Teoría de Probabilidad

Maestría en Estadística Aplicada

Julio Hurtado, Msc.

UTB

2020

Probabilidad elemental – Parte 6

1. Distribuciones continuas más comunes
   - Distribución uniforme
   - Distribución Exponencial
   - Distribución Gama
   - Distribución Cauchy
   - Distribución Beta
   - Distribución Normal
   - Variables aleatorias multivariadas
2. Ejercicios

Distribución uniforme

Uniforme

$U(a, b)$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad a \le x \le b.$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2}; \qquad Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

-

Distribución uniforme

Uniforme

$U(a, b)$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad a \leq x \leq b.$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2}; \qquad Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

-

Distribución Exponencial

Exponencial

$Exp(\lambda)$ $\lambda > 0$.

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{\frac{-x}{\lambda}}, \qquad x > 0.$$

$$E[X^n] = \lambda^n n!, \qquad n \geq 1. \qquad (\text{Tarea: Calcule Var}[X])$$

Distribución Exponencial

Exponencial

$Exp(\lambda)$ $\lambda > 0$.

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{\frac{-x}{\lambda}}, \qquad x > 0.$$

$$E[X^n] = \lambda^n n!, \qquad n \geq 1. \qquad (\text{Tarea: Calcule Var[X]})$$

-

Distribución Gama

Gama

$Gama(k, \theta)$ $k > 0$: Parámetro de forma, $\theta > 0$: Parámetro de escala.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}, \qquad x > 0.$$

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-x} x^{k-1} dx.$$

$$E[X] = k\theta, Var[X] = k\theta^2.$$

Distribución Gama

Gama

$Gama(k,\theta)$ $k>0$: Parámetro de forma, $\theta>0$: Parámetro de escala.

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(k)\theta^k}x^{k-1}e^{-\frac{x}{\theta}}, \qquad x>0.$$

$$\Gamma(k)=\int_0^\infty e^{-x}x^{k-1}dx.$$

$$E[X]=k\theta, Var[X]=k\theta^2.$$

-

Distribución Cauchy

Cauchy

Cauchy$(x_0, \gamma > 0)$. $x_0 \in \mathbb{R}$: Parámetro de localización, $\gamma > 0$: Parámetro de escala.

$$f(x) = \frac{1}{\pi\gamma\left[1 + \left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)^2\right]}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$E[X] = \text{No definida.}$$

Distribución Cauchy

Cauchy

$Cauchy(x_0, \gamma > 0)$. $x_0 \in \mathbb{R}$: Parámetro de localización, $\gamma > 0$: Parámetro de escala.

$$f(x) = \frac{1}{\pi\gamma\left[1 + \left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)^2\right]}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$E[X] = \text{No definida.}$$

-

Distribución Beta

Beta

$Beta(\alpha, \beta)$. $\alpha, \beta > 0$.

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, Var[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

Distribución Beta

Beta

Beta(α, β). $\alpha, \beta > 0$.

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, Var[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

-

Distribución Normal

Normal

$N(\mu, \sigma)$. $\mu \in \mathbb{R}$: Parámetro de localización, $\sigma > 0$: Parámetro de escala.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

$$E[X] = \mu, Var[X] = \sigma^2.$$

Distribución Normal

Normal

$N(\mu, \sigma)$. $\mu \in \mathbb{R}$: Parámetro de localización, $\sigma > 0$: Parámetro de escala.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

$$E[X] = \mu, Var[X] = \sigma^2.$$

-

Variables aleatorias multivariadas

Variables aleatorias multivariadas

Sean X, Y dos variables aleatorias con esperanza finita, la covarianza de X y Y está dada por

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

La covarianza busca medir el grado de dependencia (lineal) entre dos variables, sin embargo, al ser una cantidad no acotada y que depende de las unidades de las variables involucradas, su interpretación es difícil. Una forma de solucionar es a través del coeficiente de variación, el cual se define como

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

Utilizando la desigualdad de Schwarz es fácil ver que $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

- **Ejercicio**: *Demuestre que* $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

Variables aleatorias multivariadas

Variables aleatorias multivariadas

Sean X, Y dos variables aleatorias con esperanza finita, la covarianza de X y Y está dada por

$$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

La covarianza busca medir el grado de dependencia (lineal) entre dos variables, sin embargo, al ser una cantidad no acotada y que depende de las unidades de las variables involucradas, su interpretación es difícil. Una forma de solucionar es a través del coeficiente de variación, el cual se define como

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

Utilizando la desigualdad de Schwarz es fácil ver que $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$.

- **Ejercicio**: *Demuestre que* $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$.

Variables independientes

- Variables independientes Sean $X_1, X_2, \ldots, X_k$ variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio Ω. Decimos que las variables $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son independientes si

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) &= \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = x_2) \cdot \ldots \cdot \\ &\quad \mathbb{P}(X_k = x_k). \end{aligned}$$

- **Ejercicio:** Suponga que X, Y son variables aleatorias independientes con funciones de densidad f_x, f_y respectivamente. Demuestre que para cualesquiera subconjuntos $A, B \in \mathcal{F}$, se tiene que

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

Variables independientes

- Variables independientes Sean $X_1, X_2, \ldots, X_k$ variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio Ω. Decimos que las variables $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son independientes si

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) &= \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = x_2) \cdot \ldots \cdot \\ &\quad \mathbb{P}(X_k = x_k).\end{aligned}$$

- **Ejercicio:** Suponga que X, Y son variables aleatorias independientes con funciones de densidad f_x, f_y respectivamente. Demuestre que para cualesquiera subconjuntos $A, B \in \mathcal{F}$, se tiene que

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

Ejercicios

- **Ejercicio:** Suponga que las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables independientes con esperanza finita. Demuestre la igualdad

$$E[\prod_{i=1}^{n} X_i] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i].$$

En particular, si X, Y son independientes, $Cov(X, Y) = 0$.

- **Ejercicio:** Sean X, Y variables aleatorias independientes.
- **Ejercicio:** Encuentre la distribución de $\min(X, Y)$.
- **Ejercicio:** Encuentre la distribución de $\max(X, Y)$.
- **Ejercicio:** Encuentre $\mathbb{P}(\min(X, Y) = X) = \mathbb{P}(Y \geq X)$.
- Encuentre la distribución de $X + Y$.

Ejercicios

- **Ejercicio:** Suponga que las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables independientes con esperanza finita. Demuestre la igualdad

$$E[\prod_{i=1}^{n} X_i] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i].$$

En particular, si X, Y son independientes, $Cov(X, Y) = 0$.

- **Ejercicio:** Sean X, Y variables aleatorias independientes.
- **Ejercicio:** Encuentre la distribución de $\min(X, Y)$.
- **Ejercicio:** Encuentre la distribución de $\max(X, Y)$.
- **Ejercicio:** Encuentre $\mathbb{P}(\min(X, Y) = X) = \mathbb{P}(Y \geq X)$.
- Encuentre la distribución de $X + Y$.

Ejercicios

- **Ejercicio:** Suponga que las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables independientes con esperanza finita. Demuestre la igualdad

$$E[\prod_{i=1}^{n} X_i] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i].$$

En particular, si X, Y son independientes, $Cov(X, Y) = 0$.

- **Ejercicio:** Sean X, Y variables aleatorias independientes.
- **Ejercicio:** Encuentre la distribución de $\min(X, Y)$.
- **Ejercicio:** Encuentre la distribución de $\max(X, Y)$.
- **Ejercicio:** Encuentre $\mathbb{P}(\min(X, Y) = X) = \mathbb{P}(Y \geq X)$.
- Encuentre la distribución de $X + Y$.

Ejercicios

- **Ejercicio:** Suponga que las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables independientes con esperanza finita. Demuestre la igualdad

$$E[\prod_{i=1}^{n} X_i] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i].$$

En particular, si X, Y son independientes, $Cov(X, Y) = 0$.

- **Ejercicio:** Sean X, Y variables aleatorias independientes.
- **Ejercicio:** Encuentre la distribución de $\min(X, Y)$.
- **Ejercicio:** Encuentre la distribución de $\max(X, Y)$.
- **Ejercicio:** Encuentre $\mathbb{P}(\min(X, Y) = X) = \mathbb{P}(Y \geq X)$.
- Encuentre la distribución de $X + Y$.

Ejercicios

- **Ejercicio:** Suponga que las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables independientes con esperanza finita. Demuestre la igualdad

$$E[\prod_{i=1}^{n} X_i] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i].$$

  En particular, si X, Y son independientes, $Cov(X, Y) = 0$.
- **Ejercicio:** Sean X, Y variables aleatorias independientes.
- **Ejercicio:** Encuentre la distribución de $\min(X, Y)$.
- **Ejercicio:** Encuentre la distribución de $\max(X, Y)$.
- **Ejercicio:** Encuentre $\mathbb{P}(\min(X, Y) = X) = \mathbb{P}(Y \geq X)$.
- Encuentre la distribución de $X + Y$.

Ejercicios

- **Ejercicio:** Suponga que las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables independientes con esperanza finita. Demuestre la igualdad

$$E[\prod_{i=1}^{n} X_i] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i].$$

En particular, si X, Y son independientes, $Cov(X, Y) = 0$.

- **Ejercicio:** Sean X, Y variables aleatorias independientes.
- **Ejercicio:** Encuentre la distribución de $\min(X, Y)$.
- **Ejercicio:** Encuentre la distribución de $\max(X, Y)$.
- **Ejercicio:** Encuentre $\mathbb{P}(\min(X, Y) = X) = \mathbb{P}(Y \geq X)$.
- Encuentre la distribución de $X + Y$.

Ejercicios

- **Ejercicio:** Suponga que las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes. Demuestre

$$Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i).$$

- **Ejercicio:** Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables independientes con varianza común $\sigma^2 < \infty$. Sea $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, demuestre que

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

.

Ejercicios

- **Ejercicio:** Suponga que las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes. Demuestre

$$Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i).$$

- **Ejercicio:**Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables independientes con varianza común $\sigma^2 < \infty$. Sea $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, demuestre que

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

.


YAHWEH