Teoría de Probabilidad

Maestría en Estadística Aplicada y Ciencia de Datos

Julio Hurtado, Msc.

UTB

2022

Probabilidad elemental – Parte 2

Sigma álgebra

Defínción Una colección, $\mathcal{F}$, no vacía de subconjuntos de un conjunto Ω, se llama una **sigma álgebra** (σ-álgebra) de subconjuntos de Ω si las siguientes propiedades se cumplen:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$.
3. Si $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

- De acuerdo a la definición, podemos restringir nuestra atención únicamente a los eventos que pertenecen a una sigma álgebra.
- *Demuestre que si $\mathcal{F}$ es una sigma álgebra y A_n, B_n, $n = 1, 2, \ldots$ son una sucesión de eventos de $\mathcal{F}$, entonces el conjunto*

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^c\right)$$

pertenece a $\mathcal{F}$.

Sigma álgebra

Definción Una colección, $\mathcal{F}$, no vacía de subconjuntos de un conjunto Ω, se llama una **sigma álgebra** (σ-álgebra) de subconjuntos de Ω si las siguientes propiedades se cumplen:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$.
3. Si $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

- De acuerdo a la definición, podemos restringir nuestra atención únicamente a los eventos que pertenecen a una sigma álgebra.
- *Demuestre que si $\mathcal{F}$ es una sigma álgebra y A_n, B_n, $n = 1, 2, \ldots$ son una sucesión de eventos de $\mathcal{F}$, entonces el conjunto*

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^c\right)$$

pertenece a $\mathcal{F}$.

Distintas definiciones del concepto de probabilidad

- Continuando con el estudio de un experimento aleatorio y una vez que se han definido los sucesos, se aprecia la necesidad de definir alguna medida que cuantifique la incertidumbre de que un determinado suceso se obtenga al realizar un experimento aleatorio, a tal medida se le denomina *probabilidad*.
- La dificultad de dar una definición del concepto de probabilidad sin objeciones o limitaciones, queda reflejada por los diferentes intentos realizados a lo largo de la historia para encontrar una definición de dicho concepto.
- De la introducción histórica que se ha elaborado se desprende la existencia de tres definiciones del concepto de probabilidad que a continuación se discuten.

Distintas definiciones del concepto de probabilidad

- Continuando con el estudio de un experimento aleatorio y una vez que se han definido los sucesos, se aprecia la necesidad de definir alguna medida que cuantifique la incertidumbre de que un determinado suceso se obtenga al realizar un experimento aleatorio, a tal medida se le denomina *probabilidad*.
- La dificultad de dar una definición del concepto de probabilidad sin objeciones o limitaciones, queda reflejada por los diferentes intentos realizados a lo largo de la historia para encontrar una definición de dicho concepto.
- De la introducción histórica que se ha elaborado se desprende la existencia de tres definiciones del concepto de probabilidad que a continuación se discuten.

Distintas definiciones del concepto de probabilidad

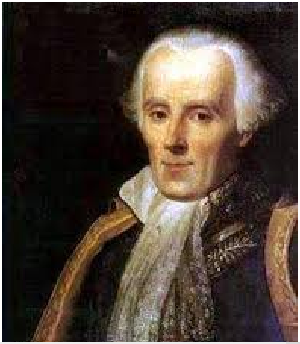
- Continuando con el estudio de un experimento aleatorio y una vez que se han definido los sucesos, se aprecia la necesidad de definir alguna medida que cuantifique la incertidumbre de que un determinado suceso se obtenga al realizar un experimento aleatorio, a tal medida se le denomina *probabilidad*.
- La dificultad de dar una definición del concepto de probabilidad sin objeciones o limitaciones, queda reflejada por los diferentes intentos realizados a lo largo de la historia para encontrar una definición de dicho concepto.
- De la introducción histórica que se ha elaborado se desprende la existencia de tres definiciones del concepto de probabilidad que a continuación se discuten.

Definición clásica, debida a Laplace:

Definición clásica, debida a Laplace:

La probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles.

- Los inconvenientes de definir la probabilidad de esta forma son:
  1. No es válida cuando los sucesos elementales no son equiprobables.
  2. A veces no es posible contar.

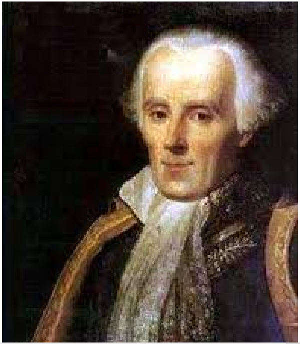


Definición clásica, debida a Laplace:

Definición clásica, debida a Laplace:

La probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles.

- Los inconvenientes de definir la probabilidad de esta forma son:
  1. No es válida cuando los sucesos elementales no son equiprobables.
  2. A veces no es posible contar.

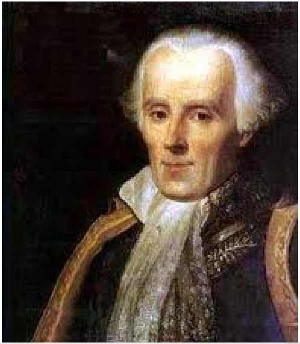


Definición clásica, debida a Laplace:

Definición clásica, debida a Laplace:

La probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles.

- Los inconvenientes de definir la probabilidad de esta forma son:
  1. No es válida cuando los sucesos elementales no son equiprobables.
  2. A veces no es posible contar.

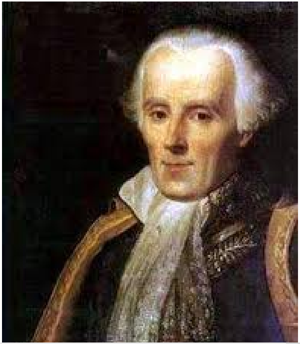


Definición clásica, debida a Laplace:

Definición clásica, debida a Laplace:

La probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles.

- Los inconvenientes de definir la probabilidad de esta forma son:
  1. No es válida cuando los sucesos elementales no son equiprobables.
  2. A veces no es posible contar.



Definición frecuentista:

Definición frecuentista, debida a Bernouilli:

La probabilidad de un suceso es el valorlímite de su frecuencia relativa al repetir indefinidamente la experimentación.

- Los inconvenientes de definir así la probabilidad son los siguientes:
  1. Desde el punto de vista del análisis no puede interpretarse el límite anterior por la imposibilidad de fijar el número de repeticiones.
  2. En algunas ocasiones no es posible realizar una experimentación indefinida.
  3. Las condiciones bajo las cuales se realiza la experimentación pueden variar a lo largo del tiempo y, con ellas, las frecuencias relativas.

Definición frecuentista:

Definición frecuentista, debida a Bernouilli:

La probabilidad de un suceso es el valorlímite de su frecuencia relativa al repetir indefinidamente la experimentación.

- Los inconvenientes de definir así la probabilidad son los siguientes:
  1. Desde el punto de vista del análisis no puede interpretarse el límite anterior por la imposibilidad de fijar el número de repeticiones.
  2. En algunas ocasiones no es posible realizar una experimentación indefinida.
  3. Las condiciones bajo las cuales se realiza la experimentación pueden variar a lo largo del tiempo y, con ellas, las frecuencias relativas.

Definición frecuentista:

Definición frecuentista, debida a Bernouilli:

La probabilidad de un suceso es el valorlímite de su frecuencia relativa al repetir indefinidamente la experimentación.

- Los inconvenientes de definir así la probabilidad son los siguientes:
  1. Desde el punto de vista del análisis no puede interpretarse el límite anterior por la imposibilidad de fijar el número de repeticiones.
  2. En algunas ocasiones no es posible realizar una experimentación indefinida.
  3. Las condiciones bajo las cuales se realiza la experimentación pueden variar a lo largo del tiempo y, con ellas, las frecuencias relativas.

Definición frecuentista:

Definición frecuentista, debida a Bernouilli:

La probabilidad de un suceso es el valorlímite de su frecuencia relativa al repetir indefinidamente la experimentación.

- Los inconvenientes de definir así la probabilidad son los siguientes:
  1. Desde el punto de vista del análisis no puede interpretarse el límite anterior por la imposibilidad de fijar el número de repeticiones.
  2. En algunas ocasiones no es posible realizar una experimentación indefinida.
  3. Las condiciones bajo las cuales se realiza la experimentación pueden variar a lo largo del tiempo y, con ellas, las frecuencias relativas.

Definición frecuentista:

Definición frecuentista, debida a Bernouilli:

La probabilidad de un suceso es el valorlímite de su frecuencia relativa al repetir indefinidamente la experimentación.

- Los inconvenientes de definir así la probabilidad son los siguientes:
  1. Desde el punto de vista del análisis no puede interpretarse el límite anterior por la imposibilidad de fijar el número de repeticiones.
  2. En algunas ocasiones no es posible realizar una experimentación indefinida.
  3. Las condiciones bajo las cuales se realiza la experimentación pueden variar a lo largo del tiempo y, con ellas, las frecuencias relativas.

Medidas de probabilidad - Probabilidad versión frecuentista

- Sea Ω un espacio muestral y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω.
- La probabilidad de un evento $A \in \mathcal{F}$, está dada por el límite

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

- en donde n es el número total de ensayos y n_A es el número de veces que ocurre el evento A.
- En la práctica, la definición de probabilidad frecuentista se encuentra limitada debido al hecho de que en la realidad n y n_A son números finitos y por lo tanto, lo que realmente se tiene es la aproximación

$$\mathbb{P}(A) \approx \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

-

Medidas de probabilidad - Probabilidad versión frecuentista

- Sea Ω un espacio muestral y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω.
- La probabilidad de un evento $A \in \mathcal{F}$, está dada por el límite

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

- en donde n es el número total de ensayos y n_A es el número de veces que ocurre el evento A.
- En la práctica, la definición de probabilidad frecuentista se encuentra limitada debido al hecho de que en la realidad n y n_A son números finitos y por lo tanto, lo que realmente se tiene es la aproximación

$$\mathbb{P}(A) \approx \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

Medidas de probabilidad - Probabilidad versión frecuentista

- Sea Ω un espacio muestral y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω.
- La probabilidad de un evento $A \in \mathcal{F}$, está dada por el límite

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

- en donde n es el número total de ensayos y n_A es el número de veces que ocurre el evento A.
- En la práctica, la definición de probabilidad frecuentista se encuentra limitada debido al hecho de que en la realidad n y n_A son números finitos y por lo tanto, lo que realmente se tiene es la aproximación

$$\mathbb{P}(A) \approx \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

Medidas de probabilidad - Probabilidad versión frecuentista

- Sea Ω un espacio muestral y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω.
- La probabilidad de un evento $A \in \mathcal{F}$, está dada por el límite

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

- en donde n es el número total de ensayos y n_A es el número de veces que ocurre el evento A.
- En la práctica, la definición de probabilidad frecuentista se encuentra limitada debido al hecho de que en la realidad n y n_A son números finitos y por lo tanto, lo que realmente se tiene es la aproximación

$$\mathbb{P}(A) \approx \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

Medidas de probabilidad - Probabilidad versión frecuentista

- Sea Ω un espacio muestral y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω.
- La probabilidad de un evento $A \in \mathcal{F}$, está dada por el límite

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

- en donde n es el número total de ensayos y n_A es el número de veces que ocurre el evento A.
- En la práctica, la definición de probabilidad frecuentista se encuentra limitada debido al hecho de que en la realidad n y n_A son números finitos y por lo tanto, lo que realmente se tiene es la aproximación

$$\mathbb{P}(A) \approx \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

-

Distintas definiciones del concepto de probabilidad

- Para evitar los inconvenientes de ambas definiciones, además de un gran número de paradojas y dificultades surgidas a comienzos del presente siglo, se hizo necesaria una profunda revisión del concepto de probabilidad utilizando las herramientas más precisas del momento: *La teoría de conjuntos*, desarrollada principalmente por *Émile Borel (1871 -1956)*, y la potente *Teoría de la medida*, debida a *Lebesgue-Henri Léon Lebesgue(1875 -1941)*.

Distintas definiciones del concepto de probabilidad

- Para evitar los inconvenientes de ambas definiciones, además de un gran número de paradojas y dificultades surgidas a comienzos del presente siglo, se hizo necesaria una profunda revisión del concepto de probabilidad utilizando las herramientas más precisas del momento: *La teoría de conjuntos*, desarrollada principalmente por *Émile Borel (1871 -1956)*, y la potente *Teoría de la medida*, debida a *Lebesgue-Henri Léon Lebesgue(1875 -1941)*.

Distintas definiciones del concepto de probabilidad

- Todo lo anterior llevó a Andréi Kolmogórov a introducir axiomáticamente el concepto de Probabilidad.

Distintas definiciones del concepto de probabilidad

- Todo lo anterior llevó a Andréi Kolmogórov a introducir axiomáticamente el concepto de Probabilidad.

Medidas de probabilidad - Probabilidad versión Axiomática

- Una medida de probabilidad $\mathbb{P}$, definida sobre elementos de una σ-álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto Ω, es una función $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ que cumple lo siguiente:

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. $\mathbb{P}(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$.
3. Si A_n, $n = 1, 2, \ldots$ son eventos mutuamente excluyentes (es decir, se tiene que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$), entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Medidas de probabilidad - Probabilidad versión Axiomática

- Una medida de probabilidad $\mathbb{P}$, definida sobre elementos de una σ-álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto Ω, es una función $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ que cumple lo siguiente:

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. $\mathbb{P}(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$.
3. Si A_n, $n = 1, 2, \ldots$ son eventos mutuamente excluyentes (es decir, se tiene que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$), entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Medidas de probabilidad - Probabilidad versión Axiomática

- Una medida de probabilidad $\mathbb{P}$, definida sobre elementos de una σ-álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto Ω, es una función $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ que cumple lo siguiente:

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. $\mathbb{P}(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$.
3. Si A_n, $n = 1, 2, \ldots$ son eventos mutuamente excluyentes (es decir, se tiene que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$), entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Propiedades de las medidas de probabilidad

Teorema

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. La medida $\mathbb{P}$ tiene las siguientes propiedades:

- Para cualesquiera eventos A, B, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$ (demostrar, sugerencia $\Omega = A \cup A^c$).
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$,
- en particular $\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega)$ (demostrar, sugerencia utilizar el punto anterior).
- Si $A \subset B$, entonces $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$ (demostrar).

Propiedades de las medidas de probabilidad

Teorema

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. La medida $\mathbb{P}$ tiene las siguientes propiedades:

- Para cualesquiera eventos A, B, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$ (demostrar, sugerencia $\Omega = A \cup A^c$).
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$,
- en particular $\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega)$ (demostrar, sugerencia utilizar el punto anterior).
- Si $A \subset B$, entonces $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$ (demostrar).

Propiedades de las medidas de probabilidad

Teorema

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. La medida $\mathbb{P}$ tiene las siguientes propiedades:

- Para cualesquiera eventos A, B, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$ (demostrar, sugerencia $\Omega = A \cup A^c$).
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$,
- en particular $\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega)$ (demostrar, sugerencia utilizar el punto anterior).
- Si $A \subset B$, entonces $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$ (demostrar).

Propiedades de las medidas de probabilidad

Teorema

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. La medida $\mathbb{P}$ tiene las siguientes propiedades:

- Para cualesquiera eventos A, B, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$ (demostrar, sugerencia $\Omega = A \cup A^c$).
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$,
- en particular $\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega)$ (demostrar, sugerencia utilizar el punto anterior).
- Si $A \subset B$, entonces $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$ (demostrar).

Propiedades de las medidas de probabilidad

Teorema

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. La medida $\mathbb{P}$ tiene las siguientes propiedades:

- Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = & \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \\ & + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ & - \ldots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)\end{aligned}$$

Propiedades de las medidas de probabilidad

Teorema

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. La medida $\mathbb{P}$ tiene las siguientes propiedades:

- Como consecuencia

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

- La probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos,

$$\forall \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \mid A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j, \qquad \mathbb{P}(\bigcup_{i \in N} A_i) = \sum_{i \in N} \mathbb{P}(A_i)$$

-

Propiedades de las medidas de probabilidad

Teorema

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. La medida $\mathbb{P}$ tiene las siguientes propiedades:

- Como consecuencia

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

- La probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos,

$$\forall \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \mid A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j, \qquad \mathbb{P}(\bigcup_{i \in N} A_i) = \sum_{i \in N} \mathbb{P}(A_i)$$

-

Propiedades de las medidas de probabilidad

Teorema

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. La medida $\mathbb{P}$ tiene las siguientes propiedades:

- Como consecuencia

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

- La probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos,

$$\forall \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \mid A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j, \qquad \mathbb{P}(\bigcup_{i \in N} A_i) = \sum_{i \in N} \mathbb{P}(A_i)$$

-

Cálculo de Probabilidad en la práctica

- El gran inconveniente de estas definiciones es que no dan un método para el cálculo de probabilidades, por lo que en la práctica hay que basarse en las definiciones clásica y frecuentista.
- La probabilidad de ocurrencia del evento "*no ocurre A*", denotado por $\bar{A}$ es

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Ω

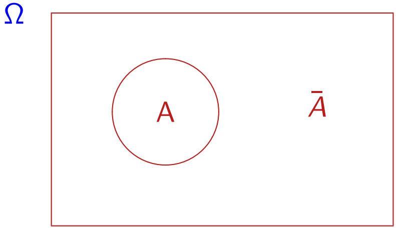
- La probabilidad del suceso imposible es cero,

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Cálculo de Probabilidad en la práctica

- El gran inconveniente de estas definiciones es que no dan un método para el cálculo de probabilidades, por lo que en la práctica hay que basarse en las definiciones clásica y frecuentista.
- La probabilidad de ocurrencia del evento "*no ocurre A*", denotado por $\bar{A}$ es

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$



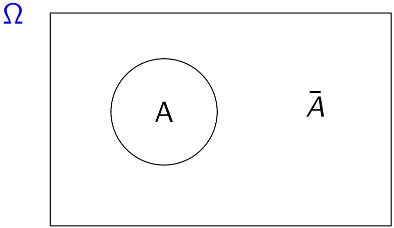
- La probabilidad del suceso imposible es cero,

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Cálculo de Probabilidad en la práctica

- El gran inconveniente de estas definiciones es que no dan un método para el cálculo de probabilidades, por lo que en la práctica hay que basarse en las definiciones clásica y frecuentista.
- La probabilidad de ocurrencia del evento "*no ocurre A*", denotado por $\bar{A}$ es

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$



- La probabilidad del suceso imposible es cero,

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Cálculo de Probabilidad en la práctica

- Si A y B son dos sucesos cualesquiera se verifica que:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

-

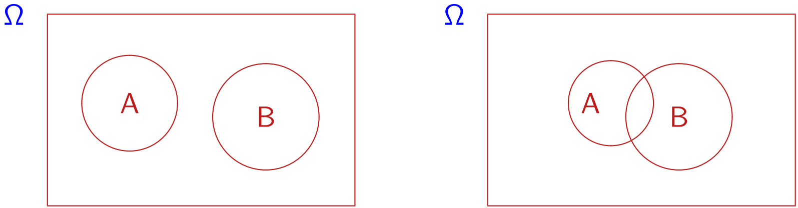
-

Cálculo de Probabilidad en la práctica

- Si A y B son dos sucesos cualesquiera se verifica que:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

-



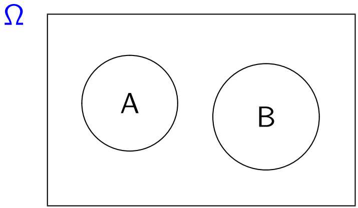
-

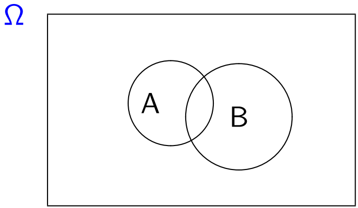
Cálculo de Probabilidad en la práctica

- Si A y B son dos sucesos cualesquiera se verifica que:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

-





-

Cálculo de Probabilidad en la práctica

- Si se tienen tres sucesos, A, B y C, la propiedad anterior tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ &\quad - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ &\quad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

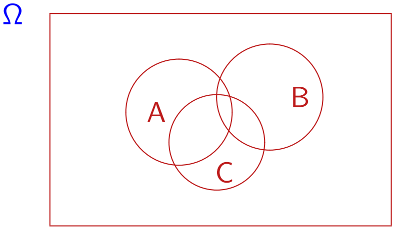
-

-

Cálculo de Probabilidad en la práctica

- Si se tienen tres sucesos, A, B y C, la propiedad anterior tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ &\quad - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ &\quad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

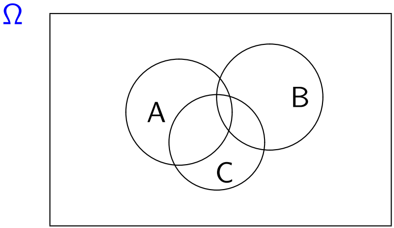
- 

Cálculo de Probabilidad en la práctica

- Si se tienen tres sucesos, A, B y C, la propiedad anterior tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ &\quad - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ &\quad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

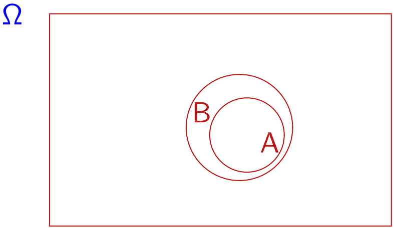
-



-

Cálculo de Probabilidad en la práctica

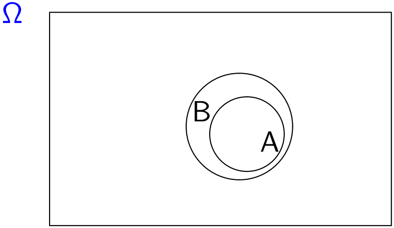
- Si $A \subseteq B$ entonces $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$



- Veamos el video Probabilidad Parte 1
-

Cálculo de Probabilidad en la práctica

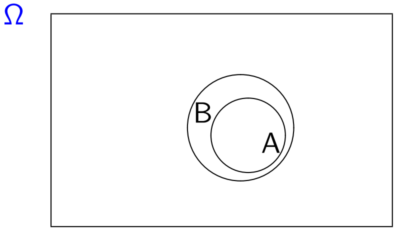
- Si $A \subseteq B$ entonces $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$



- **Veamos el video Probabilidad Parte 1**

Cálculo de Probabilidad en la práctica

- Si $A \subseteq B$ entonces $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$



- **Veamos el video Probabilidad Parte 1**
-

Probabilidad condicional e independencia

- Si $\mathbb{P}(B) > 0$, la *probabilidad condicionada* de que "ocurra A" si "B ya ocurrió", $\mathbb{P}(A \mid B)$, viene definida por el cociente:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- Análogamente, se define la probabilidad condicionada de B respecto a A.

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

- Utilizando conjuntamente ambos resultados se obtiene que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)$$

- **Veamos el video Probabilidad Parte 2**
- **Taller de Probabilidad Parte 1**
-

Probabilidad condicional e independencia

- Si $\mathbb{P}(B) > 0$, la *probabilidad condicionada* de que "ocurra A" si "B ya ocurrió", $\mathbb{P}(A \mid B)$, viene definida por el cociente:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- Análogamente, se define la probabilidad condicionada de B respecto a A.

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

- Utilizando conjuntamente ambos resultados se obtiene que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)$$

- **Veamos el video Probabilidad Parte 2**
- **Taller de Probabilidad Parte 1**

Probabilidad condicional e independencia

- Si $\mathbb{P}(B) > 0$, la *probabilidad condicionada* de que "ocurra A" si "B ya ocurrió", $\mathbb{P}(A \mid B)$, viene definida por el cociente:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- Análogamente, se define la probabilidad condicionada de B respecto a A.

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

- Utilizando conjuntamente ambos resultados se obtiene que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)$$

- Veamos el video Probabilidad Parte 2
- Taller de Probabilidad Parte 1

Probabilidad condicional e independencia

- Si $\mathbb{P}(B) > 0$, la *probabilidad condicionada* de que "ocurra A" si "B ya ocurrió", $\mathbb{P}(A \mid B)$, viene definida por el cociente:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- Análogamente, se define la probabilidad condicionada de B respecto a A.

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

- Utilizando conjuntamente ambos resultados se obtiene que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)$$

- **Veamos el video Probabilidad Parte 2**
- **Taller de Probabilidad Parte 1**

Probabilidad condicional e independencia

- Si $\mathbb{P}(B) > 0$, la *probabilidad condicionada* de que "ocurra A" si "B ya ocurrió", $\mathbb{P}(A \mid B)$, viene definida por el cociente:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- Análogamente, se define la probabilidad condicionada de B respecto a A.

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

- Utilizando conjuntamente ambos resultados se obtiene que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)$$

- **Veamos el video Probabilidad Parte 2**
- **Taller de Probabilidad Parte 1**

Probabilidad condicional e independencia

- Si $\mathbb{P}(B) > 0$, la *probabilidad condicionada* de que "ocurra A" si "B ya ocurrió", $\mathbb{P}(A \mid B)$, viene definida por el cociente:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- Análogamente, se define la probabilidad condicionada de B respecto a A.

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

- Utilizando conjuntamente ambos resultados se obtiene que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)$$

- **Veamos el video Probabilidad Parte 2**
- **Taller de Probabilidad Parte 1**
-

Probabilidad condicional e independencia: EJEMPLO

- El 60% de los alumnos de una clase de Estadística son chicas y se sabe que el 30% de las chicas son rubias. ¿Cuál es la probabilidad de escoger un alumno de la clase que sea chica y rubia?
- Para resolver este ejemplo se consideran los siguientes sucesos:

$$
\begin{aligned}
F &= \{\text{ser de sexo femenino}\}\\
M &= \{\text{ser de sexo masculino}\}\\
R &= \{\text{tener pelo rubio}\}.
\end{aligned}
$$

- La probabilidad pedida es:

$$\mathbb{P}(R \cap F) = \mathbb{P}(R \mid F)\mathbb{P}(F) = 0'3 \cdot 0'6 = 0'18$$

Probabilidad condicional e independencia: EJEMPLO

- El 60% de los alumnos de una clase de Estadística son chicas y se sabe que el 30% de las chicas son rubias. ¿Cuál es la probabilidad de escoger un alumno de la clase que sea chica y rubia?
- Para resolver este ejemplo se consideran los siguientes sucesos:

$$\begin{aligned} F &= \{\text{ser de sexo femenino}\} \\ M &= \{\text{ser de sexo masculino}\} \\ R &= \{\text{tener pelo rubio}\}. \end{aligned}$$

- La probabilidad pedida es:

$$\mathbb{P}(R \cap F) = \mathbb{P}(R \mid F)\mathbb{P}(F) = 0'3 \cdot 0'6 = 0'18$$

Probabilidad condicional e independencia: EJEMPLO

- El 60% de los alumnos de una clase de Estadística son chicas y se sabe que el 30% de las chicas son rubias. ¿Cuál es la probabilidad de escoger un alumno de la clase que sea chica y rubia?
- Para resolver este ejemplo se consideran los siguientes sucesos:

$$\begin{aligned} F &= \{\text{ser de sexo femenino}\} \\ M &= \{\text{ser de sexo masculino}\} \\ R &= \{\text{tener pelo rubio}\}. \end{aligned}$$

- La probabilidad pedida es:

$$\mathbb{P}(R \cap F) = \mathbb{P}(R \mid F)\mathbb{P}(F) = 0'3 \cdot 0'6 = 0'18$$

Probabilidad condicional e independencia

Función probabilidad condicional

Si $\mathbb{P}(B) > 0$, entonces $\mathbb{P}(\cdot \mid B)$ es una probabilidad:

A1. $\mathbb{P}(A \mid B) \geq 0 \quad \forall A$

A2. $\mathbb{P}(\Omega \mid B) = 1$

A3. Para cualquier sucesión de sucesos disjuntos $\{A_i\}_{i=1}^{n/\infty}$, se verifica:

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n/\infty} A_i \mid B) = \sum_{i=1}^{n/\infty} \mathbb{P}(A_i \mid B)$$

- Dados n sucesos, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) &= \\ = \ & \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \\ & \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

Probabilidad condicional e independencia

Función probabilidad condicional

Si $\mathbb{P}(B) > 0$, entonces $\mathbb{P}(\cdot \mid B)$ es una probabilidad:

A1. $\mathbb{P}(A \mid B) \geq 0 \quad \forall A$

A2. $\mathbb{P}(\Omega \mid B) = 1$

A3. Para cualquier sucesión de sucesos disjuntos $\{A_i\}_{i=1}^{n/\infty}$, se verifica:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n/\infty} A_i \mid B\Big) = \sum_{i=1}^{n/\infty} \mathbb{P}(A_i \mid B)$$

- Dados n sucesos, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) &= \\ &= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \\ &\quad \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})\end{aligned}$$

Probabilidad condicional e independencia: EJEMPLO (continuación)

- Siguiendo con el ejemplo se sabe que el 40% de las chicas rubias usan gafas.
- ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger aleatoriamente un alumno de la clase resulte ser una chica rubia con gafas?
- Se define el suceso $G = \{\text{usar gafas}\}$ y la probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F \cap R \cap G) &= \mathbb{P}(G \mid (R \cap F))\mathbb{P}(R \mid F)\mathbb{P}(F) \\ &= 0'4 \cdot 0'3 \cdot 0'6 = 0'072.\end{aligned}$$

Probabilidad condicional e independencia: EJEMPLO (continuación)

- Siguiendo con el ejemplo se sabe que el 40% de las chicas rubias usan gafas.
- ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger aleatoriamente un alumno de la clase resulte ser una chica rubia con gafas?
- Se define el suceso $G = \{\text{usar gafas}\}$ y la probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F \cap R \cap G) &= \mathbb{P}(G \mid (R \cap F))\mathbb{P}(R \mid F)\mathbb{P}(F) \\ &= 0'4 \cdot 0'3 \cdot 0'6 = 0'072.\end{aligned}$$

Probabilidad condicional e independencia: EJEMPLO (continuación)

- Siguiendo con el ejemplo se sabe que el 40% de las chicas rubias usan gafas.
- ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger aleatoriamente un alumno de la clase resulte ser una chica rubia con gafas?
- Se define el suceso $G = \{\text{usar gafas}\}$ y la probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F \cap R \cap G) &= \mathbb{P}(G \mid (R \cap F))\mathbb{P}(R \mid F)\mathbb{P}(F) \\ &= 0'4 \cdot 0'3 \cdot 0'6 = 0'072.\end{aligned}$$

Probabilidad condicional e independencia : Ejercicios

- *Resuelva el ejemplo anterior utilizando la definición probabilidad condicional*.
- *Supongamos que la población de una ciudad está compuesta por 40% hombres y 60% mujeres. Supongamos también que 50% de los hombres y 30% de las mujeres fuman. Encuentre la probabilidad de que un fumador sea hombre.*

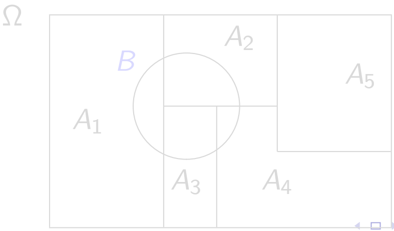
Probabilidad condicional e independencia : Ejercicios

- *Resuelva el ejemplo anterior utilizando la definición probabilidad condicional*.
- *Supongamos que la población de una ciudad está compuesta por* 40% *hombres y* 60% *mujeres. Supongamos también que* 50% *de los hombres y* 30% *de las mujeres fuman. Encuentre la probabilidad de que un fumador sea hombre.*

Regla de la Probabilidad Total

- Se considera un experimento que se realiza en dos etapas, en la primera se supone que los posibles sucesos, $A_1, A_2, \dots, A_n$, constituyen un sistema completo, de tal forma que son conocidas las *probabilidades a priori*, $\mathbb{P}(A_1), \mathbb{P}(A_2), \dots, \mathbb{P}(A_n)$.
- Si se conocen las probabilidades condicionadas $\mathbb{P}(B \mid A_i)$ para un cierto suceso B y cada A_i se verifica que:

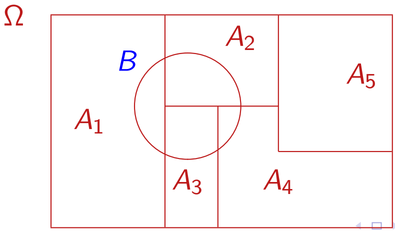
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)$$



Regla de la Probabilidad Total

- Se considera un experimento que se realiza en dos etapas, en la primera se supone que los posibles sucesos, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, constituyen un sistema completo, de tal forma que son conocidas las *probabilidades a priori*, $\mathbb{P}(A_1), \mathbb{P}(A_2), \ldots, \mathbb{P}(A_n)$.
- Si se conocen las probabilidades condicionadas $\mathbb{P}(B \mid A_i)$ para un cierto suceso B y cada A_i se verifica que:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)$$



Probabilidad Total

- La demostración de la igualdad anterior se basa en que al ser $A_1, A_2, \ldots, A_n$, una partición de Ω y B unelemento cualquiera del álgebra de sucesos $\mathcal{A}$, se tienen lassiguientes igualdades:

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n)$$

- por las propiedades distributiva y conmutativa:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup .... \cup (A_n \cap B)$$

- Como los sucesos $\{A_i\}_{i=1}^n$ son incompatibles, también lo son los sucesos $\{A_i \cap B\}_{i=1}^n$, por lo tanto se puede aplicar el axioma A3:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + ... + \mathbb{P}(A_n \cap B) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)P(A_i)\end{aligned}$$

- Se obtiene de esta forma la igualdad buscada.

Probabilidad Total

- La demostración de la igualdad anterior se basa en que al ser $A_1, A_2, \ldots, A_n$, una partición de Ω y B unelemento cualquiera del álgebra de sucesos $\mathcal{A}$, se tienen lassiguientes igualdades:

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots. \cup A_n)$$

- por las propiedades distributiva y conmutativa:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots. \cup (A_n \cap B)$$

- Como los sucesos $\{A_i\}_{i=1}^n$ son incompatibles, también lo son los sucesos $\{A_i \cap B\}_{i=1}^n$, por lo tanto se puede aplicar el axioma A3:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \ldots. + \mathbb{P}(A_n \cap B) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i) P(A_i) \end{aligned}$$

- Se obtiene de esta forma la igualdad buscada.

Probabilidad Total

- La demostración de la igualdad anterior se basa en que al ser $A_1, A_2, \ldots, A_n$, una partición de Ω y B unelemento cualquiera del álgebra de sucesos $\mathcal{A}$, se tienen lassiguientes igualdades:

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n)$$

- por las propiedades distributiva y conmutativa:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup .... \cup (A_n \cap B)$$

- Como los sucesos $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ son incompatibles, también lo son los sucesos $\{A_i \cap B\}_{i=1}^{n}$, por lo tanto se puede aplicar el axioma A3:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + ... + \mathbb{P}(A_n \cap B) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i) P(A_i) \end{aligned}$$

- Se obtiene de esta forma la igualdad buscada.

Probabilidad Total

- La demostración de la igualdad anterior se basa en que al ser $A_1, A_2, \ldots, A_n$, una partición de Ω y B unelemento cualquiera del álgebra de sucesos $\mathcal{A}$, se tienen lassiguientes igualdades:

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n)$$

- por las propiedades distributiva y conmutativa:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup .... \cup (A_n \cap B)$$

- Como los sucesos $\{A_i\}_{i=1}^n$ son incompatibles, también lo son los sucesos $\{A_i \cap B\}_{i=1}^n$, por lo tanto se puede aplicar el axioma A3:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)) \\
&= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + ... + \mathbb{P}(A_n \cap B) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i) P(A_i)
\end{aligned}$$

- Se obtiene de esta forma la igualdad buscada.

Teorema de Bayes

- Si conocemos que un suceso esperado B ha ocurrido, nos podríamos preguntar por la probabilidad de ocurrencia de aquellos eventos que positivamente hubiesen originado la ocurrencia de B. Tal cálculo es posible usando una expresión que se conoce como la **fórmula de Bayes**
- $$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}$$
- El teorema de Bayes resuelve esta cuestión, llevando el cálculo de las probabilidades a un te?rre?no más natural, expresando las probabilidades a posteriori, $\mathbb{P}(A_i|B)$, en función de las *verosimilitudes*, $\mathbb{P}(B|A_i)$.
- **Veamos el video Probabilidad Parte 3**
-

Teorema de Bayes

- Si conocemos que un suceso esperado B ha ocurrido, nos podríamos preguntar por la probabilidad de ocurrencia de aquellos eventos que positivamente hubiesen originado la ocurrencia de B. Tal cálculo es posible usando una expresión que se conoce como la **fórmula de Bayes**
- $$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}$$
- El teorema de Bayes resuelve esta cuestión, llevando el cálculo de las probabilidades a un te?rre?no más natural, expresando las probabilidades a posteriori, $\mathbb{P}(A_i|B)$, en función de las *verosimilitudes*, $\mathbb{P}(B|A_i)$.
- **Veamos el video Probabilidad Parte 3**
-

Teorema de Bayes

- Si conocemos que un suceso esperado B ha ocurrido, nos podríamos preguntar por la probabilidad de ocurrencia de aquellos eventos que positivamente hubiesen originado la ocurrencia de B. Tal cálculo es posible usando una expresión que se conoce como la **fórmula de Bayes**
- $$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}$$
- El teorema de Bayes resuelve esta cuestión, llevando el cálculo de las probabilidades a un te?rre?no más natural, expresando las probabilidades a posteriori, $\mathbb{P}(A_i|B)$, en función de las *verosimilitudes*, $\mathbb{P}(B|A_i)$.
- Veamos el video Probabilidad Parte 3
-

Teorema de Bayes

- Si conocemos que un suceso esperado B ha ocurrido, nos podríamos preguntar por la probabilidad de ocurrencia de aquellos eventos que positivamente hubiesen originado la ocurrencia de B. Tal cálculo es posible usando una expresión que se conoce como la **fórmula de Bayes**
-
$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}$$
- El teorema de Bayes resuelve esta cuestión, llevando el cálculo de las probabilidades a un te?rre?no más natural, expresando las probabilidades a posteriori, $\mathbb{P}(A_i|B)$, en función de las *verosimilitudes*, $\mathbb{P}(B|A_i)$.
- **Veamos el video Probabilidad Parte 3**

Teorema de Bayes

- Si conocemos que un suceso esperado B ha ocurrido, nos podríamos preguntar por la probabilidad de ocurrencia de aquellos eventos que positivamente hubiesen originado la ocurrencia de B. Tal cálculo es posible usando una expresión que se conoce como la **fórmula de Bayes**
- $$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{k}\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}$$
- El teorema de Bayes resuelve esta cuestión, llevando el cálculo de las probabilidades a un te?rre?no más natural, expresando las probabilidades a posteriori, $\mathbb{P}(A_i|B)$, en función de las *verosimilitudes*, $\mathbb{P}(B|A_i)$.
- **Veamos el video Probabilidad Parte 3**
-

Demostración de la regla de Bayes

- Aplicando la definición de probabilidad condicionada:

$$\mathbb{P}(A_k|B) = \frac{\mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B|A_k)}{\mathbb{P}(B)}$$

- Y por el teorema de la probabilidad total:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}$$

- con lo que queda demostrado el teorema.

Demostración de la regla de Bayes

- Aplicando la definición de probabilidad condicionada:

$$\mathbb{P}(A_k|B) = \frac{\mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B|A_k)}{\mathbb{P}(B)}$$

- Y por el teorema de la probabilidad total:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}$$

- con lo que queda demostrado el teorema.

Demostración de la regla de Bayes

- Aplicando la definición de probabilidad condicionada:

$$\mathbb{P}(A_k|B) = \frac{\mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B|A_k)}{\mathbb{P}(B)}$$

- Y por el teorema de la probabilidad total:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}$$

- con lo que queda demostrado el teorema.

Probabilidad Total y regla de Bayes: Ejercicios

- En una determinada ciudad se ha cometido un asesinato. De la investigación se encarga un detective, que tiene 5 sospechosos entre los que se encuentra el asesino. Se sabe que el detective trabaja con un pequeño margen de error, de forma que la probabilidad de creer inocente al verdadero asesino es de 0'05 y la probabilidad de creer culpable a una persona inocente es de 0'08. Si el detective cree que una persona es culpable, ¿cuál es la probabilidad de que esa persona sea el asesino?
- Solución. Para la resolución del problema se definen los siguientes sucesos:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{ser asesino}\} \\ I &= \{\text{ser enjuiciado inocente}\} \\ C &= \{\text{ser enjuiciado culpable}\} \end{aligned}$$

Probabilidad Total y regla de Bayes: Ejercicios

- En una determinada ciudad se ha cometido un asesinato. De la investigación se encarga un detective, que tiene 5 sospechosos entre los que se encuentra el asesino. Se sabe que el detective trabaja con un pequeño margen de error, de forma que la probabilidad de creer inocente al verdadero asesino es de 0'05 y la probabilidad de creer culpable a una persona inocente es de 0'08. Si el detective cree que una persona es culpable, ¿cuál es la probabilidad de que esa persona sea el asesino?
- Solución. Para la resolución del problema se definen los siguientes sucesos:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{ser asesino}\} \\ I &= \{\text{ser enjuiciado inocente}\} \\ C &= \{\text{ser enjuiciado culpable}\} \end{aligned}$$

Probabilidad Total y regla de Bayes: Ejercicios

- De esta forma se tiene que:

  a) Hay un asesino de 5 sospechosos, por tanto, la probabilidad de que una persona elegida al azar sea el asesino es:

  $$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{5} \qquad \mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{4}{5}$$

  b) La probabilidad de creer inocente al verdadero asesino, es la probabilidad de ser enjuiciado inocente condicionada a que es el ase?si?no, es decir, $\mathbb{P}(I|A) = 0'05$. Además, se sabe que $\mathbb{P}(C|A) = 1 - P(I|A) = 0'95$.

  c) La probabilidad de creer culpable a una persona inocente, es la probabilidad de ser enjuiciado culpable condicionada a que no es el asesino, es decir, $\mathbb{P}(C|\bar{A}) = 0'08$.

Probabilidad Total y regla de Bayes: Ejercicios

- De esta forma se tiene que:
  a) Hay un asesino de 5 sospechosos, por tanto, la probabilidad de que una persona elegida al azar sea el asesino es:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{5} \qquad \mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{4}{5}$$

  b) La probabilidad de creer inocente al verdadero asesino, es la probabilidad de ser enjuiciado inocente condicionada a que es el ase?si?no, es decir, $\mathbb{P}(I|A) = 0'05$. Además, se sabe que $\mathbb{P}(C|A) = 1 - P(I|A) = 0'95$.

  c) La probabilidad de creer culpable a una persona inocente, es la probabilidad de ser enjuiciado culpable condicionada a que no es el asesino, es decir, $\mathbb{P}(C|\bar{A}) = 0'08$.

Probabilidad Total y regla de Bayes: Ejercicios

- De esta forma se tiene que:

  a) Hay un asesino de 5 sospechosos, por tanto, la probabilidad de que una persona elegida al azar sea el asesino es:

  $$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{5} \qquad \mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{4}{5}$$

  b) La probabilidad de creer inocente al verdadero asesino, es la probabilidad de ser enjuiciado inocente condicionada a que es el ase?si?no, es decir, $\mathbb{P}(I|A) = 0'05$. Además, se sabe que $\mathbb{P}(C|A) = 1 - P(I|A) = 0'95$.

  c) La probabilidad de creer culpable a una persona inocente, es la probabilidad de ser enjuiciado culpable condicionada a que no es el asesino, es decir, $\mathbb{P}(C|\bar{A}) = 0'08$.

Probabilidad Total y regla de Bayes: Ejercicios

- De esta forma se tiene que:
  a) Hay un asesino de 5 sospechosos, por tanto, la probabilidad de que una persona elegida al azar sea el asesino es:

  $$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{5} \qquad \mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{4}{5}$$

  b) La probabilidad de creer inocente al verdadero asesino, es la probabilidad de ser enjuiciado inocente condicionada a que es el ase?si?no, es decir, $\mathbb{P}(I|A) = 0'05$. Además, se sabe que $\mathbb{P}(C|A) = 1 - P(I|A) = 0'95$.
  c) La probabilidad de creer culpable a una persona inocente, es la probabilidad de ser enjuiciado culpable condicionada a que no es el asesino, es decir, $\mathbb{P}(C|\bar{A}) = 0'08$.

Probabilidad Total y regla de Bayes: Ejercicios

- En el problema se pide la probabilidad de que una persona asesina haya sido enjuiciada culpable, es decir, la probabilidad de que una persona sea asesina condicionada a que ha sido enjuicida culpable. Por tanto, la probabilidad requerida es $\mathbb{P}(A|C)$, para calcular dicha probabilidad se recurre al teorema de Bayes,
-
$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|C) &= \frac{\mathbb{P}(C|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(C|A)\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(C|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A})} \\
&= \frac{0'95\cdot 0'2}{0'95\cdot 0'2+0'08\cdot 0'8} \\
&= \frac{0'19}{0'254} = 0'748
\end{aligned}
$$
-

Probabilidad Total y regla de Bayes: Ejercicios

- En el problema se pide la probabilidad de que una persona asesina haya sido enjuiciada culpable, es decir, la probabilidad de que una persona sea asesina condicionada a que ha sido enjuicida culpable. Por tanto, la probabilidad requerida es $\mathbb{P}(A|C)$, para calcular dicha probabilidad se recurre al teorema de Bayes,
- $$\begin{aligned} \mathbb{P}(A|C) &= \frac{\mathbb{P}(C|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(C|A)\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(C|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A})} \\ &= \frac{0'95\cdot 0'2}{0'95\cdot 0'2+0'08\cdot 0'8} \\ &= \frac{0'19}{0'254} = 0'748 \end{aligned}$$

Probabilidad Total y regla de Bayes: Ejercicios

- En el problema se pide la probabilidad de que una persona asesina haya sido enjuiciada culpable, es decir, la probabilidad de que una persona sea asesina condicionada a que ha sido enjuicida culpable. Por tanto, la probabilidad requerida es $\mathbb{P}(A|C)$, para calcular dicha probabilidad se recurre al teorema de Bayes,
-

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|C) &= \frac{\mathbb{P}(C|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(C|A)\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(C|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A})} \\
&= \frac{0'95\cdot 0'2}{0'95\cdot 0'2+0'08\cdot 0'8} \\
&= \frac{0'19}{0'254}=0'748
\end{aligned}$$

-

Independencia de eventos

- Una colección de eventos $A_1, \ldots, A_n$ se dice que es **mutuamente independiente** si para cada $k, 1 \leq k \leq n$, y cualesquiera k eventos, $A_{i_1}, \ldots A_{i_k}$, se tiene que $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_{i_k})$.
- En particular, dos eventos son independientes si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

- Utilizando la probabilidad condicional, para dos eventos independientes tenemos que

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$$

- es decir, la ocurrencia del evento A no afecta el resultado del evento B.

Independencia de eventos

- Una colección de eventos $A_1, \ldots, A_n$ se dice que es **mutuamente independiente** si para cada $k, 1 \leq k \leq n$, y cualesquiera k eventos, $A_{i_1}, \ldots A_{i_k}$, se tiene que $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_{i_k})$.
- En particular, dos eventos son independientes si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

- Utilizando la probabilidad condicional, para dos eventos independientes tenemos que

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$$

- es decir, la ocurrencia del evento A no afecta el resultado del evento B.

Independencia de eventos

- Una colección de eventos $A_1, \ldots, A_n$ se dice que es **mutuamente independiente** si para cada $k, 1 \leq k \leq n$, y cualesquiera k eventos, $A_{i_1}, \ldots A_{i_k}$, se tiene que $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_{i_k})$.
- En particular, dos eventos son independientes si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

- Utilizando la probabilidad condicional, para dos eventos independientes tenemos que

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$$

- es decir, la ocurrencia del evento A no afecta el resultado del evento B.

Independencia de eventos

- Una colección de eventos $A_1, \ldots, A_n$ se dice que es **mutuamente independiente** si para cada $k, 1 \leq k \leq n$, y cualesquiera k eventos, $A_{i_1}, \ldots A_{i_k}$, se tiene que $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_{i_k})$.
- En particular, dos eventos son independientes si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

- Utilizando la probabilidad condicional, para dos eventos independientes tenemos que

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$$

- es decir, la ocurrencia del evento A no afecta el resultado del evento B.

Independencia de eventos

- Una colección de eventos $A_1, \ldots, A_n$ se dice que es **mutuamente independiente** si para cada $k, 1 \leq k \leq n$, y cualesquiera k eventos, $A_{i_1}, \ldots A_{i_k}$, se tiene que $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_{i_k})$.
- En particular, dos eventos son independientes si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

- Utilizando la probabilidad condicional, para dos eventos independientes tenemos que

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$$

,

- es decir, la ocurrencia del evento A no afecta el resultado del evento B.
- Taller de Probabilidad Parte 2

Independencia de eventos

- Una colección de eventos $A_1, \ldots, A_n$ se dice que es **mutuamente independiente** si para cada $k, 1 \leq k \leq n$, y cualesquiera k eventos, $A_{i_1}, \ldots A_{i_k}$, se tiene que $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_{i_k})$.
- En particular, dos eventos son independientes si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

- Utilizando la probabilidad condicional, para dos eventos independientes tenemos que

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$$

,

- es decir, la ocurrencia del evento A no afecta el resultado del evento B.
- Taller de Probabilidad Parte 2

Independencia de eventos

- Una colección de eventos $A_1, \ldots, A_n$ se dice que es **mutuamente independiente** si para cada $k, 1 \leq k \leq n$, y cualesquiera k eventos, $A_{i_1}, \ldots A_{i_k}$, se tiene que $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_{i_k})$.
- En particular, dos eventos son independientes si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

- Utilizando la probabilidad condicional, para dos eventos independientes tenemos que

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$$

,

- es decir, la ocurrencia del evento A no afecta el resultado del evento B.
- Taller de Probabilidad Parte 2

Independencia de eventos

- Una colección de eventos $A_1, \ldots, A_n$ se dice que es **mutuamente independiente** si para cada $k, 1 \leq k \leq n$, y cualesquiera k eventos, $A_{i_1}, \ldots A_{i_k}$, se tiene que $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_{i_k})$.
- En particular, dos eventos son independientes si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

- Utilizando la probabilidad condicional, para dos eventos independientes tenemos que

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$$

,

- es decir, la ocurrencia del evento A no afecta el resultado del evento B.
- Taller de Probabilidad Parte 2

Independencia de eventos

- Una colección de eventos $A_1, \ldots, A_n$ se dice que es **mutuamente independiente** si para cada $k, 1 \leq k \leq n$, y cualesquiera k eventos, $A_{i_1}, \ldots A_{i_k}$, se tiene que $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_{i_k})$.
- En particular, dos eventos son independientes si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

- Utilizando la probabilidad condicional, para dos eventos independientes tenemos que

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$$

,

- es decir, la ocurrencia del evento A no afecta el resultado del evento B.
- **Taller de Probabilidad Parte 2**

Ejercicio

- **Veamos el video Aprender a contar Parte 1**
- **Veamos el video Aprender a contar Parte 2**
- En una encuesta sobre las preferencias entre dos productos, realizada sobre un conjunto de 300 mujeres y 400 hombres, se han obtenido los siguientes resultados:

Producto	Hombres	Mujeres	Total
A	225	180	405
B	175	120	295

Represente la situación utilizando un diagrama de Venn. Imagine que la encuesta ofrece información referida a dos conjuntos de edad, los menores y los mayores de 50 años. ¿Sería posible la representación incluyendo esta nueva información? De ser afirmativa la respuesta, represéntela.

Ejercicio

- **Veamos el video Aprender a contar Parte 1**
- **Veamos el video Aprender a contar Parte 2**
- En una encuesta sobre las preferencias entre dos productos, realizada sobre un conjunto de 300 mujeres y 400 hombres, se han obtenido los siguientes resultados:

Producto	Hombres	Mujeres	Total
A	225	180	405
B	175	120	295

Represente la situación utilizando un diagrama de Venn. Imagine que la encuesta ofrece información referida a dos conjuntos de edad, los menores y los mayores de 50 años. ¿Sería posible la representación incluyendo esta nueva información? De ser afirmativa la respuesta, represéntela.

Ejercicio

- **Veamos el video Aprender a contar Parte 1**
- **Veamos el video Aprender a contar Parte 2**
- En una encuesta sobre las preferencias entre dos productos, realizada sobre un conjunto de 300 mujeres y 400 hombres, se han obtenido los siguientes resultados:

Producto	Hombres	Mujeres	Total
A	225	180	405
B	175	120	295

Represente la situación utilizando un diagrama de Venn. Imagine que la encuesta ofrece información referida a dos conjuntos de edad, los menores y los mayores de 50 años. ¿Sería posible la representación incluyendo esta nueva información? De ser afirmativa la respuesta, represéntela.

Ejercicio

- **Veamos el video Aprender a contar Parte 1**
- **Veamos el video Aprender a contar Parte 2**
- En una encuesta sobre las preferencias entre dos productos, realizada sobre un conjunto de 300 mujeres y 400 hombres, se han obtenido los siguientes resultados:

Producto	Hombres	Mujeres	Total
A	225	180	405
B	175	120	295

Represente la situación utilizando un diagrama de Venn. Imagine que la encuesta ofrece información referida a dos conjuntos de edad, los menores y los mayores de 50 años. ¿Sería posible la representación incluyendo esta nueva información? De ser afirmativa la respuesta, represéntela.

Ejercicios

Ej1). Un estudiante de Estadística se dispone a realizar un estudio sobre el tipo y las condiciones de la comida que su madre le sirve a diario. Para ello establece las siguientes clasificaciones:

Estado de sal	Salada, normal, sosa
Temperatura	Caliente, fría
Tipo de alimento	Carne, pescado, verduras, pastas

Obtenga, utilizando un diagrama de árbol, el espacio muestral del tipo y las condiciones de las comidas.

Ejercicio

Ej2). Imagine que tenemos los sucesos A, B y C, exprese en lenguaje de la teoría de conjuntos las siguientes operaciones entre ellos:

a) Ocurren A y al menos uno de los otros dos.

b) Ocurren A y uno sólo de los otros dos.

c) Ocurre uno de los tres, pero no dos a la vez.

d) Ocurre, al menos, uno de los tres.

e) Ocurre C, pero no lo hacen ni A ni B.

f) Ocurren al menos dos de los tres.

g) Ocurren exactamente dos de los tres.

h) No ocurre ninguno de los tres.

Ejercicio

Ej3). Los alumnos de una determinada carrera se encuentran distribuidos en 5 cursos, de forma que en cada uno de los dos últimos cursos hay la mitad de alumnos que en cada uno de los tres primeros. Se pide que se calcule la probabilidad de que al escoger al azar a un alumno: *a*) éste sea de cuarto. *b*) le queden menos de tres cursos para acabar.

Ej4). Represente el espacio muestral resultante al lanzar dos dados de distinto color y calcule la probabilidad de obtener una suma de siete puntos.

Ej5). Represente el espacio muestral resultante al lanzar dos dados del mismo color y calcule la probabilidad de obtener una suma de siete puntos. Compare el resultado con el obtenido en el ejercicio anterior.

Ej6). Un jugador lanza tres veces una moneda, si obtiene tres caras gana 100\$, si obtiene una o dos caras gana 10\$, y si no obtiene ninguna cara pierde 160\$, . ¿Es justo el juego?

Ejercicio

Ej7). Juan y Pedro juegan a una variante del juego de los chinos. Cada uno de ellos tiene tres chinos pudiendo seleccionar en una mano ninguno, uno, dos o los tres. A una señal los dos muestran los chinos seleccionados. Juan gana 10$ si sus chinos coinciden con los de Pedro o hay una diferencia de un único chino, mientras que Pedro gana 15$, en el resto de casos. *a*) Calcule la probabilidad de que gane Juan. *b*) ¿Qué cantidades deben ganar cada uno para que el juego sea justo?

Ej8). Calcule la probabilidad de que tres alumnos seleccionados aleatoriamente en una clase cumplan años en meses consecutivos.

Ej9). Calcule la probabilidad que tiene un ladrón que ha robado una tarjeta de un cajero automático de acertar con la clave, sabiendo que ésta tiene cuatro dígitos y que si no acierta en tres intentos el cajero se tragará la tarjeta.

Ej10). Se parte de que $\mathbb{P}(A) = 0'3$, $\mathbb{P}(B) = 0'4$ y $\mathbb{P}(A \cap B) = 0'1$, obtenga:*a*) $\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$, *b*) $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$, *c*) $\mathbb{P}(A - B)$, *d*) $\mathbb{P}(A|B)$

Ejercicio

Ej11). Se considera el conjunto universal
$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \quad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ y los sucesos
$A_1 = \{(x,y) \in \Omega \; : \; 0 \leq x \leq \frac{3}{4}\}$,
$A_2 = \{(x,y) \in \Omega \; : \; \frac{1}{2} \leq x \leq 1\,;\, \frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{4}\}$ y
$A_3 = \{(x,y) \in \Omega \; : \; 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$.
a). Pruebe que la función $\mathbb{P}(A) = \text{Área}(A)$, $\forall A \subseteq \Omega$ es una función de probabilidad. b). Calcule $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$, $\mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)$ y $\mathbb{P}(A_1 \cap (A_2 \cup A_3))$.

Ej12). Sea una clase de estadística en la que un 20% de los varones son rubios y un 50 % de las mujeres rubias. Si se sabe que el 30% de la clase son varones, se pide:
a) La probabilidad de escoger aleatoriamente de la clase un varón rubio. b). La probabilidad de escoger aleatoriamente una persona rubia de entre todos los alumnos. c). La probabilidad de que una persona que se ha elegido aleatoriamente sea varón sabiendo que su pelo es rubio.

Ejercicio

Ej13). ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar tres dados honrados salgan números diferentes?

Ej14). .Se tienen dos barajas de cartas de forma que la primera tiene 30 cartas rojas, 10 blancas y 2 negras y la segunda tiene 20 cartas rojas, 10 blancas y 12 negras. Se lanza una moneda, si sale cara se escogen tres cartas de la primera y una de la segunda; si sale cruz se escoge una carta de la primera y tres de la segunda. Calcule la probabilidad de que de las cuatro cartas extraídas dos sean blancas y las otras dos rojas.

Ej15). Un estudio sobre los niveles de audiencia de diferentes cadenas de radio arrojó que el 50% de la población escuchaba Radio A, el 40% Radio B y el 30% Radio C. Además, se obtuvo que el 20% escuchaba Radio A y Radio B, el 10% Radio A y Radio C y el 5% Radio B y Radio C, finalmente sólo el 2 % escuchaba las tres cadenas.

a). ¿Qué porcentaje de la población escuchaba alguna cadena?

b). ¿Qué porcentaje de la población escuchaba una sola cadena?

Ejercicio

Ej16). Se consideran dos sucesos cualesquiera A y B, se pide:
a). Pruebe que si A y B son independientes entonces $\bar{A}$ y B, A y $\bar{B}$, y, $\bar{A}$ y $\bar{B}$ también lo son.
b). Demuestre que si $\mathbb{P}(A) = 0$ entonces A y B son independientes.
c). Si A y B son dos sucesos disjuntos, ¿lo son también $\bar{A}$ y $\bar{B}$?

Ej17). Se considera un equipo deportivo en octavos de final de una competición, que tiene una probabilidad de pasar a las siguientes fases de $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{3}$, respectivamente, y de $\frac{1}{2}$ de ganar la final si accede a ella, ¿cuál es la probabilidad de que gane la competición?

Ej18). Un jugador de baloncesto tiene una probabilidad de encestar un lanzamiento desde una cierta posición de $\frac{1}{4}$.
a).¿Cuál es la probabilidad de encestar tres lanzamientos consecutivos?
b). ¿Cuál es la probabilidad de que en cinco lanzamientos enceste al menos tres?

Ejercicio

Ej19). De una urna con tres bolas blancas y dos negras se extrae una bola y a continuación se lanza un dado, de forma que se introducen en la urna tantas bolas del mismo color que la extraída como el resultado obtenido al lanzar el dado. ¿Cuál es la probabilidad de que, una vez realizada esta operación, al extraer dos nuevas bolas, éstas tengan el mismo color?

Ej20). Dos amigos son alumnos de la asignatura de Estadística de forma que cuando uno falta le pasa los apuntes al otro. Se sabe que el primero va a asistir a un 80% de las clases y el segundo a un 40 %, de forma independiente. ¿Cuál es la probabilidad de que los amigos tengan todos los apuntes de clase?

Ej21). Se considera una urna en la que hay 4 dados, de forma que en el primero 3 caras son unos y las restantes son doses, en el segundo 4 caras son unos y el resto doses, en el tercero 5 caras son unos y la otra un dos y en el cuarto 2 caras son unos y el resto doses.

Ejercicio

Ej22). ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un dado al azar y lanzarlo se obtenga un uno?

Ej23). Se coge al azar un dado de la urna y al lanzarlo se obtiene un uno, ¿cuál es la probabilidad de que sea el cuarto dado?

Ej24). De una urna que contiene cinco bolas blancas y tres negras, se extraen al azar cuatro bolas que se introducen en otra urna vacía, de esta urna se sacan aleatoriamente dos bolas que resultan ser una blanca y una negra. ¿Cuál es la probabilidad de que de las cuatro bolas pasadas, dos fueran blancas y las otras dos negras?

Ejercicio

Ej25). En una piscina de una piscifactoría se han introducido alevines de dos variedades de una especie en las siguientes cantidades y proporciones de machos y hembras:

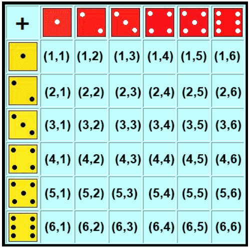
Variedad	Cantidad	% machos
A	1000	7
B	1500	6

A continuación se escoge un alevín, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a la variedad A, sabiendo que es hembra?

Ej26). Una factoría produce un cierto artículo en tres cadenas de montaje. La cadena A fabrica el 50% del total, la cadena B el 30% y la C el 20%, con porcentajes de defectuosos 0'03, 0'04 y 0'05 respectivamente. Un cliente decide analizar la calidad del producto para lo que selecciona una unidad al azar, ¿qué probabilidad hay de que dicha unidad resulte ser defectuosa?

Ejemplos de Probabilidad

Ej27). Suponga que se lanzan dos dados distinguibles



+						
	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

https://rea.ceibal.edu.uy/elp/a_qu_llamamos_factorial_en_matem_tica/espacio_muestral.html

a) Halle la probabilidad de que almenos un dado caiga en 6

b) Halle la probabilidad de que almenos un dado caiga en par

c) Halle la probabilidad de la suma sea un numero primo

d) Halle la probabilidad de que si la suma sea un numero primo ambos dados salgan impar

Ejercicios de Probabilidad

Ej28). Se tienen dos urnas. La primera de ellas tiene a esferas rojas y b esferas negras, la otra urna contiene c esferas rojas y d negras.Si se elige una esfera de cada urna y de estas dos esferas se elige alguna al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la esfera sea roja? Calcule la probabilidad considerando

$$a = 99, b = 1, c = 1, d = 1$$

Ej29). Supongamos que tenemos una moneda A que cae en cara con probabilidad s y una moneda B que cae en cara con probabilidad t. Si cada moneda se tira de manera alternada, empezando con la moneda A, ¿cuál es la probilidad de que la primera cara se obtenga con la moneda A?

Ejercicios de Probabilidad

Ej30). Una factoría produce un cierto artículo en tres cadenas de montaje. La cadena A fabrica el 50% del total, la cadena B el 30% y la C el 20%, con porcentajes de defectuosos 0'03, 0'04 y 0'05 respectivamente. Un cliente decide analizar la calidad del producto para lo que selecciona una unidad al azar, ¿qué probabilidad hay de que dicha unidad resulte ser defectuosa?

Ej31). Un niño guarda tres cajas con chocolatinas, en la primera tiene dos chocolatinas negras y una blanca, en la segunda dos negras y dos blancas y en la tercera dos blancas y una negra. En un despiste suyo, su hermana pequeña le ha cogido una chocolatina blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la haya cogido de la primera caja?

- knuth
- Dantzig, G.B. y P. Wolfe, ■Decomposition principle for linear programs■, *Operations Research*, **8**, págs. 101–111, 1960.


YAHWEH
"IAUE"
EL UNICO ELOHIM VERDADERO Y
YAHSHUA
"IASHUA"
SU HIJO UNIGENITO
Shalom
Yisrael
YAHWEH
PROPHETIC ART OF DAVID MUNOZ
יהוה