Teoría de Probabilidad

Maestría en Estadística Aplicada y Ciencia de Datos

Julio Hurtado, Msc.

UTB

2022

Probabilidad elemental – Parte 3

1. Variables aleatorias
2. Caso discreto
   - Función de distribución acumulativa, caso discreto
   - Función de distribución acumulativa, caso discreto
3. Función de una variable aleatoria
4. Esperanza y momentos
   - Propiedades de la Esperanza
   - Propiedades de la Esperanza
   - Varianza de una variable aleatoria
5. Referencias

Variables aleatorias

- Recordemos que el espacio muestral Ω, contiene todos los resultados posibles de un experimento.
- Para cada uno de estos posibles resultados, ω, una variable aleatoria asigna un valor (generalmente numérico), es decir, una variable aleatoria, X, es realmente una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$, o $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- La definición formal (es decir, desde el punto de vista de la teoría de la medida) de una variable aleatoria está dada por

Variable aleatoria

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, una **variable aleatoria** es una función X de Ω a los números reales $\mathbb{R}$ tal que

$$X(]\infty, x])^{-1} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

- Se utilizará la siguiente notación

$$\mathbb{P}[X(]\infty, x])^{-1}] := \mathbb{P}[X \leq x]$$

Variables aleatorias

- Recordemos que el espacio muestral Ω, contiene todos los resultados posibles de un experimento.
- Para cada uno de estos posibles resultados, ω, una variable aleatoria asigna un valor (generalmente numérico), es decir, una variable aleatoria, X, es realmente una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$, o $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- La definición formal (es decir, desde el punto de vista de la teoría de la medida) de una variable aleatoria está dada por

Variable aleatoria

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, una **variable aleatoria** es una función X de Ω a los números reales $\mathbb{R}$ tal que

$$X(]\infty, x])^{-1} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

- Se utilizará la siguiente notación

$$\mathbb{P}[X(]\infty, x])^{-1}] := \mathbb{P}[X \leq x]$$

Variables aleatorias

- Recordemos que el espacio muestral Ω, contiene todos los resultados posibles de un experimento.
- Para cada uno de estos posibles resultados, ω, una variable aleatoria asigna un valor (generalmente numérico), es decir, una variable aleatoria, X, es realmente una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$, o $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- La definición formal (es decir, desde el punto de vista de la teoría de la medida) de una variable aleatoria está dada por

Variable aleatoria

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, una **variable aleatoria** es una función X de Ω a los números reales $\mathbb{R}$ tal que

$$X(]\infty, x])^{-1} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

- Se utilizará la siguiente notación

$$\mathbb{P}[X(]\infty, x])^{-1}] := \mathbb{P}[X \leq x]$$

Variables aleatorias

- Recordemos que el espacio muestral Ω, contiene todos los resultados posibles de un experimento.
- Para cada uno de estos posibles resultados, ω, una variable aleatoria asigna un valor (generalmente numérico), es decir, una variable aleatoria, X, es realmente una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$, o $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- La definición formal (es decir, desde el punto de vista de la teoría de la medida) de una variable aleatoria está dada por

Variable aleatoria

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, una **variable aleatoria** es una función X de Ω a los números reales $\mathbb{R}$ tal que

$$X(]\infty, x])^{-1} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

- Se utilizará la siguiente notación

$$\mathbb{P}[X(]\infty, x])^{-1}] := \mathbb{P}[X \leq x]$$

Variables aleatorias

- Recordemos que el espacio muestral Ω, contiene todos los resultados posibles de un experimento.
- Para cada uno de estos posibles resultados, ω, una variable aleatoria asigna un valor (generalmente numérico), es decir, una variable aleatoria, X, es realmente una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$, o $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- La definición formal (es decir, desde el punto de vista de la teoría de la medida) de una variable aleatoria está dada por

Variable aleatoria

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, una **variable aleatoria** es una función X de Ω a los números reales $\mathbb{R}$ tal que

$$X(]\infty, x])^{-1} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

- Se utilizará la siguiente notación

$$\mathbb{P}[X(]\infty, x])^{-1}] := \mathbb{P}[X \leq x]$$

Variables aleatorias

- Recordemos que el espacio muestral Ω, contiene todos los resultados posibles de un experimento.
- Para cada uno de estos posibles resultados, ω, una variable aleatoria asigna un valor (generalmente numérico), es decir, una variable aleatoria, X, es realmente una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$, o $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- La definición formal (es decir, desde el punto de vista de la teoría de la medida) de una variable aleatoria está dada por

Variable aleatoria

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, una **variable aleatoria** es una función X de Ω a los números reales $\mathbb{R}$ tal que

$$X(]\infty, x])^{-1} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

- Se utilizará la siguiente notación

$$\mathbb{P}[X(]\infty, x])^{-1}] := \mathbb{P}[X \leq x]$$

Variables aleatorias, caso real

- **Taller de Técnicas de Conteo**
- **Veamos el video Variables aleatorias Parte 1**
- Una variable aleatoria **discreta** con valores sobre el conjunto $\mathbb{R}$, es una función de Ω sobre un subconjunto finito o numerable infinito $\{x_1, x_2, \ldots\}$ de números reales, de tal manera que $\{\omega : X(\omega) = x_i\} \in \mathcal{F}$ para toda i.
- Cada variable aleatoria discreta, X, tiene asociada una función, f, llamada la **función de masa de probabilidad**.
- Sea X una variable aleatoria discreta con valores en $\mathbb{R}$. Si f es una función tal que:
  1. $f(x) = \mathbb{P}(X = x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
  2. El conjunto $A = \{x : f(x) \neq 0\}$ es un subconjunto finito o numerable infinito de $\mathbb{R}$.
  3. $\sum_{x \in A} f(x) = 1$.
- Entonces decimos que f es una función de densidad (o función de masa) de X.

Variables aleatorias, caso real

- **Taller de Técnicas de Conteo**
- **Veamos el video Variables aleatorias Parte 1**
- Una variable aleatoria **discreta** con valores sobre el conjunto $\mathbb{R}$, es una función de Ω sobre un subconjunto finito o numerable infinito $\{x_1, x_2, \ldots\}$ de números reales, de tal manera que $\{\omega : X(\omega) = x_i\} \in \mathcal{F}$ para toda i.
- Cada variable aleatoria discreta, X, tiene asociada una función, f, llamada la **función de masa de probabilidad**.
- Sea X una variable aleatoria discreta con valores en $\mathbb{R}$. Si f es una función tal que:
  1. $f(x) = \mathbb{P}(X = x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
  2. El conjunto $A = \{x : f(x) \neq 0\}$ es un subconjunto finito o numerable infinito de $\mathbb{R}$.
  3. $\sum_{x \in A} f(x) = 1$.
- Entonces decimos que f es una función de densidad (o función de masa) de X.

Variables aleatorias, caso real

- **Taller de Técnicas de Conteo**
- **Veamos el video Variables aleatorias Parte 1**
- Una variable aleatoria **discreta** con valores sobre el conjunto $\mathbb{R}$, es una función de Ω sobre un subconjunto finito o numerable infinito $\{x_1, x_2, \ldots\}$ de números reales, de tal manera que $\{\omega : X(\omega) = x_i\} \in \mathcal{F}$ para toda i.
- Cada variable aleatoria discreta, X, tiene asociada una función, f, llamada la **función de masa de probabilidad**.
- Sea X una variable aleatoria discreta con valores en $\mathbb{R}$. Si f es una función tal que:
  1. $f(x) = \mathbb{P}(X = x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
  2. El conjunto $A = \{x : f(x) \neq 0\}$ es un subconjunto finito o numerable infinito de $\mathbb{R}$.
  3. $\sum_{x \in A} f(x) = 1$.
- Entonces decimos que f es una función de densidad (o función de masa) de X.

Variables aleatorias, caso real

- **Taller de Técnicas de Conteo**
- **Veamos el video Variables aleatorias Parte 1**
- Una variable aleatoria **discreta** con valores sobre el conjunto $\mathbb{R}$, es una función de Ω sobre un subconjunto finito o numerable infinito $\{x_1, x_2, \ldots\}$ de números reales, de tal manera que $\{\omega : X(\omega) = x_i\} \in \mathcal{F}$ para toda i.
- Cada variable aleatoria discreta, X, tiene asociada una función, f, llamada la **función de masa de probabilidad**.
- Sea X una variable aleatoria discreta con valores en $\mathbb{R}$. Si f es una función tal que:
  1. $f(x) = \mathbb{P}(X = x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
  2. El conjunto $A = \{x : f(x) \neq 0\}$ es un subconjunto finito o numerable infinito de $\mathbb{R}$.
  3. $\sum_{x \in A} f(x) = 1$.
- Entonces decimos que f es una función de densidad (o función de masa) de X.

Variables aleatorias, caso real

- **Taller de Técnicas de Conteo**
- **Veamos el video Variables aleatorias Parte 1**
- Una variable aleatoria **discreta** con valores sobre el conjunto $\mathbb{R}$, es una función de Ω sobre un subconjunto finito o numerable infinito $\{x_1, x_2, \ldots\}$ de números reales, de tal manera que $\{\omega : X(\omega) = x_i\} \in \mathcal{F}$ para toda i.
- Cada variable aleatoria discreta, X, tiene asociada una función, f, llamada la **función de masa de probabilidad**.
- Sea X una variable aleatoria discreta con valores en $\mathbb{R}$. Si f es una función tal que:
  1. $f(x) = \mathbb{P}(X = x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
  2. El conjunto $A = \{x : f(x) \neq 0\}$ es un subconjunto finito o numerable infinito de $\mathbb{R}$.
  3. $\sum_{x \in A} f(x) = 1$.
- Entonces decimos que f es una función de densidad (o función de masa) de X.

Variables aleatorias, caso real

- **Taller de Técnicas de Conteo**
- **Veamos el video Variables aleatorias Parte 1**
- Una variable aleatoria **discreta** con valores sobre el conjunto $\mathbb{R}$, es una función de Ω sobre un subconjunto finito o numerable infinito $\{x_1, x_2, \ldots\}$ de números reales, de tal manera que $\{\omega : X(\omega) = x_i\} \in \mathcal{F}$ para toda i.
- Cada variable aleatoria discreta, X, tiene asociada una función, f, llamada la **función de masa de probabilidad**.
- Sea X una variable aleatoria discreta con valores en $\mathbb{R}$. Si f es una función tal que:
  1. $f(x) = \mathbb{P}(X = x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
  2. El conjunto $A = \{x : f(x) \neq 0\}$ es un subconjunto finito o numerable infinito de $\mathbb{R}$.
  3. $\sum_{x \in A} f(x) = 1$.
- Entonces decimos que f es una función de densidad (o función de masa) de X.

Variables aleatorias, caso real

- **Taller de Técnicas de Conteo**
- **Veamos el video Variables aleatorias Parte 1**
- Una variable aleatoria **discreta** con valores sobre el conjunto $\mathbb{R}$, es una función de Ω sobre un subconjunto finito o numerable infinito $\{x_1, x_2, \ldots\}$ de números reales, de tal manera que $\{\omega : X(\omega) = x_i\} \in \mathcal{F}$ para toda i.
- Cada variable aleatoria discreta, X, tiene asociada una función, f, llamada la **función de masa de probabilidad**.
- Sea X una variable aleatoria discreta con valores en $\mathbb{R}$. Si f es una función tal que:
  1. $f(x) = \mathbb{P}(X = x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
  2. El conjunto $A = \{x : f(x) \neq 0\}$ es un subconjunto finito o numerable infinito de $\mathbb{R}$.
  3. $\sum_{x \in A} f(x) = 1$.
- Entonces decimos que f es una función de densidad (o función de masa) de X.

Variables aleatorias, caso real

- **Taller de Técnicas de Conteo**
- **Veamos el video Variables aleatorias Parte 1**
- Una variable aleatoria **discreta** con valores sobre el conjunto $\mathbb{R}$, es una función de Ω sobre un subconjunto finito o numerable infinito $\{x_1, x_2, \dots\}$ de números reales, de tal manera que $\{\omega : X(\omega) = x_i\} \in \mathcal{F}$ para toda i.
- Cada variable aleatoria discreta, X, tiene asociada una función, f, llamada la **función de masa de probabilidad**.
- Sea X una variable aleatoria discreta con valores en $\mathbb{R}$. Si f es una función tal que:
  1. $f(x) = \mathbb{P}(X = x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
  2. El conjunto $A = \{x : f(x) \neq 0\}$ es un subconjunto finito o numerable infinito de $\mathbb{R}$.
  3. $\sum_{x \in A} f(x) = 1$.
- Entonces decimos que f es una función de densidad (o función de masa) de X.

Variables aleatorias, caso real

- **Taller de Técnicas de Conteo**
- **Veamos el video Variables aleatorias Parte 1**
- Una variable aleatoria **discreta** con valores sobre el conjunto $\mathbb{R}$, es una función de Ω sobre un subconjunto finito o numerable infinito $\{x_1, x_2, \ldots\}$ de números reales, de tal manera que $\{\omega : X(\omega) = x_i\} \in \mathcal{F}$ para toda i.
- Cada variable aleatoria discreta, X, tiene asociada una función, f, llamada la **función de masa de probabilidad**.
- Sea X una variable aleatoria discreta con valores en $\mathbb{R}$. Si f es una función tal que:
  1. $f(x) = \mathbb{P}(X = x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
  2. El conjunto $A = \{x : f(x) \neq 0\}$ es un subconjunto finito o numerable infinito de $\mathbb{R}$.
  3. $\sum_{x \in A} f(x) = 1$.
- Entonces decimos que f es una función de densidad (o función de masa) de X.

Variables aleatorias, Ejemplos

- **Ejemplo** Lanzamos una moneda 10 veces. Sea $X(\omega)$ el número de caras en la secuencia ω. Por ejemplo si $\omega = CCSCCSCCSS$, entonces $X(\omega) = 6$.

- **Ejemplo** Lancemos dos monedas y sea X el número de caras. Entonces, $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\{SS\}) = 1/4$, $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{CS, SC\}) = 1/2$ y $\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(\{CC\}) = 1/4$. Las variables aleatorias y su distribución puede ser resumida como sigue:

-

ω	$\mathbb{P}(\{\omega\})$	$X(\omega)$
SS	1/4	0
CC	1/4	1
SC	1/4	1
CC	1/4	2

x	$\mathbb{P}(X = x)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4

Variables aleatorias, Ejemplos

- **Ejemplo** Lanzamos una moneda 10 veces. Sea $X(\omega)$ el número de caras en la secuencia ω. Por ejemplo si $\omega = CCSCCSCCSS$, entonces $X(\omega) = 6$.

- **Ejemplo** Lancemos dos monedas y sea X el número de caras. Entonces, $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{SS\}) = 1/4$, $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{CS, SC\}) = 1/2$ y $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{CC\}) = 1/4$. Las variables aleatorias y su distribución puede ser resumida como sigue:

-

ω	$\mathbb{P}(\{\omega\})$	$X(\omega)$
SS	1/4	0
CC	1/4	1
SC	1/4	1
CC	1/4	2

x	$\mathbb{P}(X = x)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4

Variables aleatorias, Ejemplos

- **Ejemplo** Lanzamos una moneda 10 veces. Sea $X(\omega)$ el número de caras en la secuencia ω. Por ejemplo si $\omega = CCSCCSCCSS$, entonces $X(\omega) = 6$.

- **Ejemplo** Lancemos dos monedas y sea X el número de caras. Entonces, $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{SS\}) = 1/4$, $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{CS, SC\}) = 1/2$ y $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{CC\}) = 1/4$. Las variables aleatorias y su distribución puede ser resumida como sigue:

-

ω	$\mathbb{P}(\{\omega\})$	$X(\omega)$
SS	1/4	0
CC	1/4	1
SC	1/4	1
CC	1/4	2

x	$\mathbb{P}(X = x)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4

Variables aleatorias, caso real

- Es posible asignar una variable aleatoria a cada función que satisface las condiciones de la definición. Es decir, podemos construir un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y una variable X definida sobre Ω cuya densidad sea f. Sea $\{x_1, x_2, \ldots\}$ el conjunto de valores para los cuales $f(x) \neq 0$.
- Definamos $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (el conjunto potencia de Ω) y $\mathbb{P}$ la medida de probabilidad definida sobre $\mathcal{F}$ como $\mathbb{P}(\{\omega\}) = f(x_i)$ si $\omega = x_i$.
- Si definimos X como $X(\omega) = x_i$ si $\omega = x_i$, entonces

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = x_i\}) = \mathbb{P}(\{x_i\}) = f(x_i)$$

- Finalmente sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea X una variable aleatoria discreta con posibles valores $x_1, x_2, \ldots$.

Variables aleatorias, caso real

- Es posible asignar una variable aleatoria a cada función que satisface las condiciones de la definición. Es decir, podemos construir un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y una variable X definida sobre Ω cuya densidad sea f. Sea $\{x_1, x_2, \ldots\}$ el conjunto de valores para los cuales $f(x) \neq 0$.
- Definamos $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (el conjunto potencia de Ω) y $\mathbb{P}$ la medida de probabilidad definida sobre $\mathcal{F}$ como $\mathbb{P}(\{\omega\}) = f(x_i)$ si $\omega = x_i$.
- Si definimos X como $X(\omega) = x_i$ si $\omega = x_i$, entonces

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = x_i\}) = \mathbb{P}(\{x_i\}) = f(x_i)$$

- Finalmente sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea X una variable aleatoria discreta con posibles valores $x_1, x_2, \ldots$.

Variables aleatorias, caso real

- Es posible asignar una variable aleatoria a cada función que satisface las condiciones de la definición. Es decir, podemos construir un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y una variable X definida sobre Ω cuya densidad sea f. Sea $\{x_1, x_2, \ldots\}$ el conjunto de valores para los cuales $f(x) \neq 0$.
- Definamos $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (el conjunto potencia de Ω) y $\mathbb{P}$ la medida de probabilidad definida sobre $\mathcal{F}$ como $\mathbb{P}(\{\omega\}) = f(x_i)$ si $\omega = x_i$.
- Si definimos X como $X(\omega) = x_i$ si $\omega = x_i$, entonces

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = x_i\}) = \mathbb{P}(\{x_i\}) = f(x_i)$$

- Finalmente sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea X una variable aleatoria discreta con posibles valores $x_1, x_2, \ldots$.

Variables aleatorias, caso real

- Es posible asignar una variable aleatoria a cada función que satisface las condiciones de la definición. Es decir, podemos construir un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y una variable X definida sobre Ω cuya densidad sea f. Sea $\{x_1, x_2, \ldots\}$ el conjunto de valores para los cuales $f(x) \neq 0$.
- Definamos $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (el conjunto potencia de Ω) y $\mathbb{P}$ la medida de probabilidad definida sobre $\mathcal{F}$ como $\mathbb{P}(\{\omega\}) = f(x_i)$ si $\omega = x_i$.
- Si definimos X como $X(\omega) = x_i$ si $\omega = x_i$, entonces

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = x_i\}) = \mathbb{P}(\{x_i\}) = f(x_i)$$

- Finalmente sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea X una variable aleatoria discreta con posibles valores $x_1, x_2, \ldots$.

Variables aleatorias, caso real

- Entonces el conjunto $\{\omega : X(\omega) \in A\}$ es un evento, esto se debe a que

$$\{\omega : X(\omega) \in A\} = \bigcup_{x_i \in A} \{\omega : X(\omega) = x_i\}$$

- Es común utilizar la siguiente notación
  1. $$\{\omega : X(\omega) \in A\} = \{X \in A\}$$
  2. Podemos calcular $\mathbb{P}(X \in A)$ utilizando la siguiente fórmula
  $$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x_i \in A} f(x_i)$$

- **Ejercicio**: Demuestre que

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x_i \in A} f(x_i)$$

- Veamos el video Variables aleatorias Parte 2

Variables aleatorias, caso real

- Entonces el conjunto $\{\omega : X(\omega) \in A\}$ es un evento, esto se debe a que
$$\{\omega : X(\omega) \in A\} = \bigcup_{x_i \in A} \{\omega : X(\omega) = x_i\}$$
- Es común utilizar la siguiente notación
  1. $$\{\omega : X(\omega) \in A\} = \{X \in A\}$$
  2. Podemos calcular $\mathbb{P}(X \in A)$ utilizando la siguiente fórmula
$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x_i \in A} f(x_i)$$
- **Ejercicio**: Demuestre que
$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x_i \in A} f(x_i)$$
- Veamos el video Variables aleatorias Parte 2

Variables aleatorias, caso real

- Entonces el conjunto $\{\omega : X(\omega) \in A\}$ es un evento, esto se debe a que
$$\{\omega : X(\omega) \in A\} = \bigcup_{x_i \in A} \{\omega : X(\omega) = x_i\}$$
- Es común utilizar la siguiente notación
  1. $$\{\omega : X(\omega) \in A\} = \{X \in A\}$$
  2. Podemos calcular $\mathbb{P}(X \in A)$ utilizando la siguiente fórmula
$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x_i \in A} f(x_i)$$
- **Ejercicio**: Demuestre que
$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x_i \in A} f(x_i)$$
- Veamos el video Variables aleatorias Parte 2

Variables aleatorias, caso real

- Entonces el conjunto $\{\omega : X(\omega) \in A\}$ es un evento, esto se debe a que

$$\{\omega : X(\omega) \in A\} = \bigcup_{x_i \in A} \{\omega : X(\omega) = x_i\}$$

- Es común utilizar la siguiente notación
  1. $$\{\omega : X(\omega) \in A\} = \{X \in A\}$$
  2. Podemos calcular $\mathbb{P}(X \in A)$ utilizando la siguiente fórmula

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x_i \in A} f(x_i)$$

- **Ejercicio**: Demuestre que

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x_i \in A} f(x_i)$$

- Veamos el video Variables aleatorias Parte 2

Variables aleatorias, caso real

- Entonces el conjunto $\{\omega : X(\omega) \in A\}$ es un evento, esto se debe a que

$$\{\omega : X(\omega) \in A\} = \bigcup_{x_i \in A} \{\omega : X(\omega) = x_i\}$$

- Es común utilizar la siguiente notación
    1. $$\{\omega : X(\omega) \in A\} = \{X \in A\}$$
    2. Podemos calcular $\mathbb{P}(X \in A)$ utilizando la siguiente fórmula

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x_i \in A} f(x_i)$$

- **Ejercicio**: Demuestre que

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x_i \in A} f(x_i)$$

- Veamos el video Variables aleatorias Parte 2

Variables aleatorias, caso real

- Entonces el conjunto $\{\omega : X(\omega) \in A\}$ es un evento, esto se debe a que

$$\{\omega : X(\omega) \in A\} = \bigcup_{x_i \in A} \{\omega : X(\omega) = x_i\}$$

- Es común utilizar la siguiente notación
  1. $$\{\omega : X(\omega) \in A\} = \{X \in A\}$$
  2. Podemos calcular $\mathbb{P}(X \in A)$ utilizando la siguiente fórmula

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x_i \in A} f(x_i)$$

- **Ejercicio**: Demuestre que

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x_i \in A} f(x_i)$$

- Veamos el video Variables aleatorias Parte 2

Variables aleatorias, caso real

- La función $F(t), -\infty < t < \infty$ definida por

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \sum_{x \leq t} f(x)$$

- recibe el nombre de **función de distribución acumulativa** (o simplemente función de distribución) de la variable aleatoria discreta X.

Variables aleatorias, caso real

- La función $F(t), -\infty < t < \infty$ definida por

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \sum_{x \leq t} f(x)$$

- recibe el nombre de **función de distribución acumulativa** (o simplemente función de distribución) de la variable aleatoria discreta X.

Variables aleatorias discretas, caso real

- Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$, una variable aleatoria. Una función $F(x)$ es la función de distribución de X si y sólo si satisface las siguientes condiciones:
    1. Para toda $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.
    2. $F(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$, y $F(x) \to 1$ cuando $x \to \infty$.
    3. Dado un número real a, $F(x) \downarrow F(a)$ cuando $x \downarrow a$ (continuidad por la derecha).
    4. Para cualesquiera dos números reales $x < y$, $F(x) \leq F(y)$ (monótona creciente).
- El teorema es válido para cualquier tipo de variables con valores en los reales (discretas, continuas o mixtas).

Variables aleatorias discretas, caso real

- Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$, una variable aleatoria. Una función $F(x)$ es la función de distribución de X si y sólo si satisface las siguientes condiciones:
  1. Para toda $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.
  2. $F(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$, y $F(x) \to 1$ cuando $x \to \infty$.
  3. Dado un número real a, $F(x) \downarrow F(a)$ cuando $x \downarrow a$ (continuidad por la derecha).
  4. Para cualesquiera dos números reales $x < y$, $F(x) \leq F(y)$ (monótona creciente).
- El teorema es válido para cualquier tipo de variables con valores en los reales (discretas, continuas o mixtas).

Variables aleatorias discretas, caso real

- Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$, una variable aleatoria. Una función $F(x)$ es la función de distribución de X si y sólo si satisface las siguientes condiciones:
  1. Para toda $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.
  2. $F(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$, y $F(x) \to 1$ cuando $x \to \infty$.
  3. Dado un número real a, $F(x) \downarrow F(a)$ cuando $x \downarrow a$ (continuidad por la derecha).
  4. Para cualesquiera dos números reales $x < y$, $F(x) \leq F(y)$ (monótona creciente).
- El teorema es válido para cualquier tipo de variables con valores en los reales (discretas, continuas o mixtas).

Variables aleatorias discretas, caso real

- Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$, una variable aleatoria. Una función $F(x)$ es la función de distribución de X si y sólo si satisface las siguientes condiciones:
  1. Para toda $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.
  2. $F(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$, y $F(x) \to 1$ cuando $x \to \infty$.
  3. Dado un número real a, $F(x) \downarrow F(a)$ cuando $x \downarrow a$ (continuidad por la derecha).
  4. Para cualesquiera dos números reales $x < y$, $F(x) \leq F(y)$ (monótona creciente).
- El teorema es válido para cualquier tipo de variables con valores en los reales (discretas, continuas o mixtas).

Variables aleatorias discretas, caso real

- Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$, una variable aleatoria. Una función $F(x)$ es la función de distribución de X si y sólo si satisface las siguientes condiciones:
  1. Para toda $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.
  2. $F(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$, y $F(x) \to 1$ cuando $x \to \infty$.
  3. Dado un número real a, $F(x) \downarrow F(a)$ cuando $x \downarrow a$ (continuidad por la derecha).
  4. Para cualesquiera dos números reales $x < y$, $F(x) \leq F(y)$ (monótona creciente).
- El teorema es válido para cualquier tipo de variables con valores en los reales (discretas, continuas o mixtas).

Variables aleatorias discretas, caso real

- Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$, una variable aleatoria. Una función $F(x)$ es la función de distribución de X si y sólo si satisface las siguientes condiciones:
  1. Para toda $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.
  2. $F(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$, y $F(x) \to 1$ cuando $x \to \infty$.
  3. Dado un número real a, $F(x) \downarrow F(a)$ cuando $x \downarrow a$ (continuidad por la derecha).
  4. Para cualesquiera dos números reales $x < y$, $F(x) \leq F(y)$ (monótona creciente).
- El teorema es válido para cualquier tipo de variables con valores en los reales (discretas, continuas o mixtas).

Variables aleatorias discretas, caso real

- **Ejercicio**:Demuestre que para cualesquiera numeros $a \leq b$

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

- **Sugerencia:** Considere los conjuntos $A = \{\omega : X(\omega) \leq a\}, B = \{\omega : X(\omega) \leq b\}$ y recuerde que para todo conjunto A

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c).$$

Variables aleatorias discretas, caso real

- **Ejercicio**:Demuestre que para cualesquiera numeros $a \leq b$

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

- **Sugerencia:** Considere los conjuntos $A = \{\omega : X(\omega) \leq a\}, B = \{\omega : X(\omega) \leq b\}$ y recuerde que para todo conjunto A

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c).$$

Variables aleatorias discretas, caso real

- **Ejemplo.** Considere un juego de baraja inglesa. Si X denota el número de ases en una mano, encuentre la función de densidad y la función de distribución de X.
- **Solución:** Utilizando argumentos de cálculo combinatorio tenemos que:

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{48}{13-x}}{\binom{52}{13}}$$

para $x = 0, 1, 2, 3, 4$.

- Utilizando la función de densidad, podemos calcular la función de distribución acumulativa de la siguiente manera:

Variables aleatorias discretas, caso real

- **Ejemplo.** Considere un juego de baraja inglesa. Si X denota el número de ases en una mano, encuentre la función de densidad y la función de distribución de X.
- **Solución:** Utilizando argumentos de cálculo combinatorio tenemos que:

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{48}{13-x}}{\binom{52}{13}}$$

para $x = 0, 1, 2, 3, 4$.

- Utilizando la función de densidad, podemos calcular la función de distribución acumulativa de la siguiente manera:

Variables aleatorias discretas, caso real

- **Ejemplo.** Considere un juego de baraja inglesa. Si X denota el número de ases en una mano, encuentre la función de densidad y la función de distribución de X.
- **Solución:** Utilizando argumentos de cálculo combinatorio tenemos que:

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{48}{13-x}}{\binom{52}{13}}$$

para $x = 0, 1, 2, 3, 4$.

- Utilizando la función de densidad, podemos calcular la función de distribución acumulativa de la siguiente manera:

Variables aleatorias discretas, caso real

- $$\begin{aligned} F(x) &= 0 \ \text{Si } x < 0. \\ &= f(0) \ \text{Si } 0 \leq x < 1 \\ &= f(0) + f(1) \ \text{Si } 1 \leq x < 2 \\ &= f(0) + f(1) + f(2) \ \text{Si } 2 \leq x < 3 \\ &= f(0) + f(1) + f(2) + f(3) \ \text{Si } 3 \leq x < 4 \\ &= 1 \ \text{Si } x \geq 4. \end{aligned}$$

Función de una variable aleatoria

Función de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria discreta y sea $Y = g(X)$. Entonces

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x:g(x)=y} \mathbb{P}(X = x)$$

- **Ejercicio**.Si X tiene función de densidad

$$f(x) = \frac{c}{1 + x^2}$$

para $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

- Encuentre el valor de c y la función de densidad de

$$Y = sen\left(\frac{\pi}{2}X\right)$$

Función de una variable aleatoria

Función de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria discreta y sea $Y = g(X)$. Entonces

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x:g(x)=y} \mathbb{P}(X = x)$$

- **Ejercicio**.Si X tiene función de densidad

$$f(x) = \frac{c}{1 + x^2}$$

  para $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

- Encuentre el valor de c y la función de densidad de

$$Y = sen\left(\frac{\pi}{2}X\right)$$

Función de una variable aleatoria

Función de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria discreta y sea $Y = g(X)$. Entonces

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x:g(x)=y} \mathbb{P}(X = x)$$

- **Ejercicio**.Si X tiene función de densidad

$$f(x) = \frac{c}{1 + x^2}$$

  para $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

- Encuentre el valor de c y la función de densidad de

$$Y = sen\left(\frac{\pi}{2} X\right)$$

Esperanza y momentos

- El concepto de esperanza de una variable aleatoria está relacionado con la idea de promediar los posibles valores que la variable puede tomar. En lugar de utilizar un promedio común, en donde a cada posible valor se le da la misma ponderación, las ponderaciones son asignadas a través de la función de densidad de la variable.

Esperanza y momentos

Sea X una variable aleatoria discreta. Si $\sum_i |x_i| f(x_i) < \infty$, definimos la esperanza (media) de X como

$$\mu = E[X] = \sum_i x_i f(x_i)$$

- Veamos el video Variables aleatorias Parte 3

Esperanza y momentos

- El concepto de esperanza de una variable aleatoria está relacionado con la idea de promediar los posibles valores que la variable puede tomar. En lugar de utilizar un promedio común, en donde a cada posible valor se le da la misma ponderación, las ponderaciones son asignadas a través de la función de densidad de la variable.

Esperanza y momentos

Sea X una variable aleatoria discreta. Si $\sum_i |x_i| f(x_i) < \infty$, definimos la esperanza (media) de X como

$$\mu = E[X] = \sum_i x_i f(x_i)$$

- Veamos el video Variables aleatorias Parte 3

Esperanza y momentos

- El concepto de esperanza de una variable aleatoria está relacionado con la idea de promediar los posibles valores que la variable puede tomar. En lugar de utilizar un promedio común, en donde a cada posible valor se le da la misma ponderación, las ponderaciones son asignadas a través de la función de densidad de la variable.

Esperanza y momentos

Sea X una variable aleatoria discreta. Si $\sum_i |x_i| f(x_i) < \infty$, definimos la esperanza (media) de X como

$$\mu = E[X] = \sum_i x_i f(x_i)$$

- Veamos el video Variables aleatorias Parte 3

Esperanza y momentos

- La esperanza cumple lo siguiente:
  1. Si $\mathbb{P}(X = c) = 1$ para una constante c, entonces $E[X] = c$.
  2. Si X, Y son variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio Ω, ambas con esperanza finita y si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, entonces $E[X] \leq E[Y]$.
  3. Si X tiene esperanza finita y si $\mathbb{P}(X \geq c) = 1$, entonces $E[X] \geq c$. De la misma forma, si $\mathbb{P}(X \leq c) = 1$, entonces $E[X] \leq c$.
  4. $|E[X]| \leq E[|X|]$.
  5. Si $Y = g(X)$, entonces $E[Y] = \sum_i g(x_i) f(x_i)$.
  6. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio Ω, con esperanza finita y si $c_1, \ldots, c_n$ son constantes, entonces

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i E[X_i]$$

Esperanza y momentos

- La esperanza cumple lo siguiente:
  1. Si $\mathbb{P}(X = c) = 1$ para una constante c, entonces $E[X] = c$.
  2. Si X, Y son variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio Ω, ambas con esperanza finita y si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, entonces $E[X] \leq E[Y]$.
  3. Si X tiene esperanza finita y si $\mathbb{P}(X \geq c) = 1$, entonces $E[X] \geq c$. De la misma forma, si $\mathbb{P}(X \leq c) = 1$, entonces $E[X] \leq c$.
  4. $|E[X]| \leq E[|X|]$.
  5. Si $Y = g(X)$, entonces $E[Y] = \sum_i g(x_i) f(x_i)$.
  6. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio Ω, con esperanza finita y si $c_1, \ldots, c_n$ son constantes, entonces

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i E[X_i]$$

Esperanza y momentos

- La esperanza cumple lo siguiente:
  1. Si $\mathbb{P}(X = c) = 1$ para una constante c, entonces $E[X] = c$.
  2. Si X, Y son variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio Ω, ambas con esperanza finita y si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, entonces $E[X] \leq E[Y]$.
  3. Si X tiene esperanza finita y si $\mathbb{P}(X \geq c) = 1$, entonces $E[X] \geq c$. De la misma forma, si $\mathbb{P}(X \leq c) = 1$, entonces $E[X] \leq c$.
  4. $|E[X]| \leq E[|X|]$.
  5. Si $Y = g(X)$, entonces $E[Y] = \sum_i g(x_i) f(x_i)$.
  6. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio Ω, con esperanza finita y si $c_1, \ldots, c_n$ son constantes, entonces

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i E[X_i]$$

Esperanza y momentos

- La esperanza cumple lo siguiente:
  1. Si $\mathbb{P}(X = c) = 1$ para una constante c, entonces $E[X] = c$.
  2. Si X, Y son variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio Ω, ambas con esperanza finita y si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, entonces $E[X] \leq E[Y]$.
  3. Si X tiene esperanza finita y si $\mathbb{P}(X \geq c) = 1$, entonces $E[X] \geq c$. De la misma forma, si $\mathbb{P}(X \leq c) = 1$, entonces $E[X] \leq c$.
  4. $|E[X]| \leq E[|X|]$.
  5. Si $Y = g(X)$, entonces $E[Y] = \sum_i g(x_i)f(x_i)$.
  6. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio Ω, con esperanza finita y si $c_1, \ldots, c_n$ son constantes, entonces

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i E[X_i]$$

Esperanza y momentos

- La esperanza cumple lo siguiente:
  1. Si $\mathbb{P}(X = c) = 1$ para una constante c, entonces $E[X] = c$.
  2. Si X, Y son variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio Ω, ambas con esperanza finita y si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, entonces $E[X] \leq E[Y]$.
  3. Si X tiene esperanza finita y si $\mathbb{P}(X \geq c) = 1$, entonces $E[X] \geq c$. De la misma forma, si $\mathbb{P}(X \leq c) = 1$, entonces $E[X] \leq c$.
  4. $|E[X]| \leq E[|X|]$.
  5. Si $Y = g(X)$, entonces $E[Y] = \sum_i g(x_i)f(x_i)$.
  6. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio Ω, con esperanza finita y si $c_1, \ldots, c_n$ son constantes, entonces

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i E[X_i]$$

Esperanza y momentos

- La esperanza cumple lo siguiente:
  1. Si $\mathbb{P}(X = c) = 1$ para una constante c, entonces $E[X] = c$.
  2. Si X, Y son variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio Ω, ambas con esperanza finita y si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, entonces $E[X] \leq E[Y]$.
  3. Si X tiene esperanza finita y si $\mathbb{P}(X \geq c) = 1$, entonces $E[X] \geq c$. De la misma forma, si $\mathbb{P}(X \leq c) = 1$, entonces $E[X] \leq c$.
  4. $|E[X]| \leq E[|X|]$.
  5. Si $Y = g(X)$, entonces $E[Y] = \sum_i g(x_i) f(x_i)$.
  6. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio Ω, con esperanza finita y si $c_1, \ldots, c_n$ son constantes, entonces

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i E[X_i]$$

Esperanza y momentos

- La esperanza cumple lo siguiente:
  1. Si $\mathbb{P}(X = c) = 1$ para una constante c, entonces $E[X] = c$.
  2. Si X, Y son variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio Ω, ambas con esperanza finita y si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, entonces $E[X] \leq E[Y]$.
  3. Si X tiene esperanza finita y si $\mathbb{P}(X \geq c) = 1$, entonces $E[X] \geq c$. De la misma forma, si $\mathbb{P}(X \leq c) = 1$, entonces $E[X] \leq c$.
  4. $|E[X]| \leq E[|X|]$.
  5. Si $Y = g(X)$, entonces $E[Y] = \sum_i g(x_i)f(x_i)$.
  6. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio Ω, con esperanza finita y si $c_1, \ldots, c_n$ son constantes, entonces

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i E[X_i]$$

Esperanza y momentos

- **Ejercicio:** Demuestre que si X es una variable aleatoria que toma los valores $0, 1, 2, \ldots$ y con esperanza finita, entonces

$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

- **Ejercicio:** Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$\mathbb{P}[X = x] = \frac{1}{x(x+1)}$$

para $x = 1, 2, 3, \ldots$. Demuestre que $E[X]$ no existe.

- **Ejercicio:** Suponga que X y Y son variables aleatorias tales que

$$\mathbb{P}(|X - Y| \leq M) = 1$$

para alguna constante M. Suponga que $E[Y] < \infty$ y demuestre que X tiene esperanza finita y $|E[X] - E[Y]| \leq M$.

Esperanza y momentos

- **Ejercicio:** Demuestre que si X es una variable aleatoria que toma los valores $0, 1, 2, \ldots$ y con esperanza finita, entonces

$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

- **Ejercicio:** Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$\mathbb{P}[X = x] = \frac{1}{x(x+1)}$$

para $x = 1, 2, 3, \ldots$. Demuestre que $E[X]$ no existe.

- **Ejercicio:** Suponga que X y Y son variables aleatorias tales que

$$\mathbb{P}(|X - Y| \leq M) = 1$$

para alguna constante M. Suponga que $E[Y] < \infty$ y demuestre que X tiene esperanza finita y $|E[X] - E[Y]| \leq M$.

Esperanza y momentos

- **Ejercicio:** Demuestre que si X es una variable aleatoria que toma los valores $0, 1, 2, \ldots$ y con esperanza finita, entonces

$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

- **Ejercicio:** Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$\mathbb{P}[X = x] = \frac{1}{x(x+1)}$$

para $x = 1, 2, 3, \ldots$. Demuestre que $E[X]$ no existe.

- **Ejercicio:** Suponga que X y Y son variables aleatorias tales que

$$\mathbb{P}(|X - Y| \leq M) = 1$$

para alguna constante M. Suponga que $E[Y] < \infty$ y demuestre que X tiene esperanza finita y $|E[X] - E[Y]| \leq M$.

Varianza de una variable aleatoria

- **Definición:** Sea X una variable con media finita. La varianza de X se define como
$$\sigma^2 = Var[X] = E[(X-\mu)^2]$$
- La desviación estándar de X se define como $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Propiedades de la varianza

La varianza cumple lo siguiente:

1. Para toda constante $c \in \mathbb{R}$, $Var(cX) = c^2 Var(X)$
2. Para toda constante $c \in \mathbb{R}$, $Var(X + c) = Var(X)$
3. $Var(X) \geq 0$, para toda variable aleatoria X. La igualdad se cumple sólo s
$\mathbb{P}(X = c) = 1$ para algún número c constante.
4. $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Varianza de una variable aleatoria

- **Definición:** Sea X una variable con media finita. La varianza de X se define como
$$\sigma^2 = Var[X] = E[(X-\mu)^2]$$
- La desviación estándar de X se define como $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Propiedades de la varianza

La varianza cumple lo siguiente:

1. Para toda constante $c \in \mathbb{R}$, $Var(cX) = c^2 Var(X)$.
2. Para toda constante $c \in \mathbb{R}$, $Var(X+c) = Var(X)$.
3. $Var(X) \geq 0$, para toda variable aleatoria X. La igualdad se cumple sólo si $\mathbb{P}(X=c)=1$ para algún número c constante.
4. $Var(X) = E(X^2) - (E[X])^2$.

Varianza de una variable aleatoria

- **Definición:**Sea X una variable con media finita. La varianza de X se define como
$$\sigma^2 = Var[X] = E[(X-\mu)^2]$$
- La desviación estándar de X se define como $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Propiedades de la varianza

La varianza cumple lo siguiente:

1. Para toda constante $c \in \mathbb{R}$, $Var(cX) = c^2 Var(X)$.
2. Para toda constante $c \in \mathbb{R}$, $Var(X+c) = Var(X)$.
3. $Var(X) \geq 0$, para toda variable aleatoria X. La igualdad se cumple sólo si $\mathbb{P}(X = c) = 1$ para algún número c constante.
4. $Var(X) = E(X^2) - (E[X])^2$.

Varianza de una variable aleatoria

- **Definición:**Sea X una variable con media finita. La varianza de X se define como

$$\sigma^2 = Var[X] = E[(X-\mu)^2]$$

- La desviación estándar de X se define como $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Propiedades de la varianza

La varianza cumple lo siguiente:

1. Para toda constante $c \in \mathbb{R}$, $Var(cX) = c^2 Var(X)$.
2. Para toda constante $c \in \mathbb{R}$, $Var(X+c) = Var(X)$.
3. $Var(X) \geq 0$, para toda variable aleatoria X. La igualdad se cumple sólo si $\mathbb{P}(X=c) = 1$ para algún número c constante.
4. $Var(X) = E(X^2) - (E[X])^2$.

Varianza de una variable aleatoria

- **Definición:**Sea X una variable con media finita. La varianza de X se define como

$$\sigma^2 = Var[X] = E[(X-\mu)^2]$$

- La desviación estándar de X se define como $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Propiedades de la varianza

La varianza cumple lo siguiente:

1. Para toda constante $c \in \mathbb{R}$, $Var(cX) = c^2 Var(X)$.
2. Para toda constante $c \in \mathbb{R}$, $Var(X+c) = Var(X)$.
3. $Var(X) \geq 0$, para toda variable aleatoria X. La igualdad se cumple sólo si $\mathbb{P}(X=c) = 1$ para algún número c constante.
4. $Var(X) = E(X^2) - (E[X])^2$.

Varianza de una variable aleatoria

- **Definición:**Sea X una variable con media finita. La varianza de X se define como
$$\sigma^2 = Var[X] = E[(X-\mu)^2]$$
- La desviación estándar de X se define como $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Propiedades de la varianza

La varianza cumple lo siguiente:

1. Para toda constante $c \in \mathbb{R}$, $Var(cX) = c^2 Var(X)$.
2. Para toda constante $c \in \mathbb{R}$, $Var(X + c) = Var(X)$.
3. $Var(X) \geq 0$, para toda variable aleatoria X. La igualdad se cumple sólo si $\mathbb{P}(X = c) = 1$ para algún número c constante.
4. $Var(X) = E(X^2) - (E[X])^2$.

Varianza de una variable aleatoria

- **Definición:**Sea X una variable con media finita. La varianza de X se define como
$$\sigma^2 = Var[X] = E[(X-\mu)^2]$$
- La desviación estándar de X se define como $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Propiedades de la varianza

La varianza cumple lo siguiente:

1. Para toda constante $c \in \mathbb{R}$, $Var(cX) = c^2 Var(X)$.
2. Para toda constante $c \in \mathbb{R}$, $Var(X+c) = Var(X)$.
3. $Var(X) \geq 0$, para toda variable aleatoria X. La igualdad se cumple sólo si $\mathbb{P}(X=c) = 1$ para algún número c constante.
4. $Var(X) = E(X^2) - (E[X])^2$.

- Enlazar espacios muestrales y eventos a los datos, es proporcionado por el concepto de **Variables Aleatorias**.

- Una **variable aleatoria** es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ que asigna a un número real para cada resultado ω.

- **Ejemplo** Lanzamos una moneda 10 veces. Sea $X(w)$ el número de caras en la secuencia ω. Por ejemplo si $\omega = HHTHHTHHTT$, entonces $X(\omega) = 6$.

- **Ejemplo** Lancemos dos monedas y sea X el número de caras. Entonces, $\mathbb{P}(X = 0) = \imath(\{TT\}) = 1/4$, $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{HT, TH\}) = 1/2$ y $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{HH\}) = 1/4$. Las variables aleatorias y su distribución puede ser resumida como sigue:

-

- Enlazar espacios muestrales y eventos a los datos, es proporcionado por el concepto de **Variables Aleatorias**.

- Una **variable aleatoria** es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna a un número real para cada resultado ω.

- **Ejemplo** Lanzamos una moneda 10 veces. Sea $X(w)$ el número de caras en la secuencia ω. Por ejemplo si $\omega = HHTHHHTHHTT$, entonces $X(\omega) = 6$.

- **Ejemplo** Lancemos dos monedas y sea X el número de caras. Entonces, $\mathbb{P}(X = 0) = \imath(\{TT\}) = 1/4$, $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{HT, TH\}) = 1/2$ y $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{HH\}) = 1/4$. Las variables aleatorias y su distribución puede ser resumida como sigue:

-

- Enlazar espacios muestrales y eventos a los datos, es proporcionado por el concepto de **Variables Aleatorias**.

- Una **variable aleatoria** es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ que asigna a un número real para cada resultado ω.

- **Ejemplo** Lanzamos una moneda 10 veces. Sea $X(w)$ el número de caras en la secuencia ω. Por ejemplo si $\omega = HHTHHTHHTT$, entonces $X(\omega) = 6$.

- **Ejemplo** Lancemos dos monedas y sea X el número de caras. Entonces, $\mathbb{P}(X = 0) = \imath(\{TT\}) = 1/4$, $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{HT, TH\}) = 1/2$ y $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{HH\}) = 1/4$. Las variables aleatorias y su distribución puede ser resumida como sigue:

-

- Enlazar espacios muestrales y eventos a los datos, es proporcionado por el concepto de **Variables Aleatorias**.

- Una **variable aleatoria** es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ que asigna a un número real para cada resultado ω.

- **Ejemplo** Lanzamos una moneda 10 veces. Sea $X(w)$ el número de caras en la secuencia ω. Por ejemplo si $\omega = HHTHHTHHTT$, entonces $X(\omega) = 6$.

- **Ejemplo** Lancemos dos monedas y sea X el número de caras. Entonces, $\mathbb{P}(X = 0) = \text{ı}(\{TT\}) = 1/4$, $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{HT, TH\}) = 1/2$ y $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{HH\}) = 1/4$. Las variables aleatorias y su distribución puede ser resumida como sigue:

- Enlazar espacios muestrales y eventos a los datos, es proporcionado por el concepto de **Variables Aleatorias**.

- Una **variable aleatoria** es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ que asigna a un número real para cada resultado ω.

- **Ejemplo** Lanzamos una moneda 10 veces. Sea $X(w)$ el número de caras en la secuencia ω. Por ejemplo si $\omega = HHTHHTHHTT$, entonces $X(\omega) = 6$.

- **Ejemplo** Lancemos dos monedas y sea X el número de caras. Entonces, $\mathbb{P}(X = 0) = |(\{TT\}) = 1/4$, $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{HT, TH\}) = 1/2$ y $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{HH\}) = 1/4$. Las variables aleatorias y su distribución puede ser resumida como sigue:

-

ω	$\mathbb{P}(\{\omega\})$	$X(\omega)$
TT	1/4	0
TH	1/4	1
HT	1/4	1
HH	1/4	2

x	$\mathbb{P}(X = x)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4

-

ω	$\mathbb{P}(\{\omega\})$	$X(\omega)$
TT	$1/4$	0
TH	$1/4$	1
HT	$1/4$	1
HH	$1/4$	2

x	$\mathbb{P}(X = x)$
0	$1/4$
1	$1/2$
2	$1/4$

-

- Dada una variable aleatoria X y un subconjunto A de la línea real, definamos $X^{-}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$ y sea

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in A\})$$
$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X^{-1}(x)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) = x\}).$$

- Función Distribución y Función de Probabilidad

- **Definición** La *Función Distribución Acumulativa* o `CDF`, es la función $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ es definido como

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x). \tag{1}$$

-

- Dada una variable aleatoria X y un subconjunto A de la línea real, definamos $X^{-}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$ y sea

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in A\})$$
$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X^{-1}(x)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) = x\}).$$

- Función Distribución y Función de Probabilidad

- **Definición** La *Función Distribución Acumulativa* o CDF, es la función $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ es definido como

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x). \quad (1)$$

-

- Dada una variable aleatoria X y un subconjunto A de la línea real, definamos $X^{-}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$ y sea

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in A\})$$
$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X^{-1}(x)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) = x\}).$$

- Función Distribución y Función de Probabilidad

- **Definición** La *Función Distribución Acumulativa* o `CDF`, es la función $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ es definido como

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x). \tag{1}$$

- Dada una variable aleatoria X y un subconjunto A de la línea real, definamos $X^{-}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$ y sea

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega ; X(\omega) \in A\})$$
$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X^{-1}(x)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega ; X(\omega) = x\}).$$

- Función Distribución y Función de Probabilidad

- **Definición** La *Función Distribución Acumulativa* o `CDF`, es la función $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ es definido como

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x). \tag{1}$$

-

- Los siguientes resultados muestran que la CDF completamente determina la distribución de una variable aleatoria.

1. Sea X que tiene un CDF F y sea Y que tiene CDF G. Si $F(x) = G(x)$ para todo x, entonces $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$ para todo A.
2. Una función $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ es un CDF para alguna probabilidad $\mathbb{P}$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones
   1. F es no decreciente: $x_1 < x_2$ implica $F(x_1) \leq F(x_2)$.
   2. F es normalizado:
   $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$
   y
   $$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$
   3. F es continua por la derecha: $F(x) = F(x^+)$ para todo x, donde
   $$F(x^+) = \lim_{y \to x} F(y) \qquad \text{si} \qquad y > x.$$

- Los siguientes resultados muestran que la CDF completamente determina la distribución de una variable aleatoria.

1. Sea X que tiene un CDF F y sea Y que tiene CDF G. Si $F(x) = G(x)$ para todo x, entonces $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$ para todo A.
2. Una función $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ es un CDF para alguna probabilidad $\mathbb{P}$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones
   1. F es no decreciente: $x_1 < x_2$ implica $F(x_1) \leq F(x_2)$.
   2. F es normalizado:
      $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$
      y
      $$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$
   3. F es continua por la derecha: $F(x) = F(x^+)$ para todo x, donde
      $$F(x^+) = \lim_{y \to x} F(y) \qquad \text{si} \qquad y > x.$$

- Los siguientes resultados muestran que la CDF completamente determina la distribución de una variable aleatoria.

  1. Sea X que tiene un CDF F y sea Y que tiene CDF G. Si $F(x) = G(x)$ para todo x, entonces $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$ para todo A.
  2. Una función $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ es un CDF para alguna probabilidad $\mathbb{P}$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones
     1. F es no decreciente: $x_1 < x_2$ implica $F(x_1) \leq F(x_2)$.
     2. F es normalizado:
        $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$
        y
        $$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$
     3. F es continua por la derecha: $F(x) = F(x^+)$ para todo x, donde
        $$F(x^+) = \lim_{y \to x} F(y) \qquad \text{si} \qquad y > x.$$

-

- Los siguientes resultados muestran que la CDF completamente determina la distribución de una variable aleatoria.

  1. Sea X que tiene un CDF F y sea Y que tiene CDF G. Si $F(x) = G(x)$ para todo x, entonces $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$ para todo A.
  2. Una función $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ es un CDF para alguna probabilidad $\mathbb{P}$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones
     1. F es no decreciente: $x_1 < x_2$ implica $F(x_1) \leq F(x_2)$.
     2. F es normalizado:
        $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$
        y
        $$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$
     3. F es continua por la derecha: $F(x) = F(x^+)$ para todo x, donde
        $$F(x^+) = \lim_{y \to x} F(y) \qquad \text{si} \qquad y > x.$$

-

- Los siguientes resultados muestran que la CDF completamente determina la distribución de una variable aleatoria.

  1. Sea X que tiene un CDF F y sea Y que tiene CDF G. Si $F(x) = G(x)$ para todo x, entonces $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$ para todo A.
  2. Una función $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ es un CDF para alguna probabilidad $\mathbb{P}$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones
     1. F es no decreciente: $x_1 < x_2$ implica $F(x_1) \leq F(x_2)$.
     2. F es normalizado:
        $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$
        y
        $$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$
     3. F es continua por la derecha: $F(x) = F(x^+)$ para todo x, donde
        $$F(x^+) = \lim_{y \to x} F(y) \qquad \text{si} \qquad y > x.$$

- Los siguientes resultados muestran que la CDF completamente determina la distribución de una variable aleatoria.

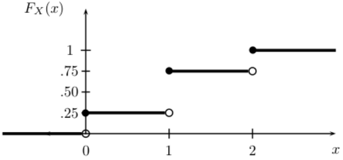
  1. Sea X que tiene un CDF F y sea Y que tiene CDF G. Si $F(x) = G(x)$ para todo x, entonces $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$ para todo A.
  2. Una función $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ es un CDF para alguna probabilidad $\mathbb{P}$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones
     1. F es no decreciente: $x_1 < x_2$ implica $F(x_1) \leq F(x_2)$.
     2. F es normalizado:
        $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$
        y
        $$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$
     3. F es continua por la derecha: $F(x) = F(x^+)$ para todo x, donde
        $$F(x^+) = \lim_{y \to x} F(y) \qquad \text{si} \qquad y > x.$$

- Los siguientes resultados muestran que la CDF completamente determina la distribución de una variable aleatoria.

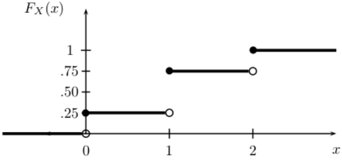
  1. Sea X que tiene un CDF F y sea Y que tiene CDF G. Si $F(x) = G(x)$ para todo x, entonces $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$ para todo A.
  2. Una función $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ es un CDF para alguna probabilidad $\mathbb{P}$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones
     1. F es no decreciente: $x_1 < x_2$ implica $F(x_1) \leq F(x_2)$.
     2. F es normalizado:
        $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$
        y
        $$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$
     3. F es continua por la derecha: $F(x) = F(x^+)$ para todo x, donde
        $$F(x^+) = \lim_{y \to x} F(y) \qquad \text{si} \qquad y > x.$$

-

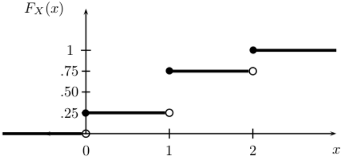
- **Ejemplo** Lanzamos una moneda dos veces y sea X el número de caras. Entonces $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 2) = 1/4$ y $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$. La función distribución es
- $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/4 & 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2. \end{cases}$$
- y el CDF es mostrado en la siguiente figura. Se debe notar que la función es continua por la derecha,no decreciente y es definida para todo x, incluso si la variable aleatoria toma los valores $0, 1$ y 2.



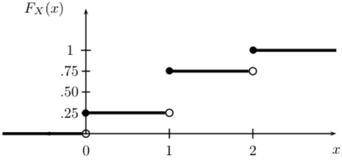
- **Ejemplo** Lanzamos una moneda dos veces y sea X el número de caras. Entonces $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 2) = 1/4$ y $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$. La función distribución es
-
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/4 & 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2. \end{cases}$$
- y el CDF es mostrado en la siguiente figura. Se debe notar que la función es continua por la derecha,no decreciente y es definida para todo x, incluso si la variable aleatoria toma los valores $0, 1$ y 2.

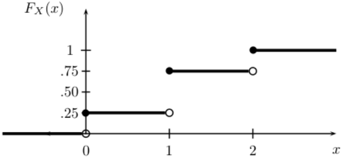


- **Ejemplo** Lanzamos una moneda dos veces y sea X el número de caras. Entonces $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 2) = 1/4$ y $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$. La función distribución es
- $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/4 & 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2. \end{cases}$$
- y el CDF es mostrado en la siguiente figura. Se debe notar que la función es continua por la derecha,no decreciente y es definida para todo x, incluso si la variable aleatoria toma los valores $0, 1$ y 2.



- **Ejemplo** Lanzamos una moneda dos veces y sea X el número de caras. Entonces $\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=2)=1/4$ y $\mathbb{P}(X=1)=1/2$. La función distribución es
- $$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1/4 & 0\leq x<1 \\ 3/4 & 1\leq x<2 \\ 1 & x\geq 2. \end{cases}$$
- y el CDF es mostrado en la siguiente figura. Se debe notar que la función es continua por la derecha,no decreciente y es definida para todo x, incluso si la variable aleatoria toma los valores $0, 1$ y 2.



- **Ejemplo** Lanzamos una moneda dos veces y sea X el número de caras. Entonces $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 2) = 1/4$ y $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$. La función distribución es
- $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/4 & 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2. \end{cases}$$
- y el `CDF` es mostrado en la siguiente figura. Se debe notar que la función es continua por la derecha,no decreciente y es definida para todo x, incluso si la variable aleatoria toma los valores $0, 1$ y 2.
- 

- **Definición** Si X es discreta si toma valores contables $\{x_1, x_2, \dots\}$. Definimos la **función probabilidad** o **pmf** para X por $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$.

  Así, $f_X(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\sum_i f_X(x_i) = 1$. El CDF es relacionado a f_X por

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i).$$

  La función probabilidad para el ejemplo anterior es

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/ & x = 0 \\ 1/2 & x = 1 \\ 1/4 & x = 2 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

- Taller 7. Variables aleatorias

- **Definición** Si X es discreta si toma valores contables $\{x_1, x_2, \dots\}$. Definimos la **función probabilidad** o **pmf** para X por $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$.

  Así, $f_X(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\sum_i f_X(x_i) = 1$. El `CDF` es relacionado a f_X por

  $$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i).$$

  La función probabilidad para el ejemplo anterior es

  $$f_X(x) = \begin{cases} 1/ & x = 0 \\ 1/2 & x = 1 \\ 1/4 & x = 2 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

- **Taller 7. Variables aleatorias**

- **Definición** Si X es discreta si toma valores contables $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Definimos la **función probabilidad** o **pmf** para X por $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$.

  Así, $f_X(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\sum_i f_X(x_i) = 1$. El `CDF` es relacionado a f_X por

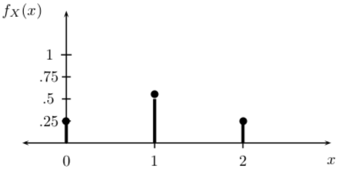
  $$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i).$$

  La función probabilidad para el ejemplo anterior es

  $$f_X(x) = \begin{cases} 1/ & x = 0 \\ 1/2 & x = 1 \\ 1/4 & x = 2 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

- <u>**Taller 7. Variables aleatorias**</u>

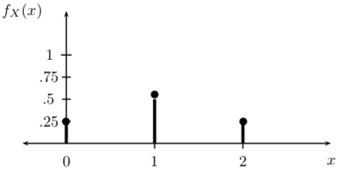
- Como indica la siguiente figura



- **Definición** Una variable aleatoria es **continua** si existe una función f_X tal que $f_X(x) \geq 0$ para todo x, $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ y para todo $a \leq b$,

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx. \qquad (2)$$

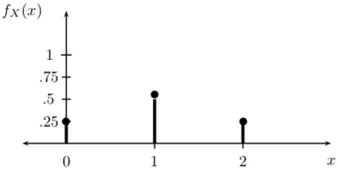
- Como indica la siguiente figura



- **Definición** Una variable aleatoria es **continua** si existe una función f_X tal que $f_X(x) \geq 0$ para todo x, $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ y para todo $a \leq b$,

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx. \tag{2}$$

- Como indica la siguiente figura



- **Definición** Una variable aleatoria es **continua** si existe una función f_X tal que $f_X(x) \geq 0$ para todo x, $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ y para todo $a \leq b$,

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx. \tag{2}$$

-

knuth

Dantzig, G.B. y P. Wolfe, ■Decomposition principle for linear programs■,
Operations Research, **8**, págs. 101–111, 1960.


YAHWEH
"IAUE"
YAHSHUA
"IASHUA"
YAHWEH