Introduction à la programmation en S

Vincent Goulet

École d'actuariat
Université Laval

Chapitre 1

EXEMPLES RÉSOLUS

Sommaire

Sommaire

Calcul de valeurs présentes

Énoncé

Un prêt est remboursé par une série de cinq paiements, le premier dans un an. Trouver le montant du prêt pour chacune des hypothèses ci-dessous.

(a) Paiement annuel de 1 000, taux d'intérêt de 6 % effectif annuellement.

(b) Paiements annuels de 500, 800, 900, 750 et 1 000, taux d'intérêt de 6 % effectif annuellement.

(c) Paiements annuels de 500, 800, 900, 750 et 1 000, taux d'intérêt de 5 %, 6 %, 5,5 %, 6,5 % et 7 % effectifs annuellement.

Solution

De manière générale, la valeur présente d'une série de paiements $P_1, P_2, \dots, P_n$ à la fin des années $1, 2, \dots, n$ est

$$\sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{j} (1 + i_k)^{-1} P_j,$$

(a) Un seul paiement annuel, un seul taux d'intérêt.

Cas spécial

$$P \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{-j}$$

En S:

```
> 1000 * sum((1 + 0.06)^(-(1:5)))
[1] 4212.364
```

(a) Un seul paiement annuel, un seul taux d'intérêt.

Cas spécial

$$P \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{-j}$$

En S:

```
> 1000 * sum((1 + 0.06)^(-(1:5)))
[1] 4212.364
```

(a) Un seul paiement annuel, un seul taux d'intérêt.

Cas spécial

$$P \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{-j}$$

En S:

```
> 1000 * sum((1 + 0.06)^(-(1:5)))
[1] 4212.364
```

(a) Un seul paiement annuel, un seul taux d'intérêt.

Cas spécial

$$P \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{-j}$$

En S:

```
> 1000 * sum((1 + 0.06)^(-(1:5)))
[1] 4212.364
```

(a) Un seul paiement annuel, un seul taux d'intérêt.

Cas spécial

$$P \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{-j}$$

En S:

```
> 1000 * sum((1 + 0.06)^(-(1:5)))
[1] 4212.364
```

(b) Différents paiements annuels, un seul taux d'intérêt.

On a, cette fois,

$$\sum_{j=1}^{n} (1+i)^{-j} P_j$$

En S:

```
> sum(c(500, 800, 900, 750, 1000) *
+     (1 + 0.06)^(-(1:5)))

[1] 3280.681
```

(b) Différents paiements annuels, un seul taux d'intérêt.

On a, cette fois,

$$\sum_{j=1}^{n} (1+i)^{-j} P_j$$

En S:

```
> sum(c(500, 800, 900, 750, 1000) *
+     (1 + 0.06)^(-(1:5)))
[1] 3280.681
```

(b) Différents paiements annuels, un seul taux d'intérêt.

On a, cette fois,

$$\sum_{j=1}^{n} (1+i)^{-j} P_j$$

En S:

```
> sum(c(500, 800, 900, 750, 1000) *
+       (1 + 0.06)^(-(1:5)))
[1] 3280.681
```

(b) Différents paiements annuels, un seul taux d'intérêt.

On a, cette fois,

$$\sum_{j=1}^{n} (1+i)^{-j} P_j$$

En S:

```
> sum(c(500, 800, 900, 750, 1000) *
+       (1 + 0.06)^(-(1:5)))

[1] 3280.681
```

(c) Différents paiements annuels, différents taux d'intérêt.

On doit utiliser la formule générale

$$\sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{j} (1 + i_k)^{-1} P_j$$

En S :

```
> sum(c(500, 800, 900, 750, 1000)/
+ cumprod(c(1.05, 1.06, 1.055, 1.065, 1.07)))

[1] 3308.521
```

(c) Différents paiements annuels, différents taux d'intérêt.

On doit utiliser la formule générale

$$\sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{j} (1 + i_k)^{-1} P_j$$

En S :

```
> sum(c(500, 800, 900, 750, 1000)/
+ cumprod(c(1.05, 1.06, 1.055, 1.065, 1.07)))
[1] 3308.521
```

(c) Différents paiements annuels, différents taux d'intérêt.

On doit utiliser la formule générale

$$\sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{j} (1 + i_k)^{-1} P_j$$

En S :

```
> sum(c(500, 800, 900, 750, 1000)/
+ cumprod(c(1.05, 1.06, 1.055, 1.065, 1.07)))
[1] 3308.521
```

(c) Différents paiements annuels, différents taux d'intérêt.

On doit utiliser la formule générale

$$\sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{j} (1 + i_k)^{-1} P_j$$

En S :

```
> sum(c(500, 800, 900, 750, 1000)/
+ cumprod(c(1.05, 1.06, 1.055, 1.065, 1.07)))
[1] 3308.521
```

(c) Différents paiements annuels, différents taux d'intérêt.

On doit utiliser la formule générale

$$\sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{j} (1 + i_k)^{-1} P_j$$

En S :

```
> sum(c(500, 800, 900, 750, 1000)/
+ cumprod(c(1.05, 1.06, 1.055, 1.065, 1.07)))
[1] 3308.521
```

Sommaire

Fonctions de probabilité

Énoncé

Calculer toutes ou la majeure partie des probabilités des deux lois de probabilité ci-dessous. Vérifier que la somme des probabilités est bien égale à 1.

(a) Binomiale

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, \dots, n.$$

(b) Poisson

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots,$$

où $x! = x(x-1) \cdots 2 \cdot 1$.

Solution

(a) Binomiale$(10, 0{,}8)$.

```
> n <- 10
> p <- 0.8
> x <- 0:n
> choose(n, x) * p^x * (1 - p)^rev(x)
 [1] 0.0000001024 0.0000040960 0.0000737280
 [4] 0.0007864320 0.0055050240 0.0264241152
 [7] 0.0880803840 0.2013265920 0.3019898880
[10] 0.2684354560 0.1073741824
> sum(choose(n, x) * p^x * (1 - p)^rev(x))
[1] 1
```

Solution

(a) Binomiale$(10, 0{,}8)$.

```
> n <- 10
> p <- 0.8
> x <- 0:n
> choose(n, x) * p^x * (1 - p)^rev(x)
 [1] 0.0000001024 0.0000040960 0.0000737280
 [4] 0.0007864320 0.0055050240 0.0264241152
 [7] 0.0880803840 0.2013265920 0.3019898880
[10] 0.2684354560 0.1073741824
> sum(choose(n, x) * p^x * (1 - p)^rev(x))
[1] 1
```

(b) Poisson(5).

On calcule les probabilités en $x = 0, 1, \ldots, 10$ seulement.

```
> lambda <- 5
> x <- 0:10
> exp(-lambda) * (lambda^x/factorial(x))

 [1] 0.006737947 0.033689735 0.084224337
 [4] 0.140373896 0.175467370 0.175467370
 [7] 0.146222808 0.104444863 0.065278039
[10] 0.036265577 0.018132789
```

```
> x <- 0:200
> exp(-lambda) * sum((lambda^x/factorial(x)))

[1] 1
```

(b) Poisson(5).

On calcule les probabilités en $x = 0, 1, \ldots, 10$ seulement.

```
> lambda <- 5
> x <- 0:10
> exp(-lambda) * (lambda^x/factorial(x))
 [1] 0.006737947 0.033689735 0.084224337
 [4] 0.140373896 0.175467370 0.175467370
 [7] 0.146222808 0.104444863 0.065278039
[10] 0.036265577 0.018132789
> x <- 0:200
> exp(-lambda) * sum((lambda^x/factorial(x)))
[1] 1
```

□

Sommaire

Fonction de répartition de la loi gamma

La loi gamma est fréquemment utilisée pour la modélisation d'événements ne pouvant prendre que des valeurs positives et pour lesquels les petites valeurs sont plus fréquentes que les grandes.
Nous utiliserons la paramétrisation où la fonction de densité de probabilité est

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

où

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx = (n-1)\Gamma(n-1).$$

Énoncé

Il n'existe pas de formule explicite de la fonction de répartition de la loi gamma.
Néanmoins, pour α entier et $\lambda = 1$ on a

$$F(x;\alpha,1) = 1 - e^{-x} \sum_{j=0}^{\alpha-1} \frac{x^j}{j!}.$$

(a) Évaluer $F(4;5,1)$.

(b) Évaluer $F(x;5,1)$ pour $x = 2, 3, \dots, 10$ en une seule expression.

Solution

(a) Une seule valeur de x, paramètre α fixe.

```
> alpha <- 5
> x <- 4
> 1 - exp(-x) * sum(x^(0:(alpha - 1))/
+ gamma(1:alpha))
[1] 0.3711631
```

Vérification avec la fonction interne `pgamma` :

```
> pgamma(x, alpha)
[1] 0.3711631
```

Solution

(a) Une seule valeur de x, paramètre α fixe.

```
> alpha <- 5
> x <- 4
> 1 - exp(-x) * sum(x^(0:(alpha - 1))/
+ gamma(1:alpha))
[1] 0.3711631
```

Vérification avec la fonction interne `pgamma` :

```
> pgamma(x, alpha)
[1] 0.3711631
```

Astuce

On peut aussi éviter de générer essentiellement la même suite de nombres à deux reprises en ayant recours à une variable intermédiaire.
L'affectation et le calcul final peuvent se faire dans une seule expression.

```
> 1 - exp(-x) * sum(x^(-1 + (j <- 1:alpha))/
+ gamma(j))
[1] 0.3711631
```

(b) Plusieurs valeurs de x, paramètre α fixe.

C'est un travail pour la fonction `outer`.

```
> x <- 2:10
> 1 - exp(-x) *
+ colSums(
+   t( outer(x, 0:(alpha - 1), "^") )
+   /gamma(1:alpha)
+ )
[1] 0.05265302 0.18473676 0.37116306
[4] 0.55950671 0.71494350 0.82700839
[7] 0.90036760 0.94503636 0.97074731
```

Énoncé

Il n'existe pas de formule explicite de la fonction de répartition de la loi gamma.
Néanmoins, pour α entier et $\lambda = 1$ on a

$$F(x; \alpha, 1) = 1 - e^{-x} \sum_{j=0}^{\alpha-1} \frac{x^j}{j!}.$$

(a) Évaluer $F(4; 5, 1)$.

(b) Évaluer $F(x; 5, 1)$ pour $x = 2, 3, \dots, 10$ en une seule expression.

Sommaire

Algorithme du point fixe

- Problème classique : trouver la racine d'une fonction g, c'est-à-dire le point x où $g(x) = 0$.
- Souvent possible de reformuler le problème de façon à plutôt chercher le point x où $f(x) = x$.
- Solution appelée point fixe.
- L'algorithme du calcul numérique du point fixe d'une fonction $f(x)$ est très simple :
  1. choisir une valeur de départ x_0 ;
  2. calculer $x_n = f(x_{n-1})$;
  3. répéter l'étape 2 jusqu'à ce que $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ ou $|x_n - x_{n-1}|/|x_{n-1}| < \varepsilon$.

Algorithme du point fixe

- Problème classique : trouver la racine d'une fonction g, c'est-à-dire le point x où $g(x) = 0$.
- Souvent possible de reformuler le problème de façon à plutôt chercher le point x où $f(x) = x$.
- Solution appelée point fixe.
- L'algorithme du calcul numérique du point fixe d'une fonction $f(x)$ est très simple :
  1. choisir une valeur de départ x_0 ;
  2. calculer $x_n = f(x_{n-1})$;
  3. répéter l'étape 2 jusqu'à ce que $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ ou $|x_n - x_{n-1}|/|x_{n-1}| < \varepsilon$.

Algorithme du point fixe

- Problème classique : trouver la racine d'une fonction g, c'est-à-dire le point x où $g(x) = 0$.
- Souvent possible de reformuler le problème de façon à plutôt chercher le point x où $f(x) = x$.
- Solution appelée point fixe.
- L'algorithme du calcul numérique du point fixe d'une fonction $f(x)$ est très simple :
  1. choisir une valeur de départ x_0 ;
  2. calculer $x_n = f(x_{n-1})$;
  3. répéter l'étape 2 jusqu'à ce que $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ ou $|x_n - x_{n-1}|/|x_{n-1}| < \varepsilon$.

Algorithme du point fixe

- Problème classique : trouver la racine d'une fonction g, c'est-à-dire le point x où $g(x) = 0$.
- Souvent possible de reformuler le problème de façon à plutôt chercher le point x où $f(x) = x$.
- Solution appelée point fixe.
- L'algorithme du calcul numérique du point fixe d'une fonction $f(x)$ est très simple :
  1. choisir une valeur de départ x_0 ;
  2. calculer $x_n = f(x_{n-1})$;
  3. répéter l'étape 2 jusqu'à ce que $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ ou $|x_n - x_{n-1}|/|x_{n-1}| < \varepsilon$.

Algorithme du point fixe

- Problème classique : trouver la racine d'une fonction g, c'est-à-dire le point x où $g(x) = 0$.
- Souvent possible de reformuler le problème de façon à plutôt chercher le point x où $f(x) = x$.
- Solution appelée point fixe.
- L'algorithme du calcul numérique du point fixe d'une fonction $f(x)$ est très simple :
  1. choisir une valeur de départ x_0 ;
  2. calculer $x_n = f(x_{n-1})$;
  3. répéter l'étape 2 jusqu'à ce que $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ ou $|x_n - x_{n-1}|/|x_{n-1}| < \varepsilon$.

Algorithme du point fixe

- Problème classique : trouver la racine d'une fonction g, c'est-à-dire le point x où $g(x) = 0$.
- Souvent possible de reformuler le problème de façon à plutôt chercher le point x où $f(x) = x$.
- Solution appelée point fixe.
- L'algorithme du calcul numérique du point fixe d'une fonction $f(x)$ est très simple :
  1. choisir une valeur de départ x_0 ;
  2. calculer $x_n = f(x_{n-1})$;
  3. répéter l'étape 2 jusqu'à ce que $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ ou $|x_n - x_{n-1}|/|x_{n-1}| < \varepsilon$.

Algorithme du point fixe

- Problème classique : trouver la racine d'une fonction g, c'est-à-dire le point x où $g(x) = 0$.
- Souvent possible de reformuler le problème de façon à plutôt chercher le point x où $f(x) = x$.
- Solution appelée point fixe.
- L'algorithme du calcul numérique du point fixe d'une fonction $f(x)$ est très simple :
  1. choisir une valeur de départ x_0 ;
  2. calculer $x_n = f(x_{n-1})$;
  3. répéter l'étape 2 jusqu'à ce que $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ ou $|x_n - x_{n-1}|/|x_{n-1}| < \varepsilon$.

Énoncé

Trouver, à l'aide de la méthode du point fixe, la valeur de i telle que

$$a_{\overline{10}|} = \frac{1 - (1+i)^{-10}}{i} = 8{,}21.$$

Solution

Quelques considérations.

- On doit résoudre

$$\frac{1-(1+i)^{-10}}{8{,}21} = i.$$

- Nous ignorons combien de fois la procédure itérative devra être répétée.
- Il faut exécuter la procédure au moins une fois.
- La structure de contrôle à utiliser dans cette procédure itérative est donc `repeat`.

Solution

Quelques considérations.

- On doit résoudre
$$\frac{1-(1+i)^{-10}}{8{,}21} = i.$$
- Nous ignorons combien de fois la procédure itérative devra être répétée.
- Il faut exécuter la procédure au moins une fois.
- La structure de contrôle à utiliser dans cette procédure itérative est donc `repeat`.

Solution

Quelques considérations.

- On doit résoudre

$$\frac{1-(1+i)^{-10}}{8{,}21} = i.$$

- Nous ignorons combien de fois la procédure itérative devra être répétée.
- Il faut exécuter la procédure au moins une fois.
- La structure de contrôle à utiliser dans cette procédure itérative est donc `repeat`.

Solution

Quelques considérations.

- On doit résoudre

$$\frac{1-(1+i)^{-10}}{8{,}21} = i.$$

- Nous ignorons combien de fois la procédure itérative devra être répétée.
- Il faut exécuter la procédure au moins une fois.
- La structure de contrôle à utiliser dans cette procédure itérative est donc `repeat`.

Le code.

```
> i <- 0.05
> repeat {
+     it <- i
+     i <- (1 - (1 + it)^(-10))/8.21
+     if (abs(i - it)/it < 1e-10)
+         break
+ }
> i

[1] 0.03756777

> (1 - (1 + i)^(-10))/i

[1] 8.21
```

Le code.

```
> i <- 0.05
> repeat {
+     it <- i
+     i <- (1 - (1 + it)^(-10))/8.21
+     if (abs(i - it)/it < 1e-10)
+         break
+ }
> i
```

```
[1] 0.03756777
```

```
> (1 - (1 + i)^(-10))/i
```

```
[1] 8.21
```