) = 19/32.$
2. $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2, \\ 1 & \text{si } 2 < x. \end{cases}$$
3. $\mu = 1$, $\sigma^2 = 1/6$ y $\sigma = 1/\sqrt{6}$.

Función de densidad caso continuo: Ejemplo3

Dada la función de densidad dada por la siguiente gráfica,



Función de densidad caso continuo: Ejemplo4

Se sabe que la duración de las baterías de un tipo de marcapasos (expresada en años) es una variable aleatoria cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{e^{-x/10}}{10} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Se pide:

1. Comprobar que $f(x)$ es función de densidad.
2. Calcular la función de distribución.
3. Calcular la probabilidad de que la batería dure menos de 5 años, y de que dure entre 5 y 10 años.
4. Calcular la vida media de la batería.

Función de densidad caso continuo: Solución(Ejemplo4)

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = [-e^{-x/10}]_{-\infty}^{\infty} = 1.$
2. $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0, \\ 1 - e^{-x/10} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$
3. $P(X < 5) = 0.3935$ y $P(5 < X < 10) = 0.2387.$
4. $\mu = 10$ años.

Función de densidad caso continuo: Ejemplo5

La proporción de cierto aditivo en la gasolina determina su precio. Si en la producción de gasolina la proporción de aditivo es una variable aleatoria X con función de densidad $f(x) = 6x(1-x)$ para $0 \leq x \leq 1$, de manera que si $x < 0,5$ la gasolina es del tipo **I** y se vende a 0.6 \$, si $0.5 \leq x \leq 0.8$ la gasolina es del tipo **II** y se vende a 0.7 \$, y si $x > 0.8$ la gasolina es del tipo **III** que se vende a 0.8 \$, se pide:

1. Calcular la función de distribución de X.
2. Calcular los porcentajes de producción de cada tipo de gasolina.
3. Calcular el precio medio por litro.

Función de densidad caso continuo: Ejemplo6

Un empleado suele acudir al trabajo en cualquier instante entre las 6 y las 7 con igual probabilidad. Se pide:

1. Calcular la función de densidad de la variable que mide el instante en que acude a trabajar y dibujarla.
2. Calcular la función de distribución y dibujarla.
3. Calcular la probabilidad de que llegue entre las 6 y cuarto y las 6 y media.
4. Calcular la hora media a la que se espera que llegue.

Función de densidad caso continuo: Ejemplo2

1. $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 6, \\ 1 & \text{si } 6 \leq x \leq 7, \\ 0 & \text{si } 7 < x. \end{cases}$$

2. $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 6, \\ x - 6 & \text{si } 6 \leq x \leq 7, \\ 1 & \text{si } 7 < x. \end{cases}$$

3. $P(6.25 < X < 6.5) = 0.25.$

4. $\mu = 6.5$, es decir, a las 6 horas y media.

Función de densidad caso continuo: Ejemplo2

Función de densidad caso continuo: Ejemplo2

Función de densidad caso continuo: Ejemplo2

Función de densidad caso continuo: Ejemplo2

Teorema de cambio de variable

Teorema de cambio de variable

Sea ψ una función derivable, estrictamente creciente o decreciente sobre un intervalo I y sea $\psi(I)$ el rango de ψ. Sea X una función aleatoria continua X con densidad f, tal que $f(x) = 0$ para $x \notin I$. Entonces $Y = \psi(X)$ tiene densidad g dada por $g(y) = 0$ para $y \notin \psi(I)$ y

$$g(y) = f(\psi^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy}\psi^{-1}(y) \right|, \qquad y \in \psi(I).$$

-

Teorema de cambio de variable

Teorema de cambio de variable

Sea ψ una función derivable, estrictamente creciente o decreciente sobre un intervalo I y sea $\psi(I)$ el rango de ψ. Sea X una función aleatoria continua X con densidad f, tal que $f(x) = 0$ para $x \notin I$. Entonces $Y = \psi(X)$ tiene densidad g dada por $g(y) = 0$ para $y \notin \psi(I)$ y

$$g(y) = f(\psi^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} \psi^{-1}(y) \right|, \qquad y \in \psi(I).$$

-

Teorema de cambio de variable

Demostracion del Teorema de cambio de variable

Sean F y G las funciones de distribución de X y Y respectivamente. Primero supongamos que ψ es estrictamente creciente, por lo tanto, $\psi-1$ también es estrictamente creciente sobre $\psi(I)$ y para $y \in \psi(I)$

$$
\begin{aligned}
G(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\
&= \mathbb{P}(\psi(X) \leq y) \\
&= \mathbb{P}(X \leq \psi^{-1}(y)) \\
&= F(\psi^{-1}(y)).
\end{aligned}
$$

Teorema de cambio de variable

Demostracion del Teorema de cambio de variable

Sean F y G las funciones de distribución de X y Y respectivamente. Primero supongamos que ψ es estrictamente creciente, por lo tanto, $\psi-1$ también es estrictamente creciente sobre $\psi(I)$ y para $y \in \psi(I)$

$$\begin{aligned} G(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(\psi(X) \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \psi^{-1}(y)) \\ &= F(\psi^{-1}(y)). \end{aligned}$$

-

Teorema de cambio de variable

Demostracion del Teorema de cambio de variable

Derivando respecto a y, se obtiene

$$\begin{aligned} G'(y) &= \frac{d}{dy}F(\psi^{-1}(y)) \\ &= F'(\psi^{-1}(y))\frac{d}{dy}\psi^{-1}(y) \\ &= f(\psi^{-1}(y))\frac{d}{dy}\psi^{-1}(y). \end{aligned}$$

Y como

$$\frac{d}{dy}\psi^{-1}(y) = \left|\frac{d}{dy}\psi^{-1}(y)\right| \qquad \text{¿por qué?}$$

- se tiene que le ecuación se cumple.

Teorema de cambio de variable

Demostracion del Teorema de cambio de variable

Derivando respecto a y, se obtiene

$$\begin{aligned} G'(y) &= \frac{d}{dy}F(\psi^{-1}(y)) \\ &= F'(\psi^{-1}(y))\frac{d}{dy}\psi^{-1}(y) \\ &= f(\psi^{-1}(y))\frac{d}{dy}\psi^{-1}(y). \end{aligned}$$

Y como

$$\frac{d}{dy}\psi^{-1}(y) = \left|\frac{d}{dy}\psi^{-1}(y)\right| \qquad \text{¿por qué?}$$

- se tiene que le ecuación se cumple.

Teorema de cambio de variable

- Ahora supongamos que ψ es estrictamente decreciente, por lo tanto también lo es ψ^{-1}, para $y \in \psi(I)$ tenemos

$$\begin{aligned} G(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(\psi(X) \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X \geq \psi^{-1}(y)) \qquad \text{¿por qué?} \\ &= 1 - F(\psi^{-1}(y)). \end{aligned}$$

- Derivando respecto a y

$$\begin{aligned} G'(y) &= -F'(\psi^{-1}(y))\frac{d}{dy}\psi^{-1}(y) \\ &= f(\psi^{-1}(y))\left(-\frac{d}{dy}\psi^{-1}(y)\right) \\ &= f(\psi^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}\psi^{-1}(y)\right| \qquad \text{¿por qué?.} \end{aligned}$$

- lo que finaliza la demostración $\square$

Teorema de cambio de variable

- Ahora supongamos que ψ es estrictamente decreciente, por lo tanto también lo es ψ^{-1}, para $y \in \psi(I)$ tenemos

$$\begin{aligned} G(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(\psi(X) \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X \geq \psi^{-1}(y)) \qquad \text{¿por qué?} \\ &= 1 - F(\psi^{-1}(y)). \end{aligned}$$

- Derivando respecto a y

$$\begin{aligned} G'(y) &= -F'(\psi^{-1}(y))\frac{d}{dy}\psi^{-1}(y) \\ &= f(\psi^{-1}(y))\left(-\frac{d}{dy}\psi^{-1}(y)\right) \\ &= f(\psi^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}\psi^{-1}(y)\right| \qquad \text{¿por qué?.} \end{aligned}$$

- lo que finaliza la demostración $\square$

Teorema de cambio de variable

- Ahora supongamos que ψ es estrictamente decreciente, por lo tanto también lo es ψ^{-1}, para $y \in \psi(I)$ tenemos

$$\begin{aligned} G(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(\psi(X) \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X \geq \psi^{-1}(y)) \qquad \text{¿por qué?} \\ &= 1 - F(\psi^{-1}(y)). \end{aligned}$$

- Derivando respecto a y

$$\begin{aligned} G'(y) &= -F'(\psi^{-1}(y))\frac{d}{dy}\psi^{-1}(y) \\ &= f(\psi^{-1}(y))\left(-\frac{d}{dy}\psi^{-1}(y)\right) \\ &= f(\psi^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}\psi^{-1}(y)\right| \qquad \text{¿por qué?.} \end{aligned}$$

- lo que finaliza la demostración $\square$

Ejercicio

Ej1). Sea X una variable aleatoria continua con densidad f. Encuentre la densidad de $Y = X^2$.

Ej2). Sea X una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $(0, 1)$, esto quiere decir que $F_X(x) = x$ para $x \in (0, 1)$. Encuentre la función de densidad de $Y = -\frac{1}{\lambda} Ln(1 - X)$ para $\lambda > 0$.

Ej3). [Método de la transformada inversa] Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución F y densidad f. Utilizando el teorema, encuentre la distribución de $Y = F(X)$. De acuerdo a lo obtenido, ¿cómo generaría un número aleatoria con la misma distribución de X a partir de un número con la misma distribución de Y?

Ejercicio

Ej4). Sea X una variable aleatoria continua positiva, con densidad f. Encuentre una fórmula para la densidad de $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

Ej5). Sea X una variable aleatoria, g una función de densidad y ϕ una función derivable y estrictamente creciente sobre $(-\infty, \infty)$. Supongamos que $\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\phi(x)} g(z)dx, \qquad -\infty < x < \infty.$ Demuestre que $Y = \phi(X)$ tiene densidad g.

Ej6).

Ejercicio

Ej1).

Ej2).

Ej3).

Distribución binomial

- **Binomial:** $Bin(n,p)$

$$\mathbb{P}(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \qquad x=0,1,\ldots,n.$$

- $E[X]=np,\ Var(X)=np(1-p)$
- $E[(X-\mu)^3]=np(1-3p+2p^2)$,
- $E[(X-\mu)^4]=np(1-p)[1+3(n-2)p(1-p)]$

Distribución binomial

- **Binomial:** $Bin(n, p)$

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, \ldots, n.$$

- $E[X] = np, \ Var(X) = np(1-p)$
- $E[(X-\mu)^3] = np(1-3p+2p^2),$
- $E[(X-\mu)^4] = np(1-p)[1+3(n-2)p(1-p)]$

Distribución binomial

- **Binomial:** $Bin(n, p)$

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, \ldots, n.$$

- $E[X] = np, \; Var(X) = np(1-p)$
- $E[(X-\mu)^3] = np(1-3p+2p^2),$
- $E[(X-\mu)^4] = np(1-p)[1+3(n-2)p(1-p)]$

Distribución binomial

- **Binomial:** $Bin(n, p)$

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, \ldots, n.$$

- $E[X] = np$, $Var(X) = np(1 - p)$
- $E[(X - \mu)^3] = np(1 - 3p + 2p^2)$,
- $E[(X - \mu)^4] = np(1 - p)[1 + 3(n - 2)p(1 - p)]$

Distribución Geométrica

- **Geométrica:** $Geom(p)$

$$\mathbb{P}(X = x) = p(1-p)^{x-1} \qquad x = 1, 2, 3, \ldots .$$

$$E[X] = \frac{1}{p} \quad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Binomial negativa

- **Binomial negativa:** $NegBin(r, p)$

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, \qquad x = r, r+1, \ldots.$$

- $E[X] = \dfrac{r}{p}$, $Var(X) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$

Binomial negativa

- **Binomial negativa:** $NegBin(r, p)$

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, \qquad x = r, r+1, \ldots.$$

- $E[X] = \dfrac{r}{p}$, $Var(X) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$

Hipergeométrica

- **Hipergeométrica:** $Hiper(n, D, N)$

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad n - N + D \leq x \leq D.$$

$$E[X] = np, \quad Var(X) = np(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Poisson

- **Poisson:** $Poi(\lambda)$

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots .$$

$$E[X] = \lambda \qquad Var(X) = \lambda$$

$$E[(X-\lambda)^3] = \lambda \quad E[(X-\lambda)^4] = 3\lambda^2 + \lambda$$


YAHWEH
"IAUE"
YAHSHUA
"IASHUA"
יהוה
YAHWEH