Ազարյան Ս.Ա.

ՕՊՏԻՄԻԶԱՑԻԱՅԻ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

(ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ)

ԵՐԵՎԱՆ 2023

Ն Ա Խ Ա Բ Ա Ն

«Օպտիմիզացիայի մեթոդներ» ուսումնական ձեռնարկը համապարփակ և ծավալուն դասագրքի հայերենով հրատարկման առաջին փորձն է: Այն ընդգրկում է համալսարանական ծրագրով նախատեսված օպտիմիզացիայի մեթոդներ առարկայի գրեթե բոլոր բաժինները:

Ուսումնական ձեռնարկի նպատակն է տալ օպտիմիզացիայի հիմնարար մեթոդների բավարար չափով համակարգված և ժամանակակից շարադրանք և ծանոթացնելու ընթերցողին այդ ալգորիթմների պրակտիկ իրականացումների հետ, որը այս գրքի կարևոր առանձնահատկություններից է:

Ուսումնական ձեռնարկը աչքի է ընկնում շարադրանքի հստակությամբ և ապացույցների ճշտությամբ, լուծված օրինակների բազմազանությամբ: Նյութերը ներկայացվում են ամբողջական և բովանդակալից և տրվում են հասկացությունների երկրաչափական մեկնաբանություններ: Շարադրված մեթոդները պրակտիկ են և հեշտ իրագործելի ալգորիթմական լեզուների օգնությամբ:

Առաջին գլխի առաջին պարագրաֆում համառոտակի շարադրվում են Ֆունկցիայի էքստրեմումի պայմանները և հիմնական գաղափարները, երկրորդ պարագրաֆում՝ ոչպայմանական էքստրեմումների անհրաժեշտ և բավարար պայմանները, երրորդ պարագրաֆում դիտարկվում են պայմանական էքստրեմումների որոնման խնդիրը սահմանափակում-հավասարումների, սահմանափակում-հավասարումների, խառը սահմանափակումների դեպքում:

Երկրորդ գլխում դիտարկվում են ոչպայմանական էքստրեմումի որոնման թվային մեթոդներ, շարադրվում են նպատակային ֆունկցիայի ոչպայմանական էքտրեմումի որոնման թվային մեթոդների կառուցման սկզբունքները, հաջորդ պարագրաֆներում շարադրված են՝ հավասարաչափ որոնման, միջակայքը կիսով չափ բաժանելու, ոսկե հատման մեթոդները:

Տեսության և խնդիրների դասակարգման լայն սպեկտրը հնարավորություն է տալիս դասագիրքը օգտագործել ոչ միայն ֆիզիկամաթեմատիկական ֆակուլտետներում, այլև տեխնիկական և տնտեսագիտական բուհերում:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Գլուխ 1.

§ 1. Ֆունկցիայի էքստրեմումի պայմանները և հիմնական գաղափարները

§ 2. Ոչպայմանական էքստրեմումների անհրաժեշտ և բավարար պայմանները

§ 3. Պայմանական էքստրեմումների անհրաժեշտ և բավարար պայմանները

Գլուխ 2.

§ 4. Ոչպայմանական էքստրեմումի որոնման թվային մեթոդներ

§ 5. Զրոյական կարգի մեթոդներ

§ 6. Առաջին կարգի մեթոդներ

ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՆՇԱՆԱԿՈՒՄՆԵՐԻ ՑԱՆԿ

- $T \in X$ − x տարրը պատկանում է X բազմությանը
- $X \cap Y$ - բազմությունների հատում
- $X \cup Y$ - բազմությունների միավորում
- $X \setminus Y$ — բազմությունների տարբերություն
- $X + Y = \{z/z = x + y, x\ E\ X, y \in Y\}$- բազմությունների հանրահաշվական գումար
- $\bar{X}$ - X բազմության փակում
- $intX$ -X բազմության ներքին կետերի բազմություն
- R^n - n չափանի էվկլիդյան տարածություն
- $(x, y) = \sum_y^n x_i y_i$; $x, y \in R^n$ վեկտորների սկալյար արտադրյալ
- $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ – $x \in R^n$ վեկտորի նորմ
- $B_r(a)\ \{x, y \in R^n / \|x - a\| \leq r\}$- a կենտրոնով r շառավղով գունդ
- C1 [a, b] — a, b հատվածի վրա որոշված անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաների տարածություն հետևյալ նորմով

$$\|y(\cdot)\|_1 = \max\left\{\max_{x\in[a;b]}|y(x)|;\ \max_{x\in[a;b]}|y'(x)|;\right\}$$

$$||y()||1 = max\{\, max \setminus y(x)|, max\ |'(x)|\}\ E[a, b]\ x = [a, b]$$

- $o(a)$- թվային ֆունկցիա, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{O(\alpha)}{\alpha} = 0$$

- A^T- A-ի տրանսպոնացված մատրիցը։

Գլուխ 1. § 1.Ֆունկցիայի էքստրեմումի պայմանները

1.1. Ֆունկցիայի մինիմումի որոնման խնդրի դրվածքը. Այն պարունակում է՝

- $f(x)$ նպատակային (օբյեկտիվ) ֆունկցիա, որտեղ $x = (x_1;\ x_2;\ \cdots;\ x_n)^T$, որը սահմանված է n-չափանի R^nէվկլիդյան տարածության վրա: Դրա արժեքները բնութագրում են նպատակին հասնելու աստիճանը, որի անունով դրված կամ լուծվում է խնդիրը:
- $X \subseteq R^n$թույլատրելի լուծումների բազմությունը, որի տարրերում կատարվում է որոնումը.
- Իրագործելի լուծումների բազմությունից պահանջվում է գտնել այնպիսի վեկտոր x^*, որը համապատասխանում է այս բազմության նպատակային ֆունկցիայի մինիմում (նվազագույն) արժեքին.

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x); \tag{1.1}$$

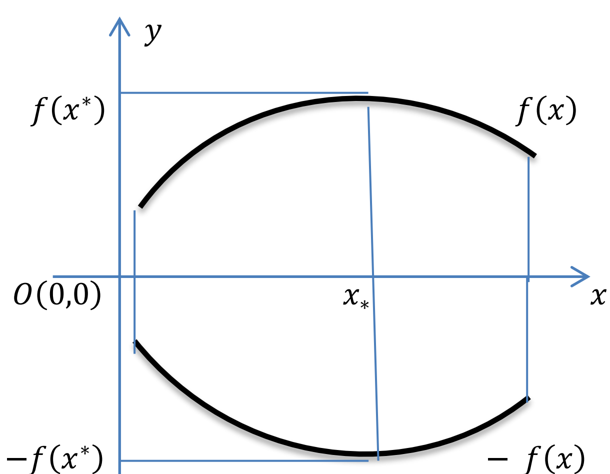
Դիտողություններ 1.1.

ա) $f(x)$-ի մեծագույն արժեքի որոնման խնդիրը բերվում է մինիմումի գտնելու խնդրին, եթե ֆունկցիայի դիմացի նշանը փոխարինենք հակառակ նշանով (Նկ. 1.1)

$$f(x^*) = \max_{x \in X} f(x) = -\min_{x \in X}[-f(x)]$$

բ) նպատակային $f(x)$ ֆունկցիայի մինիմումի և մաքսիմումի որոնման խնդիրները անվանում են տվյալ $f(x)$ ֆունկցիայի էքստրեմումների որոնման խնդիրներ՝

$$f(x_*) = \operatorname*{extr}_{x \in X} f(x):$$



Նկ. 1.1

գ) Եթե որոնման խնդիրների թույլատրելի լուծումների X բազմությունը տրվում են սահմանափակումներով տրված x վեկտորի վրա, այդ դեպքում խնդիրը անվանվում է պայմանական էքստրեմումի որոնման խնդիրին: Եթե $X \subset R^n$, այսինքն, x վեկտորի վրա սահմանափակումներ (պայմաններ) չկան, այդ դեպքում լուծվում է ոչպայմանական էքստրեմումի որոնման խնդիրը:

դ) Էքստրեմումի որոնման խնդրի լուծումը հանդիսանում է $(x^*; f(x^*))$ զույգը, որը իր մեջ պարունակում է x^*-ը և նպատակային ֆունկցիայի արժեքը ներառյալ:

ե) $f(x)$ նպատակային ֆունկցիայի մինիմում (մաքսիմում) կետերի բազմությունը X-ի վրա նշանակենք X^*-ով, որում կարող են լինել՝

- վերջավոր թվով կետեր, այդ թվում նաև մեկ կետ,
- անվերջ թվով կետեր կամ լինել դատարկ:

Սահմանում 1.1. $x^* \in X$ կետը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի գլոբալ (բացարձակ) մինիմումի (նվազագույն) կետ X բազմության վրա, եթե ֆունկցիան հասնում է իր ամենափոքր արժեքին այդ կետում, այսինքն՝

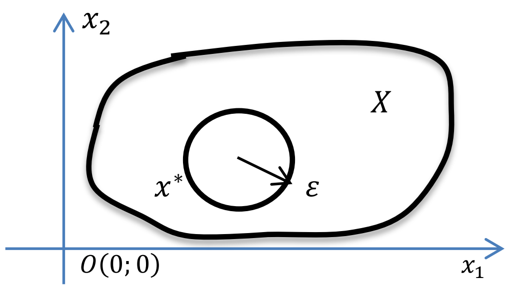
$$f(x^*) \le f(x): \quad \forall\, x \in X:$$

Սահմանում 1.2. $x^* \in X$ կետը կետը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի լոկալ (տեղական) (հարաբերական) մինիմումի կետ X բազմության վրա, եթե $\forall\, \varepsilon > 0$ թիվ այնպիսին, որ երբ $x \in X$ և $|x - x^*| < \varepsilon$ ապա $f(x^*) \le f(x)$):

Այստեղ $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ -ը x վեկտորի էվկլիդյան նորմն է:

Դիտողություններ 1.2.

1) **Սահմանման 1.1**.-ում x^* կետը համեմատվում է X թույլատրելի լուծումների բազմության բոլոր կետերի հետ, իսկ **Սահմանում 1.2** .-ում միայն իր շրջակայքին պատկանողների հետ (նկ. 1.2):



Նկ. 1.2

2) Եթե **Սահմանումներ 1.1.**-ում և **1.2.**-ում անհավասարության $\le$ նշանը փոխարինենք $\ge$ նշանով,ապա մենք ստանում ենք գլոբալ (բացարձակ) և տեղական մաքսիմումը:

3) Գլոբալ էքստրեմումը միևնույն ժամանակ միշտ տեղական է, բայց ոչ հակառակը:

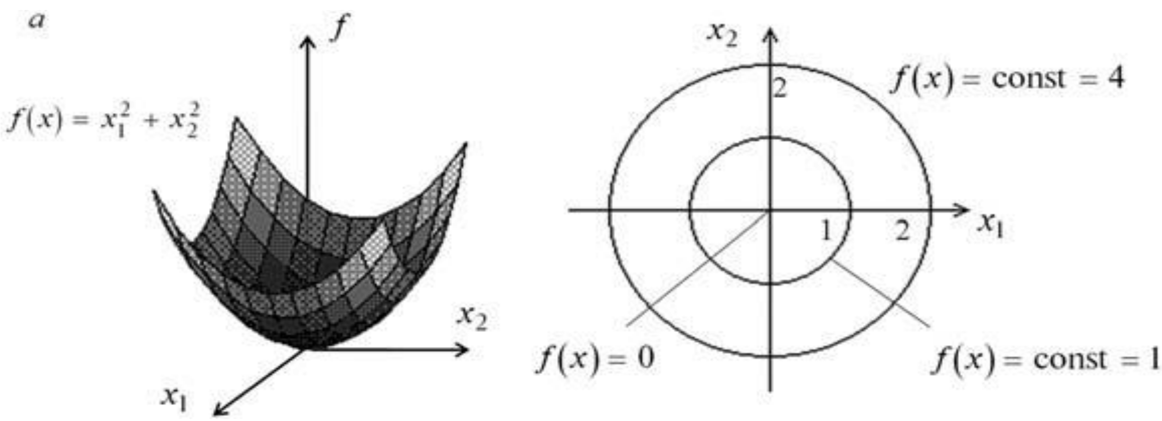
Սահմանում 1.3. $f(x)$ ֆունկցիայի մակարդակի մակերեսը այն կետերի բազմությունն է, որտեղ ֆունկցիան ընդունում է հաստատուն արժեք, այսինքն՝ $f(x) = const$: Եթե $n = 2$, ապա մակարդակի մակերեսը ներկայացված է R^2հարթության վրա հարթ գծով:

Օրինակ 1.1. Կառուցել ներքոգրյալ ֆունկցիաների մակերևույթի մակարդակը՝

$$\text{ա) } f(x) = x_1^2 + x_2^2; \quad \text{բ) } f(x) = \tfrac{1}{4}x_1^2 + x_2^2; \quad \text{գ) } f(x) = x_1^2 + x_2^2; \quad \text{դ) } f(x) = x_1^2 + x_2^2;$$

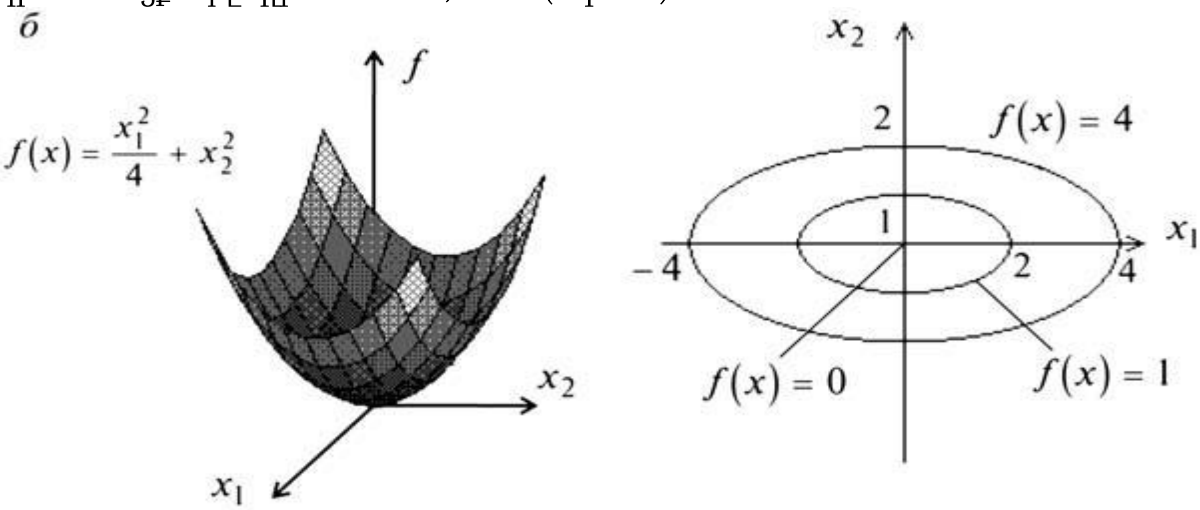
Լուծում. Վերոգրյալ ֆունկցիաների մակերևույթի մակարդակները կլինեն՝

ա) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 = const = r^2$ - շրջանագծի հավասարումը $O(0;0)^T$ կենտրոնով և r շառավիղով (Նկ 1.3a):



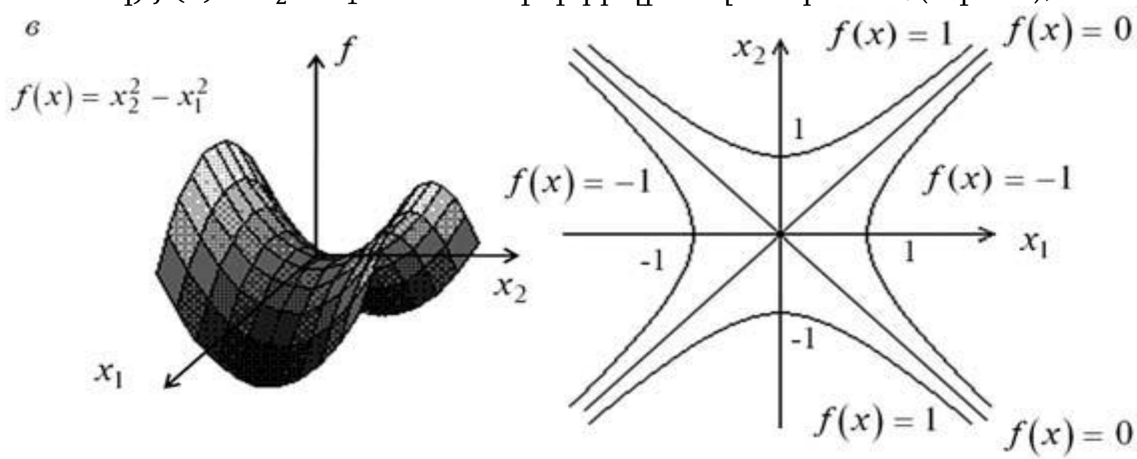
(Նկ 1.3*a*)

բ) $f(x) = \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 = const$- էլիպսի հավասարումը: Եթե $const = 1$, այդ դեպքում կիսառանցքները կլինեն՝ $a = 2; b = 1$ (Նկ 1.3б):

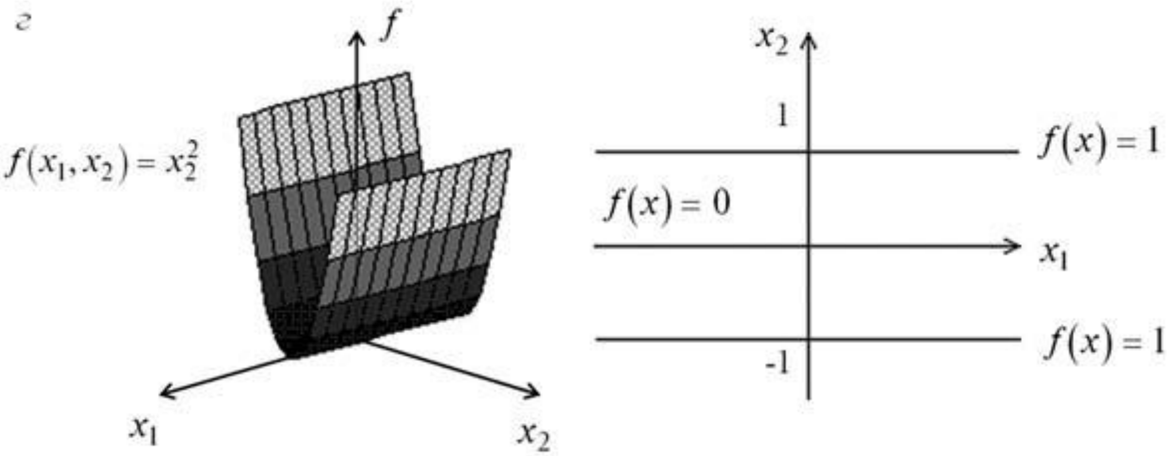


Նկ 1.3б

գ) $f(x) = x_2^2 - x_1^2 = const$- հիպերբոլի հավասարումն է (Նկ 1.3в);



Նկ.1.3в

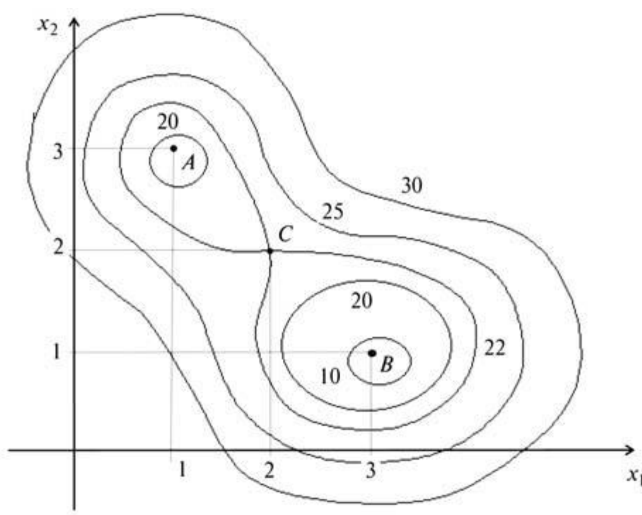


Նկ. 1.3г

դ) $f(x) = x_2^2 = const$- Ox_1 կիսառանցքին զուգահեռ ուղիղներ (Նկ 1.3г);

Օրինակ 1.2. Նկար 1.4-ը ցույց է տալիս ֆունկցիայի մակարդակի գծերը: Թվերը ցույց են տալիս համապատասխան տողի $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքը: A և B կետերը համապատասխանում են $f(A) = 10$ և $f(B) = 5$ ֆունկցիայի արժեքներին: Պահանջվում է դասակարգել էքստրեմումի կետերը:

Լուծում. Ֆունկցիան դիտարկվում է R^2 բազմության վրա, այսինքն՝ դիտարկվում է նրա ոչպայմանական էքստրեմումի գտնելու խնդիրը: Այդ $f(x)$ ֆունկցիան հասնում է $A(1, 3)$ կետում լոկալ մինիմումի, իսկ $B(3, 1)$ կետում միաժամանակ ձեռք են բերում լոկալ և գլոբալ մինիմումներ: Նկարում պատկերված C կետում չկա ոչ նվազագույն, ոչ



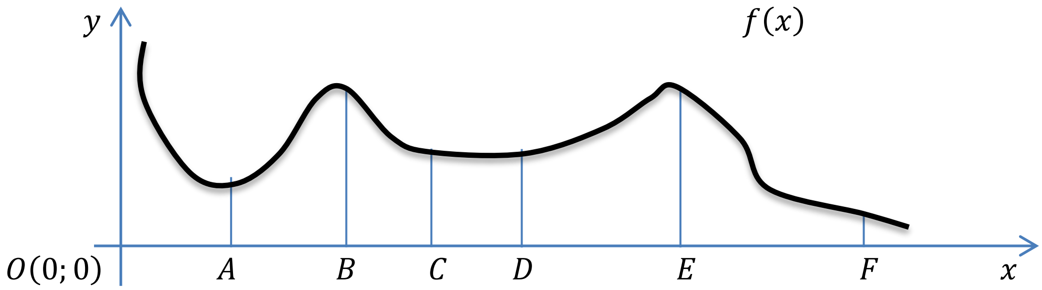
նկ. 1.4

էլ առավելագույն արժեքներ, քանի որ ֆունկցիան մի ուղղությամբ նվազում է, մյուսով՝ մեծանում: Նշենք, որ մակարդակի գծերի պատկերված կառուցվածքը բնորոշ է այսպես կոչված բազմաէքստրեմալ խնդիրների համար:

Օրինակ 1.3. Նկար 1.5-ում ներկայացված է $X \subseteq R$ բազմության վրա սահմանված

$f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Պահանջվում է դասակարգել ծայրահեղ կետերը:

Լուծում. Այստեղ լուծվում է ոչպայմանական էքստրեմումի որոնման խնդիրը: (Նկ.1.5) -ում ընտրում ենք $A, B, \dots, F$ կետերի շրջակայքը, ստուգում վեր նշված 1.1-ից և 1.9 սահմանումների կատարումը՝ հաշվի առնելով 1.1 և 1.2 դիտողությունները 1, 2 կետերը:



(Նկ.1.5)

Արդյունքում մենք ստանում ենք.

- կետ A – կետը լոկալ նվազագույն;
- B, E կետերը լոկալ առավելագույն միավորներ են.
- CD հատվածից կետերի անսահման հավաքածու - տեղական նվազագույնի կետեր.
- F կետը լոկալ և միաժամանակ գլոբալ նվազագույնի կետ է;
- բացակայում է գլոբալ մաքսիմումի կետերը

Օրինակ 1.4. Գտնել

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

և

$$f(x) = \frac{x_1^2}{4} + x_2^2$$

ֆունկցիաների էքստրեմում կետերը R^2 բազմության վրա:

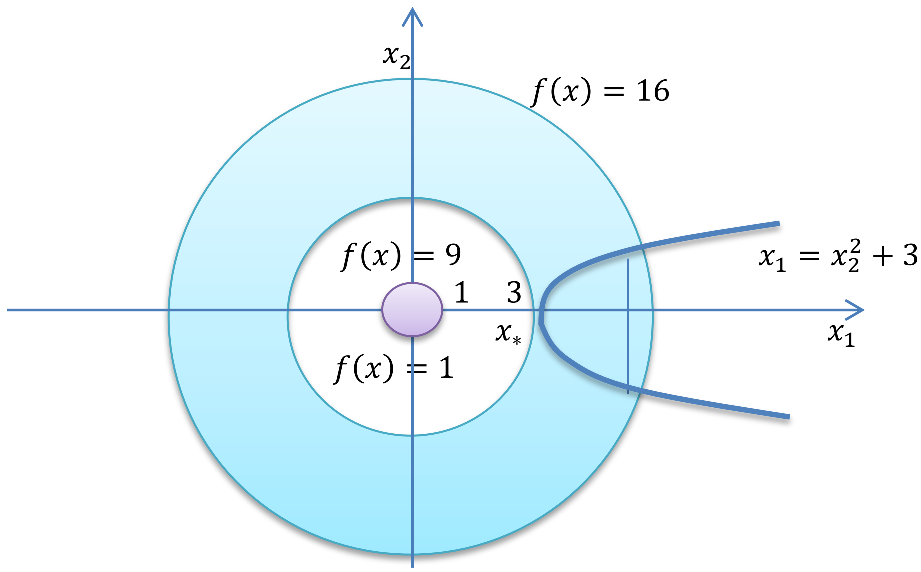
Լուծում. Երկու տրված նպատակային ֆունկցիաներն ունեն լոկալ և միաժամանակ գլոբալ մինիմում x^* կետում, իսկ լոկալ և գլոբալ մինիմում չունեն (տես նկ. 1.3a, б):

Օրինակ 1.5. Գտնել $X = \{x|\ x_2^2 - x_1 + 3\}$ բազմության վրա

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

ֆունկցիայի էքստրեմումները:

Լուծում. Այստեղ դիտարկվում է ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմում գտնելու խնդիրը: $f(x)$ ֆունկցիայի մակարդակի գծերը ներկայացված են շրջանագծերով (տե՛ս նկ. 1.3a), իսկ թույլատրելի լուծումների X բազմությունը պարաբոլա է՝ $x_2^2 - x_1 + 3 = 0$ հավասարմամբ: $x_* = (3;0)^T$ կետում ֆունկցիան հասնում է գլոբալ մինիմում արժեքի՝ $f(x_*) = 9$ (նկ. 1.6): Նկատի առնենք, որ այս կետը մակարդակի գծի և X բազմությունը նկարագրող կորի շփման կետն է: Այս բազմությունում $f(x)$-ը գլոբալ առավելագույնի չի հասնում: Եթե ֆունկցիայի դիմացի նշանը հակադարձված է, ապա x^* կետում:



(նկ. 1.6)

$f(x) = -x_1^2 - x_2^2$ ֆունկցիան X բազմության վրա կհասնի գլոբալ առավելագույնի դիտողություն 1.-ի համաձայն:

Թեորեմ 1.3. (Վայերշտրաս). Եթե $M \subseteq R^n$ կոմպակտ բազմություն է, իսկ $f(x)$-ը նրա վրա անընդհատ ֆունկցիա է, ապա գոյություն ունեն այդ $f(x)$-ի գլոբալ մաքսիմումի և մինիմումի կետեր:

Այսինքն, որպեսզի կատարվեն թեորեմի պայմանները, գոյություն ունեն այնպիսի $x_1; x_2 \in X$ կետեր, որ

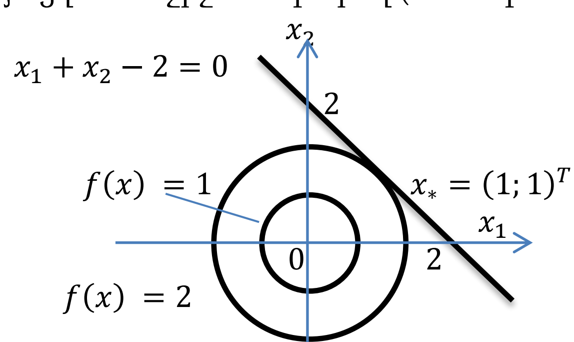
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \qquad \forall\, x \in X:$$

Օրինակ 1.6.Գտնել $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ ֆունկցիայի էքստրեմումները

$$X = \{x |\, x_1 + x_2 - 2 = 0\}$$

բազմության վրա:

Լուծում. Այստեղ լուծվում է պայմանական էքստրեմումի որոնման խնդիրը. $f(x)$-ի մակարդակի գծերը ներկայացված են շրջանակներով (տես նկ. 1.3a), իսկ թույլատրելի



Նկ. 1.7

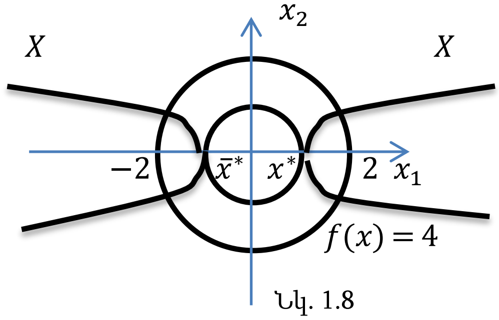
լուծումների X բազմությունը ուղիղով: $x^* = (1;1)^T; f(x^*) = 2$ հասնում է բացարձակ մինիմումի (Նկ. 1.7), իսկ բացարձակ մաքսիմում տվյալ բազմության վրա գոյություն չունի: Նկատենք, որ x^* կետում մակարդակի գծերը շփվում են սահմանափակումները նկարագրող կորին:

Օրինակ 1.7. Գտնել

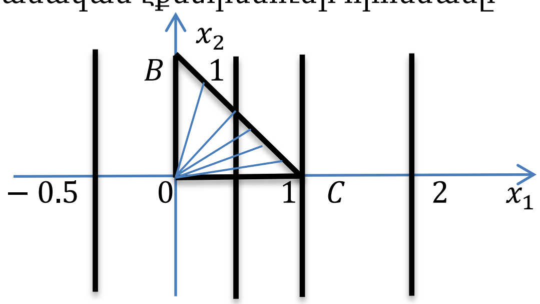
$$f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

ֆունկցիայի էքստրեմումները $X = \{x \,|x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0\}$ բազմության վրա:

Լուծում. Խնդրի լուծումը բերվում է պայմանական էքստրեմումի որոնմանը



Նկ. 1.8



Նկ. 1.9

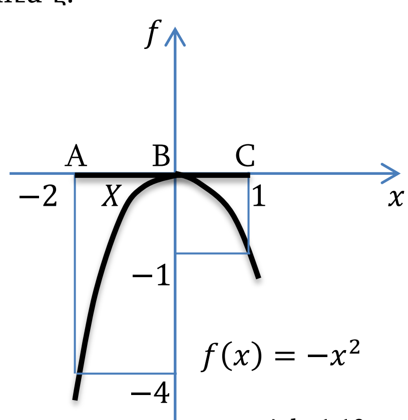
X բազմությունը հիպերբոլա է (Նկ. 1.8): Այս դեպքում ունենք երկու գլոբալ մինիմումի կետեր՝ $x^* = (1;0)^T$ և $\bar{x}^* = (-1;0)^T$, իսկ $f(x^*) = f(\bar{x}^*) = 1$:

Օրինակ 1.8. Գտնել $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ ֆունկցիայի էքստրեմումները

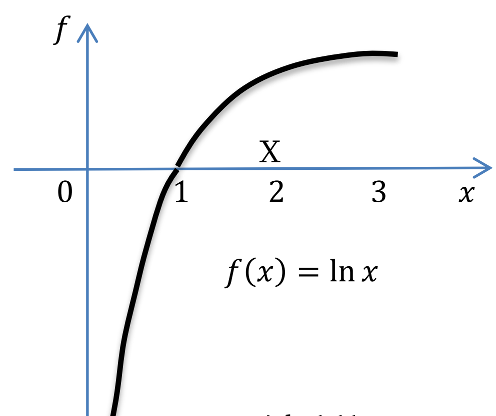
$$X = \{x|x_1 + x_2 \leq 1;\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0\}$$

թույլատրելի լուծումների բազմության վրա:

Լուծում. Խնդրի լուծումը բերվում է պայմանական էքստրեմումի որոնմանը: $f(x)$-ի մակարդակի գծերը $x_1 = const$-ն է, որի բոլոր էույլատրելի լուծնիմների մազմությունը տրված է (Նկ. 1.9)-ում (շտրիխավորված հատույթը): $C = (1;0)^T$ կետում $f(C) = 1$ և ֆունկցիան ունի գլոբալ նմաքսիմում, իսկ AO հատվածի վրա $f(A) = f(0) = 0$ գլոբալ մինիմում է:



Նկ. 1.10



Նկ. 1.11

Օրինակ 1.9. Գտնել $f(x) = -x^2$ ֆունկցիայի էքստրեմումները $X = \{x| -2 \le x \le 1\}$ թույլատրելի լուծումների բազմության վրա:

Լուծում. Խնդրի լուծումը բերվում է պայմանական էքստրեմումի որոնմանը: Այս դեպքում գլոբալ մաքսիմումի է հասնում $B(0; 0)$ կետում՝ $f(B) = 0$, իսկ $A(-2; -4)$ կետում գլոբալ ինիմում է, $C(1; -1)$ կետում լոկալ մինիմում է:

Օրինակ 1.10.Գտնել $f(x) = \ln x$ ֆունկցիայի էքստրեմումները $X = \{x| \ 0 < x < 1\}$ բազմության վրա:

Լուծում. Դիտարկվում է $f(x)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի որոնման խնդիրը: $f(x) = \ln x$Ֆունկցիան ըստ վերոգրյալ սահմանումների չունի լոկալ և գլոբալ էքստրեմումի կետեր (նկ. 1.11):

Ձախ սահմանին մոտենալիս ֆունկցիայի արժեքը հակված է $f^* \to -\infty$ (ֆունկցիան ներքևից անսահմանափակ է), իսկ աջ սահմանին մոտենալիս ֆունկցիան մեծանում է, բայց չունի մաքսիմում, քանի որ $x = 3$-կետը X բազմությանը չի պատկանում:

Սահմանում 1.4. Անընդհատ դիֆերենցելի $f(x)$ ֆունկցիայի գրադիենտ x կետում անվանում են այն սյունյակային վեկտորը՝ $\nabla f(x)$, որի անդամները հանդիսանում են տրված x կետում ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները՝

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}:$$

Ֆունկցիայի գրադիենտը ուղղվում է նորմալի երկայնքով դեպի հարթ մակերես (տես Սահմանում 1.3), այսինքն՝ տրված x կետում գծված շոշափող հարթությանը ուղղահայաց ֆունկցիայի ամենամեծ աճի ուղղությամբ:

Սահմանում 1.5. Անընդհատ կրկնակի դիֆերենցելի $f(x)$ ֆունկցիայի Հեսիան մատրիցա x կետում անվանում են այն տվյալ կետում հաշված երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալներով հետևյալ մատրիցը.

$$H(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix};$$

որտեղ՝

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j};\ (i.j = \overline{1;n})$$

Դիտողություններ 1.3.

ա) Հեսսիան մատրիցը սիմետրիկ չափերի է $(n \rtimes n)$:

բ) $\nabla f(x)$ գրադիենտի հետ միասին կարող ենք սահմանել նաև $-\nabla f(x)$վեկտորը, որը կոչվում է հակագրադիենտ վեկտոր, որոնք բացարձակ արժեքով իրար հավասար են, բայց ունեն հակառակ ուղղություններ: Այն ցույց է տալիս տվյալ կետում ֆունկցիայի ամենամեծ նվազման ուղղությունը:

գ) Օգտագործելով գրադիենտը և Հեսսիան մատրիցը, օգտագործելով Թեյլորի շարքի վերլուծումը, $f(x)$ ֆունկցիայի աճը x կետում կարելի է գրել հետևյալ ձևով՝

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = \nabla f(x)^T \Delta x + \frac{1}{2} = \nabla x^T H(x) \Delta x + o(\|x\|^2); \qquad (1.4)$$

որտեղ $o(\|x\|^2)$-ը բոլոր երկրորդ կարգից բարձր վերլուծված անդամների գումարն է, իսկ $= \nabla x^T H(x) \Delta x$-ը քառակուսային ձևն է:

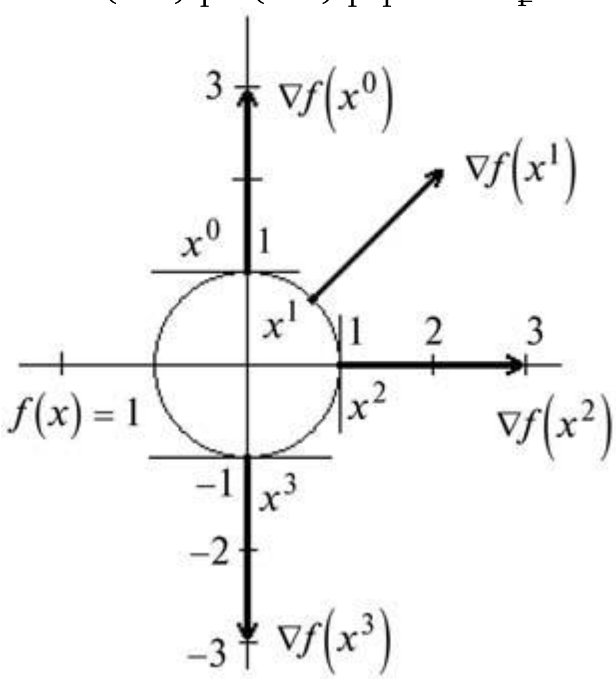
Օրինակ 1.11. Տրված $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ ֆունկցիայի համար անհրաժեշտ է՝

ա) հաշվել և կառուցել գրադիենտը հետևյալ կետերում՝

$$x^0 = (0,1)^T;\quad x^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T;\quad x^2 = (1,0)^T;\quad x^3 = (0,-1)^T:$$

բ) գտնել Հեսսի մատրիցը:

Լուծում. Ըստ **սահմանում** (**1.4**)-ի և (**1.5**)-ի կունենանք՝



Նկ. 1.12

$$\nabla f(x) = (2x_1; 2x_2)^T;\quad \nabla f(x^0) = (0;2)^T;$$

$$\nabla f(x^1) = \left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)^T; \quad \nabla f(x) = (0; -2)^T;$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

Նկատենք, որ $f(x)$ քառակուսային ֆունկցիայի Հեսսի մատրիցը կախված չէ x-ից: (նկ. 1.12)-ում ներկայացված են որոշված գրադիենտները:

Օրինակ 1.12. Տրված $f(x) = x_1^2 + x_2^4$-ի համար հաշվել հաշվել գրադիենտը և գտնել Հեսսիական մատրիցը $x^0 = (0; 0)^T$; $x^1 = (1; 1)^T$կետերում:

Լուծում. Ըստ **Սահմանում 1.4** և **1.5** –ի կունենանք՝

$$\nabla f(x) = (2x_1; 4x_2^3)^T; \quad \nabla f(x^0) = (0; 0)^T; \quad \nabla f(x^1) = (2; 4)^T$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{pmatrix}; \quad H(x^0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad H(x^1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix};$$

Սահմանում 1.6. Դիտարկվող $f(x)$ ֆունկցիայի $\nabla x^T H(x) \Delta x$ քառակուսային ձևը (և նաև համապատասխանը Հեսսիան մատրիցը՝ H(x)) կոչվում է.

- դրական որոշյալ (H(x) > 0), եթե կամայական ոչզրոյական Δx-ի համար տեղի ունի $\Delta x^T H(x) \Delta x > 0$;
- բացասական որոշյալ (H(x) < 0), եթե կամայական ոչզրոյական Δx-ի համար տեղի ունի $\Delta x^T H(x) \Delta x < 0$;
- ոչբացասական որոշյալ (H(x) ≥ 0), եթե կամայական ոչզրոյական Δx-ի համար տեղի ունի $\Delta x^T H(x) \Delta x \geq 0$ և կա մի այնպիսի զրոյից տարբեր Δx վեկտոր, որի համար $\nabla x^T H(x) \Delta x = 0$:
- ոչդրական որոշյալ (H(x) ≤ 0), եթե կամայական ոչզրոյական Δx-ի համար տեղի ունի $\Delta x^T H(x) \Delta x \leq 0$ կա մի այնպիսի զրոյից տարբեր Δx վեկտոր, որի համար $\Delta x^T H(x) \Delta x = 0$:
- անորոշ (H(x) $>< 0$), եթե գոյություն ունեն այնպիսի Δx և $\Delta \tilde{x}$ վեկտորներ, որոնց համար $\Delta x^T H(x) \Delta x > 0$ և $\Delta x^T H(x) \Delta \tilde{x} < 0$
- նույնաբար հավասար է զրոյի (H(x) $\equiv 0$), եթե կամայական ոչզրոյական Δx-ի համար տեղի ունի $\Delta x^T H(x) \Delta x = 0$;

Օրինակ 1.13. Դասկարգել **Օրինակ 1.11-**ում տրված ֆունկցիայի քառակուսային ձևը և Հեսսիան մատրիցը:

Լուծում. Ըստ նախկին **Օրինակ 1.11-**ի՝ $H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; Գրենք քառակուսային ձևը՝

$$\nabla x^T H(x) \Delta x = (\Delta x_1 \quad \Delta x_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = 2\Delta x_1^2 + 2\Delta x_2^2;$$

Ակնհայտ է, որ $\nabla x^T H(x) \Delta x > 0$ ցանկացած Δx$\neq$ 0-ի համար: Ըստ վերոգրյալ **սահմանման 1.10**-ի, քառակուսային ձևը (Հեսսիան մատրիցա) դրական որոշյալ է:

Օրինակ 1.14. Դասկարգել **Օրինակ 1.12-**ում տրված ֆունկցիայի քառակուսային ձևը և Հեսսիան մատրիցը:

Լուծում. Ըստ նախկին **Օրինակ 1.12-**ի՝ $H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; Գրենք քառակուսային ձևը՝

$$\nabla x^T H(x)\Delta x = (\Delta x_1 \quad \Delta x_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = 2\Delta x_1^2;$$

Ակնհայտ է, որ $\nabla x^T H(x)\Delta x \geq 0$ ցանկացած $\Delta x \neq 0$-ի համար և $\nabla x^T H(x)\Delta x = 0$, երբ $\Delta x_1 = 0$ և ցանկացած $\Delta x_2 \neq 0$-ի դեպքում: Ըստ վերոգրյալ **սահմանման 1.6**-ի Հեսսիան մատրիցը (քառակուսային ձևը) դրական որոշյալ է:

Օրինակ 1.15. Գտնել $f(x) = x_1^2 - x_2^2$ -ի Հեսսիան մատրիցը և դասակարգել:

Լուծում. Սահմանում 1.5-ի համաձայն $H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$: Գրենք համապատասխան քառակուսային ձևը՝

$$\nabla x^T H(x)\Delta x = (\Delta x_1 \quad \Delta x_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = 2\Delta x_1^2 - 2\Delta x_2^2:$$

$\Delta x_1 = 0$ և ցանկացած $\Delta x_2 \neq 0$-ի դեպքում քառակուսային ձևը բացասական է, իսկ $\Delta x_1 \neq 0$ և ցանկացած $\Delta x_1 = 0$-ի դեպքում դրական է: Ըստ **Սահմանում 1.6**-ի Հեսսիան մատրիցը (քառակուսային ձևը) անորոշ է:

Սահմանում 1.7. Տրված $\boldsymbol{X} \subseteq R^n$ բազմությունը անվանում են ուռուցիկ, եթե այն պարունակում է որևէ հատված, որի ծայրակետերը պատկանում են X-ին, այսինքն՝ եթե որևէ $x_1; x_2 \in X$-ի և $0 \leq \lambda \leq 1$-ի համար ճշմարիտ է հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X:$$

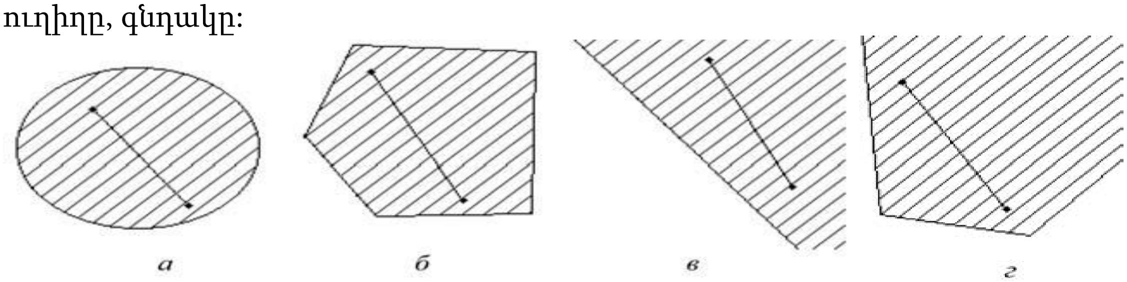
Օրինակ 1.16. Պահանջվում է պատկերվածներից ընտրել ուռուցիկ բազմություններ (Նկ. 1.13) -ում:

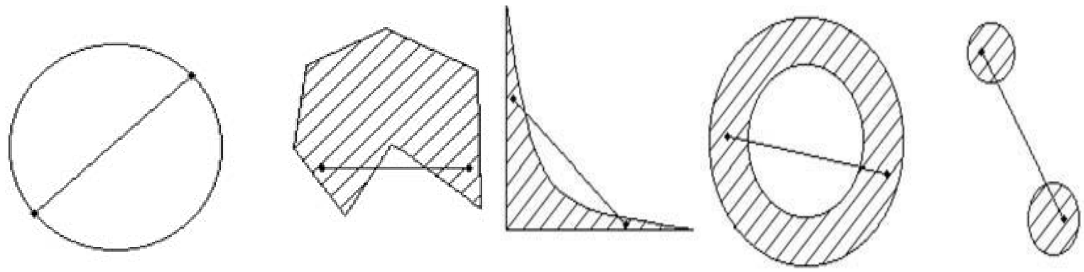
Լուծում. (Նկ. 1.13) –ում պատկերված a; б; в; г բազմությունները ուռուցիկ են, քանի որ բավարարում են **Սահմանում 1.7-**ի պայմաններին,

իսկ (Նկ. 1.13) –ում պատկերված ∂; e; ж; з; и բազմությունները ուռուցիկ չեն քանի որ չեն բավարարում **Սահմանում 1.11**-ի պայմաններին:

Պատկերավոր ասած՝ ուռուցիկ բազմություններ են համարվում նրանք, որոնք չեն պարունակում «խորշեր», «անցքեր» և բաղկացած են մեկ «կտորից»:

Ուռուցիկ բազմությունների օրինակներ են նաև R^n տարածությունը, հատվածը, ուղիղը, գնդակը:





д　　　е　　　ж　　　з　　　и

Նկ. 1.13

Սահմանում 1.8. $\boldsymbol{f(x)}$ ֆունկցիան որոշված է ուռուցիկ X բազմության վրա, կոչվում է ուռուցիկ, եթե

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2);\quad \forall\ x_1; x_2 \in X;\ \text{և}\ \ 0 \le \lambda \le 1:$$

Սահմանում 1.9. $\boldsymbol{f(x)}$ ֆունկցիան որոշված է ուռուցիկ X բազմության վրա, կոչվում է խիստ ուռուցիկ, եթե

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2);\quad \forall\ x_1; x_2 \in X;\ \text{և}\ \ 0 < \lambda < 1:$$

Սահմանում 1.10. $\boldsymbol{f(x)}$ ֆունկցիան որոշված է ուռուցիկ X բազմության վրա, կոչվում է ուռուցիկ $l > 0$ հաստատունով և $0 \le \lambda \le 1$, եթե

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - \frac{l}{2}\lambda(1-\lambda)\|x_1 - x_2\|^2;\ x_1 \ne x_2 \in X;$$

Դիտողություններ 1.4.

ա) $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է ուռուցիկ, եթե այն ամբողջությամբ գտնվում է իր կամայական երկու կետերը միացնող հատվածի տակ: Ֆունկցիան համարվում է խիստ ուռուցիկ, եթե այն ամբողջությամբ գտնվում է իր երկու կամայական, բայց ոչ համընկնող կետերը միացնող գծի հատվածի տակ:

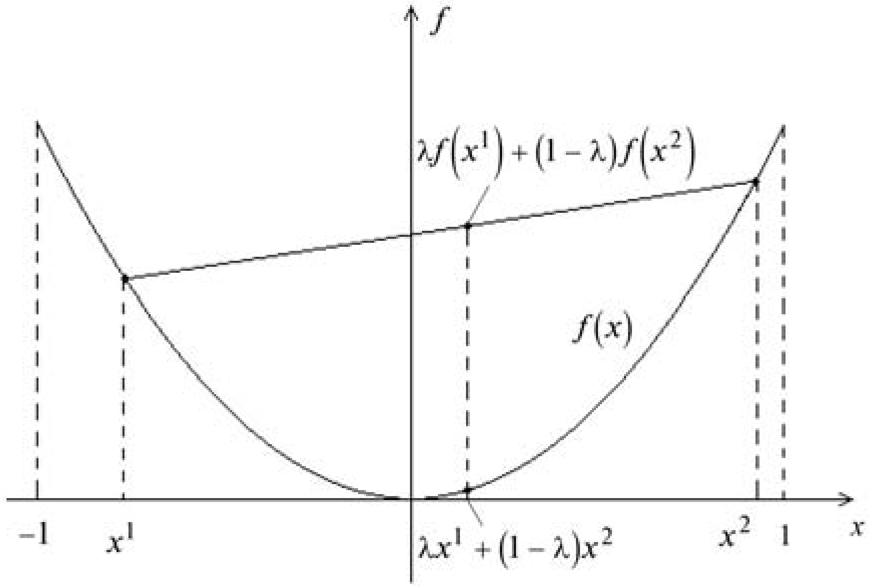
բ) Եթե ֆունկցիան խիստ ուռուցիկ է, ապա այն և՛ խիստ ուռուցիկ է, և՛ ուռուցիկ: Եթե ֆունկցիան խիստ ուռուցիկ է, ապա այն միաժամանակ ուռուցիկ է:

գ) Ֆունկցիայի ուռուցիկությունը կարելի է որոշել Հեսսիական մատրիցից՝

- եթե $H(x) \ge 0$; $\forall\ x \in R^n$, ապա $f(x)$ ֆունկցիան ուռուցիկ է;
- եթե $H(x) > 0$; $\forall\ x \in R^n$, ապա $f(x)$ ֆունկցիան խիստ ուռուցիկ է;
- եթե $H(x) \ge lE$; $\forall\ x \in R^n$ և E-ն միավոր մատրից է, ապա $f(x)$ ֆունկցիան խիստ ուռուցիկ է:

Օրինակ 1.17. Տրված է $f(x) = x^2$ ֆունկցիան, որոշված $X = \{x | -1 \le x \le 1\}$: Պահանջվում է ուսումնասիրել այն ուռուցիկության համար (Նկ. 1.10):

Լուծում. Ֆունկցիան խիստ ուռուցիկ է, համաձայն **դիտողություններ 1.4**-ի (ա)) կետի, քանի որ այն ամբողջությամբ գտնվում է իր երկու կամայական, բայց ոչ համընկնող կետերը միացնող հատվածի տակ (տես նկ. 1.14): Ավելին, ֆունկցիան միաժամանակ խիստ ուռուցիկ է, քանի որ, համաձայն **դիտողություններ 1.4**-ի (գ))



Նկ. 1.14

կետի պայմանի $H(x) = f(x) = 2$, երբ $0 < l \leq 2$: Ակնհայտ է, որ ուռուցիկության և խիստ ուռուցիկության պայմանները նույնպես բավարարված են, որը ցույց է տալիս **դիտողություններ 1.4**-ի (բ)) կետի վավերականությունը:

Օրինակ 1.18. Տրվում է $f(x) = x$ ֆունկցիա, որը սահմանված է $X = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$: Պահանջվում է ուսումնասիրել այն ուռուցիկության համար (նկ. 1.11):

Լուծում. Համաձայն **դիտողություններ 1.4**-ի ֆունկցիան ուռուցիկ է, քանի որ այն ամբողջովին այն ամբողջովին գտնվում է հատվածից ոչ բարձր, քան իր երկու կամայական կետերը միացնող հատվածը, բայց այն խիստ ուռուցիկ չէ, առավել ևս՝ ուժեղ ուռուցիկ:

Օրինակ 1.19. Հետազոտել $f(x) = x_1^2 + x_2^2$-ի ուռուցիկությունը R^2 բազմության վրա:

Լուծում. Ըստ **Օրինակ 1.11**-ի արդյունքների Հեսսիան մատրիցը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝ $H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \geq l \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, երբ $0 < l \leq 2$:

Համաձայն (**դիտողություն 1.4 կետ 3)**-ի կարելի է եզրակացնել ֆունկցիայի ուժեղ ուռուցիկության մասին: Միաժամանակ այն խիստ ուռուցիկ է (**դիտողություն 1.4 կ. 3)**:

Հայտանիշ 1.1.

1. Եթե $f(x)$-ը ուռուցիկ ֆունկցիա է X ուռուցիկ բազմության վրա, ապա ցանկացած լոկալ մինիմում կետ նրա գլոբալ մինիմում կետն է X-ի վրա (Օրինակ 1.6):

2. Եթե ուռուցիկ ֆունկցիան հասնում է իր մինիմումին երկու տարբեր կետերում, ապա այն հասնում է իր մինիմումին այս երկու կետերը միացնող հատվածի բոլոր կետերում (օրինակ 1.8):

3. Եթե $f(x)$-ը խիստ ուռուցիկ ֆունկցիա է X ուռուցիկ բազմության վրա, ապա այն կարող է հասնել իր գլոբալ մինիմումին X-ում մաքսիմում մեկ կետում (Օրինակ 1.6):

1.2. Լիպշիցի հայտանիշը. $f(x)$ ֆունկցիան բավարարում է **Լիպշիցի պայմանին** $[a;b]$ հատվածի վրա, եթե գոյություն ունի այնպիսի $L > 0$ (Լիպշիցի հաստատուն), որ բոլոր $x'; x'' \in [a;b]$ համար տեղի ունի

$$|f(x') - f(x'')| \leq L \cdot |x' - x''|; \qquad (1.5)$$

անհավասարությունը:

Դիտողություններ 1.5.

ա) Եթե անհավասարությունը (1.5) կատարվում է L հաստատունի հետ, ապա այն վավեր է L-ից անվերջ մեծ հաստատունների բազմության համար: Որպես կանոն, հետաքրքրություն է ներկայացնում Լիպշիցի հաստատուններից ամենափոքրը:

բ) (1.5) պայմանից հետևում է $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը [a, b]-ում: Եթե, ի լրումն, ֆունկցիան ունի անընդհատ ածանցյալ [a, b]-ի վրա, ապա Լիպշիցի L հաստատունը ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝

$$L = \max_{x \in [a;b]} |f'(x)|:$$

գ) (1.5) պայմանը նշանակում է, որ $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի ցանկացած լարի թեքության մոդուլը չի գերազանցում L-ն:

Օրինակ 1.20. Ստուգել, արդյոք հետևյալ ֆունկցիաները բավարարում են Լիպշիցի պայմանին՝

ա) $f(x) = 2x$-ը $[0, 1]$ միջակայքում;

բ) $f(x) = \sin x$-ը $[0, \pi]$ միջակայքում;

գ) $f(x) = \sqrt{x}$ –ը $[0, 1]$ միջակայքում;

դ) $f(x) = \pi^x$ –ը $[0, 1]$ միջակայքում;

Լուծում. ա) $f(x) = 2x$-ը բավարարում է Լիպշիցի պայմանին $[0, 1]$ միջակայքում $L = 2$ հաստատունով:

բ) $f(x) = \sin x$ ֆունկցիան բավարարում է Լիպշիցի պայմանին $[0, \pi]$ միջակայքում $L = \max_{x \in [a;b]} |\cos x| = 1$ հաստատունով:

գ) $f(x) = \sqrt{x}$ ֆունկցիան չի բավարարում [0, 1] միջակայքում գտնվող Լիպշիցի պայմանին, քանի որ $x \to +0$-ում գրաֆիկի վրա շոշափողի թեքությունը մեծանում է առանց սահմանի, և անցնելով (1.5) սահմանի $|x' - x''| \to 0$, կարող ենք եզրակացնել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին ինչ-որ կետում գոյություն ունի շոշափող, որի անկյունային գործակցի մոդուլը չի կարող գերազանցել L-ին:

դ) $f(x) = 2x$-ը բավարարում է Լիպշիցի պայմանին $[0, 1]$ միջակայքում $L = \pi$ հաստատունով:

Առաջադրանքներ

1.Գտնել՝

$$f(x) = \frac{(x_1 - 3)^2}{4} + \frac{(x_2 + 2)^2}{9}$$

ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը R^2 բազմության վրա:

Պատասխան՝ ֆունկցիան $x_* = (3; -2)^T$ կետում միաժամանակ ունի լոկալ և գլոբալ ոչպայմանական էքստրեմումներ:

2.Գտնել՝

$$f(x) = -(x_1+1)^2 - \frac{(x_2+4)^2}{16}$$

ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը R^2 բազմության վրա:

Պատասխան՝ ֆունկցիան $x_* = (-1; -4)^T$ կետում միաժամանակ ունի լոկալ և գլոբալ ոչպայմանական էքստրեմումներ:

3. Գտնել՝

$$f(x) = x^{-1}$$

ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը $X = \{x|\ 0 < x < 2\}$ բազմության վրա:

Պատասխան՝ ֆունկցիան չունի լոկալ և գլոբալ ոչպայմանական էքստրեմումներ:

4. Գտնել՝

$$f(x) = (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2$$

ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը $X = \{x|\ x_1 + x_2 = 0\}$ բազմության վրա:

Պատասխան՝ ֆունկցիան ունի միաժամանակ լոկալ և գլոբալ պայմանական էքստրեմումներ:

5. Որոշել

$$f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$$

նպատակային ֆունկցիայի Հեսյան մատրիցի նշանը $(0;0)^T$ կետում:

Պատասխան. Հեսսիան մատրիցը և համապատասխան քառակուսային ձևը անորոշ են:

6. Ստուգել

$$f(x) = \frac{x_1^2}{4} + x_2^2$$

նպատակային ֆունկցիայի Հեսսիան մատրիցայի նշանի-որոշությունը, ինչպես նաև ուռուցիկության համար:

Պատասխան. Հեսսիան մատրիցը դրական որոշյալ է: Ֆունկցիան խիստ ուռուցիկ է, քանի որ $H(x) \geq lE$-ից $0 < l \leq \frac{1}{2}$:

7. Ստուգել

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$$

նպատակային ֆունկցիայի Հեսսիան մատրիցայի նշանի որոշությունը, ինչպես նաև ուռուցիկության համար:

Պատասխան՝ Հեսսիանի մատրիցը դրական կիսաորոշյալ է, ֆունկցիան՝ ուռուցիկ:

§ 2. Ոչպայմանական էքստրեմումների անհրաժեշտ և բավարար պայմանները

2.1. Խնդրի դրվածքը և լուծման ռազմավարությունը. Տրված է կրկնակի անընդհատ և դիֆերենցելի $f(x)$ ֆունկցիան որոշված R^nբազմության վրա:

Պահանջվում է ուսումնասիրել $f(x)$ ֆունկցիան էքստրեմության համար, այսինքն՝ որոշել նրա լոկալ նվազագույնի և առավելագույնի $x^* \in R^n$կետերը R^n տարածության վրա՝

$$f(x_*) = \min_{x_* \in R^n} f(x); \quad f(x_*) = \max_{x_* \in R^n} f(x); \tag{2.1}$$

Լոկալ էքստրեմումների x_* կետերը հայտնաբերվում են՝ օգտագործելով առաջին և երկրորդ կարգի անհրաժեշտ և բավարար պայմանները (որոնց հերթականությունը որոշվում է օգտագործվող ածանցյալների հերթականությամբ)։ $f(x^*)$ ֆունկցիայի արժեքները հաշվարկվում են լոկալ էքստրեմումների հայտնաբերված կետերում։

Հայտանիշ 2.1 (Առաջին կարգի էքստրեմումի համար անհրաժեշտ պայմանները). Թող $x^* \in R^n$ լինի $f(x)$ ֆունկցիայի լոկալ նվազագույն (առավելագույն) կետը R^n-ի վրա և $f(x)$-ը դիֆերենցելի է x^* կետում։ Այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիայի գրադիենտը x^*-ում հավասար է զրոյի, այսինքն՝

$$\nabla f(x^*) = 0; \tag{2.2}$$

կամ

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0; \quad (i = 1; 2; \cdots; n) \tag{2.3}$$

Նկատի ունեցեք, որ (2.2) պայմանի աջ կողմում 0 նշանը նշանակում է չափերի զրոյական սյունակ (n ⋊ 1) (զրոյական վեկտոր), սակայն հակիրճ լինելու համար այսուհետ կգրենք, որ գրադիենտը հավասար է զրոյի։

Սահմանում 2.1. Վերոգրյալ (2.2) կամ (2.3) պայմաններին բավարարող x_* կետերը կոչվում են ստացիոնար կետեր։

Հայտանիշ 2.2 (երկրորդ կարգի էքստրեմումի համար անհրաժեշտ պայմանները). Թող $x^* \in R^n$ լինի $f(x)$ ֆունկցիայի լոկալ նվազագույն(առավելագույն) կետը R^n-ի վրա և $f(x)$ ֆունկցիան այս կետում լինի կրկնակի դիֆերենցելի։

Այդ դեպքում $f(x)$-ի $H(x^*)$ հեսսիան մատրիցան հաշվարկված x_* կետում դրական կիսաորոշյալ է (բացասական կիսաորոշյալ է), այսինքն.

$$H(x^*) \geq 0; \tag{2.4}$$

$$H(x^*) \leq 0; \tag{2.5}$$

Հայտանիշ 2.3 (բավարար պայմաններ էքստրեմումի համար): Թող $x_* \in R^n$ կետում $f(x)$ ֆունկցիան լինի երկու անգամ դիֆերենցելի, նրա գրադիենտը հավասար զրոյի, իսկ Հեսսիան մատրիցը լինի դրական-որոշյալ (բացասական-որոշյալ), այսինքն.

$$\nabla f(x_*) = 0; \text{ և } H(x^*) \geq 0; \tag{2.6}$$

$$(H(x^*) \leq 0); \tag{2.7}$$

այդ դեպքում x_* կետը հանդիսանում է $f(x)$ -ի լոկալ մինիմումի (մաքսիմումի) կետ R^n բազմության վրա։

Սահմանում 2.2. Դիտարկենք Հեսսիան մատրիցի $H(x^*)$ որոշիչը՝ հաշվարկված x_* ստացիոնար կետում՝

$$detH(x^*) = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} \cdots & h_{nn} \end{vmatrix}; \ (nxn)\text{-րդ կարգի:}$$

ա) Ներքոգրյալ m-րդ կարգի($m \le n$) որոշիչները՝

$$\Delta_1 = h_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}; \ \cdots; \ \Delta_n = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} \cdots & h_{nn} \end{vmatrix}$$

որոշիչները անվանում են անկյունագծային մինորներ:

բ) m-րդ կարգի ($m \le n$) որոշիչները, որոնք ստացվում են $H(x_*)$ մատրիցի որոշիչից՝ ջնջելով նույն թվերով $(n - m)$ տողերը և $(n - m)$ սյունակները, կոչվում են հիմնական մինորներ:

Բավարար էքստրեմալ պայմանների և երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանների կատարումը ստուգելու համար օգտագործվում են երկու տարբերակ.

Առաջին տարբերակը կախված է անկյունային և հիմնական մինորների նշանից:

Թեորեմ 1. (Սիլվեստրի հայտանիշ). Որպեսզի հեսսիան մատրիցը լինի՝

- դրական որոշյալ $H(x^*) > 0$, իսկ x_*-ը լինի լոկալ մինիմումի կետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ անկյունագծային մինորները լինեն խիստ դրական՝

$$\Delta_1 > 0; \quad \Delta_2 > 0, \cdots, \Delta_n > 0: \tag{2.8}$$

- բացասական որոշյալ $H(x^*) < 0$, իսկ x_*-ը լինի լոկալ մաքսիմումի կետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ անկյունագծային մինորների նշանները լինեն խիստ փոփոխական, սկսած բացասական նշանից՝

$$\Delta_1 > 0; \quad \Delta_2 < 0; \quad \Delta_1 > 0; \cdots; \ (-1)^n \Delta_n > 0: \tag{2.9}$$

Թեորեմ 2. Երկրորդ կարգի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը. 1. Որպեսզի Հեսսեի մատրիցը $\mathrm{H}(x^*)$ լինի՝

- դրական կիսաորոշյալ ($H(x^*) \le 0$), իսկ x_*-ը կարող է լինել լոկալ մինիմումի կետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ բոլոր Հեսսիան մատրիցայի մինորները լինեն ոչ բացասական:
- բացասական կիսաորոշյալ ($H(x^*) \le 0$), իսկ x^*-ը լինի լոկալ մինիմումի կետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ բոլոր Հեսսիան մատրիցայի կենտ կարգի մինորները լինեն ոչ դրական:

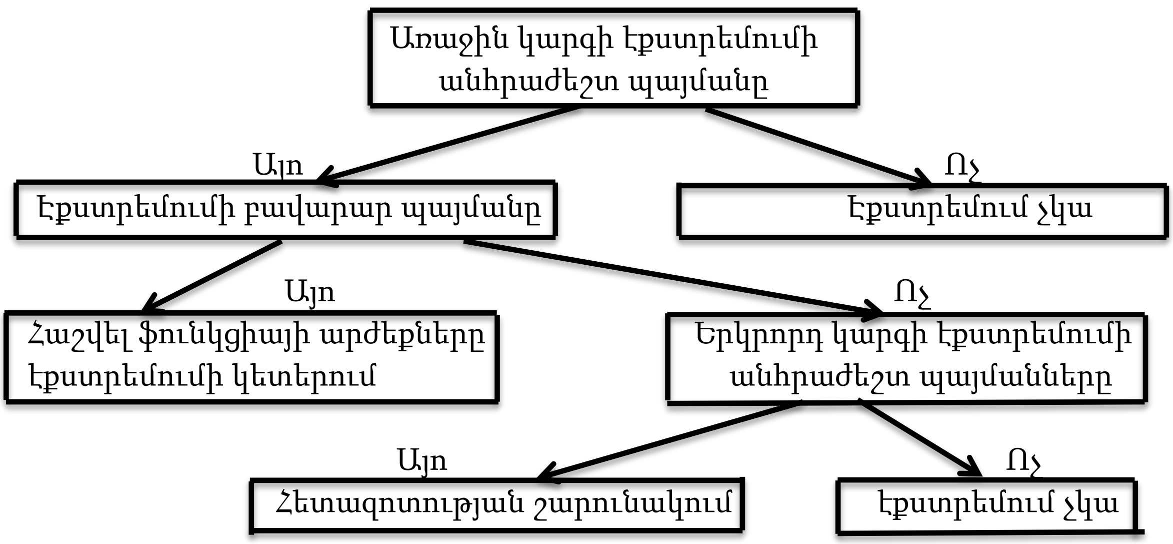
Երկրորդ տարբերակը կախված է Հեսսիան մատրիցայի սեփական արժեքներից:

Սահմանում 2.3. Հեսսիան ($n \rtimes n$) չափանի $H(x^*)$ մատրիցի սեփական արժեքները

$\lambda_i; i = 1; 2; \cdots; n$ որոշվում են որպես n-րդ կարգի հանրահաշվական հավասարման արմատներ՝

$$|H(x^*) - \lambda E| = \begin{vmatrix} h_{11} - \lambda & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} - \lambda & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0: \qquad (2.10)$$

Դիտողություն 2.1. Իրական սիմետրիկ Հեսսիան $H(x_*)$ մատրիցի ՝ $\lambda_i; i = 1; 2; \cdots; n$ սեփական արժեքները իրական են:



Նկ. 2.1

2.2. Օպտիմիզացիայի խնդիրների լուծման ալգորիթմը.

Քայլ 1. Գրել (2.3) ձևով էքստրեմումի առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանները գտնել x_* ստացիոնար կետերը, լուծելով n անհայտով ոչ գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը : Համակարգի թվային լուծման համար կարող են օգտագործվել պարզ կրկնման մեթոդները՝ Զեյդել, Նյուտոն:

Քայլ 2. Գտնված x_* ստացիոնար կետերում ստուգել բավարարի կատարումը, և եթե դրանք բավարարված չեն, այդ դեպքում երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանները՝ օգտագործելով երկու մեթոդներից մեկը.

Քայլ 3. Հաշվեք $f(x^*)$ արժեքները էքստրեմումի կետերում:

Նկարագրված ալգորիթմը ներկայացված է (Նկ. 2.1)-ում, որտեղ արտահայտված են գործողությունների հաջորդականությունը առաջին մեթոդի կիրառման ժամանակ համապատասխան էքստրեմումային պայմանների կատարման և չկատարման դեպքերում:

Երկրորդ կարգի ոչպայմանական էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանների ստուգման հայտանիշները ոչպայմանական էքստրեմումի որոնման խնդրում

Աղյուսակ 2.1

№ հ/հ	$\nabla f(x_*)$	$H(x_*)$	Պայմանների տեսակը	Առաջին տարբերակ	երկրորդ տարբերակ	Ստացիոնար x_* կետի տեսակը
1	0	> 0	էքստրեմումի բավարար պայման	$\Delta_i > 0$; $(i = 1; \cdots; n)$	$\lambda_i > 0$; $(i = 1; \cdots; n)$	լոկալ մինիմում
2	0	< 0	էքստրեմումի բավարար պայման	$(-1)^i \Delta_i > 0$; $(i = 1; \cdots; n)$	$\lambda_i < 0$; $(i = 1; \cdots; n)$	լոկալ մաքսիմում
3	0	≥ 0	2-րդ կարգի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայման	$H(x_*)$-ի մատրիցի որոշիչի գլխավոր մինորները ոչբացասական են	$\lambda_i \geq 0$; $(i = 1; \cdots; n)$	կարող է լինել լոկալ մինիմում, անհրաժեշտ է լրացուցիչ հետազոտում
4	0	$\leq$	2-րդ կարգի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայման	բոլոր գլխավոր մինորները զույգ համարներով ոչբացասական են, կենտ համարներով ոչդրական են	$\lambda_i \leq 0$; $(i = 1; \cdots; n)$	կարող է լինել լոկալ մաքսիմում, անհրաժեշտ է լրացուցիչ հետազոտում
5	0	=	2-րդ կարգի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայման	Հեսսիան մատրիցան բաղկացած է զրոյական տարրերից	$\lambda_i = 0$; $(i = 1; \cdots; n)$	պահանջվում է լրացուցիչ հետազոտում
6		$\gtrless 0$	2-րդ կարգի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայման	չի կատարվել 1-5 կետերի պայմանները	λ_i; $(i = 1; \cdots; n)$ տարբեր նշաններ	էքստրեմումներ չկան

Դիտողություններ 2.2.

ա) Հետազոտության շարունակությունը, որը պահանջվում է 2.1 աղյուսակում վերլուծված մի շարք դեպքերում, գործնական խնդիրներ լուծելիս, որպես կանոն, չի իրականացվում, բացառությամբ փոքր թվով մոդելային օրինակների:

բ) Եթե պահանջվում է որոշել գլոբալ էքստրեմումները, ապա դրանք գտնվում են ֆունկցիայի արժեքները լոկալ մինիմումի և մաքսիմումի կետերի համեմատելության արդյունքում՝ հաշվի առնելով ֆունկցիայի սահմանափակությունը R^n բազմության վրա:

գ) Մեկ փոփոխականի $f(x)$ ֆունկցիայի դեպքում, կարելի է ձրակերպել կանոն, որը կփոխարինի ալգորիթմի բ) կետին:

Եթե $f(x)$ ֆունկցիայի և իր ածանցյալները անընդհատ են, ապա x_* կհանդիսանա էքստրեմումի կետ այն և միայն այն դեպքում, երբ m-ը զույգ է, որտեղ m-րդ կարգի ածանցյալը x_* կետում հավասար չէ 0-ի: Եթե $f^{(m)}(x) > 0$, ապա x_* կետում լոկալ մինիմում է, իսկ եթե $f^{(m)}(x) < 0$, այդ դեպքում x_* կետում լոկալ մաքսիմում է:

Կենտ m-ի դեպքում x_* կետում էքստրեմում չկա:

դ) Հաճախ պրակտիկայում, հատկապես էքստրեմում գտնելու թվային մեթոդները կիրառելիս, պահանջվում է ստուգել, թե արդյոք բավարարվում են էքստրեմության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները որոշ կետերում:

Նման վերլուծությունը անհրաժեշտ է, քանի որ բազմաթիվ թվային մեթոդները հնարավորություն են տալիս գտնել միայն ստացիոնար կետը, որի տեսակը պետք է հստակեցվի:

Օրինակ 2.1. Գտնել $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ ֆունկցիայի էքստրեմումը R^2 բազմության վրա:

Լուծում. ա) Գրենք առաջին կարգի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները՝

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 2x_1 = 0; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 2x_2 = 0;$$

Վերոգրյալ համակարգը լուծելով, կստանանք $x^* = (0;0)^T$ ստացիոնար կետը:

բ) Ստուգենք բավարար էքստրեմալ պայմանների կատարումը՝

Առաջին տարբերակ. Հեսսիան մատրիցան կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$H(x^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}:$$

Քանի որ $\Delta_1 = 2 > 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$; այդ դեպքում x^*-ը լոկալ մինիմումի կետ է:

Երկրորդ տարբերակ. Գտնենք Հեսսիան մատրիցայի սեփական արժեքները ըստ (2.10) բանաձևի՝

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

Այստեղից կստանանք՝ $(2-\lambda)^2 = 0$, այսինքն՝ $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 >$: Քանի որ սեփական արժեքները դրական են, ապա x_*-ը լոկալ մինիմումի կետ է և $f(x)$ ֆունկցիան խիստ գոգավոր է R^2 բազմության վրա:

գ) հաշվարկենք ֆունկցիայի արժեքը գլոբալ նվազագույն կետում՝ $f(x^*) = 0$:

Օրինակ 2.2. Գտնել $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ նպատակային ֆունկցիայի էքստրեմումը R^2 բազմության վրա:

Լուծում. ա) Գրենք առաջին կարգի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները՝

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2: \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2;$$

որտեղից լուծելով համակարգը կստանանք $x^* = (0;0)^T$ ստացիոնար կետը:

բ) Ստուգենք բավարար էքստրեմալ պայմանների կատարումը՝

Հեսսիան մատրիցան կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$H(x^*) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}:$$

Քանի որ $\Delta_1 = 4 > 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 > 0$; այդ դեպքում x^*-ը լոկալ մինիմումի կետ է:

գ) հաշվարկենք ֆունկցիայի արժեքը գլոբալ մինիմումի կետում՝ $f(x_*) = 0$:

Օրինակ 2.3. Գտնել $f(x) = (1 - x_1)^2 + 10(x_2 - x_1^2)^2$ նպատակային ֆունկցիայի էքստրեմումը R^2 բազմության վրա:

Լուծում. ա) Գրենք առաջին կարգի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները՝

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = -2(1 - x_1) - 40x_1(x_2 - x_1^2): \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 20(x_2 - x_1^2);$$

որտեղից լուծելով համակարգը կստանանք $x_* = (1; 1)^T$ ստացիոնար կետը:

բ) Ստուգենք բավարար էքստրեմալ պայմանների կատարումը՝

Հեսսիան մատրիցան կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$H(x^*) = \begin{pmatrix} 82 & -40 \\ -40 & 20 \end{pmatrix}:$$

Քանի որ $\Delta_1 = 82 > 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 82 & -40 \\ -40 & 20 \end{vmatrix} = 40 > 0$; ապա x^*-ը լոկալ մինիմումի կետ է:

գ) հաշվարկենք ֆունկցիայի արժեքը զլոբալ նվազագույն կետում՝ $f(x^*) = 0$:

Օրինակ 2.4. Գտնել

$$f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_1 + x_1x_2 + 2x_3$$

ֆունկցիայի էքստրեմումը R^3 բազմության վրա:

Լուծում. ա) Գրենք առաջին կարգի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները՝

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = -2x_1 - 1 + x_2: \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -2x_2 + x_1; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = -2x_3 + 2;$$

որտեղից լուծելով համակարգը կստանանք $x_* = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 1\right)^T$ ստացիոնար կետը

բ) Ստուգենք բավարար էքստրեմալ պայմանների կատարումը՝

Առաջին տարբերակ. Հեսսիան մատրիցան կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$H(x^*) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}:$$

Քանի որ $\Delta_1 = -2 < 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6$ և հիմնական մինորների նշանները հաջորդաբար փոխվում է, ապա x_*-ը լոկալ մաքսիմումի կետ է:

Երկրորդ տարբերակ. Գտնենք Հեսսիան մատրիցայի սեփական արժեքները ըստ (2.10) բանաձևի՝

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

Այստեղից կստանանք՝

$$(2 + \lambda)[(2 + \lambda)^2 - 1] = 0;$$

որի արմատները կլինեն՝ $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = -3$, որոնք բոլորն էլ բացասական են, այսինքն x_*-ը լոկալ մաքսիմումի կետ է:

գ) հաշվարկենք ֆունկցիայի արժեքը զլոբալ առավելագույն կետում՝ $f(x_*) = \frac{4}{3}$:

Օրինակ 2.5. Գտնել

$$f(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3 - 3x_1 + 6x_2 + 2;$$

ֆունկցիայի էքստրեմումը R^3 բազմության վրա:

Լուծում. ա) Գրենք առաջին կարգի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները՝

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 3: \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -2x_2 + x_3 + 6; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = 2x_3 + x_2;$$

որտեղից լուծելով համակարգը կստանանք

$$x_1^* = (1; -4; 2)^T; \ \ x_2^* = (-1; -4; 2)^T$$

ստացիոնար կետերը:

բ) Ստուգենք երկրորդ կարգի անհրաժեշտ և բավարար էքստրեմալ պայմանների կատարումը՝

Առաջին տարբերակ. Հեսսիան մատրիցան $x_{*1} = (1; -4; 2)^T$-ի դեպքում կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$H(x_1^*) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}:$$

Քանի որ $\Delta_1 = 6 > 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$; $\Delta_3 = 18 > 0$, ապա x_{*1}-ը հանդիսանում է լոկալ մինիմումի կետ:

Հեսսիան մատրիցան $x_{*1} = (1; -4; 2)^T$-ի դեպքում կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$H(x_2^*) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}:$$

Քանի որ $\Delta_1 = -6 < 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0$; $\Delta_3 = -18 < 0$, ապա x_{*2} կետի համար էքստրեմումի բավարար պայմանը չի կատարվում (Նայել Աղյուսակ 2.1):

Երկրորդ տարբերակ. Փնտրել Հեսսիան մատրիցայի սեփական արժեքները՝

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-6-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] = 0:$$

Այստեղից կստանանք՝ $\lambda_1 = -6 < 0$; $\lambda_2 = 1 > 0$; $\lambda_2 = 3 > 0$, այսինքն սեփական արժեքները ունեն տարբեր նշաններ և x_{*2} կետում էքստրեմումներ չկան:

գ) հաշվարկենք ֆունկցիայի արժեքը գլոբալ առավելագույն կետում՝ $f(x_{*1}) = -12$:

Օրինակ 2.6. Գտնել

$$f(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2;$$

ֆունկցիայի էքստրեմումը R^3 բազմության վրա:

Լուծում. ա) Գրենք առաջին կարգի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները՝

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = -2x_1 + 2x_2 = 0: \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -2x_2 + 2x_1; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = -8x_3 = 0;$$

Վերոգրյալ համակարգի լուծման ընթացքում կստանանք անվերջ բազմության ստացիոնար կետեր՝ $x_{*1} = x_{*2}$; $x_{*3} = 0$:

բ) Ստուգենք երկրորդ կարգի անհրաժեշտ և բավարար էքստրեմալ պայմանների կատարումը՝

Առաջին տարբերակ. Հեսսիան մատրիցան կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$H(x_{*2}) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}:$$

Քանի որ $\Delta_1 = -2 < 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$; $\Delta_3 = 0$, այդ դեպքում էքստրեմումի բավարար պայմանները չի կատարվում (Տես Աղյուսակ 2.1):

(Սխեմա 2.1)-ի համաձայն ստուգել երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանները:

Անալոգ ձևով հետազոտենք այնպես, ինչպես օրինակ 2.5-ում:

Առաջին կարգի հիմնական մինորները ստացվում են 3-ից՝ ջնջելով նույն թվերով երկու տողեր և սյունակներ՝ -2, -2, -8: Երկրորդ կարգի հիմնական փոքրերը ստացվում են 3-ից՝ ջնջելով մեկ տող և սյունակ նույն թվով. 16, 16, 0: Երրորդ կարգի հիմնական փոքրերը նույնն է, ինչ 3 = 0: Քանի որ բոլոր զույգ կարգի հիմնական մինորերը ոչ բացասական են: , և բոլոր կենտ կարգի մինորները ոչդրական են, ապա կարող ենք եզրակացնել, որ ուսումնասիրված ստացիոնար կետերում կարող է լինել մակսիմում և պահանջվում է հետագա հետազոտություն (տող 4՝ աղյուսակ 2.1-ում):

Երկրորդ տարբերակ. Փնտրել Հեսսիան մատրիցայի սեփական արժեքները՝

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -8-\lambda \end{vmatrix} = (-8-\lambda)[(2+\lambda)^2 - 4] = 0;$$

այստեղից կստանանք, որ $\lambda_1 = -8 < 0$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_2 = -4 < 0$ սեփական արժեքները ոչդրական են, հետևաբար այդ ստացիոնար կետերում կարող լինել մաքսիմում (Տես աղյուսակ 2.1 տող 4):

գ) հաշվենք ֆունկցիայի արժեքը ստացիոնար կետերում:

Հետազոտվող ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$f(x) = -(x_1 - x_2)^2 - 4x_3^2;$$

Որոնված ստացիոնար կետում՝

$$x^* = (x_1 = x_2; x_2 = x_1; 0)^T \; f(x_*) = 0:$$

Ելնելով $f(x)$ ֆունկցիայի կառուցվածքից՝ կարող ենք եզրակացնել, որ $\forall\, x \in R^3$ -ի համար ճիշտ է՝ $f(x) \le f(x^*) = 0$ արտահայտությունը:

Հիմնվելով 1.7 սահմանման վրա՝ ֆունկցիան այն կետերի բազմության վրա, որոնք բավարարում են $x_1^* = x_2^*$; $x_3^* = 0$ պայմանին, հասնում են գլոբալ մաքսիմումին:

Օրինակ 2.7. Գտնել

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

ֆունկցիայի էքստրեմումը R բազմության վրա:

Լուծում. ա) Գրենք առաջին կարգի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները՝

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 - 4x + 1 = 0;$$

Լուծելով վերոգրյալ հավասարումը, կստանանք՝ $x_1^* = \frac{1}{3}$; $x_2^* = 1$:

բ) Ստուգենք բավարար էքստրեմալ պայմանների կատարումը: Քանի որ $n = 1$, ապա Հեսսիան մատրիցան կազմված է մեկ էլեմենտից՝

$$h_{11} = \frac{d^2f(x)}{dx^2} = 6x - 4;$$

և կսանանք, որ $x_1^* = \frac{1}{3}$ կետում $\Delta_1 = -2 < 0$, իսկ $x_2^* = 1$ կետում $\Delta_1 = 2 > 0$: Հետևաբար x_1^* կետում լոկալ մաքսիմում է, իսկ x_{*2} -ում լոկալ մինիմում (Աղյուսակ 2.1 տող 1 և 2):

գ) հաշվարկենք ֆունկցիայի արժեքը էքտրեմում կետերում՝

$$f(x_1^*) = \frac{31}{27}; \quad f(x_1^*) = 1;$$

Օրինակ 2.7. Գտնել

$$f(x) = (x - 9)^4$$

ֆունկցիայի էքստրեմումը R բազմության վրա:

Լուծում . ա) Գրենք առաջին կարգի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները՝

$$\frac{df(x)}{dx} = 4(x - 9)^3 = 0;$$

Լուծելով վերոգրյալ հավասարումը, կստանանք՝ $x^* = 9$:

բ) Ստուգենք բավարար էքստրեմալ պայմանների կատարումը հաշվի առնելով դիտողություն 2.2-ի (գ) կետը.

Առաջին ոչզրոյական ածանցյալը ստացվում է, երբ $m = 4$; $f^{(4)}(x) = 4! > 0$: Քանի որ m-ը զույգ է, ապա $f(x)$-ը $x^* = 9$ կետում հասնում է լոկալ մինիմումի՝ $f(9) = 0$:

Օրինակ 2.7. Գտնել

$$f(x) = 5x^6 - 36x^5 + \frac{165}{2}x^4 - 60x^3 + 36$$

ֆունկցիայի էքստրեմումը R բազմության վրա:

Լուծում . ա) Գրենք առաջին կարգի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները՝

$$\frac{df(x)}{dx} = 30x^5 - 180x^4 + 330x^3 - 180x^2 = 30x^2(x-1)(x-2)(x-3) = 0;$$

Լուծելով վերոգրյալ հավասարումը, կստանանք՝ $x_{*1} = 0$; $x_{*2} = 1$; $x_{*2} = 2$; $x_{*3} = 3$;

բ) Ստուգենք բավարար էքստրեմալ պայմանների կատարումը՝

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 150x^4 - 720x^3 + 990x^2 - 360x;$$

$$f'(x_1^*) = 0; \;\; f'(x_2^*) = 60 > 0; \;\; f'(x_3^*) = -120 < 0; \;\; f'(x_4^*) = 540 > 0:$$

այսինքն x_1^* և x_4^* լոկալ մինիմումի կետեր են, x_3^*-ը լոկալ մաքսիմումի կետ է, իսկ x_1^* կետում բավարար պայմանը չի կատարվում (Աղյուսակ. 2.1 տող 5)::

Հետևաբար պետք է հաշվել երրորդ կարգի ածանցյալը՝

$$f^{(3)}(x_1^*) = (600x^4 - 2160x^3 + 1980x^2 - 360)_{x\sqrt{=}x_1^*=0} = -360;$$

Քանի որ այս ածանցյալը զրոյական չէ և ունի կենտ կարգ, x_{*1} կետում էքստրեմում չկա (տես Դիտողություններ 2.2-ի գ)-րդ կետը):

Առաջադրանքներ

1. Գտնել $f(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1$ ֆունկցիայի էքստրեմումները:
Պատասխան. $x^* = \left(-\frac{3}{16};\ -\frac{1}{8}\right)^T$ կետում լոկալ և միաժամանակ գլոբալ մինիմումի կետ:

2. Ստուգել, արդյոք $x^* = (0;\ 0; 0)^T$ կետը հանդիսանում է

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3:$$

Պատասխան. չեն հանդիսանում, քանի որ դրանում երկրորդ կարգի էքստրեմումի համար անհրաժեշտ պայմանները չեն կատարվում:

3. Գտնել

$$f(x) = 2x_1^3 + 4x_1x_2^2 - 10x_1x_2 + x_2^2$$

ֆունկցիայի ոչպայմանական էքստրեմումները:
Պատասխան. $x_* = (1; 1)^T$կետում լոկալ մինիմում է; $x_* = (0; 0)^T$ կետում էքստրեմում չկա, քանի որ երկրորդ կարգի էքստրեմումի համար անհրաժեշտ պայմանները բավարարված չեն:

4. Գտնել

$$f(x) = x_1^3 + x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2 - 4$$

ֆունկցիայի ոչպայմանական էքստրեմումները:
Պատասխան. $x_* = \left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right)^T$կետում լոկալ մինիմում է; $x_* = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)^T$ կետում էքստրեմում չկա, քանի որ երկրորդ կարգի էքստրեմումի համար անհրաժեշտ պայմանները բավարարված չեն:

5. Գտնել

$$f(x) = (x_1 - 1)^4 + (x_2 - 3)^2$$

ֆունկցիայի ոչպայմանական էքստրեմումները:
Պատասխան. $x_* = (1; 3)^T$կետում բավարարված է երկրորդ կարգի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը, այսինքն՝ $H(x_*) \geq 0$: Քանի որ $\forall\ x \in R^2$ համար դա ճիշտ է՝ $f(x_*)\ =\ 0\ \leq\ f\ (x)$, ապա ըստ 1.7 սահմանման x_* կետը գլոբալ մինիմումի կետ է:

6. Գտնել

$$f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

ֆունկցիայի ոչպայմանական էքստրեմումները:
Պատասխան. $x_* = (1;1)^T$կետում լոկալ մինիմում է:

7. Ստուգել արդյոք $x_* = (1;1)^T$ կետը հանդիսանում է

$$f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 10(x_2 - 1)^2$$

ֆունկցիայի ոչպայմանական մինիմումի կետ:
Պատասխան. հանդիսանում է:

8. Գտնել

$$f(x) = -x_1^2 x_2 - x_2^2 x_1 + 3x_1 x_2$$

ֆունկցիայի ոչպայմանական էքստրեմումները:
Պատասխան. $x_* = (1;1)^T$կետում լոկալ մաքսիմում է, $x_* = (0;0)^T$ էքստրեմում չկա:
9. Ստուգել, որ $x_* = (1;1)^T;\ x_{**} = (0;0)^T; x_{***} = (-1;-1)^T$ կետերը հանդիսանում են

$$f(x) = x_1^4 + x_2^4 x_1 - (x_1 + x_2)^2$$

ֆունկցիայի ոչպայմանական մինիմումի կետեր:
Պատասխան. x_* կետում չկա մինիմում, x_{**}-ը և x_{***}-ը լոկալ մինիմումի կետեր են:

10. Ստուգել, արդյոք $x_* = (2;0;1)^T$ և $x_{**} = (0;0;0)^T$; կետերը հանդիսանում են

$$f(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3$$

ֆունկցիայի էքստրեմումի կետեր:
Պատասխան. $x_{**} = (0;0;0)^T$ կետում լոկալ և միաժամանակ գլոբալ մինիմում է, քանի որ $H(x) > 0$ և, հետևաբար, ֆունկցիան խիստ ուռուցիկ է և ուռուցիկ: $x_* = (2;0;1)^T$ կետում էքստրեմում չկա, որովհետև առաջին կարգի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները դրանում բավարարված չեն:

§ 3. Պայմանական էքստրեմումների անհրաժեշտ և բավարար պայմանները

3.1. Խնդրի դրվածքը և հիմնական սահմանումները. Խնդրի ընդհանուր դրվածքը և հիմնական դրույթները շարադրված են § 1-ում:

Այստեղ դիտարկելու ենք դեպքեր, երբ X իրագործելի լուծումների բազմությունը տրված է հավասարություններով և անհավասարություններով, այսինքն՝

$$f(x_*) = \min_{x \in X} f(x); \quad f(x_*) = \max_{x \in X} f(x); \tag{3.1}$$

որտեղ՝

$$X = \left\{ x \left| \begin{matrix} g_j(x) = 0; j = 1;2;\cdots;m, \quad m < n \\ g_j(x) \le 0; j = m+1; m+2; \cdots; m \end{matrix} \right. \right\}; m, p \in N,$$

$f(x)$-ը նպատակային ֆունկցիան է, իսկ $g_j(x) = 0; j = 1;2;\cdots p$ այն ֆունկցիաներն են, որոնցով տրվում է սահմանափակումներ:

Մենք կդիտարկենք $f(x);\ g_j(x)$ ֆունկցիաները երկու անգամ անընդհատ ածանցելի

R^n բազմության վրա, իսկ $g_j(x)$ ֆունկցիաներով տրվում են սահմանափակումները, որոնք հակիրճ կոչվում են սահմանափակումներ:

Սահմանում 3.1. Տրված

$$L(x;\ \lambda_0;\lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, g_j(x); \tag{3.2}$$

ֆունկցիան անվանում են **Լանգրանժի ընդհանրացված ֆունկցիա,** $\lambda_k(k = \overline{0;1;p})$-երը Լանգրանժի բազմապատկիչներ:

Լանգրանժի դասական ֆունկցիան տրվում է հետևյալ տեսքով՝

$$L(x;\ \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, g_j(x); \tag{3.3}$$

Սահմանում 3.2. Լանգրանժի ընդհանրացված (դասական) ֆունկցիայի գրադիենտ ըստ x-ի անվանում են վեկտոր-սյունը, որը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\nabla_x L(x;\ \lambda_0;\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0;\lambda)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0;\lambda)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0;\lambda)}{\partial x_n} \end{pmatrix}; \quad \left(\nabla_x L(x;\ \lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L(x;\lambda)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial L(x;\lambda)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(x;\lambda)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \right) \tag{3.4}$$

Սահմանում 3.3. Լանգրանժի ընդհանրացված (դասական) ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցյալ են անվանում հետևյալ ֆունկցիան՝

$$d^2 L(x;\ \lambda_0;\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x;\ \lambda_0;\lambda)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j; \tag{3.5}$$

դասականի դեպքում՝

$$d^2 L(x;\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x;\lambda)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j; \tag{3.5դ}$$

Սահմանում 3.4. $g_j(x)$ սահմանափակում ֆունկցիայի առաջին դիֆերեցյալ են անվանում ՝

$$d g_j(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} dx_i; \tag{3.6}$$

արտահայտությունը:

Օրինակ 3.1. Գրել (3.2)–(3.6) բանաձևերի կիրառմամբ որոնման խնդրի դեպքում

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումները $X = \{x|\ g_1(x)\}$ բազմության վրա, տրված

$g_1(x) = x_2^2 - x_1 + 3 = 0$ սահմանափակման դեպքում:

Լուծում. Լանգրանժի ընդհանրացված (դասական) ֆունկցիան այս դեպքում կլինի՝

$$L(x;\ \lambda_0; \lambda_1) = \lambda_0(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_1(x_2^2 - x_1 + 3);$$

և դասականը կլինի

$$L(x; \lambda_1) = \lambda_0(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_1(x_2^2 - x_1 + 3);$$

Լանգրանժի ֆունկցիայի գրադիետը կլինի՝

$$\nabla_x L(x;\ \lambda_0; \lambda_1) = (2\lambda_0 x_1 - \lambda_1;\ 2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2)^T$$

$$\nabla_x L(x; \lambda_1) = (2x_1 - \lambda_1;\ 2x_2 + 2\lambda_1 x_2)^T:$$

Լանգրանժի ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցյալը կլինի՝

$$d^2 L(x;\ \lambda_0; \lambda_1) = 2\lambda_0 dx_1^2 + (2\lambda_0 + 2\lambda_1) dx_2^2;$$

$$d^2 L(x; \lambda_1) = 2dx_1^2 + (2 + 2\lambda_1) dx_2^2;$$

Սահմանափակման առաջին դիֆերենցյալը կլինի՝ $dg_1(x) = -dx_1 + 2dx_2$:

Օրինակ 3.2. Գրել (3.2)–(3.6) բանաձևերի կիրառմամբ որոնման խնդրի դեպքում $f(x) = x_1^2$ -ի պայմանական էքստրեմումները $X = \{x|\ x_1 + x_2 = 1; x_1 > 0; x_1 > 0\}$ բազմության վրա:

Լուծում. Գրենք սահմանափակումները կանոնական տեսքով՝

$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 1;\ g_2(x) = -x_1 \leq 0;\ g_3(x) = -x_2 \leq 0:$$

Լանգրանժի ֆունկցիաները կունենան հետևյալ տեսքերը՝

$$L(x;\ \lambda_0;\ \lambda) = \lambda_0 x_1^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 1) + \lambda_2(-x_2) + \lambda_3(-x_2);$$

$$L(x;\ \lambda) = x_1^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 1) + \lambda_2(-x_2) + \lambda_3(-x_2);$$

Լանգրանժի ֆունկցիայի գրադիենտը՝

$$\nabla_x L(x;\ \lambda_0; \lambda) = (2\lambda_0 x_1 + \lambda_1 - \lambda_2;\ \lambda_1 - \lambda_3)^T;$$

$$\nabla_x L(x; \lambda) = (2x_1 + \lambda_1 - \lambda_2;\ \lambda_1 - \lambda_3)^T:$$

Լանգրանժի ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցյալը՝

$$d^2 L(x;\ \lambda_0; \lambda) = 2\lambda_0 dx_1^2; \quad (d^2 L(x; \lambda) = 2dx_1^2);$$

Սահմանափակման ֆունկցիայի առաջին կարգի դիֆերենցյալը՝

$$g_1(x) = dx_1 + dx_2; \quad g_2(x) = -dx_1; \quad g_3(x) = -dx_2:$$

Սահմանում 3.5. $g_j(x) \le 0$ սահմանափակումը անվանում են ակտիվ, եթե x^* կետում $g_j(x^*) = 0$, իսկ եթե $g_j(x^*) < 0$-ից անվանում են պասսիվ:

Օրինակ 3.3. Դասակարգել $g_j(x^*) = x_1 + x_2 - 2 \le 0$ սահմանափակումը $x_1^* = (1;1)^T$ և $x_2^* = (0;0)^T$ կետերում:

Լուծում. $x_1^* = (1;1)^T$ կետում ճշգրիտ $g_j(x_*) = 0$, այսինքն անհավասարությունը վերածվում է հավասարության, հետևաբար սահմանափակումը ակտիվ է, իսկ մյուս $x_2^* = (0;0)^T$ կետում $g_j(x_2^*) = -2 < 0$ և դրա համար այդ կետում սահմանափակումը պասսիվ է:

Սահմանում 3.6. $g_1(x)$; $g_2(x)$; $\cdots$; $g_n(x)$ սահմանափակումների գրադիենտները x_* կետում հանդիսանում են գծորեն անկախ, եթե

$$\lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(x) = 0$$

հավասարությունը տեղի ունի միայն $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$ դեպքում: Այստեղ 0 նշանը աջ մասում նշանակում է $(n \rtimes 1)$ չափանի մատրիցա-սյուն:

Եթե կան λ_1; $\lambda_2; \cdots; \lambda_m$ թվեր, որոնք միաժամանակ հավասար չեն զրոյի, բայց նրանց համար գործում է հավասարությունը, ապա գրադիենտները գծորեն կախված են և այս դեպքում դրանցից մեկը մյուսների գծային համակցությունն է:

Մեկ վեկտոր g_1-ն նույնպես ձևավորում է վեկտորների համակարգ՝

$g_1(x_*) \neq 0$-ի դեպքում կլինի գծորեն անկախ և գծորեն կախված $g_1(x^*) = 0$-ի համար:

Զրո վեկտոր պարունակող վեկտորների համակարգը միշտ գծորեն կախված է:

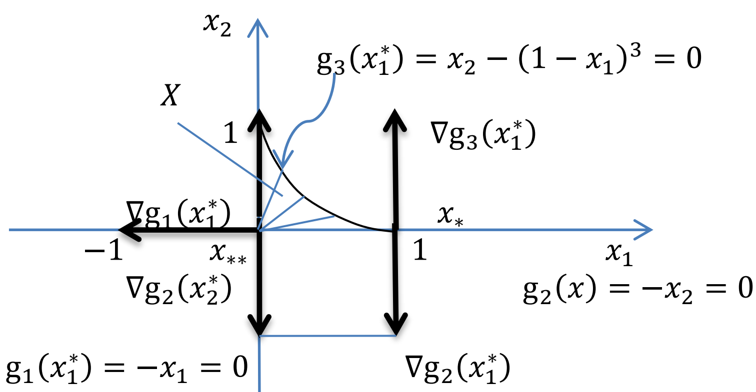
Եթե $\mathrm{rang}\, A = \mathrm{rang}\big(\nabla g_1(x^*); \ \nabla g_2(x^*) ; \cdots; \nabla g_n(x^*)\big) = m$, այդ դեպքում վեկտորների համակարգը գծորեն անկախ է, իսկ $\mathrm{rang}\, A < m$ դեպքում՝ գծորեն կախված է:

Օրինակ 3.4. Հետազոտել սահմանափակումների ակտիվ գրադիենտները՝

$$x_1^* = (1;0)^T; \quad x_2^* = (0;0)^T$$

կետերում հետևյալ սահմանափակումների համար՝

Լուծում. Գտնենք գրադիենտները՝



Նկ. 3.1

$$\nabla g_1(x_1^*) = (-1; 0)^T; \quad \nabla g_2(x_1^*) = (0; -1)^T; \quad \nabla g_3(x_1^*) = (3(1-x_1)^2; 1)^T;$$

$x_1^* = (1; 0)^T$ կետում ակտիվ են 2-րդ, 3-րդ սահմանափակումները՝ $g_2(x_1^*) = g_3(x_1^*) = 0$ $\nabla g_2(x_1^*) = (0; -1)^T$; $\nabla g_3(x_1^*) = (0; 1)^T$: Քանի որ rang $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 < 2$, այդ դեպքում սահմանափակումների երրկրորդ և երրորդ գրադիենտները գծորեն կախված են: Իրականում $\lambda_2(0; -1)^T + \lambda_3(0; 1)^T = (0; 0)^T$, օրինակ $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$: $x_2^* = (0; 0)^T$ կետում ակտիվ են 1-ին և 2-րդ սահմանափակումները՝

$$g_1(x_2^*) = g_3(x_2^*) = 0; \nabla g_1(x_1^*) = (-1; 0)^T; \nabla g_2(x_1^*) = (0; -1)^T;$$

քանի որ rang $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 = m$, այդ դեպքում գրադիենտները գծորեն անկախ են:

3.2. Պայմանական էքստրեմումը հավասարության տիպի սահմանափակումների ներքո. Խնդրի դրվածքը. Տրված են կրկնակի դիֆերենցելի անընդհատ նպատակային ֆունկցիաներ

$$f(x) = f(x_1;\ x_2; \cdots; x_n)$$

և սահմանափակումների ֆունկցիաներ

$$g_j(x) = g_j(x_1;\ x_2; \cdots; x_n) = 0; \quad (j = 1; 2; \cdots; m);$$

որոնք որոշում են թույլատրելի լուծումների բազմություն X-ի վրա:

Պահանջվում է հետազոտել $f(x)$ ֆունկցիաների էքստրեմումները, այսինքն որոնել $x^* \in X$ կետերի լոկալ մաքիմումները և մինիմումները X բազմության վրա՝

$$f(x^*) = \max_{x \in X} f(x); \quad f(x^*) = \min_{x \in X} f(x); \tag{3.7}$$

որտեղ՝

$$X = \{x |\ g_j(x) = g_j(x_1;\ x_2; \cdots; x_n) = 0; \ (j = 1; 2; \cdots; m); m < n\}:$$

Խնդրի լուծման ռազմավարությունը. Լոկալ էքստրեմումների x_* կետերը որոնվում են՝ օգտագործելով առաջին և երկրորդ կարգի անհրաժեշտ ու բավարար, մինիմալ և մաքսիմալ պայմանները հավասարության տեսակի սահմանափակումների ներքո (պայմանների կարգը որոշվում է օգտագործվող ածանցյալների հերթականությամբ): Ֆունկցիայի $f(x^*)$ արժեքները հաշվարկվում են լոկալ էքստրեմումի հայտնաբերված կետերում:

Հայտանիշ 3.1 (անհրաժեշտ պայմաններ առաջին կարգի էքստրեմումի համար): Թող x_* լինի խնդրի լոկալ էքստրեմումի կետ (3.7): Այդ դեպքում կգտնվեն

$$\lambda_{*1};\ \lambda_{*2};\ \cdots;\ \lambda_{*n}$$

թվեր, որոնք միաժամանակ հավասար չեն զրոյի և այնպես, որ բավարարվեն հետևյալ պայմանները.

- Լագրանժի ընդհանրացված ֆունկցիայի կայունության պայմանը x-ում.

$$\frac{\partial L(x^*\ ;\ \lambda_0^*;\ \lambda^*)}{\partial x_i} = 0; \ (i = 1; 2; \cdots; n); \tag{3.8ա}$$

- լուծման թույլատրելիության պայմանը.

$$\mathrm{g}_j(x^*) = 0; \ \ (j = 1; 2; \cdots; m); \tag{3.8բ}$$

Եթե այս դեպքում $\nabla \mathrm{g}_1(x^*)$; $\nabla \mathrm{g}_2(x^*)$; $\cdots; \nabla \mathrm{g}_m(x^*)$ գրադիենտները x_* կետում գծորեն անկախ են (կատարվում է ռեգուլյարության պայմանը), ապա $\lambda_0^* \neq 0$:

Դիտողություն 3.1.

1. (3.8ա) պայմանը կարելի է գրել վեկտորական տեսքով՝ $\nabla_x L(\mathrm{x}^*; \lambda_0^*; \lambda^*) = 0$:

2. (3.8)-ը պարունակում է $n+m$ հավասարումներ $n+m+1$ անհայտներով՝ λ_{*0}; $\lambda^* = (\lambda_{*1}; \lambda_{*2}; \cdots; \lambda_{*m})^T$; $\mathrm{x}^* = (x_1^*; x_2^*; \cdots; x_n^*)^T$: x^*կետերը, որոնք բավարարում են համակարգին որոշ λ_0^*; λ^*-երի դեպքում, անվանվում են պայմանական-ստացիոնար կետեր:

3. Խնդիրներ լուծելիս ռեգուլյարության պայմանը ստուգելը դժվար է, քանի որ x_* կետը նախապես հայտնի չէ: Հետևաբար, որպես կանոն, դիտարկվում է երկու դեպք՝

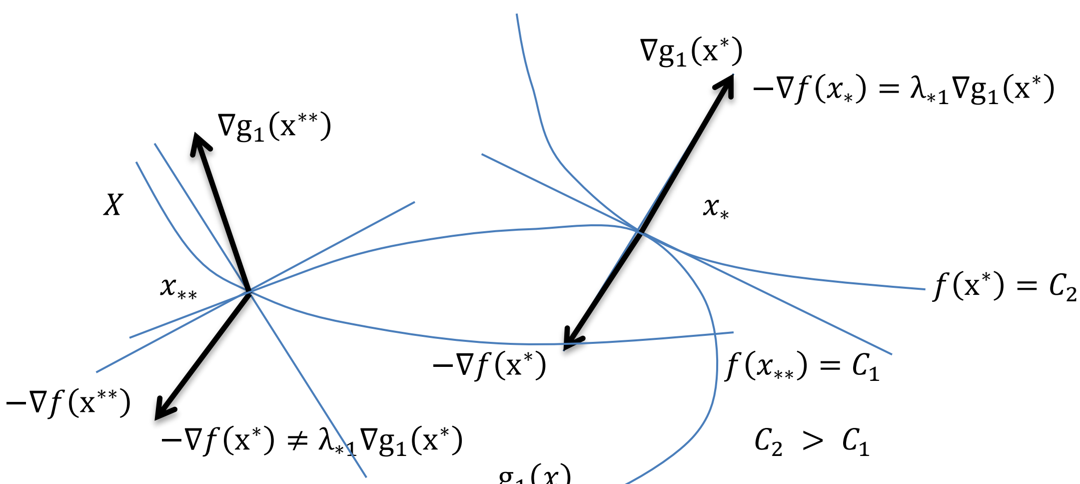
$$\lambda_0^* = 0 \ \ \text{և} \ \ \lambda_0^* \neq 0:$$

Եթե $\lambda_0^* \neq 0$, ապա (3.8ա) համակարգում ընդունում են $\lambda_0^* = 1$, որը համարժեք է (3.8ա) հավասարումների համակարգը բաժանել λ_0^*-ի վրա և այնուհետև փոխարինել $\frac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$-ը λ_j^*-ով: Այս դեպքում Լագրանժի ընդհանրացված $L(x_*; \lambda_*)$ ֆունկցիան դառնում է դասական, իսկ (3.8ա) համակարգը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{\partial L(\mathrm{x}^*; \ \lambda^*)}{\partial x_i} = 0; \ (i = 1; 2; \cdots; n); \tag{3.9ա}$$

$$\mathrm{g}_j(\mathrm{x}^*) = 0; \ (j = 1; 2; \cdots; m); \tag{3.9բ}$$

Այստեղ հավասարումների քանակը հավասար է անհայտների քանակին:



Նկ. 3.2

4. (3.9) համակարգը արտացոլում է այն փաստը, որ x^* կանոնավոր էքստրեմալ

կետում նպատակային $f(x)$ ֆունկցիայի հակագրադիենտը $\nabla g_j(x)$ սահմանափակման գրադիենտների գծային համակցություն է: Իրոք, հաշվի առնելով (3.3) պայմանը (3.9ա) կարող է վերաշարադրվել հետևյալ ձևով՝

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_{*j}\, g_j(x^*) = 0;$$

Պայմանական էքստրեմումի (մաքսիմումի) x^* կետը նպատակային ֆունկցիայի մակարդակի գծի և սահմանափակումը նկարագրող կորի շփման կետն է (նկ. 3.2): x^{**}կետում հնարավոր է շարժվել սահմանափակման երկայնքով, կապված $f(x)$-ի աճման ուղղությամբ:

5. Էքստրեմումի կետը, որը բավարարում է համակարգին (3.8) $\lambda^* \neq 0$-ի դեպքում, կոչվում է կանոնավոր, իսկ$\lambda^* = 0$ համար՝ ռեգուլյար: $\lambda_* = 0$ դեպքն արտացոլում է սահմանափակումների դեգեներացիան: Այս դեպքում նպատակային ֆունկցիա պարունակող տերմինը անհետանում է ընդհանրացված Լագրանժի ֆունկցիայում, իսկ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմաններում նպատակային $f(x)$-ի գրադիենտով ներկայացված տեղեկատվությունը չի օգտագործվում:

6. Լուծման թույլատրելիության պայմանը, որը խնդրի (3.7) ձևակերպման հետևանք է, ներառված է (3.8), (3.9)-ում լուծման ալգորիթմը ձևակերպելու համար:

Հայտանիշ 3.2 (անհրաժեշտ պայմաններ երկրորդ կարգի էքստրեմումի համար). Թող x_* -ը լինի մինիմումի (մաքսիմումի) ռեգուլյար կետ (3.7) խնդրում և համակարգ (3.9)-ը ունենա $(x_*; \lambda_*)$ լուծումը: Այդ դեպքում $(x_*; \lambda_*)$-ում հաշվարկված դասական $L(x_*; \lambda_*)$ Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ դիֆերենցիալը ոչ բացասական է (ոչ դրական)՝

$$d^2L(x^*;\ \lambda^*) \geq 0; \quad (d^2L(x^*;\ \lambda^*) \leq 0) \tag{3.11}$$

բոլոր $dx \in R^n$ այնպիսին, որ՝

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i}\, d\,x_i = 0;\ (j = 1; 2; \cdots; m): \tag{3.12}$$

Հայտանիշ 3.3. (բավարար պայմաններ էքստրեմումի համար): Դիցուք տրված է $(x_*; \lambda_*)$-ը, որը բավարարում է (3.9) համակարգին: Եթե այդ կետում $d^2L(x^*;\ \lambda^*) > 0$-ից $(d^2L(x^*;\ \lambda^*) < 0)$բոլոր ոչ զրոյական $dx \in R^n$-ի համար այնպես, որ

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i}\, d\,x_i = 0;\ (j = 1; 2; \cdots; m)$$

և x_*-ը հանդիսանում է (3.7) խնդրի լոկալ մինիմումը (մաքսիմումը):

Դիտողություն 3.2. Երկրորդ կարգի էքստրեմումի համար բավարար և անհրաժեշտ պայմանները ստուգվում են պայմանականորեն լոկալ կետերում, որոնք բավարարում են (3.8) համակարգին $\lambda^* \neq 0$ կամ համակարգին (3.9), քանի որ պրակտիկայում շատ անվերապահորեն հետաքրքիր է այն դեպքը, երբ Լագրանժի $L(x^*;\ \lambda^*)$ ընդհանրացված ֆունկցիան պարունակում է $f(x)$ ֆունկցիա, որի էքստրեմումը որոնվում է:

Խնդրի լուծման ալգորիթմը (ռազմավարությունը)

Քայլ 1. Կազմել ընդհանրացված Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x\,;\,\lambda_0;\lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, g_j(x)$$

Քայլ 2. Լուծել համակարգը՝

ա) $\dfrac{\partial L(x^*\,;\,\lambda_0^*;\,\lambda^*)}{\partial x_i} = 0;\ \ (i = 1; 2; \cdots; n)$

բ) $g_j(x) = 0;\ (j = 1; 2; \cdots; m)$

Քայլ 3. Լուծել համակարգը երկու դեպքի համար՝

1. $\lambda_0^* = 0$;
2. $\lambda_0^* \neq 0$; (այս դեպքում 2-րդ քայլի ա) կետում բաժանել λ_0^*-ի վրա):

Արդյունքում գտնել պայմանական-ստացիոնար x_* կետեր և դրանցից ընտրելով այն ստացվածները, երբ $\lambda_0^* \neq 0$ (դրանք կարող են լինել ռեգուլյար էքստրեմումի կետեր):

Քայլ 4. Քայլ 3-ում ընտրված կետերի համար ստուգել էքստրեմության բավարար պայմանները.

ա) գրել $(x^*\,;\ \lambda^*)$ կետում Լագրանժի ընֆիանրացված դասական ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալի արտահայտությունը՝

$$d^2L(x^*\,;\ \lambda^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x_*;\lambda_*)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j:$$

բ) x_* կետում գրել (3.12) համակարգը.

$$dg_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x_*)}{\partial x_i} dx_i = 0;\ \ (j = 1; 2; \cdots; m):$$

գ) նախորդ համակարգից, $\forall\, m$ դիֆերենցիալ արտահայտել մնացած $(n - m)$-ներով և տեղադրել $d^2L(x^*\,;\ \lambda^*)$- մեջ:

դ) եթե $d^2L(x^*\,;\ \lambda^*) > 0$ ոչ զրոյական dx-ի դեպքում, ապա x_*-ը պայմանական լոկալ մինիմում է: Եթե $d^2L(x^*;\ \lambda^*) < 0$ ոչ զրոյական dx-ի համար, ապա x^*-ը պայմանական լոկալ մաքսիմում է:

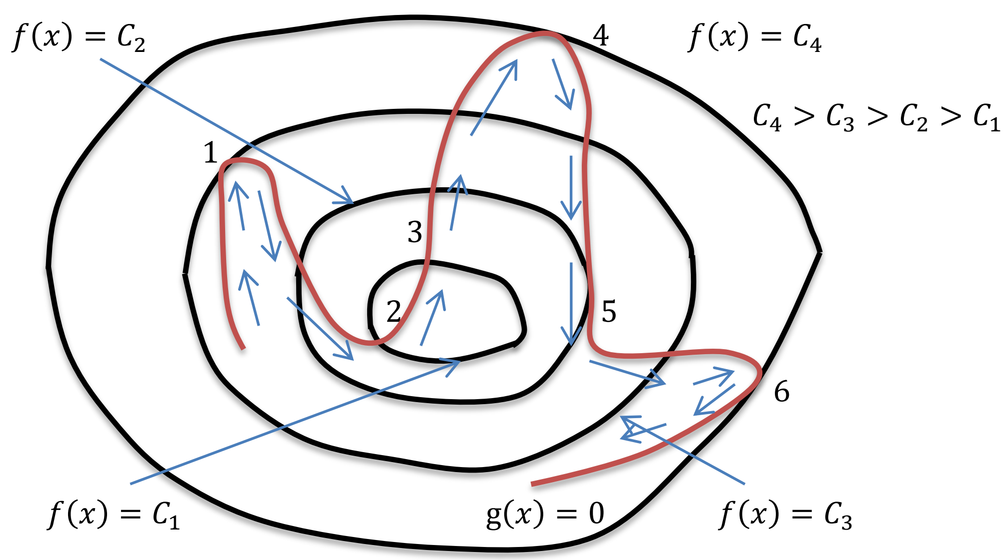
Եթե էքստրեմումի համար բավարար պայմանները չեն բավարարվում, ապա պետք է ստուգել 2-րդ կարգի անհրաժեշտ պայմանների կատարումը (տես հայտանիշ 3.2): Եթե դրանք կատարվեն, ապա լրացուցիչ հետազոտություն է պահանջվում, իսկ եթե դրանք չկատարվեն, ապա x_* կետում պայմանական էքստրեմում չկա:

Աղյուսակ 3.1

Անհրաժեշտ և բավարար պայմանները պայմանական էքստրեմումի որոնման խնդրում հավասարումներով սահմանափակման տիպերի դեպքում

№ h/h	$\nabla_x L(x_* ;\ \lambda_{*0}; \lambda_*)$	$g_j(x_*)$ $(j = 1; 2; \cdots ; m)$	$\lambda_{*0} \neq 0$ $d^2 L(x_*; \lambda_*)$	$dg_j(x_*)$ $(j = 1; 2; \cdots ; m)$	պայմանական-ստացիոնար x_* կետի տիպերը
1.	0	0	> 0	$0; dx \neq 0$	պայմանական լոկալ մինիմում
2.	0	0	< 0	$0; dx \neq 0$	պայմանական լոկալ մաքսիմում
3.	0	0	≥ 0	0	կարող է լինել պայմանական լոկալ մինիմում
4.	0	0	≤ 0	0	կարող է լինել պայմանական լոկալ մաքսիմում
5.	0	0	$= 0$	0	պահանջվում է լրացուցիչ հետազոտում
6.	0	0	$\lessgtr 0$	0	էքստրեմում չկա

Քայլ 5. Հաշվել ֆունկցիայի արժեքները պայմանական էքստրեմումի կետերում: Պայմանական էքստրեմումները (3.7) խնդրում տրված են Աղյուսակ 3.1-ում:



Նկ. 3.3

Դիտողություններ 3.3.

1. Երբեմն կարելի է ստուգել X բազմության վրա սահմանափակող գրադիենտների գծային անկախության պայմանը (տես Սահմանում 3.6): Եթե այն բավարարված է, այդ դեպքում **քայլ 1**.-ում պետք է գրել Լագրանժի դասական ֆունկցիան (3.3), **քայլ 2**.-ում կարելի է անմիջապես գրել (3.9) համակարգը, իսկ **քայլ 3**.-ում չկա λ_{*0} դեպքը:

2. Խնդրի գրաֆիկական լուծումը ($n = 2, m = 1$-ի) հիմնված է դիտողություն 3.1-ի 4-րդ կետի վրա: Դրա համար անհրաժեշտ է.

ա) կառուցել թույլատրելի լուծումների X բազմություն:

բ) կառուցել նպատակային ֆունկցիայի մակարդակի գծերի ընտանիքը և գտնել դրանց շփման կետերը կորերի հետ, որոնք նկարագրում են սահմանափակումները: Այդ կետերը «կասկածելի» են պայմանական էքստրեմումի համար.

գ) ուսումնասիրել նպատակային ֆունկցիայի վարքագիծը սահմանափակման երկայնքով դեպի ուսումնասիրվող կետ և հետ շարժվելիս: Դասակարգել կետերը՝ օգտագործելով էքստրեմության սահմանումը (տես 1.1 և 1.2 սահմանումները):

Նկ. 3.3-ում, 1–6 կետերում, մակարդակի գծերը շոշափում են սահմանափակումը: Այս կետերում ֆունկցիայի վարքագծի ուսումնասիրությունը սլաքների երկայնքով շարժվելիս ցույց է տալիս, որ

- 1, 4, 6 կետերում կա լոկալ մաքսիմում, քանի որ դրանց մոտենալիս ֆունկցիան մեծանում է, այնուհետև նվազում է;
- 2, 5 կետերում՝ լոկալ մինիմում է, քանի որ այդ կետերին մոտենալիս ֆունկցիան նվազում է, այնուհետև մեծանում.
- 3-րդ կետում պայմանական էքստրեմում չկա, քանի որ դրան մոտենալու և դրանից ավելի հեռու գնալիս ֆունկցիան մեծանում է:

Օրինակ 3.5. Գտնել $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ ֆունկցիայի էքստրեմումը $X = \{x|\ x_1 + x_2 = 2\}$ բազմության վրա:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to extr; \quad g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0:$$

Լուծում. Ստուգենք ռեգուլյարության պայմանը: Քանի որ $\nabla g_1(x) = (1; 1)^T \neq 0$, այդ դեպքում պայմանը կատարվում է (տես **սահմանում 3.6**): Հետևաբար օգտագործելու ենք Լանգրանժի դասական ընդհանրացված ֆունկցիան:

1. Տվյալ դեպքում Լանգրաժի ֆունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$L(x;\ \lambda_1) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 2):$$

2.Գրենք առաջին կարգի էքստրեմումի համար անհրաժեշտ պայմանները՝

ա) $\dfrac{\partial L(x;\ \lambda_1)}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 = 0;\ \Rightarrow\ x_1 = -\dfrac{\lambda_1}{2};\ \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_1)}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 = 0;\ \Rightarrow\ x_2 = -\dfrac{\lambda_1}{2};$

բ) $g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0:$

3. Համակարգի լուծումը կլինի՝ $x_{1*} = x_{2*} = 1;\ \lambda_{1*} = -2;$

4. Ստուգենք էքստրեմումի բավարար պայմանը՝

ա) $d^2L(x_*;\ \lambda_{1*}) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2;$

քանի որ՝

$$\frac{\partial^2 L(x;\ \lambda_1)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 L(x;\ \lambda_1)}{\partial x_2^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 L(x;\ \lambda_1)}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 L(x;\ \lambda_1)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0:$$

բ) $dg_1(x_*) = dx_1 + dx_2 = 0:$

քանի որ՝

$$\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} = 1;$$

գ) Արտահայտենք dx_1-ը dx_2-ով և տեղադրենք $d^2L(x^*;\ \lambda_1^*)$-ի մեջ, կստանանք՝ $d^2L(x^*;\ \lambda_1^*) = 4dx_2^2 > 0$, երբ $dx_2 \neq 0$, այսինքն՝ (Աղյուսակ 3.1 կետ 1)-ի համաձայն $x^* = (1; 1)^T$ կետը պայմանական ռեգուլյար լոկալ մինիմում է:

5. Հաշվենք այդ կետում նպատակային ֆունկցիայի արժեքը՝ $f(x^*) = 2$:

Օրինակ 3.6. Գտնել

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \text{extr};\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2$$

խնդրի պայմանական էքստրեմումը:

Լուծում. Ստուգենք ռեգուլյարության պայմանը: Քանի որ $\nabla g_1(x) = (2x_1; 2x_2)^T \neq 0$, այդ դեպքում պայմանը կատարվում է (տես **սահմանում 3.6**): Հետևաբար, օգտվելու ենք Լանգրանժի դասական ընդհանրացված ֆունկցիան:

1. Լանգրանժի ֆունկցիան կլինի՝

$$L(x;\ \lambda_1) = x_1 + x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 2):$$

2. Գրենք առաջին կարգի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը՝

ա) $\dfrac{\partial L(x;\ \lambda_1)}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda_1 x_1 = 0;\ \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_1)}{\partial x_2} = 1 + 2\lambda_1 x_2 = 0;$

այստեղից կստանանք՝

$$x_1 = x_2 = -\frac{1}{2\lambda_1}:$$

բ) $g_1(x_*) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$:

3. Համակարգի լուծումը ստացվում է երկու պայմանական-ստացիոնար կետեր՝

$$\begin{cases} A:\ \ x_1^* = 1;\ \ x_2^* = 1;\ \lambda_1 = -\dfrac{1}{2}; \\ B:\ \ x_1^* = -1;\ \ x_2^* = -1; \lambda_1 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

4. Ստուգենք էքստրեմումի բավարար պայմանը՝

ա) $d^2L(x^*;\ \lambda_1^*) = 2\lambda_1^* dx_1^2 + 2\lambda_1^* dx_2^2;$

քանի որ՝

$$\frac{\partial^2 L(x^*;\ \lambda_1^*)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 L(x^*;\ \lambda_1^*)}{\partial x_2^2} = 2\lambda_1^*;\quad \frac{\partial^2 L(x^*;\ \lambda_1^*)}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 L(x^*;\ \lambda_1^*)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0:$$

բ) $dg_1(x^*) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 0$:

քանի որ՝

$$\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} = 2x_1;\ \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} = 2x_2;$$

գ) Հետազոտենք A կետը՝ $dg_1(A) = 2dx_1 + 2dx_2 = 0;\ \ dx_1 = -dx_2$:

Հետևաբար՝

$$d^2L(A) = -dx_1^2 - dx_2^2 = 2dx_2^2 < 0;\ \ dx_2 \neq 0:$$

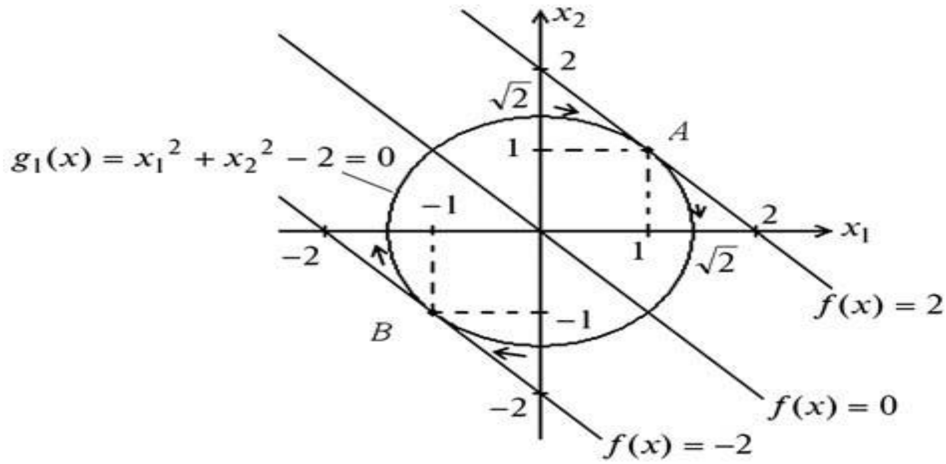
այսինքն՝ ըստ Աղյուսակ 3.1-ի 2.կետի $x^* = (1;1)^T$ -ը պայմանական ռեգուլյար լոկալ մաքսիմում է:

Հետազոտենք B կետը՝ $dg_1(B) = 2dx_1 + 2dx_2 = 0;\ \Rightarrow\ dx_1 = -dx_2$:

Հետևաբար՝

$$d^2L(A) = dx_1^2 + dx_2^2 = 2dx_2^2 > 0;\ \ dx_2 \neq 0:$$

այսինքն՝ ըստ Աղյուսակ 3.1-ի 1.կետի $x_* = (1;1)^T$ -ը պայմանական ռեգուլյար լոկալ մինիմում է:



Նկ. 3.4

5.Հաշվարկենք ֆունկցիայի արժեքները էքստրեմումի կետերում՝

$$f(A) = 2;\ f(B) = -2:$$

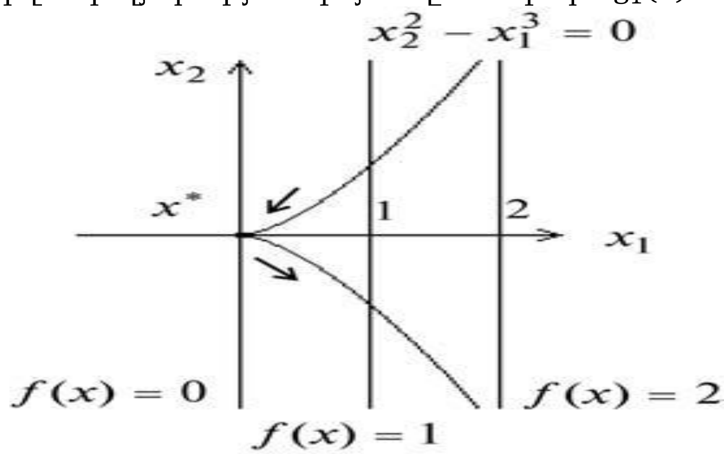
Խնդրի գրաֆիկական լուծումը համապատասխանում է 3.3 դիտողությունների 2-րդ կետին և ներկայացված է Նկար 3.4-ում:

Օրինակ 3.7. Գտնել

$$f(x) = x_1 \to extr;\ g_1(x) = -x_1^3 + x_2^2$$

խնդրի պայմանական էքստրեմումը:

Լուծում. Ստուգել ռեգուլյարության պայմանը: Քանի որ $\nabla g_1(x) = (-3x_1^2; 2x_2)^T = 0$,



նկ. 3.5

$x^* = (0;0)^T$ կետում, ապա պայմանը չի կատարվում (տես սահմանում 3.6): Այսինքն, այս դեպքում օգտագործելու ենք Լանգրանժի ընդհանրացված ֆունկցիան:

1. Կազմենք Լանգրանժի ընդհանրացված ֆունկցիան՝

$$L(x;\ \lambda_0;\lambda_1) = \lambda_0 x_1 + \lambda_1(x_2^2 - x_1^3):$$

41

2. Գրենք առաջին կարգի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը՝

ա) $\dfrac{\partial L(x;\lambda_0;\ \lambda_1)}{\partial x_1} = \lambda_0 - 3\lambda_1 x_1^2 = 0;\ \dfrac{\partial L(x;\lambda_0;\ \lambda_1)}{\partial x_2} = 2\lambda_1 x_2 = 0;$

բ) $g_1(x^*) = -x_1^3 + x_2^2 = 0:$

3. Համակարգը լուծենք երկու դեպքի համար՝

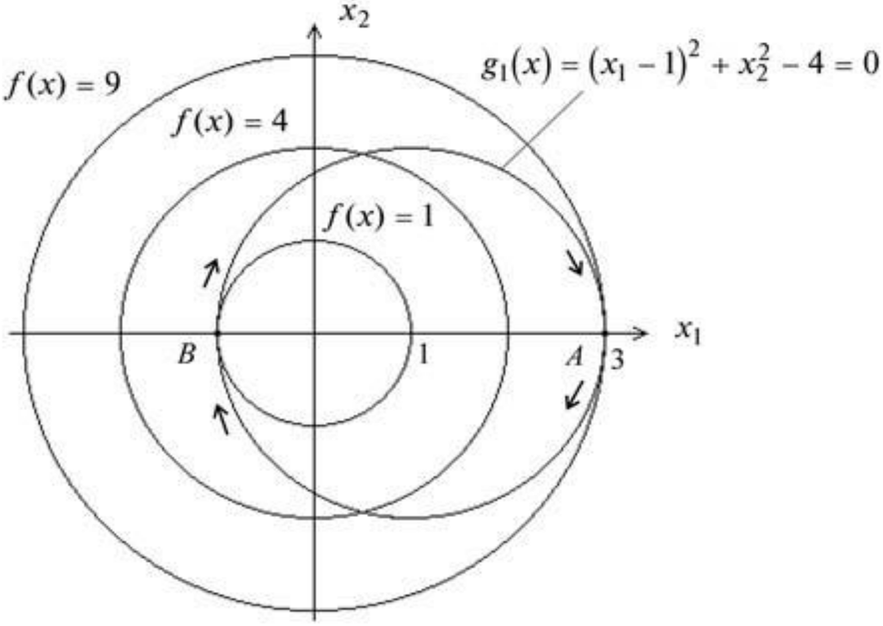
Առաջին դեպքում $\lambda_0 = 0$: Այդ դեպքում ՝ $\lambda_1 \neq 0$, քանի որ ըստ **հայտանիշ 3.1**-ի բոլոր Լանգրանժի բազմապատկիչները միաժամանակ չեն կարող հավասարվել զերոյի: Այդ դեպքում կունենանք՝ $x_1^* = x_2^* = 0;\ \lambda_0^* = 0$:

Երկրորդ դեպքում՝ $\lambda_0 \neq 0$: Բաժանելով համակարգը λ_0-ի վրա և ${}^{\lambda_1}/_{\lambda_0}$ փոխարինենք λ_1-ով՝ $1 - 3\lambda_1 x_1^2 = 0;\ \ 2\lambda_1 x_2 = 0;\ \ -x_1^3 + x_2^2 = 0;$

Դիտարկենք երկրորդ հավասարումը.

- Եթե $\lambda_1 = 0$, ապա համակարգը անհամատեղելի է:
- Եթե $x_2 = 0$, ապա $x_1 = 0$ և համակարգը նույնպես անհամատեղելի է:

Ինչպես երևում է, Լանգրանժի դասական ֆունկցիայի կիրառումը ոչ մի արդյունք



Նկ. 3.6

չի տալիս:

4. Քանի որ $\lambda_0^* = 0$, ապա էքստրեմության համար բավարար պայմանները չեն ստուգվում x^*-ը և այդ կետում նպատակային ֆունկցիայի արժեքը՝ $f(x^*) = 0$-ը

ոչռեգուլյար լոկալ և գլոբալ մինիմում է, ինչպես ցույց է տրված Նկար 3.5-ում:

Օրինակ 3.8. Գտնել

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \text{extr}; \quad \text{g}_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4;$$

խնդրի պայմանական էքստրեմումը:

Լուծում. Մենք կհետևենք ալգորիթմին՝ առանց կանոնավորության պայմանը ստուգելու:

1. Կազմենք Լագրանժի ընդհանրացված ֆունկցիան՝

$$L(x;\ \lambda_0; \lambda_1) = \lambda_0(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_1[(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4]:$$

2. Եկեք գրենք առաջին կարգի էքստրեմումի համար անհրաժեշտ պայմանները՝

ա) $\dfrac{\partial L(x;\lambda_0;\ \lambda_1)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + \lambda_1(x_1 - 1) = 0;\ \dfrac{\partial L(x;\lambda_0;\ \lambda_1)}{\partial x_2} = 2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0;$

բ) $\text{g}_1(x^*) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0:$

3. Լուծենք համակարգը երկու տարբերակի համար.

Առաջին տարբերակ $\lambda_0 = 0$: Այս դեպքում 2.ա)-րդ կետից հետևում է, որ՝

$$\lambda_1(x_1 - 1) = 0; \quad 2\lambda_1 x_2 = 0; \quad \text{g}_1(x_*) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0;$$

Քանի որ ըստ հայտանիշ 3.1-ի $\lambda_1 \neq 0$, ապա առաջին երկու հավասարումներից կստանանք՝ $x_1 = 1$; $x_2 = 0$: Այնուամենայնիվ, այս դեպքում սահմանափակումը չի բավարարվում. $\text{g}_1(x) = -4$: Հետևաբար, համակարգը անհամատեղելի է:

Երկրորդ տարբերակ $\lambda_0 \neq 0$: Բաժանենք Եկեք վերաշարադրենք 2.ա)-րդ բաժնում տրված համակարգը՝ բաժանելով λ_0-ի վրա, փոխարինելով ${}^{\lambda_1}\!/_{\lambda_0}$-ն λ_1-ով, կունենանք՝

ա) $\dfrac{\partial L(x;\ \lambda_1)}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1(x_1 - 1) = 0;\ \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_1)}{\partial x_2} = 2(1 + \lambda_1)x_2 = 0;$

(3.13)

բ) $\text{g}_1(x^*) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0:$

Դիտարկենք երկրորդ հավասարումը: Եթե $x_2 = 0$, ապա երրորդ հավասարումից հետևում է $x_1 = 3$; $x_1 = -1$, իսկ առաջին հավասարումից համապատասխանաբար՝

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2};\ \ \lambda_1 = -\frac{1}{2}:$$

Եթե $\lambda_1 = -1$, ապա առաջին հավասարումը ունի հետևյալ տեսքը՝ $2 = 0$, այսինքն համակարգը անհամատեղելի է:

Հետևաբար որոնվել է երկու պամանական-ստացիոնար կետեր՝

$$A\,; \quad x_1^* = 3;\ x_2^* = 0;\ \ \lambda_1^* = -\frac{3}{2};$$

$$B\ ;\ x_1^* = -1;\ x_2^* = 0;\ \ \lambda_{1*} = -\frac{1}{2}:$$

4. Ստուգենք էքստրեմումի բավարար պայմանը, օգտագործելով (3.13)-ը:

ա) $d^2L(x^*;\ \lambda_1^*) = 2(1+\lambda_1^*)dx_1^2 + 2(1+\lambda_1^*)dx_2^2;$

բ) $dg_1(x^*) = 2(x_1^* - 1)dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 0:$

գ) Նախ հետազոտենք A կետը: $dg_1(A) = 4dx_1 = 0$, այստեղից $dx_1 = 0$, հետևաբար

$$d^2L(A) = -dx_1^2 - dx_2^2 = -dx_2^2 < 0, \text{ երբ } dx_2 \neq 0,$$

այսինքն A կետում ռեգուլյար պայմանական մաքսիմում է (Աղյուսակ 3.1 տող 2):

դ) Հետազոտենք B կետը: $dg_1(A) = -4dx_1 + 0 = 0$, այստեղից $dx_1 = 0$, հետևաբար

$$d^2L(B) = dx_1^2 + dx_2^2 = dx_2^2 > 0, \text{ երբ } dx_2 \neq 0,$$

այսինքն B կետում ռեգուլյար պայմանական մաքսիմում է (Աղյուսակ 3.1 տող 1):

5. Հաշվարկենք ֆունկցիայի արժեքները ծայրահեղ կետերում՝ $f(A) = 9, f(B) = 1$: Խնդրի գրաֆիկական լուծումը ներկայացված է Նկ. 3.6-ում (Դիտողություն 3.3 կետ 2):

Օրինակ 3.9. Գտնել

$$f(x) = x_1^2 - x_2^2 \to \text{extr};\quad g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0;$$

խնդրի պայմանական էքստրեմումը:

Լուծում. 1. Գրենք Լանգրանժի ընդհանրացրած ֆունկցիան՝

$$L(x;\lambda_0;\ \lambda_1) = \lambda_0(x_1^2 - x_2^2) + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1):$$

2 Գրենք առաջին կարգի էքստրեմումի համար անհրաժեշտ պայմանները

ա) $\dfrac{\partial L(x;\lambda_0;\ \lambda_1)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 x_1 = 0;\ \dfrac{\partial L(x;\lambda_0;\ \lambda_1)}{\partial x_2} = -2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0;$

բ) $g_1(x^*) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0:$

3. Լուծենք համակարգը երկու դեպքի համար.

Առաջին դեպքում $\lambda_0 = 0$ 2-րդ կետից հետևում է, որ՝

$$\lambda_1(x_1 - 1) = 0;\quad 2\lambda_1 x_2 = 0;\quad g_1(x_*) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0;$$

Քանի որ ըստ հայտանիշ 3.1-ի $\lambda_1 \neq 0$, ապա առաջին երկու հավասարումներից. $x_1 = x_2 = 0$: Այնուամենայնիվ, այս դեպում սահմանափակումը չի բավարարվում. $g_1(x) = -1$: Հետևաբար, համակարգը անհամատեղելի է:

Երկրորդ դեպքում $\lambda_0 \neq 0$: Բաժանենք Եկեք վերաշարադրենք 2-րդ բաժնում տրված համակարգը՝ բաժանելով λ_0-ի վրա, փոխարինելով ${}^{\lambda_1}/_{\lambda_0}$-ն λ_1-ով՝

ա) $\dfrac{\partial L(x;\lambda_0;\ \lambda_1)}{\partial x_1} = 2x_1(1+\lambda_1) = 0;\ \dfrac{\partial L(x;\lambda_0;\ \lambda_1)}{\partial x_2} = 2(-1+\lambda_1)x_2 = 0;$

$$\tag{3.14}$$

բ) $g_1(x^*) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$:

Այստեղից կստանանք՝

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1;\ \ x_2 = 0;\ \ x_1 = \mp 1; \\ \lambda_1 = 1;\ \ x_1 = 0;\ \ x_2 = \mp 1; \end{cases}$$

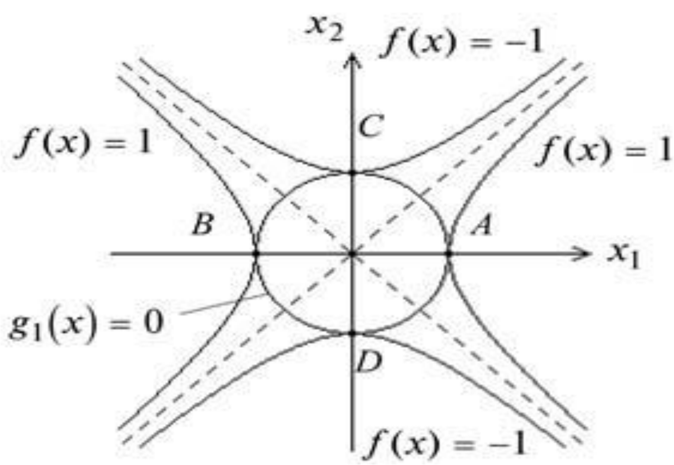
և համակարգը ուրիշ լուծումներ չունի: Հետևաբար կունենանք չորս պայմանական-ստացիոնար կետեր՝

$$\begin{cases} A: \quad x_1^* = 1; \quad x_2^* = 0; \quad \lambda_1^* = -1; \\ B: \quad x_1^* = -1; \quad x_2^* = 0; \quad \lambda_1^* = -1; \\ C: \quad x_1^* = 0; \quad x_2^* = 1; \quad \lambda_1^* = 1; \\ D: \quad x_1^* = 0; \quad x_2^* = -1; \quad \lambda_1^* = 1; \end{cases}$$

4. Ստուգենք էքստրեմումի բավարար պայմանը, օգտագործելով (3.14)-ը:

ա) $d^2L(x^*;\ \lambda_1^*) = 2(1+\lambda_1^*)dx_1^2 + 2(\lambda_1^* - 1)dx_2^2;$

բ) $dg_1(x^*) = 2x_{1*}dx_1 + 2x_{2*}dx_2 = 0$:



Նկ. 3.7

գ) Նախ հետազոտենք A կետը: $dg_1(A) = 2dx_1 = 0$, այստեղից $dx_1 = 0$, հետևաբար

$$d^2L(A) = -4dx_2^2 < 0, \text{ երբ } dx_2 \neq 0,$$

այսինքն A կետում ռեգուլյար պայմանական մաքսիմում է (Աղյուսակ 3.1 տող 2):

Հետազոտենք B կետը;՝ $dg_1(B) = 2dx_1 = 0$, որտեղից $dx_1 = 0$, հետևաբար՝

$$d^2L(B) = -4dx_2^2 < 0, \text{ երբ } dx_2 \neq 0,$$

այսինքն B կետում ռեգուլյար պայմանական մաքսիմում է (Աղյուսակ 3.1 տող 2):

Հետազոտենք C կետը՝ $dg_1(C) = 2dx_2 = 0$, որտեղից $dx_2 = 0$, հետևաբար՝

$$d^2L(C) = 4dx_1^2 > 0, \text{ երբ } dx_1 \neq 0,$$

այսինքն C կետում ռեգուլյար պայմանական մինիմում է (Աղյուսակ 3.1 տող 1):

Հետազոտենք D կետը՝ $dg_1(D) = -2dx_2 = 0$, որտեղից $dx_2 = 0$, հետևաբար՝

$$d^2L(D) = 4dx_1^2 > 0, \text{ երբ } dx_1 \neq 0,$$

այսինքն D կետում ռեգուլյար պայմանական մինիմում է (Աղյուսակ 3.1; տող 1):

5. Հաշվարկենք ֆունկցիայի արժեքները ծայրահեղ կետերում՝ $f(A) = f(B) = 1$: $f(C) = f(D) = -1$: Խնդրի գրաֆիկական լուծումը ներկայացված է Նկար. 3.7-ում (Դիտողություն 3.3 կետ 2):

Օրինակ 3.10. Գտնել

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \text{extr};$$

$$\begin{cases} g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0; \\ g_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0; \end{cases}$$

խնդրի պայմանական էքստրեմումը:

Լուծում. 1. Կազմենք Լանգրանժի ընդհանրացրած ֆունկցիան՝

$$L(x; \lambda_0;\ \lambda_1) = \lambda_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - x_3) + \lambda_2(x_1 + x_2 + x_3 - 4):$$

2. Գրենք առաջին կարգի էքստրեմումի համար անհրաժեշտ պայմանները՝

$$\text{ա) } \begin{cases} \dfrac{\partial L(x; \lambda_0;\ \lambda_1;\ \lambda_2)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0; \\ \dfrac{\partial L(x; \lambda_0;\ \lambda_1;\ \lambda_2)}{\partial x_2} = 2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0\ ; \\ \dfrac{\partial L(x; \lambda_0;\ \lambda_1;\ \lambda_2)}{\partial x_3} = 2\lambda_0 x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{բ) } \begin{cases} g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0; \\ g_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0; \end{cases}$$

3. Համակարգը լուծենք երկու դեպքի համար՝

Առաջին դեպքում $\lambda_0 = 0$ և վերոգրյալ 2. կետից կստանանք հետևյալ համայարգը՝

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0; \\ 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0; \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0; \end{cases} \text{ և } \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0; \end{cases}$$

Առաջին համակարգից կունենանք, որ $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, ըստ **Հայտանիշ 3.1**-ի, հետևաբար՝

$$x_1 = x_2 = -\frac{1}{2};$$

իսկ երկրորդ համակարգից կստանանք՝ $x_3 = \frac{1}{2}$ և $x_3 = 5$, այսինքն հակասություն է, և համակարգը անհամատեղելի է:

Երկրորդ դեպքում $\lambda_0 \neq 0$: Բաժանելով 2.ա) կետի համակարգը λ_0-ի., այնուհետն ${}^{\lambda_1}/_{\lambda_0}$; ${}^{\lambda_1}/_{\lambda_0}$-երը փոխարինելով համապատասխանաբար λ_1; λ_1-երով. կստանանք՝

$$\text{ա)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_1;\ \lambda_2)}{\partial x_1} = 2x_1 + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0; \\ \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_1;\ \lambda_2)}{\partial x_2} = 2x_2 + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0\ ; \\ \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_1;\ \lambda_2)}{\partial x_3} = 2x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{բ)}\quad \begin{cases} g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0; \\ g_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0; \end{cases}$$

Առաջին համակարգից կունենանք՝

$$x_1 = x_2 = -\frac{\lambda_2}{2(1+\lambda_1)}; \quad x_3 = -\frac{\lambda_2}{2(1+\lambda_1)}$$

Տեղադրելով այս արծեքները երկրորդ համակարգում , կստանանք՝

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{2}{3};\ \lambda_2 = -\dfrac{10}{3}; \\ \lambda_1 = -\dfrac{20}{3};\ \lambda_2 = -\dfrac{68}{3}; \end{cases}$$

Այսինքն ունեցանք երկու պայմանական-ստացիոնար կետեր՝

$$\begin{cases} A;\ \ x_{1*} = 1;\ x_{2*} = 1;\ x_{3*} = 3;\ \ \lambda_{1*} = \dfrac{2}{3};\ \lambda_{2*} = -\dfrac{10}{3}; \\ B;\ \ x_{1*} = -2;\ x_{2*} = -2;\ x_{3*} = 8;\ \ \lambda_{1*} = -\dfrac{20}{3};\ \lambda_{2*} = -\dfrac{68}{3}; \end{cases}$$

4. Ստուգենք էքստրեմումի բավարար պայմանները՝

ա) $d^2L(x_*;\ \lambda_{1*}; \lambda_{2*}) = 2(1+\lambda_{1*})dx_1^2 + 2(1+\lambda_{1*})dx_2^2 + 2dx_3^2;$

բ) $dg_1(x_*) = 2x_{1*}dx_1 + 2x_{2*}dx_2 - dx_3 = 0$: $dg_2(x_*) = dx_1 + dx_2 + dx_3 = 0$

գ) Արտահայտենք dx_1-ը և dx_2-ը dx_3-ով՝

$$dx_1 = -\frac{1+2x_{2*}}{1+2x_{2*}}dx_2; \quad dx_1 = -\frac{2(x_{1*} - x_{2*})}{1+2x_{2*}}dx_2$$

Հետազոտենք A կետը; $dx_1 = -dx_2$; $dx_3 = 0$;

$$d^2L(A) = 2\left(1+\frac{2}{3}\right)(-dx_2)^2 + 2\left(1+\frac{2}{3}\right)(dx_2)^2 = \frac{20}{3}(dx_2)^2 > 0, \qquad dx_2 \neq 0;$$

այսինքն A կետում ռեգուլյար լոկալ պայմանական մինիմում է (Աղյուսակ 3.1, տող 1):

Հետազոտենք B կետը; $dx_1 = -dx_2$; $dx_3 = 0$;

$$d^2L(B) = 2\left(1-\frac{20}{3}\right)(-dx_2)^2 + 2\left(1-\frac{20}{3}\right)(dx_2)^2 = -\frac{17}{3}(dx_2)^2 < 0, \qquad dx_2 \neq 0$$

այսինքն B -ում ռեգուլյար լոկալ պայմանական մաքսիմում է (Աղյուսակ 3.1, տող 2):

5. Ֆունկցիայի արժեքները ծայրահեղ կետերում՝ $f(A) = 6, f(B) = 72$:

Օրինակ 3.11. Գտնել

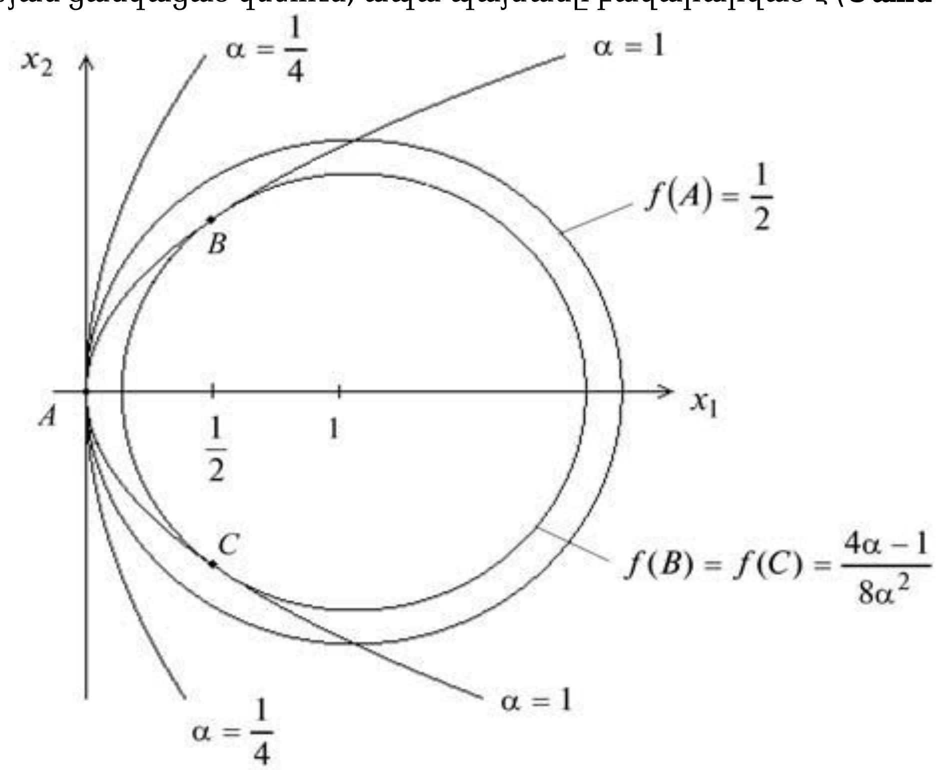
$$f(x) = \frac{1}{2}[(x_1-1)^2 + x_2^2] \to extr; \quad \mathrm{g}_1(x) = -x_1 + \alpha x_2^2 = 0;$$

խնդրի պայմանական էքստրեմումը տարբեր $\alpha > 0$-ի դեպքում:

Լուծում. Նախ ստուգենք ռեգուլյարության պայմանը: Քանի որ

$$\nabla \mathrm{g}_1(x) = (-1; 2\alpha x_2)^T \neq 0$$

X բազմության ցանկացած կետում, ապա պայմանը բավարարված է (**Սահմանում 3.6**):



Նկ. 3.8

Այսինքն կարող ենք օգտագործել Լանգրանժի դասական ֆունկցիան:

1. Կազմենք Լանգրանժի դասական ֆունկցիան՝

$L(x; λ_0; λ_1) = \frac{λ_0}{2}[(x_1 - 1)^2 + x_2^2] + λ_1(-x_1 + \alpha x_2^2)$

2. Գրենք առաջին կարգի էքստրեմումի համար անհրաժեշտ պայմանները.

ա) $\dfrac{\partial L(x; λ_1)}{\partial x_1} = x_1 - 1 + λ_1 = 0; \ \dfrac{\partial L(x; λ_0; λ_1)}{\partial x_2} = x_2 + 2\alpha λ_1 x_2 = 0;$

բ) $g_1(x_*) = -x_1 + \alpha x_2^2 = 0$:

3. Վերոգրյալ հավասարումների համակարգից կունենանք, երբ $x_2 = 0; \Rightarrow x_1 = 0$, և $λ_1 = -1$: Եթե $x_2 \neq 0$, ապա երկրորդ հավասարումից կստանանք՝

$$λ_1 = -\frac{1}{2\alpha}; \ \Rightarrow \ x_1 = \frac{2\alpha - 1}{2\alpha}; \ \ x_2 = \pm\sqrt{\frac{2\alpha - 1}{2\alpha^2}};$$

Երբ $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ այդ դեպքում խնդիրը լուծում չունի: Հետևաբար խնդիրը ունի երեք պայմանական-ստացիոնար կետեր (Նկ. 3.8):

$$\begin{cases} A; \ \ x_{1*} = 0; \ x_{2*} = 0; \ λ_1 = -1; \\ B: x_{1*} = \dfrac{2\alpha - 1}{2\alpha}; \ x_{2*} = \sqrt{\dfrac{2\alpha - 1}{2\alpha^2}}; \ λ_{1*} = -\dfrac{1}{2\alpha}; \\ C: \ x_{1*} = \dfrac{2\alpha - 1}{2\alpha}; \ x_{2*} = -\sqrt{\dfrac{2\alpha - 1}{2\alpha^2}}; \ λ_{1*} = -\dfrac{1}{2\alpha}; \end{cases}$$

4. Ստուգենք էքստրեմումի բավարար պայմանները՝

ա) $d^2L(x_*; λ_{1*}) = 2dx_1^2 + 2(1 + \alpha λ_{1*})dx_2^2;$

բ) $dg_1(x_*) = -dx_1 + 2\alpha x_{2*}dx_2 = 0;$

գ) Երկրորդ հավասարումից կստանանք, որ $dx_1 = 2\alpha x_{2*}dx_2$:

դ) Այդ դեպքում $d^2L(x_*; λ_{1*}) = [(4\alpha x_{2*})^2 + (1 + 2\alpha λ_{1*})]dx_2^2$

Հետազոտենք A կետը: $d^2L(A) = (1 - 2\alpha)dx_2^2$: Երբ $0 < \alpha < \frac{1}{2}; \ dx_2 \neq 0$ այդ դեպքում $d^2L(A) > 0$ և A կետում լոկալ պայմանական մինիմում է (Աղյուսակ 3.1 տող 1), իսկ $\alpha > \frac{1}{2}$ կետում $d^2L(A) < 0; \ dx_2 \neq 0$ և A կետում լոկալ պայմանական մաքսիմում է (Աղյուսակ 3.1 տող 2): Եթե $\alpha = \frac{1}{2}$, ապա $\forall \ dx_2$-ի համար կստանանք $d^2L(A) = 0$ և այդ դեպքում պահանջվում է լրացուցիչ հետազոտում (Աղյուսակ 3.1 տող 5):

Դա անելու համար օգտագործում ենք փոփոխականի վերացման մեթոդը և տրված սահմանափակման հավասարումից արտահայտենք կոորդինատներից մեկը մյուսով՝ $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2$, որը տեղադրելով նպատակային $f(x)$ ֆունկցիայի մեջ, կստանանք՝

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}x_2^2 - 1\right)^2 + x_2^2\right] = \frac{1}{8}x_2^4 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}:$$

Հետազոտենք $f(x)$ ֆունկցիան պայմանական էքստրեմումի համար, օգտագործելով դիտողություն 2.2-ի 3. կետից՝

$$\frac{df}{dx_2} = \frac{1}{2}x_2^3 + x_2 = 0:$$

Այստեղից $x_{2*} = 0$ ստացիոնար կետ է, և այդ կետում չորրորդ կարգի ածանցյալը՝ $f^{(4)}(x) = 3 > 0$, այսինքն x_{2*}-ը լոկալ մինիմում է: Հաշվի առնելով $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 = 0$ կապը ստանում ենք, որ $x_* = (0; 0)^T$-ը լոկալ պայմանական մինիմում է:

Դիտարկենք B և C կետերը; $d^2L(x_*;\ \lambda_{1*}) = 8(2\alpha - 1)dx_2^2$ բոլոր dx_2-երի համար: Երբ $\alpha > {}^1\!/_2$ կունենանք $d^2L(x_*;\ \lambda_{1*}) > 0$ և $dx_2 \neq 0$ դեպքում B և C կետերում լոկալ պայմանական մինիմումներ են: Գրաֆիկական լուծումը տրված է Նկ. 3.8-ում:

5. Ֆունկցիայի արժեքները էքստրեմումի կետերում՝

$$f(A) = \frac{1}{2}; f(B) = f(C) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\alpha^2} + \frac{2\alpha - 1}{2\alpha^2}\right] = \frac{4\alpha - 1}{8\alpha^2}:$$

3.3. Պայմանական էքստրեմումը անհավասարությունների տիպի սահմանափակումների դեպքում . Խնդրի դրվածքը.

Տրված է երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի նպատակային ֆունկցիա $f(x) = f(x_1,; x_2; \ldots;\ x_n)$ և սահմանափակող $g_j(x) = g_j(x_1, x_2 \ldots, x_n) \leq 0;\ (j = 1;\ \ldots; m)$ ֆունկցիաներ, թույլատրելի լուծումների X բազմության որոշման համար: Պահանջվում է ուսումնասիրել $f(x)$ ֆունկցիայի էքստրեմումները, այսինքն՝ որոշել նրա լոկալ մինիմումի և մաքսիմումի կետերը X բազմության վրա:

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)\,; \quad f(x^*) = \max_{x \in X} f(x)\,; \qquad (3.15)$$

որտեղ՝ $X = \{x |\ g_j(x) \leq 0;\ (j = 1;\ \ldots; m)\}$:

Խնդրի լուծման ռազմավարությունը

Լոկալ էքստեմումների x^* կետերը հայտնաբերվում են՝ օգտագործելով առաջին և երկրորդ կարգի անհրաժեշտ և բավարար նվազագույն և առավելագույն պայմանները անհավասարության տիպի սահմանափակումներով (պայմանների կարգը որոշվում է օգտագործվող ածանցյալների հերթականությամբ): Ֆունկցիայի $f(x^*)$ արժեքները հաշվվում են լոկալ էքստրեմումների հայտնաբերված կետերում:

Հայտանիշ 3.4. Մինիմումի(մաքսիմումի) առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմաններ. Դիցուք x^*-ը լոկալ մինիմումի կետ է (3.15) խնդրում. Այդ դեպքում որոնվում է $\lambda^* \geq 0$ այնպիսի թիվ և $\lambda^* = (\lambda_1^*; \lambda_2^*; \cdots; \lambda_m^*)^T$ վեկտոր, միաժամանակ հավասար չեն զրոյի և այնպեսին, որ բավարարվեն հետևյալ պայմանները.

- Լագրանժի ընդհանրացված ֆունկցիայի կայունության պայմանը ըստ x-ի՝

$$\frac{\partial L(x^*; \lambda_0^*; \lambda^*)}{\partial x_i} = 0; \quad (i = 1; 2; \cdots; n): \qquad (3.16ա)$$

- լուծման սահմանափակության պայմանը՝

$$g_j(x) \le 0;\ (j = 1; \dots; m); \qquad (3.16բ)$$

- պայմանական մինիմումի համար ոչ բացասական պայման՝

$$\lambda_j^* \ge 0;\ \ (j = 1; \dots; m); \qquad (3.16գ)$$

(պայմանական մաքսիմումի համար ոչ դրական պայման՝

$$\lambda_j^* \le 0;\ \ (j = 1; \dots; m));$$

- ոչկոշտության լրացուցիչ պայման՝

$$\lambda_j^* g_j(x^*) = 0;\ (j = 1; \dots; m); \qquad (3.16դ)$$

Եթե տվյալ դեպքում x^*-ում գործող սահմանափակումների գրադիենտները գծային անկախ են (օրինաչափության պայմանը բավարարված է), ապա $\lambda^* \ne 0$։

Դիտողություններ 3.4.

1. (3.16) համակարգին բավարարող x^*-երը կոչվում են պայմանական ստացիոնար կետեր:

2. Ի տարբերություն հավասարության տիպի սահմանափակումների, մինիմումի և մաքսիմումի համար առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանները ձևակերպվում են առանձին:

3. Եթե լուծվող խնդրի մեջ սահմանափակումները գրված են $g_j(x) \ge 0$ ձևով, ապա դրանք պետք է վերաշարադրվեն (3.15)–ում օգտագործված ձևով՝ $-g_j(x) \le 0$:

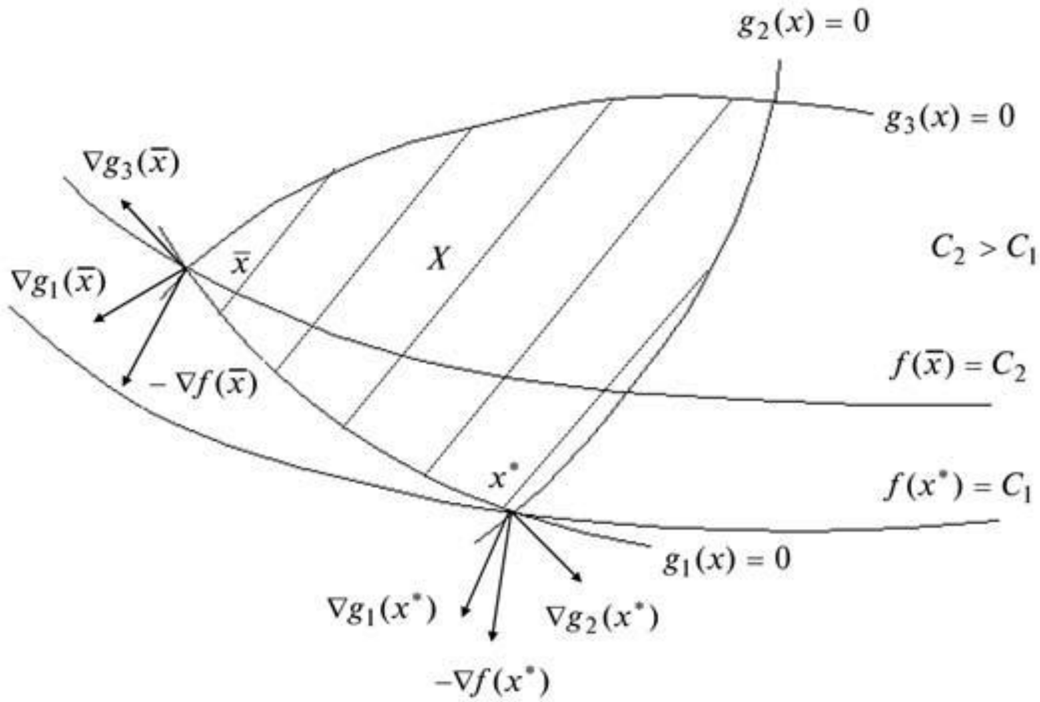
4. Այսուհետև կօգտագործենք ակտիվ սահմանափակող ինդեքսների բազմությունը x^* կետում կնշանակենք J_a-ով:

5. Պայմանական մաքսիմումի որոնման խնդիրներ լուծելիս կարելի է օգտագործել մինիմումիի համար անհրաժեշտ և բավարար պայմանները:

6. Քանի որ x^* կետը նախապես հայտնի չէ, դժվար է ստուգել օրինաչափության պայմանը, ուստի խորհուրդ է տրվում հետևել 3-րդ պարբերությունում նկարագրված ալգորիթմին.(**դիտողություններ 3.1**).

7. Այն էքստրեմումի կետերը, որոնք բավարարում են (3.16) համակարգին $\lambda^* \ne 0$-ի համար կոչվում են կանոնավոր, իսկ $\lambda^* = 0$ համար՝ անկանոն: Նշված $\lambda^* = 0$ դեպքն արտացոլում է սահմանափակումների այլասերվածությունը:

8. Կանոնավոր ծայրահեղ x^* կետում (3.16ա) պայման արտացոլում է այն փաստը, որ նպատակային $f(x)$ ֆունկցիայի հակագրադիենտը ֆունկցիայի գրադիենտների ոչ բացասական (առավելագույնի դեպքում ոչ դրական) գծային համակցություն է, որը կազմում է x^*-ում ակտիվ սահմանափակումներ:Իրոք, (3.16ա) պայմանը, հաշվի առնելով (3.16դ), կարող է վերաշարադրվել հետևյալ տեսքով՝



Նկ. 3.9

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \nabla \mathrm{g}_j(x^*) = \sum_{j\in J_a} \lambda_j^* \nabla \mathrm{g}_j(x^*):$$

Նկար 3.9-ում նվազագույնը հասել է x^* կետում և վերը նշված հավասարությունը բավարարված է, բայց $\bar{x}$կետում բավարարված չէ:

9. $\lambda^* \neq 0$-ի համար ճիշտ են երկու կարևոր պնդում.

1) եթե $f(x)$, $\mathrm{g}_j(\mathrm{x})$, $(j = 1, \dots, m)$ ֆունկցիաները ուռուցիկ են, այդ դեպքում 3.4-ի պայմանները միաժամանակ բավարար պայմաններ են գլոբալ մինիմումի համար.

2) եթե $-f(x)$, $\mathrm{g}_j(\mathrm{x})$, $(j = 1, \dots, m)$ ֆունկցիաները ուռուցիկ են, այդ դեպքում 3.4-ի պայմանները միաժամանակ բավարար պայմաններ են գլոբալ մաքսիմումի համար.

Երկու դեպքում էլ X թույլատրելի լուծումների բազմությունը ուռուցիկ է:

10. Դիտարկվող (3.15) խնդրի լուծման թույլատրելիությունը, ըստ խնդրի դրվածքի հետևանք ներառված է (3.16) ռազմավարությունը (ալգորիթը) հարմար ձևակերպելու համար:

11. Ոչկոշտ պայմանից բխում է, որ եթե x^* կետում սահմանափակումը պասիվ է, այսինքն՝ $\mathrm{g}_j(\mathrm{x}) < 0$, ապա $\lambda^* = 0$, իսկ եթե ակտիվ է, այսինքն՝ $\mathrm{g}_j(\mathrm{x}) = 0$, ապա $\lambda^* \geq 0$-ի (մինիմումի համար) և $\lambda^* \leq 0$ (մաքսիմումի համար):

Ծանոթություն. ***Հայտանիշ* 3.4-**ը ապացուցվել է Ֆ.Ջոնի (F. John) կողմից, իսկ երբ $\lambda^* \neq 0$, ապացուցվել է Հ.Վ.Կունի և Տակկերի (H. W. Kuhn, A. W. Tucker) կողմից:

Հայտանիշ 3.5. (բավարար պայմաններ առաջին կարգի մաքսիմումի (մինիմումի) համար): Դիցուք ունենք $(x^*; \lambda^*)$ կետը, որը բավարարում է (3.16) համակարգին, երբ $\lambda^* \neq 0$-ի, նրա ակտիվ սահմանափակումների թիվը համընկնում է փոփոխականների

n թվի հետ (այդ դեպքում՝ օրինաչափության պայմանը բավարարվում է): Եթե $\lambda_j^* > 0$ բոլոր $j \in J_a$-ի համար, ապա x^* կետը պայմանական տեղական մինիմումի կետ է: Եթե $\lambda_j^* < 0$ բոլոր $j \in J_a$-ի համար, ապա x^*-ը խնդրի պայմանական տեղական մաքսիմումի կետ է (3.15) խնդրում:

Հայտանիշ 3.6 (անհրաժեշտ պայման երկրորդ կարգի մաքսիմումի (մինիմումի) համար): Դիցուք x^*-ը (3.16) խնդրի համար ռեգուլյար մինիմումի (մաքսիմումի) կետ է և $(x^*; \lambda^*)$-ը (3.16) համակարգի լուծումն է: Այդ դեպքում $(x^*; \lambda^*)$ կետում հաշված Լագրանժի դասական ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը ոչ բացասական է (ոչ դրական է)՝

$$d^2L(x^*; \lambda^*) \geq 0; \quad [d^2L(x^*; \lambda^*) \leq 0]; \qquad (3.17)$$

բոլոր $dx \in R^n$- երի համար, որ

$$dg_j(x^*) = 0;\ j \in J_a;\ \lambda_j^* > 0\ \left(\lambda_j^* < 0\right);$$

$$dg_j(x^*) \leq 0;\ j \in J_a;\ \lambda_j^* = 0:$$

Հայտանիշ 3.7 (բավարար պայման երկրորդ կարգի էքստրեմումի համար): Դիցուք $(x^*; \lambda^*)$-ը (3.16) համակարգին բավարարող լուծումն է λ_0^*-ի դեպքու: Եթե այս կետում

$$d^2L(x^*; \lambda^*) > 0; \quad [d^2L(x^*; \lambda^*) < 0]; \qquad (3.17)$$

բոլոր ոչզրոյական $dx \in R^n$-երի համար, որ

$$dg_j(x^*) = 0;\ j \in J_a;\ \lambda_j^* > 0\ \left(\lambda_j^* < 0\right);$$

$$dg_j(x^*) \leq 0;\ j \in J_a;\ \lambda_j^* = 0:$$

ապա x^* կետը հանդիսանում է լոկալ մինիմումի (մաքսիմումի) կետ (3.15) խնդրում:

Խնդրի լուծման ռազմավարությունը.

Քայլ 1. Կազմել Լագրանժի ընդհանրացված ֆունկցիան՝

$$L(x;\ \lambda_0; \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, g_j(x):$$

Քայլ 2. Գտնել Լագրանժի ընդհանրացված ֆունկցիայի առաջին կարգի մինիմումի (մաքսիմումի) համար անհրաժեշտ պայմանները.

ա) $\dfrac{\partial L(x^*; \lambda_0^*; \lambda^*)}{\partial x_i} = 0; \quad (i = 1; 2; \cdots; n);$

բ) $g_j(x^*) \leq 0; \quad (j = 1; 2; \cdots; m);$

գ) $\lambda_j^* \geq 0; \quad (j = 1; 2; \cdots; m)$ մինիմումի; $\quad \lambda_j^* \geq 0; \quad (j = 1; 2; \cdots; m)$ մաքսիմում;

դ) $\lambda_j^* g_j(x^*) = 0; \quad (j = 1; 2; \cdots; m);$

Քայլ 3. Լուծել համակարգը երկու դեպքի համար՝

1) $\lambda_0^* = 0$;

2) $\lambda_0^* \neq 0$; (այս դեպքում պայմանները բաժանում ենք λ_0^*-ի վրա և փոխարինում $\lambda^*/_{\lambda_0^*}$-ը λ^*-ով):

Արդյունքում գտնել պայմանական-ստացիոնար x^*-երը, ընտրելով այն ստացված կետերը, որոնց դեպքում $\lambda_0^* \neq 0$-ի (դրանք կարող են լինել կանոնավոր էքստրեմալ կետեր): Յուրաքանչյուրում Երկու դեպքերում էլ պետք դիտարկել 2^mտարբերակներ, լրացուցիչ ոչկոշտ « գ)» պայմանը բավարարելու համար:

Քայլ 4. Քայլ 3-ում ընտրված կետերի համար ստուգեք բավարար պայմանները առաջին կամ երկրորդ կարգի էքստրեմության համար՝

Առաջին կարգի բավարար պայմանները ստուգելու համար պետք է.

ա) որոշել x^* կետում գործող ակտիվ սահմանափակումների l թիվը.

բ) եթե $l = n$ և $\lambda_j^* > 0$ բոլոր j _ Ja $j \in J_a$-ի համար, ապա x*-ը տեղական մինիմում է, եթե $l = n$ և $\lambda_j^* < 0$ բոլոր $j \in J_a$-ի համար, ապա x*-ը տեղական մաքսիմում է:

գ) Եթե $l < n$ կամ համապատասխան կամ Լանգրանժի բազմապատկիչները չեն բավարարում առաջին կարգի բավարար պայմանները, այդ դեպքում պետք է ստուգել երկրորդ կարգի բավարար պայմանները.

Երկրորդ կարգի բավարար պայմանները ստուգելու համար պետք է.

ա) գտնել Լանգրանժի դասական ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի արտահայտությունը$(x^*; \lambda^*)$ կետում՝

$$d^2L(x^*;\lambda^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x^*;\lambda^*)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j;$$

բ) գրել ակտիվ սահմանափակումների առաջին կարգի դիֆերենցիալների վրա դրված պայմանները՝

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i}dx_i = 0;\ j \in J_a;\ \lambda_j^* > 0; \left(\lambda_j^* < 0\right); \qquad (3.18)$$

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i}dx_i \leq 0;\ j \in J_a;\ \lambda_j^* = 0;$$

գ) հետազոտել Լագրանժի դասական ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի նշանը ոչ զրոյական dx_i-երի համար, որոնք բավարարում են (3.18) համակարգին: Եթե $d^2L(x^*;\lambda^*) > 0$-ից, ապա x^*-ը պայմանական լոկալ մինիմում է, իսկ $d^2L(x^*;\lambda^*) > 0$-ի դեպքում x^*-ը պայմանական տեղական մաքսիմում է:

Եթե առաջին և երկրորդ կարգի բավարար պայմանները չեն բավարարվում, ապա պետք է ստուգել երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանների կատարումը (**հայտանիշ 3.6**), հետևելով նմանատիպ ընթացակարգին: Եթե դրանք կատարվեն, ապա լրացուցիչ հետազոտություն է անհրաժեշտ, եթե ոչ, ապա x*-ում պայմանական էքստրեմում չկա:

Պայմանական էքստրեմումը անհավասարությունների տիպի սահմանափակումների դեպքում

Աղյուսակ 3.2.

№ h/h	Առաջին կարգի անհրաժեշտ պայման			Առաջին կարգի բավարար պայման ($\lambda_0^* \neq 0$)		
	$d^2L(x^*;\lambda_0^*;\ \lambda^*)$ $\lambda_j^* g_j(x^*)$	$g_j(x^*)$	$\lambda_0^* \geq 0;$ λ_j^*	ակտիվ սահմանափակումների l թիվը	$\lambda_j^*;$ $j \in J_a$	x^*-ի պայմանական էքստրեմումի տիպը
	($j = 1; 2; \cdots; m$)					
1.	0	≤ 0	≥ 0	n	> 0	լոկալ պայմանական մինիմում
2.	0	≤ 0	≤ 0	n	< 0	լոկալ պայմանական մաքսիմում

Քայլ 5. Հաշվել ֆունկցիայի արժեքները պայմանական էքստրեմումի կետերում, եթե դիտարկվող (3.15) խնդրի ծայրահեղ պայմանները տրված են (Աղյուսակ 3.2)-ում և , (Աղյուսակ 3.3)-ում:

Պայմանական էքստրեմումի որոնման խնդրում երկրորդ կարգի անհրաժեշտ և բավարար պայմանները անհավասարությունների տիպի սահմանափակումների դեպքում

Աղյուսակ 3.2.

№ h/h	$d^2L(x^*;\lambda^*)$	$dg_j(x^*)$ $j \in J_a$			x^*-ի պայմանական էքստրեմումի տիպը
		$\lambda_j^* > 0$	$\lambda_j^* < 0$	$\lambda_j^* = 0$	
1.	> 0	$0; dx_i \neq 0$		≤ 0	պայմանական լոկալ մինիմում
2.	< 0		$0; dx_i \neq 0$	≤ 0	պայմանական լոկալ մաքսիմում
3.	≥ 0	0		≤ 0	հնարավոր է լինել պայմանական լոկալ մինիմում, պահանջվում է լրացուցիչ հետազոտում
4.	≤ 0		0	≤ 0	հնարավոր է լինել պայմանական լոկալ մաքսիմում, պահանջվում է լրացուցիչ հետազոտում
5.	$= 0$	0		≤ 0	պահանջվում է լրացուցիչ հետազոտում
6.	$= 0$		0	≤ 0	պահանջվում է լրացուցիչ հետազոտում
7.	$\gtrless 0$	0		≤ 0	էքստրեմում չկա
8.	$\gtrless 0$		0	≤ 0	էքստրեմում չկա

Օրինակ 3.12. Գտնել

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \ \to extr;$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 \le 0$$

խնդրի պայմանական էքստրեմումը:

Լուծում. 1.Կազմենք Լանգրանժի ընդհանրացված ֆունկցիան՝

$$L(x;\ \lambda_0; \lambda_1) = \ \lambda_{\mathbf{0}}(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_1(x_1 + x_2 - 2):$$

2. Գրենք առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանը՝

ա) $\dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0; \lambda_1)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + \lambda_1 = 0;\quad \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0; \lambda_1)}{\partial x_2} = 2\lambda_0 x_2 + \lambda_1 = 0;$

բ) $x_1 + x_2 - 2 \le 0;$

գ) $\lambda_1 \ge 0$ մինիմումի համար; $\lambda_1 \le 0$ մաքսիմումի համար;

դ) $x_1 + x_2 - 2 = 0;$

3. Համակարգը լուծենք երկու դեպքի համար՝

Դեպք 1. $\lambda_0 = 0$: Այդ դեպքում 2. ա)-ից հետևում է, որ $\lambda_1 = 0$: Այս դեպքը հակասում է **հայտանիշ 3.4**-ի պահանջին ոչզրոյական $(\lambda_0;\ \lambda_0)^T$ վեկտորի վերեբերյալ:

Դեպք 2. $\lambda_0 \ne 0$: Բաժանենք 2. ա)-ի համակարգը λ_0-ի վրա և ${}^{\lambda_1}/_{\lambda_0}$-ը փոխարինենք λ_1-ով: Այս դեպքում Լանգրանժի ընդհանրացված ֆունկցիան փոխվում է դասականի

ա) $\dfrac{\partial L(x;\ \lambda_1)}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 = 0;\quad \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_1)}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 = 0;$

բ) $x_1 + x_2 - 2 \le 0;$

գ) $\lambda_1 \ge 0$ մինիմումի համար; $\lambda_1 \le 0$ մաքսիմումի համար;

դ) $x_1 + x_2 - 2 = 0;$

Վերոգրյալ դ) լրացուցիչ ոչկոշտ պայմանից հետևում է՝

1) $\lambda_1 = 0$ (փաստորեն լուծված է ոչպայմանական էքստրեմումի որոնման խնդիրը) դեպքում $x_1^* = x_2^* = 0;\ \lambda_1^* = 0$ և բ) պայմանը կատարվում է, այսինքն կատարվում է և մինիմումի, և մաքսիմումի անհրաժեշտ պայմանները (Աղյուսակ 3.2-ի 1-ին, 2-րդ տ.):

2) $\lambda_1 \ne 0$: Այս դեպքում

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2 = 0; \\ 2x_1 + \lambda_1 = 0; \\ 2x_2 + \lambda_1 = 0; \end{cases}$$

կստանանք՝ $x_1^* = x_2^* = 1;\ \lambda_1^* = -2$: Քանի որ $\lambda_1^* < 0$, ապա մինիմումի անհրաժեշտ պայմանը չի կատարվում ($(1;1)^T$ կետում մինիմում չկա), բայց կատարվում է այդ մաքսիմումի անհրաժեշտ պայմանը:

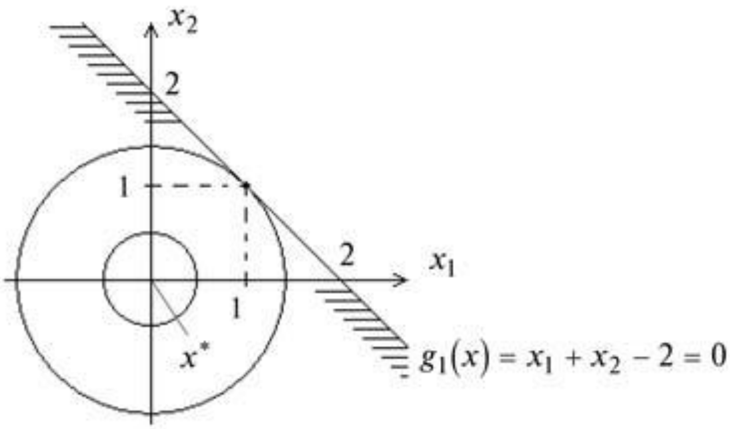
4. Ստուգենք բավարար էքստրեմալ պայմանների կատարումը:

$x^* = (0;\ 0)^T$ կետում սահմանափակումն ակտիվ չէ, քանի որ $g_1(x^*) = -2\ < 0$, ուստի առաջին կարգի բավարար պայմանները բավարարված չեն (Աղյուսակ 3.2-ի 1- ին և 2-րդ տողերը):

Ստուգենք երկրորդ կարգի պայմանները: Քանի որ

$$d^2L(x^*;\ \lambda^*) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 > 0;$$

երբ $dx \neq 0$, ապա $x^* = (0;\ 0)^T$ կետը պայմանական ռեգուլյար լոկալ մինիմում է (Աղյուսակ 3.3-ում 1-ին տող), որը համընկնում է այս խնդրի ոչպայմանական մինիմումի հետ (նկ. 3.10):



Նկ. 3.10

Մյուս կողմից, $f(x)$ ֆունկցիան ուռուցիկ է, իսկ X բազմությունը նույնպես ուռուցիկ է (տես Սահմանում 1.7 և օրինակ 1.16): Հետևաբար, $x^* = (0;\ 0)^T$ կետում ձեռք է բերվել գլոբալ պայմանական մինիմումը (3.4 Դիտողություններ 9-րդ հատված), և առաջին և երկրորդ կարգի բավարար պայմանները կարելի է և չստուգել:

$x^* = (1;\ 1)^T$ կետում սահմանափակումն ակտիվ է, բայց $l = 1\ < n\ = 2$, ուստի առաջին կարգի բավարար պայմանները բավարարված չեն: Ստուգենք բավարար պայմանները երկրորդ կարգի մաքսիմումի համար: Ունենք

$$d^2L(x^*;\ \lambda^*) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2;$$

$$dg_1(x^*) = dx_1 + dx_2 = 0;\ \Rightarrow\ dx_1 = -dx_2;$$

Հետևաբար, այստեղից կստանան՝ $d^2L(x^*;\ \lambda^*) = 4dx_2^2 > 0$, երբ $dx_2 \neq 0$, այսինք այս կետում կատարվում է մաքսիմումի անհրաժեշտ պայմանը, բայց բավարար պայմանը չի կատարվում (Աղյուսակ 3.3-ի տող 2):

Ստուգենք անհրաժեշտ պայմանները երկրորդ կարգի առավելագույնի համար:

Քանի որ $d^2L(x^*;\ \lambda^*) = 4dx_2^2 > 0$ցանկացած dx_2-ի համար, ապա մաքսիմումի համար անհրաժեշտ պայմանները բավարարված չեն (աղյուսակ 3.3-ի 4-րդ տող), ուստի $x^* = (1;\ 1)^T$ կետում մաքսիմում չկա:

5. Հաշվենք ֆունկցիայի արժեքը պայմանական մինիմումի կետում՝ $f(x^*) =\ 0$:

Օրինակ 3.13. Գտնել

$$f(x) = x_1 + x_2\ \rightarrow extr;$$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0$$

Լուծում. 1. Կազմենք Լանգրանժի ընդհանրացված ֆունկցիան՝

$$L(x;\ \lambda_0; \lambda_1) = \lambda_{\mathbf{0}}(x_1 + x_2) + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1):$$

2. Գրենք առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանները՝

ա) $\dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0;\lambda_1)}{\partial x_1} = \lambda_0 + 2\lambda_1 x_1 = 0;\quad \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0;\lambda_1)}{\partial x_2} = \lambda_0 + 2\lambda_1 x_2 = 0;$

բ) $x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0;$

գ) $\lambda_1 \ge 0$ մինիմումի համար; $\lambda_1 \le 0$ մաքսիմումի համար;

դ) $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0;$

3. Համակարգը լուծենք երկու դեպքի համար՝

Դեպք 1. $\lambda_0 = 0$: Այդ դեպքում **հայտանիշ 3.4**-ից հետևում է, որ $\lambda_1 \ne 0$: Այս դեպքում $x_1^* = x_2^* = 0$ և չի կատարվում լրացուցիչ ոչկոշտ պայմանի գ) կետը:հակասում է **հայտանիշ 3.4**-ի պահանջին ոչզրոյական $(\lambda_0;\ \lambda_0)^T$ վեկտորի վերեբերյալ:

Դեպք 2. $\lambda_0 \ne 0$: Բաժանենք 2. ա)-ի համակարգը λ_0-ի վրա և ${}^{\lambda_1}/_{\lambda_0}$-ը փոխարինենք λ_0 –ով; Այս դեպքում Լանգրանժի ընդհանրացված ֆունկցիան փոխվում է դասականի՝

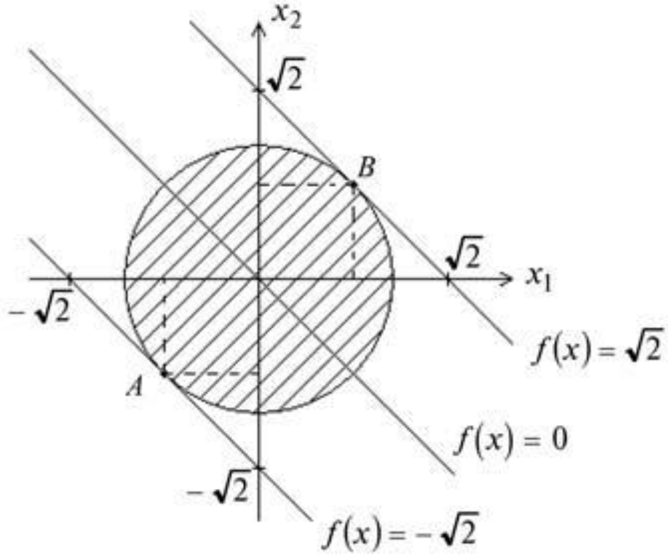
ա) $\dfrac{\partial L(x;\ \lambda_1)}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda_1 x_1 = 0;\quad \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_1)}{\partial x_2} = 1 + 2\lambda_1 x_2 = 0;$

բ) $x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0;$

գ) $\lambda_1 \ge 0$ մինիմումի համար; $\lambda_1 \le 0$ մաքսիմումի համար;

դ) $\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0;$

Վերջին լրացուցիչ ոչկոշտ դ) պայմանից բխում է երկու դեպք՝



Նկ. 3.11

1) $\lambda_1 = 0$, այդ դեպքում ա) պայմանը չի կատարվում:

2) $\lambda_1 \neq 0$, այդ դեպքում համակարգը կունենանա երկու լուծում (Նկ. 3.11).

- A կետ; $x_1^* = x_2^* = -\sqrt{2}/_2$; $\lambda_1^* = \sqrt{2}/_2$ –այս կետում կարող է լինել մինիմում:
- B կետ; $x_1^* = x_2^* = \sqrt{2}/_2$; $\lambda_1^* = -\sqrt{2}/_2$ –այս կետում կարող է լինել մաքսիմում:

4. Ստուգենք էքստրեմումի բավարար պայմանները: A և B կետերում ակտիվ են սահմանափակումները, բայց $l = 1 < n = 2$: Այսինքն առաջին կարգի պայմանները չեն բավարարվում: Ստուգենք երկրորդ կարգի պայմանները՝

$$\begin{cases} d^2L(x;\lambda^*) = \mathbf{2}\lambda_1^* dx_1^2 + \mathbf{2}\lambda_1^* dx_2^2 \\ dg_1(x) = 2x_1^*\, dx_1 + x_2^*\, dx_2 = 0 \end{cases};$$

A և B կետերում $dx_1 = -dx_2$: Քանի որ $d^2L(A) = \mathbf{4}\lambda_1^* dx_2^2 = 2\sqrt{2}dx_2^2 > 0, dx_2 \neq 0,$ ապա A կետում ռեգուլյար լոկալ պայմանական մինիմում է (աղյուսակ 3.3-ի 1-ին տ.): Քանի որ $d^2L(B) = \mathbf{4}\lambda_1^* dx_2^2 = -2\sqrt{2}dx_2^2 < 0$, ապա B կետում ռեգուլյար լոկալ պայմանական մաքսիմում է (աղյուսակ 3.3-ի 2-րդ տող):

Մյուս կողմից, $f(x)$; $-f(x) = -x_1 - x_2$ ֆունկցիաները սահմանափակումը ուռուցիկ են, իսկ ՝ ուռուցիկ (տե՛ս սահմանումները 1.7, 1.8 և օրինակ 1.16), A և B կետերում հասնում են գլոբալ էքստրեմումի: Բ (բաժին 9 դիտողություն 3.4): Առաջին և երկրորդ կարգի բավարար պայմանները փորձարկվեցին մեթոդիկան ցուցադրելու համար:

5. Հաշվենք նպատակային ֆունկցիայի արժեքը պայմանական էքստրեմումներում՝ $f(A) = -2;\quad f(b) = 2$:

Օրինակ 3.14. Գտնել պայմանական մաքսիմումը՝

$$\begin{cases} f(x) = x_1 \to \max; \\ g_1(x) = -x_2 \leq 0; \\ g_2(x) = x_2 - (1 - x_1)^3 \leq 0; \end{cases}$$

խնդրում:

Լուծում. 1. Կազմենք Լանգրանժի ընդհանրացված ֆունկցիան՝

$$L(x;\, \lambda_0; \lambda_1) = \lambda_{\mathbf{0}} x_1 + \lambda_1(-x_2) + \lambda_2[x_2 - (1 - x_1)^3]:$$

2. Գրենք պայմանական մաքսիմումի առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանները՝

ա) $\dfrac{\partial L(x;\, \lambda_0; \lambda_1)}{\partial x_1} = \lambda_0 + 3\lambda_2 x_1 = 0;\quad \dfrac{\partial L(x;\, \lambda_0; \lambda_1)}{\partial x_2} = -\lambda_1 + \lambda_2 = 0;$

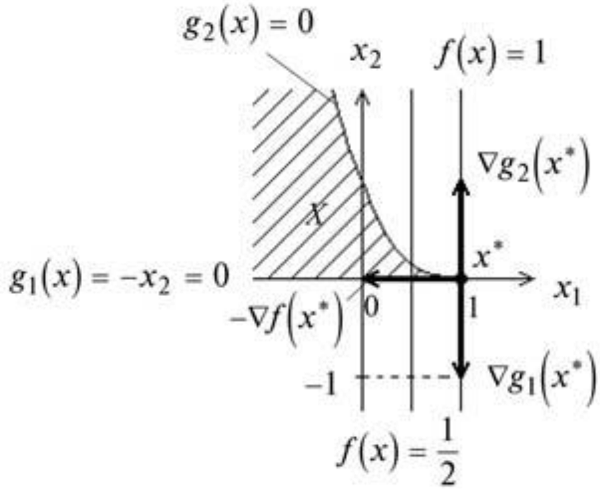
բ) $-x_2 \leq 0;\; x_2 - (1 - x_1)^3 \leq 0;$

գ) $\lambda_1 \leq 0;\; \lambda_1 \leq 0;$

դ) $\lambda_1(-x_2) = 0;\quad \lambda_2[x_2 - (1 - x_1)^3] = 0:$

3. Լուծենք համակարգը երկու դեպքի համար՝

Առաջին դեպքում $\lambda_0 = 0$, կունենանք $x_1^* = 1;\; x_2^* = 0$; որից հետևում է $\lambda_1 = \lambda_2 \leq 0$,



Նկ. 3.12

օրինակ, $\lambda_1^*=\lambda_2^*=-1$, կստացվի պայմանական ստացիոնար կետ $x^*=(1;0)^T$; $\lambda_0^*=0$ և ինչպես ցույց է տրված (Նկ. 3.12)-ում $f(x)$ ֆունկցիան $x^*=(1;0)^T$ կետում հասնում է ոչռեգուլյար լոկալ և գլոբալ մաքսիմումի, որում բավարարված չէ

$$\nabla g_1(x^*)=(0;-1)^T;\quad \nabla g_2(x^*)=(0;1)^T$$

գրադիենտների գծային անկախության պայմանը (Օրինակ 3.4), իսկ նպատակային $f(x)$ ֆունկցիայի հակագրադիենտը չի կարող ներկայացվել գրադիենտների ակտիվ սահմանափակումներով ոչդրական գծային համակցության տեսքով:

Վերոգրյալ 2.ա) պայմանը բավարարվում է միայն $\lambda_0^*=0$-ի համար:

Երկրորդ դեպքում $\lambda_0\neq 0$; Բաժանենք համակարգի հավասարումները λ_0-ի վրա և փոխարինենք՝ ${\lambda_1}/{\lambda_0}$ –ը λ_1-ով, իսկ ${\lambda_2}/{\lambda_0}$-ը λ_2-ով: Կունենանք՝

$$1+3\lambda_2x_1=0;\quad -\lambda_1+\lambda_2=0$$

$$-x_2\leq 0;\ \ x_2-(1-x_1)^3\leq 0;\ \ \lambda_1\leq 0;\ \ \lambda_1\leq 0;\ \lambda_1(-x_2)=0;\quad \lambda_2[x_2-(1-x_1)^3]=0:$$

Դիտարկենք լրացուցիչ ոչ կոշտության պայմանների չորս տարբերակ:

1) $\lambda_1=\lambda_2=0$ -համակարգը անհամատեղելի է ըստ առաջին հավասարման:

2) $\lambda_1\neq 0;\ \lambda_2=0$ -համակարգը անհամատեղելի է ըստ առաջին հավասարման:

3) $\lambda_1=0;\ \lambda_2\neq 0$ - երկրորդ հավասարումից ունենում ենք, որ $\lambda_1=\lambda_2=0$, այսինքն ստանում ենք հակասություն:

4) $\lambda_1\neq 0;\ \lambda_2\neq 0$ –այս դեպքում կունենանք $x_1=1;\ x_2=0$ և առաջին հավասարումը չի բավարարվում:

Նոր պայմանական ստցիոնար կետեր չեն հայտնաբերվել: Հետևաբար, խնդիրն ունի միայն մեկ կետ $x^*=(1;0)^T$ ոչռեգուլյար (անկանոն) մաքսիմում և $f(x^*)\ =\ 1$:

Օրինակ 3.15. Գտնել պայմանական էքստրեմումը

$$\begin{cases} f(x)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2\to \text{extr};\\ g_1(x)={x_1}^2+{x_2}^2-52\leq 0;\end{cases}$$

խնդրում:

Լուծում. 1. Կազմենք Լանգրանժի ընդհանրացված ֆունկցիան՝

$$L(x;\ \lambda_0;\lambda_1) = \ \lambda_{\mathbf{0}}[(x_1-2)^2+(x_2-3)^2]+\lambda_1[{x_1}^2+{x_2}^2-52]:$$

2. Գրենք պայմանական էքստրեմումի առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանները՝

ա) $\begin{cases}\dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0;\lambda_1)}{\partial x_1}=2[\lambda_0(x_1-2)+\lambda_1 x_1]=0\\ \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0;\lambda_1)}{\partial x_2}=2[\lambda_0(x_2-3)+\lambda_1 x_2]=0\end{cases};$

բ) ${x_1}^2+{x_2}^2-52\le 0;$

գ) $\lambda_1\le 0$ - մինիմում; $\lambda_2\ge 0$ – մաքսիմում:

դ) ${x_1}^2+{x_2}^2-52=0$:

3. Լուծենք համակարգը երկու դեպքի համար՝

Առաջին դեպքում $\lambda_0=0$; կունենանք $\lambda_1\ne 0$ ըստ **հայտանիշ 3.4**-ի, որի համար $x_1=2;\ x_2=3$; և չի 2. դ)-ի լրացուցիչ ոչկոշտության պայմանը

Երկրորդ դեպքում $\lambda_0\ne 0$: Բաժանելով համակարգի հավասարումները λ_0-ի վրա և փոխարինենք ${}^{\lambda_1}/_{\lambda_0}$-ն λ_1-ով, կստանանք՝

ա) $\begin{cases}\dfrac{\partial L(x;\lambda_1)}{\partial x_1}=2(x_1-2)+2\lambda_1 x_1=0\\ \dfrac{\partial L(x;\lambda_1)}{\partial x_2}=2(x_2-3)+2\lambda_2 x_2=0\end{cases};$

բ) ${x_1}^2+{x_2}^2-52\le 0;$

գ) $\lambda_1\le 0$ - մինիմում; $\lambda_1\ge 0$ – մաքսիմում:

դ) ${x_1}^2+{x_2}^2-52=0$:

Դիտարկենք «դ» պայմանի կատարման երկու տարբերակ.

1) $\lambda_1=0$: Այս տարբերակում $x_1=2;\ x_2=3$: Կատարվում է մաքսիմումի և մինիմումի անհրաժեշտ պայմանները (Աղյուսակ 3.2; տող առաջին և երկրորդ): Ունենք պայմանական-ստացիոնար A կետը՝ $x_1^*=2;\ x_1^*=3;\ \lambda_1^*=0$:

2) $\lambda_1\ne 0$: Այս տարբերակում ${x_1}^2+{x_2}^2-52=0$ և համակարգը ունի լուծում՝

$$B \text{ կետ};\ x_1^*=4;\ x_1^*=6;\ \lambda_1^*=-\frac{1}{2};$$

$$C \text{ կետ};\ x_1^*=-4;\ x_1^*=-6;\ \lambda_1^*=-\frac{3}{2}:$$

Քանի որ $\lambda_1^*<0$, ապա այդ երկու կետերում էլ մինիմում չկան, բայց կարող են լինել մաքսիմում:

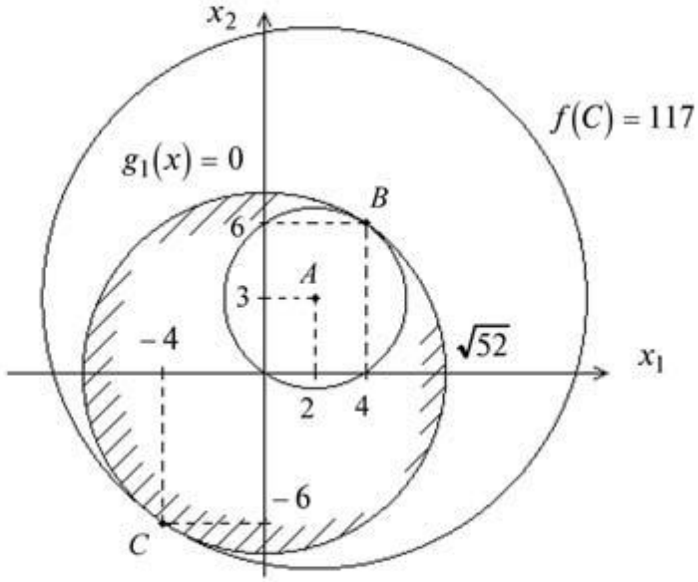
4. Ստուգենք էքստրեմումի բավարար պայմանները: Երկու պայմանական անշարժ կետերում էլ սահմանափակումը վերածվում է հավասարության, այսինքն՝ ակտիվ են: Քանի որ ակտիվ սահմանափակումների թիվը $l=1<\ 2=\ n$ է, այդ դեպքում առաջին

կարգի պայմանները չեն բավարարվում:

Քանի որ

$$-f(x) = -(x_1 - 2)^2 - (x_2 - 3)^2$$

ֆունկցիան ուռուցիկ չէ (տես Սահմանում 1.8), անհրաժեշտ պայմանները բավարար



Նկ. 3.13

չեն (Դիտողություններ 3.4 , կետ 9-րդ): Ստուգենք երկրորդ կարգի պայմանները.

$$d^2L(x;\lambda^*) = (\mathbf{2} + \mathbf{2}\lambda_1^*)dx_1^2 + (\mathbf{2} + \mathbf{2}\lambda_1^*)dx_2^2:$$

A կետում սահմանափակումն ակտիվ չէ: Քանի որ $\lambda_1^* = 0$, այդ դեպքում՝

$$d^2L(x;\lambda^*) = \mathbf{2}dx_1^2 + \mathbf{2}dx_2^2 > 0, \text{երբ } dx \neq 0:$$

Հետևաբար, A կետում պայմանական լոկալ մինիմում է (Աղյուսակ 3.3. տող 3): Քանի որ $f(x)$ նպատակային ֆունկցիան ուռուցիկ է ինչպես նաև իրագործելի լուծումների բազմությունը՝ ուռուցիկ (նկ.3.13), ապա կարող ենք եզրակացնել, որ այս դեպքում անհրաժեշտ մինիմում (նվազագույն) պայմանը բավարար է: A կետում կա գլոբալ նվազագույնը (Դիտողություններ 3.4-ի 9-րդ բաժին):

B և C կետերում սահմանափակումն ակտիվ է: Հետևաբար՝

$$d\mathrm{g}_1(x^*) = 2x_1^*dx_1 + 2x_1^*dx_1 = 0;$$

որտեղից հետևում է, որ՝ $dx_1 = -1.5\ dx_2$, և հաշվի առնելով $\lambda_1^* = -0.5 < 0$ կստանանք՝

$$d^2L(B) = (-1.5\ dx_2)^\mathbf{2} + dx_2^2 = 3.25dx_2^2 > 0,$$

այսինքն մաքսիմումի բավարար պայմանը չի կատարվում (Աղյուսակ 3.3. տող 2): Մյուս կողմից $d^2L(B) \geq 0$ բոլոր dx_2-ների համար, այսինքն՝ B կետում երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանը չի կատարվում (Աղյուսակ 3.3. տող 4): Նշանակում է B կետում էքստրեմում չկա:

Քանի որ

$$d^2L(C\,) = -\,(-1.5\,dx_2)^{\mathbf{2}} - dx_2^2 = -3.25dx_2^2 < 0; \text{ երբ } dx_2 \neq 0,$$

ապա մաքսիմումի անհրաժեշտ պայմանը կատարվում է և C կետում պայմանական լոկալ մաքսիմում է (Աղյուսակ 3.3. տող 2):

5. Ոչոշենք $f(x)$ նպատակային ֆունկցիայի արժեքները էքստրեմումի կետերում՝

$$f(A) = 0;\;\; f(C) = 117;$$

Օրինակ 3.16. Գտնել

$$f(x) = (x_1 - \alpha)^2 + x_2^2 \to \text{extr};$$

$$\text{g}_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0;\quad \text{g}_2(x) = -x_1 \leq 0;$$

խնդրում պայմանական էքստրեմումը $\alpha = 2;\ \alpha = 1; \alpha = 0;\ \alpha = -1$ արժեքների դեպքում:

Լուծում. 1. Կազմենք Լանգրանժի ընդհանրացված ֆունկցիան՝

$$L(x;\ \lambda_0; \lambda_1; \lambda_2) =\ \lambda_{\mathbf{0}}[(x_1 - \alpha)^2 + x_2^2] + \lambda_1[{x_1}^2 + {x_2}^2 - 1] - \lambda_2 x_1:$$

2. Գրենք պայմանական էքստրեմումի առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանները՝

ա) $$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0; \lambda_1; \lambda_2)}{\partial x_1} = 2\lambda_0(x_1 - \alpha) + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0: \\ \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0; \lambda_1; \lambda_2)}{\partial x_2} = 2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0: \end{cases}$$

բ) $x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0;\quad -x_1 \leq 0;;$

գ) $\lambda_1 \geq 0;\ \lambda_2 \geq 0$- մինիմում; $\lambda_1 \leq 0;\ \lambda_2 \leq 0$ – մաքսիմում:

դ) $\lambda_1[{x_1}^2 + {x_2}^2 - 1] = 0;\quad -\lambda_2 x_1 = 0:$

3. Լուծենք համակարգը երկու դեպքի համար՝

Առաջին դեպքում $\lambda_0 = 0$: Այդ դեպքում 2. ա) կետի համակարգից կստանանք՝

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0; \\ \quad\lambda_1 x_2 = 0; \end{cases}$$

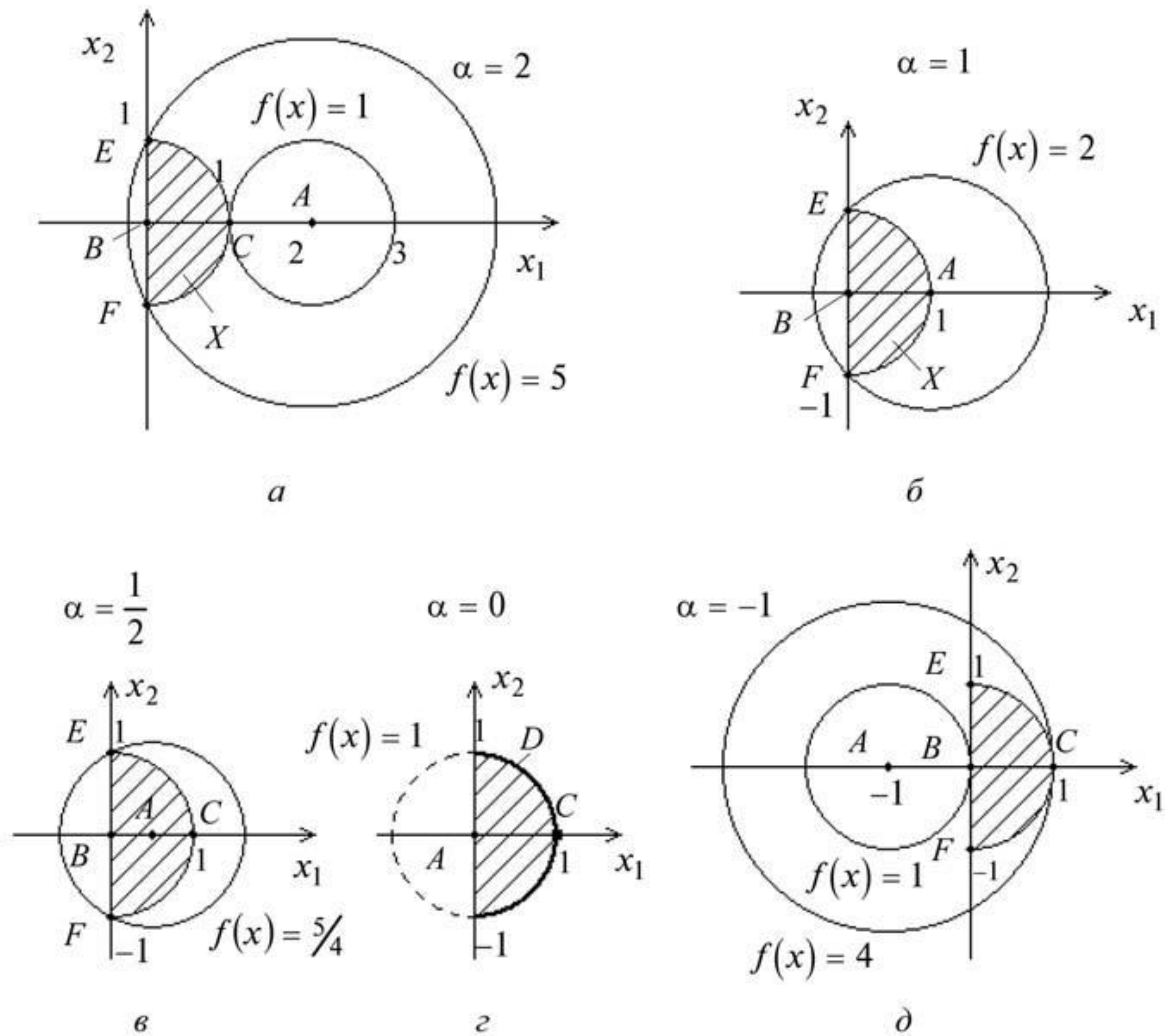
Դիտարկենք 2. դ) կետի պայմանի կատարման չորս տարբերակ՝

1) $\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 0$ – այս պայմանը կակասում է հայտանիշ 3.4.-ին:

2) $\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 \neq 0$ – համակարգի առաջին հավասարումից $\lambda_2 = 0$, այսինքն ունենք հակասություն:

3) $\lambda_1 \neq 0;\ \lambda_2 = 0$ –այս դեպքում կստանանք $x_1 = x_2 = 0$, այսինքն 2. դ)-ի լրացուցիչ ոչկոշտության առաջին պայմանը չի կատարվում:

4) $\lambda_1 \neq 0;\ \lambda_2 \neq 0$ –$x_1 = 0;\ x_2 = \pm 1$: Այս դեպքում 2. ա)-ի երկրորդ հավասարումը չի բավարարվում:



Նկ. 3.14

Երկրորդ դեպքում $\lambda_0 \neq 0$. Բաժին 2.ա)-ում տրված համակարգի հավասարումները բաժանենք λ_0-ի և ${}^{\lambda_1}/_{\lambda_0}$; ${}^{\lambda_2}/_{\lambda_0}$-ները փոխարինենք համապատասխանաբար λ_1-ով, λ_2-ով: Կստանանք՝

ա) $$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x;\lambda_1;\lambda_2)}{\partial x_1} = 2(x_1 - \alpha) + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L(x;\lambda_1;\lambda_2)}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 x_2 = 0 \end{cases};$$

բ) $x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0;\quad -x_1 \leq 0;$;

գ) $\lambda_1 \geq 0;\ \lambda_2 \geq 0$- մինիմում; $\lambda_1 \leq 0;\ \lambda_2 \leq 0$ – մաքսիմում:

դ) $\lambda_1[{x_1}^2 + {x_2}^2 - 1] = 0;\quad -\lambda_2 x_1 = 0$:

Դիտարկենք «դ» պայմանը բավարարելու չորս տարբերակ.

1) $\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 0$- տանում ենք պայմանական -ստացիոնար (անշարժ) կետ՝

$$A: \quad x_1^* = \alpha;\ x_2^* = 0;\ \ \lambda_1^* = 0;\ \ \lambda_2^* = 0;$$

2) $\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 \neq 0$- այստեղից կունենանք՝ $x_1 = 0;\ x_2 = 0$; իսկ $\lambda_2 = -2\alpha$; տանում ենք պայմանական – ստացիոնար (անշարժ) կետ՝

$$B: \quad x_1^* = 0;\ x_2^* = 0;\ \ \lambda_1^* = 0;\ \ \lambda_2^* = -2\alpha;$$

3) $\lambda_1 \neq 0;\ \lambda_2 = 0$- այստեղից կունենանք՝

$$\begin{cases} x_1{}^2 + x_2{}^2 - 1 = 0; \\ 2(x_1 - \alpha) + 2\lambda_1 x_1 = 0; \\ 2x_2 + \lambda_1 x_2 = 0; \end{cases}$$

Վերոգրյալ համակարգի երրորդ հավասարումից կստանանք՝ $x_2 = 0$; կամ $\lambda_1 = -1$: Երբ $x_2 = 0$, հետևում է, որ $x_1 = \pm 1$; Սահմանափակմանը բավարարում է $x_1 = 1$: Այդ դեպքում՝ $\lambda_1 = \alpha - 1$; Որոնվեց պայմանական -ստացիոնար (անշարժ) կետ՝

$$C: \quad x_1^* = 1;\ x_2^* = 0;\ \ \lambda_1^* = \alpha - 1;\ \ \lambda_2^* = 0;$$

Երբ $\lambda_1^* = -1$, կունենանք, որ $\alpha = 0$: Այդ դեպքում կլինի պայմանական- ստացիոնար անսահման D կետերի հավաքածու, որոնք ընկած են կիսաշրջանի վրա (նկ. 3.14*գ*);

4) $\lambda_1 \neq 0;\ \lambda_2 \neq 0$- այստեղից կունենանք՝ $x_1 = 0;\ x_2 = \pm 1$; այդ դեպքում՝ $\lambda_1 = -1$; իսկ $\lambda_1 = -2\alpha$; Կստանանք երկու պայմանական ստացիոնար կետեր՝

$$E: \quad x_1^* = 0;\ x_2^* = 1;\ \ \lambda_1^* = -1;\ \ \lambda_2^* = -2\alpha;$$

$$F: \quad x_1^* = 0;\ x_2^* = -1;\ \ \lambda_1^* = -1;\ \ \lambda_2^* = -2\alpha;$$

Այսպիսով, կան վեց պայմանական -ստացիոնար (անշարժ) կետեր:

4. Ստուգենք էքստրեմության բավարար պայմանները α պարամետրի տարբեր արժեքների համար (նկ. 3.14*ա–ե*):

Հետազոտենք A: $x_1^* = \alpha;\ x_2^* = 0;\ \ \lambda_1^* = 0;\ \ \lambda_2^* = 0$; Երբ $\alpha = 2$, այդ դեպքում A կետը չի գտնվում իրագործելի լուծումների հավաքածուում, քանի որ $x_1^* = 2;\ x_2^* = 0$: Երբ $\alpha = 1$, կունենանք՝ $x_1^* = 1;\ x_2^* = 0;\ \ \lambda_1^* = \lambda_2^* = 0$: A-ում առաջին սահմանափակումը ակտիվ է: Քանի որ ակտիվ սահմանափակումների թիվը ՝ $l = 1 < n = 2$, այդ դեպքում առաջին կարգի բավարար պայմաններ չեն կատարվում և պետք է ստուգենք երկրորդ կարգի պայմանները՝

$$d^2L(A\,) = \ (\mathbf{2} + \mathbf{2}\lambda_1^*)dx_1^2 + (\mathbf{2} + \mathbf{2}\lambda_1^*)dx_2^2 = \mathbf{2}dx_1^2 + \mathbf{2}dx_2^2;$$

$$dg_1(A) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 2dx_1 = 0;$$

Ստանում ենք $d^2L(A\,) = \mathbf{2}dx_2^2 > 0$, երբ $dx_2 \neq 0$, այսինքն A կետում պայմանական լոկալ մինիմում է (Աղյուսակ 3.3. տող 1)։ Երբ $\alpha = 0.5$, կունենանք՝ $x_1^* = 0.5$; $x_2^* = 0$ և $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0$։ ապա ակտիվ սահմանափակումներ չկան։ Քանի որ $d^2L(A) = \mathbf{2}dx_2^2 > 0$, երբ $x_2 \neq 0$, ուրեմն A կետում լոկալ պայմանական մինիմում է (Աղյուսակ 3.3. տող 1)։ Երբ $\alpha = 0$, կունենանք՝ $x_1^* = 0$; $x_2^* = 0$ և $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0; \Rightarrow A$ կետում ակտիվ է երկրորդ սահմանափակումը՝

$$d^2L(A) = \mathbf{2}dx_1^2 + \mathbf{2}dx_2^2;$$

$$d\mathrm{g}_2(A) = -dx_1 = 0;$$

Քանի որ $d^2L(A) = \mathbf{2}dx_2^2 > 0$; երբ $dx_2 \neq 0$, A-ում պայմանական լոկալ մինիմում է։ Երբ $\alpha = -1$, կունենանք $x_1^* = 0$; $x_2^* = 0$, այսինքն A կետը չի պատկանում ընդունելի լուծումների բազմությանը։ Քանի որ նպատակային ֆունկցիան ուռուցիկ է, ինչպես նաև իրագործելի լուծումների X բազմությունն է ուռուցիկ, ապա, երբ $\alpha = 1$; 0.5; 0, նվազագույնի համար անհրաժեշտ պայմանները նույնպես բավարար են, իսկ գլոբալ մինիմումը (նվազագույնը) ձեռք է բերվում A կետում (Դիտողություններ 3.4. բաժին 9)։

Հետազոտենք B կետը; $x_1^* = 0$; $x_2^* = 0$; $\lambda_1^* = 0$; $\lambda_2^* = -2\alpha \neq 0$; Այս կետում ակտիվ է միայն երկրորդ սահմանափակումը և բավարարված չեն առաջին կարգի բավարար պայմանները։ Ստուգենք երկրորդ կարգի պայմանները՝

$$d^2L(B) = (\mathbf{2} + \mathbf{2}\lambda_1^*)dx_1^2 + (\mathbf{2} + \mathbf{2}\lambda_1^*)dx_2^2 = \mathbf{2}dx_1^2 + \mathbf{2}dx_2^2;$$

$$d\mathrm{g}_2(B) = -dx_1 = 0:$$

Այստեղից $d^2L(B) = \mathbf{2}dx_2^2 > 0$, երբ $x_2 \neq 0$։ Երբ $\alpha = 1$; 0.5; 0, ապա $\lambda_2^* = -2\alpha < 0$, այսինքն չեն կատարվում երկրորդ կարգի բավարար պայմանները, ոչ էլ անհրաժեշտ պայմանները (Աղյուսակ 3.3-ի 2-րդ և 4-րդ տողերը)։ Հետևաբար, α պարամետրի այս արժեքների համար B կետում չկա էքստրեմում (ծայրահեղություն)։ Եթե $\alpha = 0$, ապա $\lambda_2^* = 0$, որը հակասում է $\lambda_2^* \neq 0$ պայմանին։ Երբ $\alpha = -1$, ապա $\lambda_2^* \geq 0$ և B կետում բավարարվում է լոկալ մինիմումի բավարար պայմանը (Աղյուսակ 3.3. տող 1)։ Քանի որ $f(x)$-ը և X բազմությունը ուռուցիկ են, B կետում գլոբալ մինիմումի (նվազագույնի) հասնում է $\alpha = -1$-ի համար (Դիտողություններ 3.4. բաժին 9)։

Հետազոտենք C կետը; $x_1^* = 1$; $x_2^* = 0$; $\lambda_1^* = \alpha - 1 \neq 0$; $\lambda_2^* = 0$։ Երբ $\alpha = 2$, բխում է, որ $\lambda_1^* = 1 > 0$։ Ակտիվ է առաջին սահմանափակումը՝

$$d^2L(C) = (\mathbf{2} + \mathbf{2}\lambda_1^*)dx_1^2 + (\mathbf{2} + \mathbf{2}\lambda_1^*)dx_2^2 = \mathbf{2}dx_1^2 + \mathbf{2}dx_2^2;$$

$$d\mathrm{g}_1(C) = 2x_1^*dx_1 + 2x_2^*dx_2 = 2dx_1 = 0;$$

Քանի որ $d^2L(C) = \mathbf{2}dx_2^2 > 0$; երբ $dx_2 \neq 0$, ապա C կետում պայմանական լոկալ մինիմում է (Աղյուսակ 3.3. տող 1)։ Քանի որ $f(x)$-ը և X բազմությունը ուռուցիկ են, C կետում միաժամանակ գլոբալ մինիմում է։ (Դիտողություններ 3.4. բաժ. 9)։ Երբ $\alpha = 1$, ապա ստանում ենք $\lambda_1^* = 0$, որը հակասում է $\lambda_1^* \neq 0$ պայմանին, իսկ երբ $\alpha = 0.5$-ի, այդ դեպքում $\lambda_1^* = -0.5 < 0$; $\lambda_1^* = 0$։ Ակտիվ է երկրորդ սահմանափակումը՝

$$d^2L(C\ ) = \ (\mathbf{2}+\mathbf{2}\lambda_1^*)dx_1^2 + (\mathbf{2}+\mathbf{2}\lambda_1^*)dx_2^2 = dx_1^2 + dx_2^2;$$

$$dg_1(C) = 2x_1^*dx_1 + 2x_2^*dx_2 = 2dx_1 = 0;$$

Քանի որ $d^2L(C\ ) = \ \mathbf{2}dx_2^2 > 0$, բայց $\lambda_1^* = -0.5 < 0$, ապա չեն կատարվում երկրորդ կարգի ոչ բավարար, ոչ էլ անհրաժեշտ պայմանները (Աղյուսակ 3.3. տող 2 և 4)։ C-ում չկա էքստրեմում։ $\alpha = 0$-ի դեպքում ունենք $\lambda_1^* = -1 < 0$; $\lambda_2^* = 0$ և

$$d^2L(C\ ) = \ (\mathbf{2}+\mathbf{2}\lambda_1^*)dx_1^2 + (\mathbf{2}+\mathbf{2}\lambda_1^*)dx_2^2 \equiv 0;$$

բոլոր dx-երի համար։ Հետևաբար, պահանջվում է լրացուցիչ հետազոտություն, քանի որ առաջին կարգի առավելագույնի համար անհրաժեշտ պայմանները բավարարված են (Աղյուսակ 3.3. տող 6՝)։ Նկար 3.14d-ը ցույց է տալիս, որ C -ում կա պայմանական գլոբալ և տեղական մաքսիմում։ Երբ $\alpha = -1$-ի կունենանք՝ $\lambda_1^* = -2 < 0$; $\lambda_2^* = 0$։ Այդ դեպքում՝

$$d^2L(C\ ) = \ (\mathbf{2}+\mathbf{2}\lambda_1^*)dx_1^2 + (\mathbf{2}+\mathbf{2}\lambda_1^*)dx_2^2 = -dx_1^2 - dx_2^2;$$

$$dg_1(C) = 2x_1^*dx_1 + 2x_2^*dx_2 = 2dx_1 = 0;$$

Քանի որ $d^2L(C\ ) = -\ \mathbf{2}dx_2^2 < 0$, երբ $dx_2 \neq 0$, ապա C կետում պայմանական լոկալ մինիմում է (Աղյուսակ 3.3. տող 2)։

Ուսումնասիրենք D բազմությունը $\alpha = 0$-ի համար։ Այս դեպքում $\lambda_1^* = -1; \lambda_2^* = 0$։

Քանի որ

$$d^2L(C\ ) = \ (\mathbf{2}+\mathbf{2}\lambda_1^*)dx_1^2 + (\mathbf{2}+\mathbf{2}\lambda_1^*)dx_2^2 \equiv 0;$$

ապա լրացուցիչ ուսումնասիրություն է պահանջվում պայմանական առավելագույնի առկայության համար (Աղյուսակ 3.3 տող 6)։ Նկար 3.14d-ը ցույց է տալիս, որ գլոբալ մաքսիմումը (առավելագույնը) ձեռք է բերվել D բազմության վրա։

Ուսումնասիրենք E և F կետերը՝ $x_1^* = 0$; $x_2^* = \pm1$; $\lambda_1^* = -1$; $\lambda_2^* = -2\alpha$։

Երբ $\alpha = 2; 1; 0.5$; ստանում ենք $\lambda_1^* = -1 < 0$; $\lambda_2^* = -4$; -2; $-1 < 0$։ E և F կետերում երկու ակտիվ սահմանափակումներ կան՝ $l = 2 = n = 2$։ Քանի $\lambda_1^* < 0$; $\lambda_2^* < 0$, ապա բավարարված են առաջին կարգի բավարար պայմանները առավելագույնի համար (Աղյուսակ 3.2. տող 2)։ E և F կետերում կա լոկալ պայմանական մաքսիմում։ $\alpha = 0$-ի դեպքում $\lambda_2^* = 0$, որը հակասում է $\lambda_2^* \neq 0$ պայմանին։

Երբ $\alpha = -1$, կունենանք՝ $\lambda_1^* = -1 < 0$; $\lambda_2^* = 2 > 0$. Քանի որ մինիմումի, մաքսիմումի անհրաժեշտ պայմանները բավարարված չեն, ապա E և F կետերում էքստրեմում չկա (Աղյուսակ 3.2-ի 1-ին և 2-րդ շարքերում)։

5. Հաշվեք նպատակային ֆունկցիայի արժեքները էքստրեմում կետերում տարբեր α-երի համար (նկ. 3.14)՝

$$\alpha = 2; \quad f(C) = 1; \quad f(E) = f(F) = 5; \quad \alpha = 1; \quad f(A) = 0; \quad f(E) = f(F) = 2;$$

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad f(A) = 0; \quad f(E) = f(F) = \frac{5}{4}; \quad \alpha = 0; \quad f(A) = 0; \quad f(D) = 1;$$

$$\alpha = -1; \quad f(B) = 1; \quad f(C) = 4:$$

Օրինակ 3.17. Գտնել

$$f(x) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min;$$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0; \quad g_2(x) = -x_1 \le 0; \quad g_3(x) = -x_2 \le 0$$

խնդրում պայմանական մինիմումը:

Լուծում. 1. Կազմենք Լանգրանժի ընդհանրացված ֆունկցիան՝

$$L(x;\ \lambda_0; \lambda_1; \lambda_2) = \ \lambda_{\mathbf{0}}[x_1^2 + (x_2 - 2)^2] + \lambda_1[{x_1}^2 + {x_2}^2 - 1] - \lambda_2 x_1 - \lambda_3 x_2:$$

2. Գրենք պայմանական էքստրեմումի առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանները՝

ա) $\begin{cases} \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0; \lambda_1; \lambda_2)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0; \\ \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0; \lambda_1; \lambda_2)}{\partial x_2} = 2\lambda_0 (x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0; \end{cases}$

բ) $x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0; \quad -x_1 \le 0; -x_2 \le 0;$

գ) $\lambda_1 \ge 0;\ \lambda_2 \ge 0;\ \lambda_3 \ge 0;$

դ) $\lambda_1[{x_1}^2 + {x_2}^2 - 1] = 0; \quad -\lambda_2 x_1 = 0: -\lambda_3 x_2:$

3. Լուծենք համակարգը երկու դեպքի համար՝

Առաջին դեպքում $\lambda_0 = 0$: Այդ դեպքում 2. ա) կետի համակարգից կստանանք՝

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0; \\ 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0; \end{cases}$$

Դիտարկենք լրացուցիչ թուլության «դ» պայմանների կատարման ութ տարբերակ.

1) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$: Այս դեպքում Հայտանիշ 3.4-ի համաձայն պահանջը չի բավարարվում.

2) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$: Այս դեպքում ա)-ի $x_1 = x_2 = 0$ բայց լրացուցիչ ոչկոշտ պայմանը չի բավարարվում.

3) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0$: Այս դեպքում 2. ա)-ի առաջին հավասարումից բխում է՝ $\lambda_2 = 0$, այսինքն կստանանք հակասություն:

4) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 \neq 0$: Այս դեպքում 2. ա)-ի երկրորդ հավասարումից բխում է՝ $\lambda_3 = 0$, այսինքն նորից կստանանք հակասություն:

5) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0$: Այս դեպքում $x_1 = 0$ և 2. ա)-ի առաջին հավասարումից բխում է՝ $\lambda_2 = 0$, այսինքն կստանանք հակասություն:

6) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 \neq 0$: Այս դեպքում $x_2 = 0$ և 2. ա)-ի երկրորդ հավասարումից բխում է՝ $\lambda_3 = 0$, այսինքն կստանանք հակասություն:

7) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 \neq 0$: Այս դեպքում 2. ա)-ի պայմանները բավարարվում են:

8) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 \neq 0$: Այս դեպքում $x_1 = x_2 = 0;\ {x_1}^2 + {x_2}^2 - 1 = 0;$ այսինքն 2. գ)-ի պայմանները չեն կատարվում:

Պայմանական էքստրեմումի կետեր դեռ չեն հայտնաբերվել:

Երկրորդ տարբերակում $\lambda_0 \neq 0$: Բերված 2. կետի համակարգի հավասարումները բաժանենք 2-ի վրա և փոխարինենք՝ ${}^{\lambda_1}/_{\lambda_0}$; ${}^{\lambda_2}/_{\lambda_0}$; ${}^{\lambda_3}/_{\lambda_0}$-երը համապատասխանաբար λ_1; λ_2 ; λ_3-երով, կստանանք՝

ա) $$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x;\lambda_1;\lambda_2)}{\partial x_1} = 2x_1 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0; \\ \dfrac{\partial L(x;\lambda_1;\lambda_2)}{\partial x_2} = 2(x_2-2) + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0; \end{cases}$$

բ) $x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0; \quad -x_1 \leq 0; -x_2 \leq 0;$

գ) $\lambda_1 \geq 0;\ \lambda_2 \geq 0;\ \lambda_3 \geq 0;$

դ) $\lambda_1[{x_1}^2 + {x_2}^2 - 1] = 0; \quad -\lambda_2 x_1 = 0: \ -\lambda_3 x_2:$

Դիտարկենք լրացուցիչ թուլության պայմանները կատարելու ութ տարբերակ.

1) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$: Այս դեպքում՝ $x_1 = 0;\ x_2 = 2$ և չի բավարարվում 2.բ)-ի առաջին սահմանափակման պայմանը:

2) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$: Այս դեպքում՝

$$\begin{cases} {x_1}^2 + {x_2}^2 = 1; \\ 2x_1(1+2\lambda_1) = 0; \\ 2(x_2-2) + 2\lambda_1 x_2 = 0; \end{cases}$$

Եթե $\lambda_1 = -1$, ապա երրորդ հավասարումը չի բավարարվում: Եթե $x_1 = 0$, ապա $x_2 = \pm 1$ և 2.բ)-ի պայմանի սահմանափակումները բավարարվում են $x_2 = 1$-ով: Այս դեպքում$\lambda_1 = 1$: Ստանում ենք պայմանական էքստրեմումի կետ՝

$$A; \quad x_1^* = 0; \quad x_2^* = 1; \quad \lambda_1^* = 1; \quad \lambda_2^* = 0; \quad \lambda_3^* = 0;$$

3) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0$: Այս դեպքում՝

$$\begin{cases} x_1 = 0; \\ 2x_1 - \lambda_2 = 0; \\ 2(x_2-2) = 0; \end{cases}$$

որտեղից կստանանք $x_1 = 0;\ \ \lambda_2 = 0$, որը հակասում է $\lambda_2 \neq 0$, պայմանին:

4) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 \neq 0$: Այս դեպքում՝

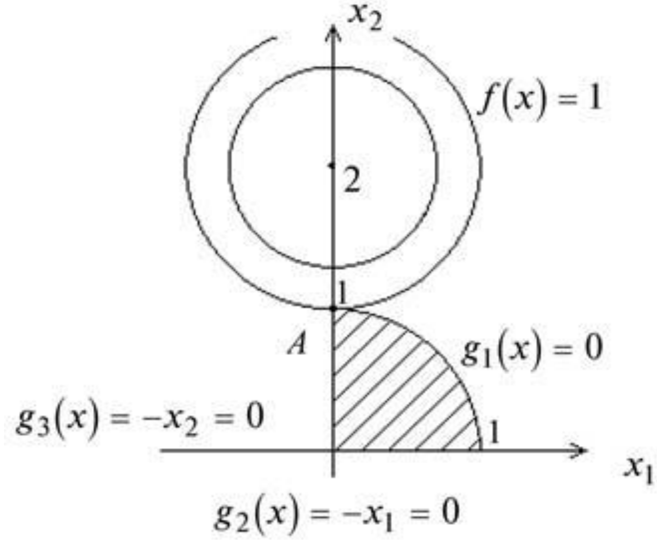
$$\begin{cases} x_2 = 0; \\ 2x_1 = 0; \\ 2(x_2-2) - \lambda_3 = 0; \end{cases}$$

որտեղից կստանանք $\lambda_3 = -4 < 0$, որը հակասում է 2.գ) պայմանին:

5) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0$: Այս դեպքում՝

$$\begin{cases} {x_1}^2 + {x_2}^2 - 1 = 0; \\ x_1 = 0; \\ 2x_1(1+\lambda_1) - \lambda_2 = 0; \\ 2(x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_2 = 0; \end{cases}$$

որտեղից կստանանք $\lambda_2 = 0$, որը հակասում է $\lambda_2 \neq 0$ պայմանին:



Նկ. 3.15

6) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$: Այս դեպքում՝

$$\begin{cases} {x_1}^2 + {x_2}^2 - 1 = 0; \\ x_2 = 0; \\ 2x_1(1+\lambda_1) = 0; \\ 2(x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0; \end{cases}$$

որտեղից կստանանք $\lambda_3 = -4 < 0$, որը հակասում է 2.գ) պայմանին:

7) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$: Այս դեպքում՝

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 0; \\ 2x_1 - \lambda_2 = 0; \\ 2(x_2 - 2) - \lambda_3 = 0; \end{cases}$$

որտեղից կստանանք $\lambda_2 = 0$, որը հակասում է $\lambda_2 \neq 0$ պայմանին:

8) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$: Այս դեպքում ըստ 2.դ)-ի ստանում ենք $x_1 = x_2 = 0$, այսինքն համակարգը անհամատեղելի է:

4. Ստուգենք մինիմումի բավարար պայմանները: A կետում կա երկու ակտիվ սահմանափակում, այսինքն՝ $l = 2 = n = 2$ (նկ. 3.15): Քանի որ $\lambda_1^* = 1 > 0$; $\lambda_2^* = 0$, ապա մինիմումի 1-ին կարգի բավարար պայմանները բավարարված չեն (Աղյուսակ 3.2. տող 1) նրա համար, որ պահանջվում է Լանգրանժի բազմապատկիչների խիստ դրական լինելը:

Ստուգենք երկրորդ կարգի բավարար պայմանները:

$$d^2L(A) = (2 + 2\lambda_1^*)dx_1^2 + (2 + 2\lambda_1^*)dx_2^2$$

Քանի որ A կետում կան երկու ակտիվ սահմանափակումներ, որոնցից մեկի համար $\lambda_1^* > 0$ և մյուսի համար $\lambda_2^* = 0$, այդ դեպքում կկիրառ ենք (3.18) պայմանները(Նկ. 3.15) (Աղյուսակ 3.3, տող 1).

$$\begin{cases} dg_1(A) = 2x_1^*dx_1 + 2x_2^*dx_2 = 2dx_2 = 0;\ \lambda_1^* > 0; \\ \qquad\qquad dg_2(x) = -dx_1 \le 0;\ \lambda_2^* = 0; \end{cases}$$

Արդյունքում կունենանք՝

$$d^2L(A) = 4dx_1^2 > 0,$$

երբ $dx_1 \ge 0$ և $dx_1 \ne 0$ և այդ A կետում պայմանական լոկալ մինիմում է (Աղյուսակ 3.3, տող 1): Մյուս կողմից նպատակային ֆունկցիան, մնացած բոլոր լուծումները ուռուցիկ են: Հետևաբար A կետում նպատակային ֆունկցիան հասնում է գլոբալ պայմանական մինիմումի (դիտողություններ 3.4. կետ 9):

5. Հաշվենք ֆունկցիայի արժեքը գլոբալ նվազագույն կետում՝ $f(A) = 1$:

Օրինակ 3.18. Գտնել

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 \to min;$$

$$g_1(x) = -x_1 - x_2 - x_3 + 1 \le 0; \quad g_2(x) = -x_1 - 3x_2 + 3 \le 0;$$

խնդրում պայմանական մինիմումը:

Լուծում. 1. Կազմենք Լանգրանժի ընդհանրացված ֆունկցիան՝

$$L(x;\ \lambda_0;\lambda_1;\lambda_2) = \lambda_{\mathbf{0}}(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) + \lambda_1(-x_1 - x_2 - x_3 + 1) + \lambda_2(-x_1 - 3x_2 + 3):$$

2. Գրենք պայմանական էքստրեմումի առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանները՝

ա) $$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0;\lambda_1;\lambda_2)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0; \\ \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0;\lambda_1;\lambda_2)}{\partial x_2} = 2\lambda_0 x_2 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0; \\ \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0;\lambda_1;\lambda_2)}{\partial x_3} = 4\lambda_0 x_3 - \lambda_1 = 0: \end{cases}$$

բ) $-x_1 - x_2 - x_3 + 1 \le 0; \quad -x_1 - 3x_2 + 3 \le 0;$

գ) $\lambda_1 \ge 0;\ \lambda_2 \ge 0;$

դ) $\lambda_1(-x_1 - x_2 - x_3 + 1) = \mathbf{0}; \quad \lambda_2(-x_1 - 3x_2 + 3) = 0:$

3. Լուծենք համակարգը երկու դեպքի համար՝

Առաջին դեպքում $\lambda_0 = 0$: Այդ դեպքում 2. ա) կետից հետևում է, որ $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 0$, որը հակասում է Հայտանիշ 3.4.-ին:

Երկրորդ դեպքում $\lambda_0 \ne 0$: Բաժանենք 2. ա)-ի հավասարումները λ_0-ի, այնուհետև փոխարինենք՝ ${}^{\lambda_1}/_{\lambda_0}$; ${}^{\lambda_2}/_{\lambda_0}$-ները համապատասխանաբար λ_1; λ_2-ներով: Այդ դեպքում

2. ա) համակարգը կբերվի հետևյալ տեսքին:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x;\lambda_1;\lambda_2)}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0; \\ \dfrac{\partial L(x;\lambda_1;\lambda_2)}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0; \\ \dfrac{\partial L(x;\lambda_1;\lambda_2)}{\partial x_3} = 4x_3 - \lambda_1 = 0: \end{cases}$$

Դիտարկենք լրացուցիչ ոչկոշտ 2.դ). պայմանները բավարարելու չորս տարբերակ.

1) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0$: Ըստ 2.ա) պայմանի կստանանք՝ $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, որից բխում է, որ 2.բ) պայմանը չի կատարվում:

2) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0$: Այդ դեպքում $g_1(x) = 0$ և կունենանք հետևյալ հավասարումները՝

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0; \\ 2x_1 - \lambda_1 = 0;\ \Rightarrow x_1 = \dfrac{\lambda_1}{2}; \\ 2x_2 - \lambda_1 = 0;\ \Rightarrow x_2 = \dfrac{\lambda_1}{2}; \\ 4x_3 - \lambda_1 = 0;\ \Rightarrow x_3 = \dfrac{\lambda_1}{4}; \end{cases}$$

որտեղից կստանանք՝ $\lambda_1 = {}^4/_5 > 0; x_1 = x_2 = {}^2/_5; x_3 = {}^1/_5$ և 2.բ)-ի երկրորդ պայմանը չի կատարվում, այսինքն երկրորդ անհավասարությունից բխում է՝ $-\frac{2}{5} - \frac{6}{5} + 3 = \frac{7}{5} > 0$:

3) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0$: Այդ դեպքում $g_2(x) = 0$ և կունենանք հետևյալ հավասարումները՝

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 3 = 0; \\ 2x_1 - \lambda_2 = 0;\ \Rightarrow x_1 = \dfrac{\lambda_1}{2}; \\ 2x_2 - 3\lambda_2 = 0;\ \Rightarrow x_2 = \dfrac{3\lambda_2}{2}; \\ 4x_3 = 0;\ \Rightarrow x_3 = 0; \end{cases}$$

որտեղից կստանանք՝ $\lambda_1 = {}^3/_5 > 0; x_1 = {}^3/_{10}; x_2 = {}^9/_{10}; x_1 = 0$ և այս դեպքում 1-ին անհավասարությունը տվյալ կետում կատարվում է՝ $-\frac{3}{10} - \frac{9}{10} + 1 = -\frac{1}{5} < 0$: Ունենք պայմանական ստացիոնար կետ՝

$$A;\quad x_1^* = \frac{3}{10};\quad x_2^* = \frac{9}{10};\quad x_3^* = 0;\ \lambda_1^* = 1;\quad \lambda_2^* = \frac{3}{5};$$

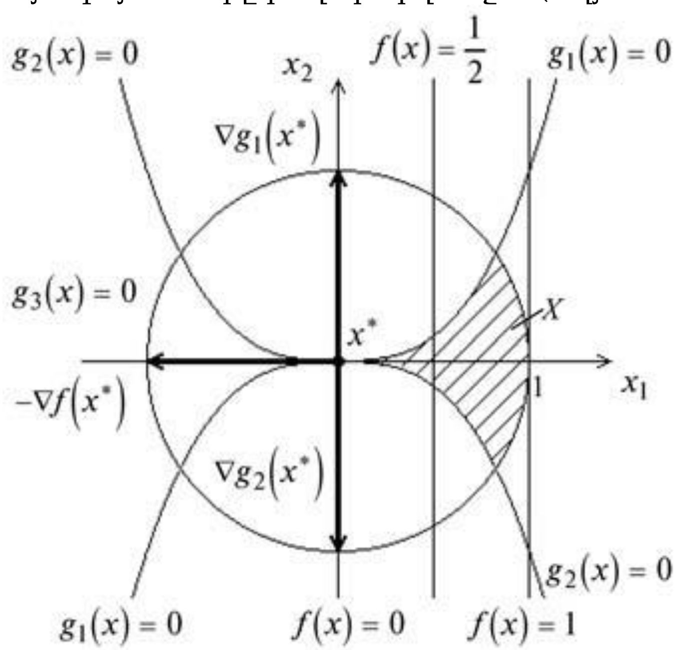
4) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0$: Այդ դեպքում $g_1(x) = 0;\ g_2(x) = 0$ և կունենանք՝

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0; \\ -x_1 - 3x_2 + 3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x;\lambda_1;\lambda_2)}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0; \ \Rightarrow \ x_1 = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}; \\ \dfrac{\partial L(x;\lambda_1;\lambda_2)}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0; \Rightarrow x_2 = \dfrac{\lambda_1 + 3\lambda_2}{2}; \\ \dfrac{\partial L(x;\lambda_1;\lambda_2)}{\partial x_3} = 4x_3 - \lambda_1 = 0\text{:} \ \Rightarrow \ x_3 = \dfrac{\lambda_1}{4}; \end{cases}$$

որտեղից կստանանք՝ $\lambda_1 = -{}^4/_9$; $\lambda_2 = {}^7/_9$ ։ Քանի որ $\lambda_1 < 0$, ապա 2. գ) պայմանը չի կատարվում։

4. Ստուգենք էքստրեմումի բավարար պայմանները։ A կետում կա մեկ ակտիվ սահմանափակում, քանի որ $g_2(A) = 0$։ Հետևաբար, $l = 1 < n = 3$, և առաջին կարգի բավարար նվազագույն պայմանները բավարարված չեն (Աղյուսակ 3.2 տող 1)։



Նկ. 3.16

Հիմա պետք է ստուգել երկրորդ կարգի բավարար պայմանները.

$$d^2L(A) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 + 4dx_3^2; \ \ dg_2(A) = -dx_1 - 3dx_2 = 0;$$

Այստեղից $dx_1 = -3dx_2$ և $d^2L(A) = 2(-3dx_2)^2 + 2dx_2^2 + 4dx_3^2 > 0$; երբ $dx \neq 0$ և A-ն կլինի պայմանական լոկալ մինիմում (Աղյուսակ 3.3 տող 1)։

Մյուս կողմից, նպատակային ֆունկցիան և $g_1(x)$; $g_2(x)$ ֆունկցիաները ուռուցիկ են, քանի որ սահմանափակումները գծային են և նրանց համար $H(x) = 0$, իսկ օբյեկտիվ ֆունկցիայի համար՝ Հեսսի մատրիցը՝

$$H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} > 0;$$

քանի որ $\Delta_1 = 2 > 0$; $\Delta_2 = 4 > 0$; $\Delta_3 = 16 > 0$ (դիտողություններ 1.4. կետ 3), այսինքն A կետում գլոբալ մինիմում է (դիտողություններ 3.4. կետ 9)։

5. Հաշվենք նպատակային ֆունկցիայի արժեքը պայմանական մինիմումը՝

$$f(A) = \frac{9}{100} + \frac{81}{100} + 0 = \frac{9}{10}:$$

Օրինակ 3.19. Գտնել

$$f(x) = x_1 \to min;$$

$$g_1(x) = x_2 - x_1^3 \le 0; \quad g_2(x) = -x_2 - x_1^3 \le 0; \quad g_3(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0;$$

խնդրում պայմանական մինիմումը։

Լուծում. 1. Կազմենք Լանգրանժի ընդհանրացված ֆունկցիան՝

$$L(x;\ \lambda_0; \lambda) = \ \lambda_{\mathbf{0}} x_1 + \lambda_1(x_2 - x_1^3) + \lambda_2(-x_2 - x_1^3) + \lambda_3(x_1^2 + x_2^2 - 1):$$

2. Գրենք պայմանական էքստրեմումի առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանները՝

ա) $\begin{cases} \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0; \lambda)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 - 3\lambda_1 x_1^2 - 3\lambda_2 x_2^2 + 2\lambda_3 x_1 = 0; \\ \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0; \lambda)}{\partial x_2} = \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 x_2 = 0; \end{cases}$

բ) $x_2 - x_1^3 \le 0$; $-x_2 - x_1^3 \le 0$; $x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0$;

գ) $\lambda_1 \ge 0$; $\lambda_2 \ge 0$; $\lambda_3 \ge 0$;

դ) $\lambda_1(x_2 - x_1^3) = 0$; $\lambda_2(-x_2 - x_1^3) = 0$; $\lambda_3(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$:

3. Լուծենք համակարգը երկու դեպքի համար։

Առաջին դեպքում $\lambda_0 = 0$: Դիտարենք 2.դ)-ի ոչկոշտ թույլատրելի պայմաններին բավարարող ութ տարբերակ՝

1) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 0$: Ոչ զրոյական $(\lambda_0^*; \lambda^*)$ վեկտորի գոյության մասին հայտանիշ 3.4-ի պահանջը չի բավարարվում։

2) $\lambda_1 \ne 0$, $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 0$: Այդ դեպքում՝

$$\begin{cases} -3\lambda_1 x_1^2 = 0; \\ \lambda_1 = 0; \\ x_2 - x_1^3 = 0; \end{cases}$$

ստանում ենք հակասություն, քանի որ $\lambda_1 \ne 0$:

3) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \ne 0$; $\lambda_3 = 0$: Այդ դեպքում՝

$$\begin{cases} -3\lambda_1 x_1^2 = 0; \\ -x_2 - x_1^3 = 0; \\ \lambda_2 = 0: \end{cases}$$

ստանում ենք հակասություն, քանի որ $\lambda_2 \neq 0$:

4) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0;\ \lambda_3 = 0$: Այդ դեպքում՝

$$\begin{cases} 2\lambda_3 x_1 = 0; \\ 2\lambda_3 x_2 = 0; \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0: \end{cases}$$

այստեղից $x_1 = x_2 = 0$ և այդ դեպքում երրորդ հավասարումը չի բավարարվում:

5) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0;\ \lambda_3 = 0$: Այդ դեպքում՝

$$\begin{cases} x_2 - x_1^3 = 0; \\ -x_2 - x_1^3 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x_1^2(\lambda_1 + \lambda_2) = 0; \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0; \end{cases}$$

Համակարգը բավարարված է$x_1 = x_2 = 0$ և ցանկացած $\lambda_1 = \lambda_1 > 0$, օրինակ կարելի է վերցնել հավասար մեկի: Ունենք պայմանական ստացիոնար (անշարժ) կետ՝

$$A;\ \ x_1^* = x_2^* = 0;\ \ \lambda_1^* = \lambda_2^* = 1;$$

6) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0;\ \lambda_3 \neq 0$: Այդ դեպքում՝

$$\begin{cases} x_2 - x_1^3 = 0; \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0; \\ -3\lambda_1 x_1^2 + 2\lambda_3 x_1 = 0; \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0; \end{cases}$$

որտեղից $\lambda_2 = -2\lambda_3 x_2 = -2\lambda_3 x_1^3$: Երրորդ հավասարումից կստանանք՝

$$6\lambda_3 x_1^5 + 2\lambda_3 x_1 = 2\lambda_3 x_1(3x_1^4 + 1) = 0:$$

Քանի որ $\lambda_3 \neq 0$, կունենանք՝$x_1 = 0$, հետևաբար $x_2 = 0$ և երկրորդ հավասարումը չի բավարարվում:

7) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0;\ \lambda_3 \neq 0$: Այդ դեպքում՝

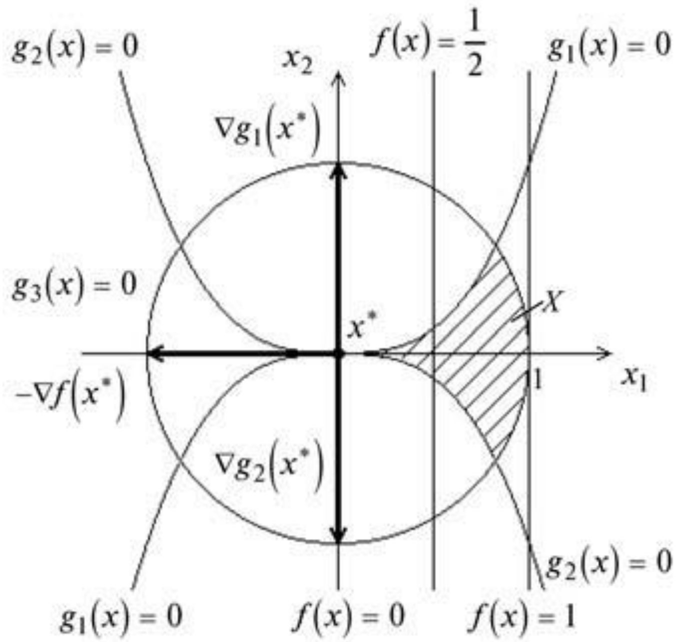
$$\begin{cases} -x_2 - x_1^3 = 0; \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0; \\ -3\lambda_2 x_1^2 + 2\lambda_3 x_1 = 0; \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 x_2 = 0; \end{cases}$$

որտեղից կստանանք՝ $\lambda_2 = 2\lambda_3 x_2 = -2\lambda_3 x_1^3$: Երրորդ հավասարումից կստանանք՝ $6\lambda_3 x_1^5 + 2\lambda_3 x_1 = 2\lambda_3 x_1(3x_1^4 + 1) = 0$: Քանի որ $\lambda_3 \neq 0$, հետևում է, որ $x_1 = 0;\ x_2 = 0$ և այս դեպքում չի բավարարվում երկրորդ հավասարումը:

8) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0;\ \lambda_3 \neq 0$: Այդ դեպքում 2. գ) պայմանից հետևում է,որ

$$\begin{cases} x_2 - x_1^3 = 0; \\ -x_2 - x_1^3 = 0; \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0; \end{cases}$$

անհամատեղելի է (Նկ. 3.16):



3.16

Երկրորդ տարբերակում $\lambda_0 \neq 0$: Բաժանենք 2. ա) համակարգի հավասարումները λ_0-ի վրա, և ${}^{\lambda_1}/_{\lambda_0}$; ${}^{\lambda_2}/_{\lambda_0}$; ${}^{\lambda_3}/_{\lambda_0}$-երը փոխարինենք համապատասխանաբար $\lambda_1; \lambda_2;\ \lambda_3$-ներով, և միաժամանակ 2. բ)-ն կգրվի հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{cases} 1 - 3\lambda_1 x_1^2 - 3\lambda_2 x_1^2 + 2\lambda_3 x_1 = 0; \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 x_2 = 0; \end{cases}$$

դիտարկենք 2.դ)-ի ոչկոշտ թույլատրելի պայմաններին բավարարող ութ տարբերակ՝

1) $\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 0;\ \lambda_3 = 0$: Առաջին հավասարումը 2. ա)-ի անհամատեղելի է:

2) $\lambda_1 \neq 0;\ \lambda_2 = 0;\ \lambda_3 = 0$: Այդ դեպքում՝

$$\begin{cases} x_2 - x_1^3 = 0; \\ 1 - 3\lambda_1 x_1^2 = 0; \\ \lambda_1 = 0; \end{cases}$$

և կա հակասություն, քանի որ $\lambda_1 \neq 0$:

3) $\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 \neq 0;\ \lambda_3 = 0$: Այդ դեպքում՝

$$\begin{cases} -x_2 - x_1^3 = 0; \\ 1 - 3\lambda_2 x_1^2 = 0; \\ -\lambda_2 = 0; \end{cases}$$

և կա հակասություն, քանի որ $\lambda_2 \neq 0$:

4) $\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 0;\ \lambda_3 \neq 0$: Այդ դեպքում՝

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0; \\ 1 + 2\lambda_3 x_1 = 0; \\ 2\lambda_3 x_2 = 0; \end{cases}$$

Քանի որ $\lambda_3 \neq 0$, ապա $x_2 = 0;\ x_1 = \pm 1$; Այստեղից՝ 2. բ)-երին բավարարում է $x_1 = 1$ և որի համար՝ $\lambda_3 = -{}^1\!/_2 < 0$, որը չի բավարարում 2. գ) պայմանին:

5) $\lambda_1 \neq 0;\ \lambda_2 \neq 0;\ \lambda_3 = 0$: Այդ դեպքում՝

$$\begin{cases} x_2 - x_1^3 = 0; \\ -x_2 - x_1^3 = 0; \\ 1 - 3\lambda_1 x_1^2 - 3\lambda_2 x_1^2 = 0; \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0; \end{cases}$$

Առաջին երկու հավասարումները բավարարվում են $x_1 = x_2 = 0$-ների դեպքում, իսկ երրորդ հավասարումը անհամատեղելի է:

6) $\lambda_1 \neq 0;\ \lambda_2 = 0;\ \lambda_3 \neq 0$: Այդ դեպքում՝

$$\begin{cases} x_2 - x_1^3 = 0; \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - 3\lambda_1 x_1^2 + 2\lambda_2 x_1 = 0; \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0; \end{cases}$$

Այստեղից՝ $\lambda_1 = -2\lambda_3 x_2 = -2\lambda_3 x_1^3$ և $1 + 6\lambda_3 x_1^5 + 2\lambda_3 x_1 = 2\lambda_3 x_1(3x_1^4 + 1) + 1 = 0$: Քանի որ $2\lambda_3 x_1(3x_1^4 + 1) = -1$, երբ $\lambda_3 > 0;\ x_1 < 0$ (չի գտնվում X բազմությունում. տես նկ. 3.16) կամ $\lambda_3 < 0;\ x_1 > 0$ և չի բավարարվում 2. գ) պայմանը:

7) $\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 \neq 0;\ \lambda_3 \neq 0$: Այդ դեպքում՝

$$\begin{cases} -x_2 - x_1^3 = 0; \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0; \\ 1 - 3\lambda_2 x_1^2 + 2\lambda_3 x_1 = 0; \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 x_2 = 0; \end{cases}$$

որտեղից կունենանք $\lambda_2 = 2\lambda_3 x_2 = -2\lambda_3 x_1^3$ և $1 + 6\lambda_3 x_1^5 + 2\lambda_3 x_1 = 0$:
Քանի որ $2\lambda_3 x_1(3x_1^4 + 1) = -1 < 0$, միայն երբ $\lambda_3 > 0;\ x_1 < 0$ (չի բավարարվում 2. բ)-ն) և $\lambda_3 < 0;\ x_1 > 0$ (չի բավարարվում 2. գ)-ն):

8) $\lambda_1 \neq 0;\ \lambda_2 \neq 0;\ \lambda_3 \neq 0$: Թույլատրելի ոչկոշտ պայմաններից հետևում է՝

$$\begin{cases} -x_2 - x_1^3 = 0; \\ x_2 - x_1^3 = 0; \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0; \end{cases}$$

համակարգը անհամատեղելի է (Նկ. 3.16)։

Այսպիսով որոնվեց միակ պայմանական ստացիոնար A կետ։

4. Քանի որ $\lambda_0^* = 0$, բավարար պայմանները չեն ստուգվում։ Նկ 3.16-ից հետևում է, որ A կետում ձեռք է բերվել գլոբալ պայմանական մինիմում, որը անկանոն մինիմումի կետ է։

Այդ A կետում չի կարելի ներկայացնել $-\nabla f(A) = (0;-1)^T$ անտիգրադիենտը որպես բացասական գծային ակտիվ սահմանափակման գրադիենտների՝ $\nabla g_1(A) = (0;1)^T$ և $\nabla g_2(A) = (0;1)^T$ համակցություն տեսքով։

5. Նպատակային ֆունկցիայի արժեքը պայմանական մինիմում կետում՝ $f(A) = 0$։

Օրինակ 3.20. Գտնել

$$f(x) = x_1 + x_2 \to min;$$

$$g_1(x) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 \leq 0;$$

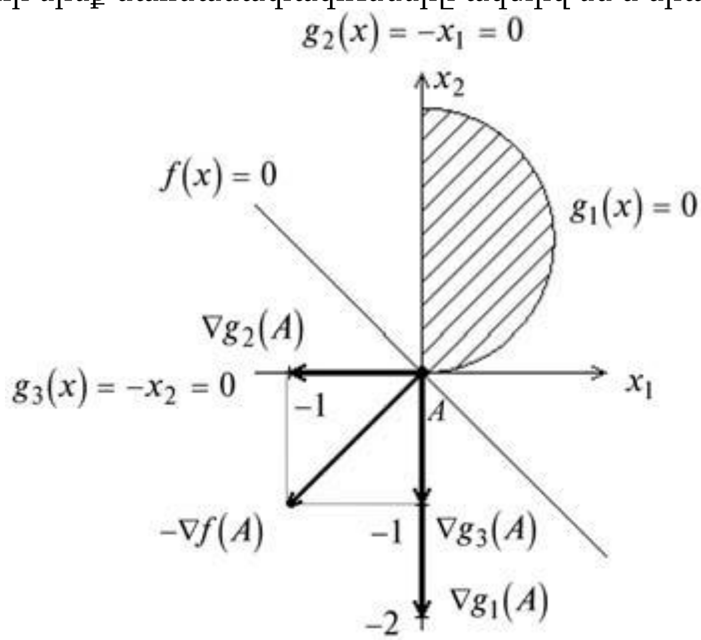
$$g_2(x) = -x_1 \leq 0; \quad g_3(x) = -x_2 \leq 0$$

խնդրի պայմանական մինիմումը։

Լուծում. Ինչպես ցույց է տրված Նկ 3.17-ում, գլոբալ մինիմումը հասել է A կետում՝

$$x_1^* = x_2^* = 0;$$

Այդ կետում բոլոր երեք սահմանափակումները ակտիվ են և նրանց գրադիենտները



Նկ. 3.17

գծորեն կախված են, քանի որ՝

$$\nabla g_1(x) = (0;-2)^T; \ \nabla g_2(x) = (-1;0)^T; \ \nabla g_3(x) = (0;-1)^T:$$

այստեղից ըստ սահմանում 3.6-ի, կունենանք՝

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 < 3:$$

Ռեգուլյարության պայմանը ըստ հայտանիշ 3.4 չի կատարվում, իսկ ա) պայմանը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$-\lambda_0 \nabla f(A) = \lambda_1 \nabla \mathrm{g}_1(A) + \lambda_2 \nabla \mathrm{g}_2(A) + \lambda_3 \nabla \mathrm{g}_1(A);$$

կամ

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

Եթե $\lambda_0 = 0$, ապա չկա այնպիսի ոչ բացասական λ_1; , λ_2; λ_3 , որ աջ կողմի գումարը հավասար լինի զրոյի: Այս դեպքում պայմանական- ստացիոնար կետեր չկան: Եթե $\lambda_0 \neq 0$, ապա բաժանելով հավասարումը λ_0-ի և փոխարինելով՝ ${}^{\lambda_1}/_{\lambda_0}$; ${}^{\lambda_2}/_{\lambda_0}$; ${}^{\lambda_2}/_{\lambda_0}$-երը համապատասխանաբար $\lambda_1; \lambda_2;\ \lambda_3$ –երով, ապա հավասարումը կլինի բավարարված. երբ $\lambda_1^* = {}^1/_2$; $\lambda_2^* = 1$; $\lambda_3^* = 0$: Այդ A կետում բոլոր սահմանափակումները ակտիվ են, բայց երրորդ սահմանափակում խնդրում «ավելորդ› է, քանի որ նրա ավելացումը չի փոխում թույլատրելի լուծումների բազմությունը:

Թեկուզ A կետում ռեգուլյարության պայմանը չի կատարվում, նա հանդիսանում է ռեգուլյար մինիմումի կետ, քանի որ $\lambda_0 \neq 0$:

Օրինակ 3.21. Գտնել

$$f(x) = x_1 \to \text{extr};$$

$$\mathrm{g}_1(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0; \quad \mathrm{g}_2(x) = -x_1 \leq 0; \quad \mathrm{g}_3(x) = -x_2 \leq 0$$

խնդրի պայմանական էքստրեմումը:

Լուծում. 1. Կազմենք Լանգրանժի ընդհանրացված ֆունկցիան

$$L(x;\ \lambda_0;\ \lambda) = \lambda_0 x_1 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 1) + \lambda_2(-x_1) + \lambda_3(-x_2);$$

2. Գրենք պայմանական էքստրեմումի առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանները՝

ա) $$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0; \lambda)}{\partial x_1} = \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0; \\ \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0; \lambda)}{\partial x_2} = \lambda_1 - \lambda_3 = 0; \end{cases}$$

բ) $x_1 + x_2 - 1 \leq 0;\quad -x_1 \leq 0;\quad -x_2 \leq 0;$

գ) $\lambda_1 \geq 0;\ \lambda_2 \geq 0;\ \lambda_3 \geq 0$ (մինիմում); $\lambda_1 \leq 0;\ \lambda_2 \leq 0;\ \lambda_3 \leq 0$ (մաքսիմում);

դ) $\lambda_1(x_1 + x_2 - 1) = 0;\ \ \lambda_2(-x_1) = 0;\ \ \lambda_3(-x_2) = 0$:

3. Խնդիրը լուծենք երկու տարբերակի համար:

Առաջին տարբերակում $\lambda_0 = 0$: Այդ դեպքում $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$: Եթե $\lambda_1 = 0$, կստանանք $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ և կունենանք հայտանիշ 3.4-ին հակասություն: Եթե $\lambda_1 \neq 0$, ապա $\lambda_2 \neq 0$ և $\lambda_3 \neq 0$, այդ դեպքում $x_1 + x_2 - 1 = 0;\ x_1 = 0; x_2 = 0$ և հավասարումների համակարգը անհամատեղելի են:

Երկրորդ տարբերակում $\lambda_0 \neq 0$: Բաժանենք 2. ա) համակարգի հավասարումները λ_0-ի վրա, և ${}^{\lambda_1}/_{\lambda_0}$; ${}^{\lambda_2}/_{\lambda_0}$; ${}^{\lambda_3}/_{\lambda_0}$-երը փոխարինենք համապատասխանաբար $\lambda_1; \lambda_2;\ \lambda_3$-ներով, և միաժամանակ 2. բ)-ն կգրվի հետևյալ տեսքով՝

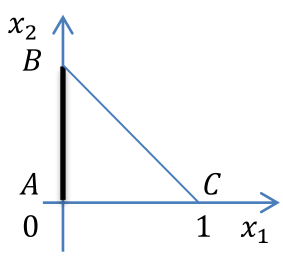
$$\begin{cases} 1-\lambda_1-\lambda_2=0; \\ \lambda_1-\lambda_3=0; \end{cases}$$

Դիտարկենք լրացուցիչ ոչկոշտ 2.դ). պայմանները բավարարելու ութ տարբերակ.

1) $\lambda_1=0;\ \lambda_2=0;\ \lambda_3=0$: Այս դեպքում 2. ա)-ի 1-ին հավասարումը չի կատարվում:

2) $\lambda_1\neq 0;\ \lambda_2=0;\ \lambda_3=0$: Այս դեպքում 2. ա)-ից բխում է, որ $\lambda_1=0$, այսինքն ունենք հակասություն:

3) $\lambda_1=0;\ \lambda_2\neq 0;\ \lambda_3=0$: Կստանանք $\lambda_2=1;\ x_1=0;\ x_1+x_2-1\leq 0;\ -x_2\leq 0$: Այս դեպքում ստացանք անվերջ բազմության լուծումներ AB հատված (Նկ. 3.18).



Նկ. 3.18

$$x_1^*=0;\quad 0\leq x_2^*\leq 1;\quad \lambda_1^*=0;\quad \lambda_2^*=1>0;\quad \lambda_3^*=0$$

բավարարվում է մինիմումի անհրաժեշտ պայմանները:

4) $\lambda_1=0;\ \lambda_2=0;\ \lambda_3\neq 0$: Այս դեպքում 2. ա)-ից կունենանք $\lambda_3=0$, այսինքն ստանում ենք հակասություն:

5) $\lambda_1\neq 0;\ \lambda_2\neq 0;\ \lambda_3=0$; կստանանք հակասություն, քանի որ 2. ա)-ից հետևում է $\lambda_1=0$:

6) $\lambda_1\neq 0;\ \lambda_2=0;\ \lambda_3\neq 0$; Այս դեպքում$\lambda_1=-1<0;\ \lambda_1=\lambda_3=-1;\ x_1+x_2-1=0;$ $-x_2=0$: Ստացանք պայմանական ստացիոնար կետ (Նկ. 3.18).

$$C;\quad x_1^*=1;\quad x_2^*=0;\quad \lambda_1^*=\lambda_3^*=-1<0;\quad \lambda_2^*=0;$$

որում բավարարում է մաքսիմումի անհրաժեշտ պայմանները:

7) $\lambda_1=0;\ \lambda_2\neq 0;\ \lambda_3\neq 0$ ։ Այս դեպքում 2. ա)-ից $\Rightarrow \lambda_3=0$, ունենք հակասություն:

8) $\lambda_1\neq 0;\ \lambda_2\neq 0;\ \lambda_3\neq 0$: Այս դեպքում կունենանք

$$\begin{cases} x_1+x_2-1=0; \\ \quad -x_1=0; \\ \quad -x_2=0; \end{cases}$$

Հավասարումների համակարգը անհամատեղելի է:

4. Ստուգենք էքստրեմումի բավարար պայմանները: AB բազմության վրա ակտիվ է մեկ սահմանափակում, ուստի 1-ին կարգի բավարար պայմանները բավարարված չեն (Աղյուսակ 3.2 տող 1): Բացի այդ $d^2L(A)=d^2L(B)=0$ և, հետևաբար, երկրորդ կարգի մինիմումի բավարար պայմանները նույնպես բավարարված չեն (Աղյուսակ 3.3 տող 1) և պահանջվում է լրացուցիչ հետազոտություն (աղյուսակ 3.3- տող 5): Մյուս կողմից, օբյեկտիվ ֆունկցիան և սահմանափակումները ուռուցիկ են, ուստի AB հատվածի վրա ձեռք է բերվում գլոբալ մինիմումը (Դիտողություններ 3.4-ի բաժին 9): C կետում երկու

սահմանափակում ակտիվ են. $l = 2 = n = 2$: Քանի որ $\lambda_1 < 0;\ \lambda_3 < 0$, ապա առաջին կարգի լոկալ մաքսիմումի պայմանները կատարվում են (աղյուսակ 3.2-ի 2-րդ տող): Քանի որ $-f(x)\ = -x_1$ ֆունկցիան և սահմանափակումները ուռուցիկ են, այդ դեպքում C կետում կա գլոբալ մաքսիմում (Դիտողություններ 3.4-ի բաժին 9):

5. Հաշվենք ֆունկցիայի արժեքները պայմանական էքստրեմալ կետերում՝

$$f(A)\ =\ f(B)\ =\ 0, f(C)\ =\ 1.$$

3.4. Պայմանական էքստրեմումը խառը սահմանափակումների դեպքում.

Խնդրի դրվածքը. Տրված է կրկնակի դիֆերենցելի անընդհատ նպատակային

$$f(x) = f(x_1;\ x_2;\ \cdots;\ x_n)$$

և տիպի սահմանափակումներ՝ հավասարումներ և անհավասարումներ՝

$$\begin{cases} g_j(x) = 0; j = 1; 2; \cdots; m; \\ g_j(x) \le 0; j = m+1; m+2;\ \cdots; p; \end{cases}$$

որոնք որոշում են լրացուցիչ լուծումների X բազմություն:

Պահանջվում է ուսումնասիրել $f(x)$ ֆունկցիան էքստրեմության համար, այսինքն՝ որոշել նրա տեղական մինիմումի (նվազագույնի) և մաքսիմումի (առավելագույնի) x^* կետերը X բազմության վրա.

$$f(x^*) = \min_{x\in X} f(x)\,;\ f(x^*) = \max_{x\in X} f(x)\,; \tag{3.19}$$

որտեղ՝

$$X = \left\{ x \,\middle\|\, \begin{matrix} g_j(x) = 0; j = 1; 2; \cdots; m; \\ g_j(x) \le 0; j = m+1; m+2;\ \cdots; p \end{matrix} \right\};$$

Խնդրի լուծման ռազմավարությունը. Լոկալ (տեղական) էքստրեմության x^* կետերը հայտնաբերվում են՝ օգտագործելով առաջին, երկրորդ կարգի անհրաժեշտ բավարար մինիմումի և մաքսիմումի պայմանները խառը սահմանափակումների ներքո, որոնց կարգը որոշվում է օգտագործվող ածանցյալների հերթականությամբ: Նպատակային $f(x^*)$ Ֆունկցիայի հաշվարկվում են լոկալ էքստրեմումի հայտնաբերված կետերում:

Հայտանիշ 3.8 (անհրաժեշտ պայմաններ առաջին կարգի մինիմումի և մաքսիմումի համար): Թող x^* լինի (3.19) խնդրի լոկալ մինիմումի (մաքսիմումի) կետ: Այդ դեպքում կգտնվի այնպիսի $\lambda_0^* \ge 0$ թիվ և $\lambda^* = \left(\lambda_1^*;\ \lambda_2^*;\ \cdots; \lambda_p^*\right)^T$ վեկտոր, որոնք հավասար չեն միաժամանակ զրոյի և այնպիսիք, որ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները՝

ա) Լագրանժի ընդհանրացված ֆունկցիայի կայունության պայման x-ում:

$$\frac{\partial L(x; \lambda_0^*; \lambda^*)}{\partial x_i} = 0;\ (i = 1; 2;\ \cdots; n); \tag{3.20ա}$$

բ) Լուծման թույլատրելիության պայմանը

$$\begin{cases} g_j(x) = 0; j = 1; 2; \cdots; m; \\ g_j(x) \le 0; j = m+1; m+2; \cdots; p; \end{cases} \qquad (3.20բ)$$

գ) Պայմանական մինիմումի համար ոչ բացասական լինելու պայմանը

$$\lambda_j^* \ge 0;\ j = m+1; m+2;\ \cdots; p; \qquad (3.20գ)$$

(այմանական մինիմումի համար ոչ դրական լինելու պայմանը

$$\lambda_j^* \le 0;\ j = m+1; m+2;\ \cdots; p):$$

դ) Լրացուցիչ ոչկոշտության պայմանը

$$\lambda_j^* g_j(x^*) = 0;\ ;\ j = m+1; m+2;\ \cdots; p: \qquad (3.20դ)$$

Եթե, ի լրումն, ակտիվ սահմանափակումների գրադիենտները՝ սահմանափակում-անհավասարությունները և սահմանափակում- հավասարումների x* կետում գծորեն անկախ են (տեղի ունի ռեգուլյարությա պայմանը), ապա $\lambda_0^* \ne 0$:

Դիտողություններ 3.6.

1. Դիտողություններ 3.4-ի 1-7-րդ կետերը գործում են նաև այս խնդրի համար, եթե (3.16) փոխարինենք (3.20) և 3.4 պնդումը 3.8-ով:

2. (3.20ա) պայմանը ռեգուլյար էքստրեմում կետում արտացոլում է այն փաստը, որ նպատակային ֆունկցիայի հակագրադիենտը ($\lambda_0^* \ne 0$) ֆունկցիայի գրադիենտների ոչ բացասական (մաքսիմումի դեպքում ոչ դրական) գծային համակցություն է, որը կազմում է ակտիվ սահմանափակում-անհավասարություններ և սահմանափակում-հավասարումներ x* կետում:

3. Երբ ($\lambda_0^* \ne 0$), կարևոր են հետևյալ պնդումները.

ա) եթե $f(x)$, $g_j(x)$, $j = \overline{m\ +\ 1, p}$ ֆունկցիաները ուռուցիկ են, իսկ $g_j(x)$, $j = \overline{1, m}$ ֆունկցիաները՝ գծային: , ապա 3.8-ի պնդման պայմանները միևնույն ժամանակ բավարար պայմաններ են գլոբալ մինիմումի (նվազագույնի) համար.

բ) եթե $-f(x)$, $g_j(x)$, $j = \overline{m\ +\ 1, p}$ ֆունկցիաները ուռուցիկ են, իսկ $g_j(x)$, $j = \overline{1, m}$ ֆունկցիաները՝ գծային: , ապա 3.8-ի պնդման պայմանները միևնույն ժամանակ բավարար պայմաններ են գլոբալ մաքսիմումի (առավելագույնի) համար.

Երկու դեպքում էլ X թույլատրելի լուծումների բազմությունը ուռուցիկ է:

4. Պետք է ընդգծել, որ Լագրանժի բազմապատկիչների լրացուցիչ ոչ կոշտության և նշան-որոշակիության պայմանները գրված են սահմանափակում-անհավասարման համար միայն:

5. Լուծման թույլատրելիության պայմանը, որը (3.19) խնդրի դրվածքի հետևանք է, լուծման ալգորիթմը ձևակերպելու հարմարության համար ներառված է (3.20)-ում:

6. Լրացուցիչ ոչ կոշտության պայմանից (3.20դ) հետևում է, որ եթե x* կետում սահմանափակում-անհավասարությունը պասիվ է, այսինքն՝ $g_j(x^*) < 0$, ապա $\lambda_0^* = 0$, իսկ եթե այն ակտիվ է, այսինքն. , $g_j(x^*)$, ապա $\lambda_0^* \ge 0$(նվազագույնի համար) և $\lambda_0^* \le 0$

(առավելագույնի համար)։

Հայտանիշ 3.9 (բավարար պայմաններ առաջին կարգի մինիմումի (մաքսիմումի) համար)։ Դիցուք տրված է $(x^*;\ \lambda^*)$կետը, որը բավարարում է (3.20) համակարգին, երբ $\lambda_0^* \neq 0$, իսկ ակտիվ սահմանափակում-անհավասարության և սահմանափակում-հավասարության գումարային ընդհանուր թիվը համընկնում է փոփոխականների n թվի հետ (այս դեպքում՝ կանոնավորության պայմանը բավարարված է)։ Եթե $\lambda_j^* > 0$ բոլոր $j \in J_a$-ի համար, ապա x^* կետը (3.19) խնդրի պայմանական լոկալ մինիմում է, իսկ եթե $\lambda_j^* > 0$ բոլոր $j \in J_a$-ի համար, ապա պայմանական լոկալ մաքսիմում է x^* կետում։

Հայտանիշ 3.10 (անհրաժեշտ պայմաններ 2-րդ կարգի մինիմումի (մաքսիմումի) համար)։ Թող x^* լինի մինիմումի (մաքսիմումի) ռեգուլյար կետ (3.19) և թող $(x^*;\ \lambda^*)$-ն լինի (3.20) համակարգի լուծումը։ Այդ դեպքում Այնուհետև $(x^*;\ \lambda^*)$ կետում հաշված Լագրանժի դասական ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը ոչ բացասական է (ոչ դրական է).

$$d^2L(x^*;\ \lambda^*) \geq 0;\ \ (d^2L(x^*;\ \lambda^*) \leq 0)$$

բոլոր $dx \in R^n$ համար, որ

$$\mathrm{g_j}(x^*) = 0;\ j = \overline{1;m};\ \text{և}\ j \in J_a;\ \lambda_j^* > 0;\ \left(\lambda_j^* < 0\right)$$

$$d\mathrm{g_j}(x^*) \leq 0;\ j \in J_a;\ \lambda_j^* = 0,$$

ապա x^*-ը (3.19) խնդրի լոկալ մինիմումի (մաքսիմումի) կետն է։

Խնդրի լուծման ալգորիթմը.

Քայլ 1. Կազմել Լագրանժի ընդհանրացված ֆունկցիան.

$$L(x;\ \lambda_0;\ \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, \mathrm{g_j}(x)\text{։}$$

Քայլ 2. Գրել առաջին կարգի մինիմումի (մաքսիմումի) համար անհրաժեշտ պայմանները.

ա) $\dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0;\ \lambda)}{\partial x_i} = 0;\quad i = \overline{1;n};$

բ) $\mathrm{g_j}(x^*) = 0;\ j = \overline{1;m};\quad \mathrm{g_j}(x^*) \leq 0;\ j = \overline{m+1;p};$

գ) $\lambda_j^* \geq 0\ ;\ \ j = \overline{m+1;p}; -\mathrm{minimum};\ \lambda_j^* \geq 0\ ;\ j = \overline{m+1;p}; -\mathrm{maximum};$

դ) $\lambda_j^*\, \mathrm{g_j}(x^*) = 0;\ \ j = \overline{m+1;p}$։

Քայլ 3. Լուծել հավասարումների համակարգը երկու տարբերակների դեպքում.
Տարբերակ 1. $\lambda_0^* = 0;$
Տարբերակ 2. $\lambda_0^* \neq 0;$ (այս տարբերակում ա), բ), գ) պայմանները բաժանում ենք

λ_0^*-ի վրա և փոխարինում ${\lambda_j^*}/{\lambda_0^*}$-ն λ_j^*-ով:

Արդյունքում գտնել պայմանական-ստացիոնար x^* կետերը՝ դրանցից ընտրելով $\lambda_0^* \neq 0$-ի համար ստացվածները (դրանք կարող են լինել ռեգուլյար էստտրեմումներ): Երկու տարբերակներում էլ պետք է սկսել՝ դիտարկելով $2p - m$ դեպքեր՝ լրացուցիչ թուլության դ) պայմանը բավարարելու համար:

Քայլ 4. **Քայլ 3**-ում ընտրված կետերի համար ստուգել բավարար պայմանները առաջին կամ երկրորդ կարգի էքստրեմության համար:

Առաջին կարգի բավարար պայմանները ստուգելու համար պետք է.

ա) որոշել սահմանափակում-հավասարումների և ակտիվ սահմանափակում-անհավասարությունների l թիվը.

բ) եթե $l = n$ և $\lambda_j^* > 0$ բոլոր $j \in J_a$-ի համար, այսինքն՝ ակտիվ սահմանափակում-անհավասարությունների սահմանափակումների համար, ապա x^*-ը լոկալ մինիմում է: Եթե $l = n$ և $\lambda_j^* < 0$ բոլոր $j \in J_a$-ի համար, ապա x^* կետում կա տեղական մաքսիմում: Եթե $l < n$ կամ համապատասխան Լանգրանժի բազմապատկիչները առաջին կարգի բավարար պայմաններին չեն բավարարում, ստուգել երկրորդ կարգի բավարար պայմանները:

Երկրորդ կարգի բավարար պայմանները ստուգելու համար պետք է.

ա) գրել Լանգրանժի դասական ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը $(x^*;\ \lambda^*)$ կետում.

$$d^2L(x^*;\ \lambda^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x^*;\ \lambda^*)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j;$$

բ) գրել x^* կետում գործող սահմանափակ-հավասարումների և սահմանափակ - անհավասարութուն ումների առաջին դիֆերենցիալների վրա դրված պայմանները.

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j(x^*)}{\partial \partial x_i}dx_i = 0;\ j = \overline{1;m};\ \text{ և }\ j \in J_a;\ \lambda_j^* > 0;\ \left(\lambda_j^* < 0\right); \qquad (3.21)$$

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j(x^*)}{\partial \partial x_i}dx_i \leq 0;\ j = \overline{1;m};\ \ j \in J_a;\ \lambda_j^* > 0;$$

գ) ուսումնասիրել Լագրանժի ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի նշանը ոչ զրոյական dx-ի համար, որ բավարարի (3.21)-ին: Եթե $d^2L(x^*;\ \lambda^*) > 0$, ապա x^* կետում պայմանական լոկալ մինիմում է: Եթե $d^2L(x^*;\ \lambda^*) > 0$, ապա x^* կետում պայմանական լոկալ մաքսիմում է: Եթե էքստրեմում բավարար պայմանները չեն կատարվում, ապա պետք է ստուգել երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանների կատարումը (**հայտանիշ 3.10**)՝ նմանատիպ ընթացակարգով: Եթե դրանք կատարվում են, ապա լրացուցիչ հետազոտություն է պահանջվում, իսկ եթե ոչ, ապա x^* կետում պայմանական էքստրեմում չկա:

Աղյուսակ 3.4

Խառը սահմանափակումների ներքո պայմանական էքստրեմում գտնելու հարցում առաջին կարգի անհրաժեշտ և բավարար պայմանները

Առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանները					առաջին կարգի բավարար պայմանները		
№ հ/հ	$\nabla_x L(x^*;\ \lambda_0^*;\ \lambda^*)$, $\lambda_j^*\, g_j(x^*)$, $j = \overline{m+1;p}$:	$g_j(x^*)$; $j = \overline{1;m}$	$g_j(x^*)$; $j = \overline{m+1;p}$:	$\lambda_0^* \geq 0$; λ_j^*	l-թիվը սահ- հավ և սահ- անհ	λ_j^*; $j \in J_a$	պայմանական էքստրեմումի տիպը
1.	0	0	≤ 0	≥ 0	n	> 0	պայմանական լոկալ մինիմում
2.	0	0	≤ 0	≤ 0	n	< 0	պայմանական լոկալ մաքսիմում

Աղյուսակ 3.5

Խառը սահմանափակումների ներքո պայմանական էքստրեմում գտնելու հարցում երկրորդ կարգի անհրաժեշտ և բավարար պայմանները

№ հ/հ	$d^2L(x^*;\ \lambda^*)$	$dg_j(x^*)$ $j = \overline{1;m}$	$dg_j(x^*)$ $j \in J_a$ $\lambda_j^* > 0$	$dg_j(x^*)$ $j \in J_a$ $\lambda_j^* < 0$	$dg_j(x^*)$ $j \in J_a$ $\lambda_j^* = 0$	x^* կետի պայմանական ստացիոնար տիպը
1.	> 0	0; $dx \neq 0$	0; $dx \neq 0$		≤ 0	պայմանական լոկալ մինիմում
2.	< 0	0; $dx \neq 0$		0; $dx \neq 0$	≤ 0	պայմանական լոկալ մաքսիմում
3.	≥ 0	0	0		≤ 0	կարող է լինել պայմանական լոկալ մինիմում, պահանջվում է լրացուցիչ հետազոտություն
4.	≤ 0	0		0	≤ 0	կարող է լինել պայմանական լոկալ մաքսիմում, պահանջվում է լրացուցիչ հետազոտություն
5.	$= 0$	0	0		≤ 0	պահանջվում է լրացուցիչ հետազոտություն
6.	$= 0$	0		0	≤ 0	պահանջվում է լրացուցիչ հետազոտություն
7.	$\lesseqgtr 0$	0	0		≤ 0	էքստրեմում չկա
8.	$\lesseqgtr 0$	0		0	≤ 0	էքստրեմում չկա

Քայլ 5. Հաշվեք ֆունկցիայի արժեքները պայմանական ծայրահեղ կետերում:

Վերոգրյալ խնդիրի (3.19) էքստրեմումի պայմանները բերված են (Աղյուսակ 3.4)-ում և (Աղյուսակ 3.5)-ում:

Օրինակ 3.22. Գտնել

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \text{extr};$$

$$\begin{cases} g_1(x) = x_1 - 1 = 0; \\ g_2(x) = x_1 + x_2 - 2 \leq 0; \end{cases}$$

խնդրում պայմանական էքստրեմումը:

Լուծում. 1. Կազմենք Լանգրանժի ընդհանրացված ֆունկցիան՝

$$L(x;\lambda_0;\lambda) = \lambda_0(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_1(x_1 - 1) + \lambda_2(x_1 + x_2 - 2);$$

2. Գրում ենք առաջին կարգի էքստրեմումի համար անհրաժեշտ պայմանները՝

ա) $\dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0;\ \lambda)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0;\qquad \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0;\ \lambda)}{\partial x_2} = 2\lambda_0 x_2 + \lambda_2 = 0;$

բ) Լուծման թույլատրելիության պայմանը՝

$$\begin{cases} x_1 - 1 = 0; \\ x_1 + x_2 - 2 \leq 0; \end{cases}$$

գ) Պայմանական մինիմումի համար ոչ բացասական լինելու պայմանը՝

$\lambda_2 \geq 0$-մինիմումի համար; $\lambda_2 \leq 0$- մաքսիմումի համար:

դ) $\lambda_2(x_1 + x_2 - 2) = 0;$

3. Լուծենք համակարգը երկու տարբերակով.

Առաջին տարբերակ $\lambda_0 = 0$: Այս դեպքում $\lambda_1 = 0$ և $\lambda_2 = 0$, ինչը հակասում է հայտանիշ 3.8-ին:

Երկրորդ տարբերակ $\lambda_0 \neq 0$: Բաժանենք համակարգը λ_0-ի վրա, այնուհետև λ_1/λ_0-ը և λ_2/λ_0-ը փոխարինենք համապատասխանաբար λ_1-ով և λ_2-ով: Այդ դեպքում 2. ա)-ն կգրվի հետևյալ կերպ՝

$$\frac{\partial L(x;\ \lambda)}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0;\qquad \frac{\partial L(x;\ \lambda_0;\ \lambda)}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_2 = 0;$$

մնացած պայմանները կմնան ամփոփոխ: Դիտարկենք $2^{p-m} = 2$տարբերակ, որոնք կբավարարեն 2. դ)-պայմանին:

1) $\lambda_2 = 0$; կստանանք $x_2 = 0$: Սահմանափակումից հետևում է, որ $x_1 = 1$, իսկ 2.ա)-ից $\lambda_1 = -2$: Ունենք պայմանական ստացիոնար կետ՝

$$A:\ x_1^* = 1;\ x_2^* = 0;\quad \lambda_1^* = -2;\quad \lambda_2^* = 0;$$

որում կատարվում է և մաքսիմումի, և մինիմումի անհրաժեշտ պայմանները:

2) $\lambda_2 \neq 0$; Այս դեպքում կունենանք՝

$$x_1 + x_2 - 2 = 0;\quad 2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0;\quad 2x_2 + \lambda_2 = 0;\quad x_1 - 1 = 0;$$

և կստանանք պայմանական ստացիոնար կետ՝

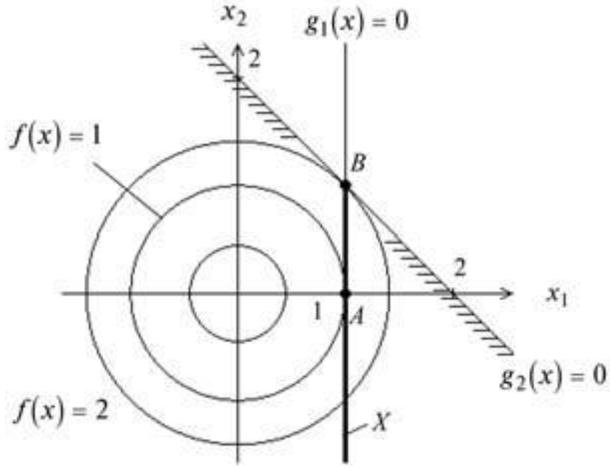
$$B:\ x_1^* = 1;\ x_2^* = 1;\quad \lambda_1^* = 0;\quad \lambda_2^* = -2 < 0;$$

որում կատարվում է մաքսիմումի անհրաժեշտ պայմանները:

4. Ստուգենք էքստրեմումի բավարար պայմանները:

Ուսումնասիրում ենք A կետը: Սահմանափակում- անհավասարումը ակտիվ չէ: Հետևաբար, $l = 1 < n = 2$ և առաջին կարգի բավարար պայմանները կատարված չեն: Ստուգենք երկրորդ կարգի բավարար պայմանը՝ $d^2L(A) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2$: Քանի որ $g_1(x) \leq 0$, ապա A-ում սահմանափակումը պասսիվ է $dg_1(A) = dx_1 = 0$ և $d^2L(A) > 0$, երբ $dx_2 \neq 0$: Հետևաբար A-ն պայմանական լոկալ մինիմում է (Աղյուսակ 3.5 տող 1): Մյուս կողմից $f(x)$ նպատակային ֆունկցիան ուռուցիկ է (օր.1.19), սահմանափակում-հավասարումը գծային է, սահմանափակում-անհավասարումը ուռուցիկ է (սահմ. 1.8), հետևաբար A-ում նպատակային ֆունկցիան հասնում է գլոբալ մինիմումի (դիտ.3.6), իսկ երկրորդ կարգի բավարար պայմանը կարելի է չստուգել:

Եթե պահանջվեր գտնել $-f(x) = -x_1^2 - x_2^2$ ֆունկցիայի էքստրեմումը, այդ դեպքում այն կլիներ ուռուցիկ և A-ում կհասներ գլոբար մաքսիմումի (դիտ.3.6):



Նկ. 3.18

Ուսումնասիրում ենք B կետը: $g_2(x) \leq 0$ սահմանափակումը ակտիվ է , այսինքն $l = 1 = n = 2$: Քանի որ $\lambda_2^* = -2 < 0$, ապա B կետում կատարվում է առաջին կարգի բավարար պայմանը (Աղյուսակ 3.4 տող 2) և այն հանդիսանում է լոկալ մաքսիմումի կետ:

Մեթոդաբանական նկատառումներից ելնելով ստուգենք երկրորդ կարգի բավարար պայմանները. $d^2L(B) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2$: B կետում $g_2(x) = 0$ սահմանափակումը ակտիվ է ; $g_1(B) = dx_1 = 0$; $g_1(B) = dx_1 + dx_2 = 0$; Այստեղից կունենանք $dx_1 = dx_2 = 0$ և այդ դեպքում $d^2L(B) = 0$, այսինքն պահանջվում է լրացուցիչ հետազոտություն (Աղյուսակ 3.5 տող 6): Նկ. 3.18 –ում երևում է, որ B-ում պայմանական լոկալ մաքսիմում է, քանի որ մոտենալով B կետին X բազմության երկայնքով ֆունկցիան մեծանում է, և նվազում է, երբ հեռանում ենք B կետից:

Սա հաստատում է ավելի վաղ արված եզրակացությունը:

5. Ֆունկցիայի արժեքները ծայրահեղ կետերում՝ $f(A) = 1$, $f(B) = 2$:

Օրինակ 3.23. Գտնել

$$f(x) = x_1^2 - x_2 \to \text{extr};$$

$$\begin{cases} g_1(x) = x_1 + x_2 - 6 = 0; \\ g_2(x) = 1 - x_1 \le 0; \\ g_3(x) = x_1^2 + x_2^2 - 26 \le 0; \end{cases}$$

խնդրում պայմանական էքստրեմումը:

Լուծում. 1. Կազմենք Լանգրանժի ընդհանրացված ֆունկցիան՝

$$L(x; \lambda_0; \lambda) = \lambda_0(x_1^2 - x_2) + \lambda_1(x_1 + x_2 - 6) + \lambda_2(1 - x_1) + \lambda_3(x_1^2 + x_2^2 - 26);$$

2. Գրում ենք առաջին կարգի էքստրեմումի համար անհրաժեշտ պայմանները՝

ա) $\dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0;\ \lambda)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 x_1 = 0;\ \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0;\ \lambda)}{\partial x_2} = -\lambda_0 + \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0;$

բ) Լուծման թույլատրելիության պայմանը՝

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6 = 0; \\ 1 - x_1 \le 0; \\ x_1^2 + x_2^2 - 26 \le 0; \end{cases}$$

գ) $\lambda_2 \ge 0;\ \lambda_3 \ge 0$- մինիմումի համար; $\lambda_2 \le 0;\ \lambda_3 \le 0$-մաքսիմումի համար:

դ) $\lambda_2(1 - x_1) = 0;\ \ \lambda_3(x_1^2 + x_2^2 - 26) = 0$:

3. Լուծենք համակարգը երկու տարբերակով.

Առաջին տարբերակ $\lambda_0 = 0$: Այդ դեպքում 2. ա)-ից կունենանք՝

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 x_1 = 0; \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0; \end{cases}$$

Դիտարկենք լրացուցիչ թուլության «դ» պայմանը բավարարելու չորս տարբերակ.

1) $\lambda_2 = 0;\ \lambda_3 = 0$; Այդ դեպքում $\lambda_1 = 0$ և չի կատարվում հայտանիշ 3.8-ը:

2) $\lambda_2 \ne 0;\ \lambda_3 = 0$; Այդ դեպքում $\lambda_1 = 0$; և $\lambda_2 = 0$ – հակասում է $\lambda_2 \ne 0$ պայմանին:

3) $\lambda_2 = 0;\ \lambda_3 \ne 0$; Այդ դեպքում՝

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0; \\ x_1 + x_2 - 6 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0; \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 x_1 = 0; \end{cases}$$

Համակարգի վերջին երկու հավասարումներից հետևում է, որ $2\lambda_3(x_1 - x_2) = 0$; Քանի որ $\lambda_3 \ne 0$, կստանանք $x_1 = x_2$; Համակարգի առաջին երկու հավասարումից կունենանք՝ $x_1 = 1;\ \ x_2 = 5$ և $x_1 = 5;\ \ x_2 = 1$; այսինքն $x_1 \ne x_2$ և հավասարումների համակարգը անհամատեղելի է:

4) $\lambda_2 \ne 0;\ \lambda_3 \ne 0$; Այդ դեպքում՝

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0; \\ x_1 + x_2 - 6 = 0; \\ 1 - x_1 = 0; \end{cases}$$

Համակարգը բավարարվում է. երբ $x_1 = 1$; $x_2 = 5$: Հետևաբար 2. ա)-ն կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 x_1 = 0; \\ -1 + \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0; \end{cases}$$

Վերոգրյալ 2. բ)-դ) պայմանները պահպանվում են: Դիտարկենք չորս տարբերակ լրացուցիչ թուլության պայմանների կատարման համար.

1) $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 0$: Այդ դեպքում՝ $\lambda_1 = 1$; $x_1 = 0.5$, և 2.բ) պայմանը չի կատարվում:

2) $\lambda_2 \neq 0$; $\lambda_3 = 0$; Այդ դեպքում՝ $x_1 = 1$; $x_2 = 5$ և $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 3$: Ստանում ենք պայմանական ստացիոնար կետ՝

$$A: \; x_1^* = 1; \; x_2^* = 5; \; \lambda_1^* = 1; \; \lambda_2^* = 3:$$

որում բավարարվում են մինիմումի համար անհրաժեշտ պայմանները:

3) $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 \neq 0$; Այդ դեպքում՝

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0; \\ x_1 + x_2 - 6 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_3 x_1 = 0; \\ -1 + \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0; \end{cases}$$

որտեղից կստանանք պայմանական ստացիոնար կետեր՝

$$A': \; x_1^* = 1; \; x_2^* = 5; \; \lambda_1^* = \frac{11}{4}; \; \lambda_2^* = 0: \; \lambda_3^* = \frac{3}{8};$$

որում բավարարվում են մինիմումի համար անհրաժեշտ պայմանները, և

$$B :: \; x_1^* = 5; \; x_2^* = 1; \; \lambda_1^* = \frac{15}{4}; \; \lambda_2^* = 0: \; \lambda_3^* = -\frac{11}{8} \; ;$$

որում բավարարվում են մաքսիմումի համար անհրաժեշտ պայմանները:

4) $\lambda_2 \neq 0$; $\lambda_3 \neq 0$; Այդ դեպքում՝

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0; \\ x_1 + x_2 - 6 = 0; \\ 1 - x_1 = 0; \end{cases}$$

համակարգը տեղի ունի երբ՝ $x_1 = 1$; $x_2 = 5$ և 2.ա) համակարգը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} 2 + \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0; \\ -1 + \lambda_1 + 10\lambda_3 = 0; \end{cases}$$

որտեղից կստանանք՝ $\lambda_1 = 1 - 10\lambda_3$ և $\lambda_2 + 8\lambda_3 = 3$: Քանի որ $\lambda_2 \neq 0$ և $\lambda_3 \neq 0$, ինչպես նաև նրանք պետք է լինեն նույն նշանի, վերջին հավասարությունը գործում է միայն, երբ $\lambda_2 > 0$; $\lambda_2 > 0$, մասնավորապես, $\lambda_3 = 0.1$; $\lambda_2 = 2.2$-ի համար և $\lambda_1 = 0$; 2: Այսինքն ստացանք նույն պայմանական ստացիոնար կետը.

$$A'': \; x_1^* = 1; \; x_2^* = 5; \; \lambda_1^* = 0; \; \lambda_2^* = 2.2: \; \lambda_3^* = 0.1;$$

4. Ստուգենք առաջին կարգի էքստրեմումի համար բավարար պայմանների

կատարումը: Սահմանափակում-հավասարությունը A և B կետերում բնականաբար գործում է: Այսինքն A կետում երկրորդ և երրորդ սահմանափակումները ակտիվ են, և, հետևաբար, $l = 3 > n = 2$, իսկ B կետում երրորդ սահմանափակումն է ակտիվ, հետևաբար $l = 2 = n$: Քանի որ $\lambda_3^* = -\frac{11}{8} < 0$, ապա B կետում պայմանական լոկալ մաքսիմում է (Աղյուսակ 3.4 տող 2):

Ստուգենք երկրորդ կարգի էքստրեմումի բավարար պայմանների կատարումը՝

$$d^2L(x^*;\lambda^*) = (2+2\lambda_3)dx_1^2 + 2\lambda_3 dx_2^2;$$

$A(A';A'')$ կետում ակտիվ են երկրորդ և երրորդ սահմանափակումները՝

$$\begin{cases} dg_1(\mathrm{A}) = dx_1 + dx_2 = 0; \\ dg_2(\mathrm{A}) = -dx_1 = 0; \\ dg_3(\mathrm{A}) = 2dx_1 + 10dx_2 \le 0; \end{cases}$$

Հետևաբար, $dx_1 = dx_2 = 0$; $d^2L(A) \equiv 0$, և պահանջվում է լրացուցիչ հետազոտություն (Աղյուսակ 3.5 տող 5):

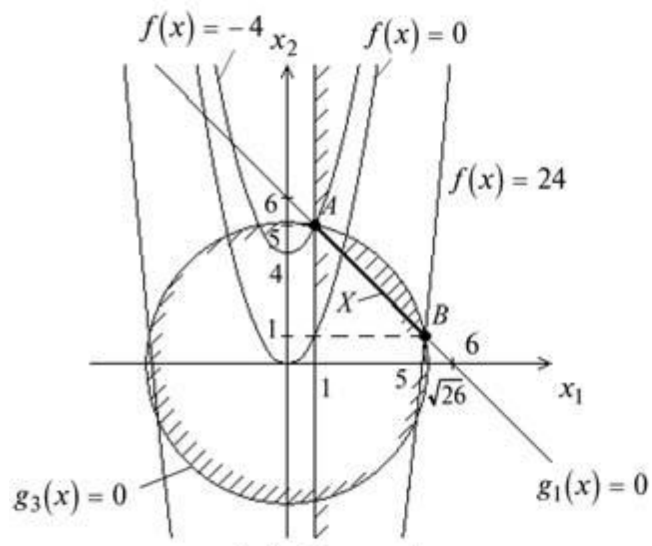
Նկատենք, որ A կետում օրինաչափության պայմանը չի գործում, քանի որ

$$\nabla g_1(\mathrm{A}) = (1;1)^T; \quad \nabla g_1(\mathrm{A}) = (-1;0)^T; \quad \nabla g_1(\mathrm{A}) = (2;10)^T;$$

և

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 2 < 3:$$

Սահմանափակում-անհավասարություններից մեկն «ավելորդ» է, քանի որ դրա առկայությունը չի փոխում իրագործելի լուծումների շարքը: Բայց այնուամենայնիվ



Նկ. 3.19

A կետը ստացվել է անհրաժեշտ պայմաններից, երբ $\lambda_0 \neq 0$: Ուստի այն կարող է լինել ռեգուլյար (կանոնավոր) պայմանական էքստրեմումի (ծայրահեղ) կետ:

Թեև B կետում պայմանական տեղական առավելագույնի առկայության մասին եզրակացությունն արդեն արվել է, երբ օգտագործել ենք առաջին կարգի բավարար պայմանները: Մեթոդաբանական նկատառումներից ելնելով ստուգենք երկրորդ կարգի մաքսիմումի համար բավարար պայմանների կատարումը:

B կետում ակտիվ է երրորդ սահմանափակումը՝

$$\begin{cases} dg_1(\mathrm{B}) = dx_1 + dx_2 = 0; \\ dg_3(\mathrm{B}) = 10dx_1 + 2dx_2 = 0; \end{cases}$$

որտեղից կունենանք $x_1 = dx_2 = 0$ և $d^2L(B) \equiv 0$: Հետևաբար պահանջվում է լրացուցիչ հետազոտություն է (Աղյուսակ 3.5 տող 6), այսինքն՝ երկրորդ կարգի միայն բավարար պայմանների օգտագործումը պայմանական էքստրեմումի առկայության վերաբերյալ վերջնական պատասխան չի տվել:

Այս փաստը վկայում է խնդիրների լուծման գործում առաջին կարգի բավարար պայմանների կարևոր դերի մասին:

Նկար 3.19-ից հետևում է, որ A և B կետերում համապատասխանաբար գլոբալ մինիմում է և մաքսիմում է:

Այժմ դիտարկենք նպատակային ֆունկցիայի հատկությունները, ինչպես նաև սահմանափակումները: Սահմանափակում-հավասարությունը գծային է: Քանի որ նպատակային ֆունկցիան, երկրորդ և երրորդ սահմանափակում-գործառույթները բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0; H_{g_2}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0; H_{g_3}(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \geq 0;$$

ապա նրանք ուռուցիկ են և A կետում գլոբալ մինիմում է:

5. Պայմանական էքստրեմումում ֆունկցիայի արժեքները՝ $f(A) = -4; f(B) = 24$:

Օրինակ 3.24. Գտնել

$$f(x) = x_1 - x_2^2 \to \text{extr};$$

$$\begin{cases} \mathrm{g}_1(\mathrm{x}) = x_1 - x_2 - 1 = 0; \\ \mathrm{g}_2(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 5 \leq 0; \end{cases}$$

խնդրում պայմանական էքստրեմումը:

Լուծում. 1. Կազմենք Լանգրանժի ընդհանրացված ֆունկցիան՝

$$L(x; \lambda_0; \lambda) = \lambda_0(x_1 - x_2^2) + \lambda_1(x_1 - x_2 - 1) + \lambda_2(x_1^2 + x_2^2 - 5);$$

2. Գրում ենք առաջին կարգի էքստրեմումի համար անհրաժեշտ պայմանները՝

ա) $\dfrac{\partial L(x;\, \lambda_0;\, \lambda)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0; \ \dfrac{\partial L(x;\, \lambda_0;\, \lambda)}{\partial x_2} = -2\lambda_0 x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0;$

բ) Լուծման թույլատրելիության պայմանը՝

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 1 = 0; \\ x_1^2 + x_2^2 - 5 \le 0; \end{cases}$$

գ) $\lambda_2 \ge 0$; - մինիմումի համար; $\lambda_2 \le 0$; -մաքսիմումի համար:

դ) $\lambda_2(x_1^2 + x_2^2 - 5) = 0$:

3. Լուծենք համակարգը երկու տարբերակով.

Առաջին տարբերակ $\lambda_0 = 0$: Այդ դեպքում 2. ա)-ից կունենանք՝

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0; \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0; \end{cases}$$

Դիտարկենք 2.դ) պայմանը բավարարելու երկու դեպք.

1) $\lambda_2 = 0$: Այդ դեպքում ստանում ենք $\lambda_1 = 0$ և չի կատարվում դիտողություն 3.8-ի պայմանները:

2) $\lambda_2 \ne 0$: Այդ դեպքում

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 1 = 0; \\ x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0; \end{cases}$$

հավասարումների համակարգը բավարարվում է երկու կետերում՝ $x_1 = 2; x_2 = 1$ և $x_1 = -1; x_2 = -2$: Գումարելով 2.ա)-ի երկու հավասարումները, կստանանք՝

$$\lambda_2(x_1 + x_2) = 0,$$

որտեղից քանի որ $\lambda_2 \ne 0$, կունենանք $x_1 = -x_2$, որը չի բավարարում երկու գտնված կետերում:

Երկրորդ տարբերակում $\lambda_0 \ne 0$: Բաժանենք համակարգի հավասարումները λ_0-ի վրա և λ_1/λ_0 ; λ_2/λ_0-ները փոխարինենք համապատասխանաբար λ_1; λ_2-ներով: Այդ դեպքում 2.ա)-ի համակարգը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0; \\ -2x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0; \end{cases}$$

իսկ մնացած պայմանները մնում են անփոփոխ:

Դիտարկենք 2.դ)-ի բավարարման երկու տարբերակ:

1) $\lambda_2 = 0$: Կունենանք՝

$$\begin{cases} 1 + \lambda_1 = 0; \\ -2x_2 - \lambda_1 = 0; \\ x_1 - x_2 - 1 = 0; \end{cases}$$

այստեղից՝ $\lambda_1 = -1$; $x_2 = {}^1\!/_2$; $x_1 = {}^3\!/_2$ և արդյունքում ստացանք պայմանական ստացիոնար կետ՝

$$A: \quad x_1^* = \frac{3}{2}; \ \ x_2^* = \frac{1}{2}; \quad \lambda_1^* = 0; \ \ \lambda_2^* = 0;$$

որում բավարարվում է և մինիմումի, և մաքսիմումի անհրաժեշտ պայմանները:

1) $\lambda_2 \ne 0$: Կունենանք՝

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0; \\ -2x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 - 1 = 0; \\ x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0; \end{cases}$$

որտեղից կստանանք պայմանական ստացիոնար կետեր՝

$$B: \ \ x_1^* = 2; \ \ x_2^* = 1; \ \ \lambda_1^* = -\frac{5}{3}; \ \ \lambda_2^* = \frac{1}{6};$$

$$C: \ \ x_1^* = -1; \ \ x_2^* = -2; \ \ \lambda_1^* = \frac{2}{3}; \ \ \lambda_2^* = \frac{5}{6};$$

որոնք բավարարում են մինիմումի անհրաժեշտ պայմաններին:

4. Ստուգենք առաջին կարգի էքստրեմումի բավարար պայմանները:

Սահմանափակում-անհավասարությունը A կետում ակտիվ չի հանդիսանում, դրա համար $l = 1 < n = 2$ և պայմանները չի կատարվում (Աղյուսակ 3.4 տողեր 1 և 2):

Սահմանափակում-անհավասարությունը B և C կետերում ակտիվ են, դրա համար $l = n = 2$: Երկու կետերում էլ $\lambda_2^* > 0$, հետևաբար նրանցում պայմանական լոկալ մինիմում են:

Ստուգենք մեթոդաբանական նկատառումներից ելնելով 2-րդ կարգի էքստրեմումի բավարար պայմանները (դա պահանջվում է A կետում):

Սահմանափակում-անհավասարությունը A կետում ակտիվ չի հանդիսանում՝

$$d^2L(A) = 2\lambda_2^* dx_1^2 + (2\lambda_2^* - 2)dx_2^2 = -2dx_2^2;$$

$$dg_1(\mathrm{A}) = dx_1 - dx_2 = 0;$$

այստեղից՝ $dx_1 = dx_2$ և $d^2L(A) = -2dx_2^2 < 0$, երբ $dx_1 \neq 0$: Հետևաբար A կետում կլինի լոկալ պայմանական մաքսիմում (Աղյուսակ 3.5 տող 2):

Սահմանափակում-անհավասարությունը B և C կետերում ակտիվ են:

B կետում

$$d^2L(B) = \frac{1}{3}dx_1^2 - \frac{5}{3}dx_2^2;$$

$$dg_1(\mathrm{B}) = dx_1 - dx_2 = 0;$$

$$dg_2(\mathrm{A}) = 4dx_1 + 2dx_2 = 0;$$

որտեղից՝ $dx_1 = dx_2$ և $d^2L(B) \equiv 0$: B-ում պահանջվում է լրացուցիչ հետազոտություն (Աղյուսակ 3.5 տող 5):

C կետում

$$d^2L(C) = \frac{5}{3}dx_1^2 - \frac{1}{3}dx_2^2;$$

$$dg_1(C) = dx_1 - dx_2 = 0;$$

$$dg_2(C) = -2dx_1 - 4dx_2 = 0;$$

որտեղից՝ $dx_1 = dx_2$ և $d^2L(C) \equiv 0$: C-ում պահանջվում է լրացուցիչ հետազոտություն (Աղյուսակ 3.5 տող 5):

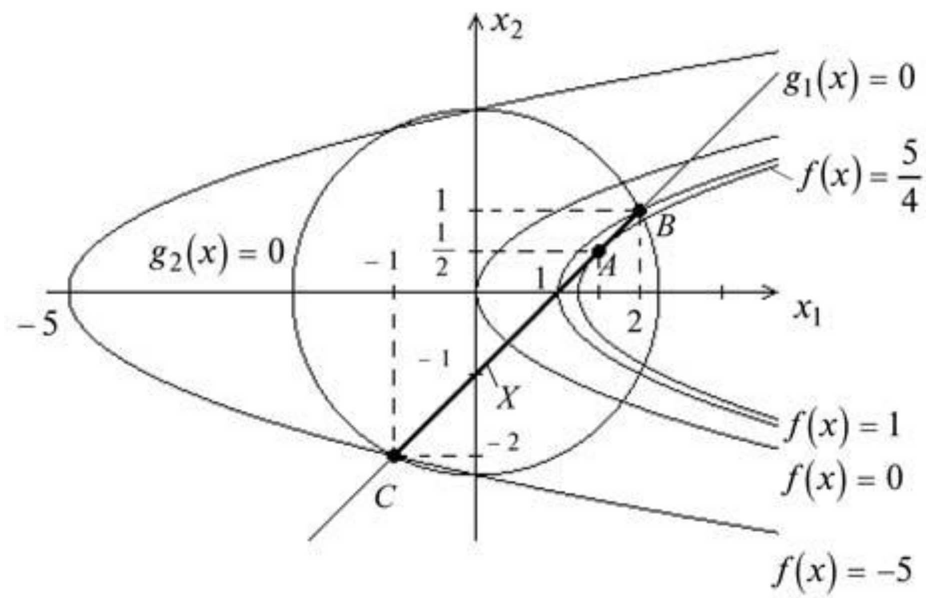
Մյուս կողմից, սահմանափակում-հավասարությունը գծային է, իսկ

$$-f(x) = -x_1 + x_2^2\,; \quad g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 5$$

ֆունկցիաները ուռուցիկ են, քանի որ.

$$H_{-f}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \geq 0; \quad H_{g_2}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0;$$

Հետևաբար, A կետում պայմանական գլոբալ մաքսիմում է (Դիտողություններ 3.6 կետ 3): Քանի որ $f(x) = x_1 - x_2^2$ ֆունկցիան ուռուցիկ չի, ապա B և C կետերում անել եզրակացություն չի կարելի (Դիտողություններ 3.6 կետ 3.):



Նկ. 3.20

Եթե խնդրում պետք է ուսումնասիրվեր $f(x) = -x_1 + x_2^2$ ֆունկցիան, որը ուռուցիկ է, այդ դեպքում A կետում կլիներ գլոբալ մինիմում (դիտողություններ 3.6 կետ 3), իսկ B և C կետերի վերաբերյալ որևէ եզրակացություն չի կարելի անել: Նկ 3.20-ից հետևում է, որ B-ն պայմանական լոկալ մինիմում է, իսկ C-ն պայմանական գլոբալ մինիմում է:

5. Ֆունկցիայի արժեքները էքստրեմում կետերում՝ $f(A) = 5/4, f(B) = 1, f(C) = -5$:

Օրինակ 3.25. Գտնել

$$f(x) = (x_1 - \alpha)^2 + x_2^2 \to \text{extr};$$

$$\begin{cases} g_1(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0; \\ g_2(\mathrm{x}) = -x_1 \leq 0; \end{cases}$$

խնդրում պայմանական էքստրեմումը, երբ $\alpha = 2; -1$:

Լուծում. 1. Կազմենք Լանգրանժի ընդհանրացված ֆունկցիան՝

$$L(x;\lambda_0;\lambda)=\lambda_0[(x_1-\alpha)^2+x_2^2]+\lambda_1(x_1^2+x_2^2-1)+\lambda_2(-x_1);$$

2. Գրում ենք առաջին կարգի էքստրեմումի համար անհրաժեշտ պայմանները՝

ա) $\dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0;\ \lambda)}{\partial x_1}=2\lambda_0(x_1-\alpha)+2\lambda_1x_1-\lambda_2=0;\quad \dfrac{\partial L(x;\ \lambda_0;\ \lambda)}{\partial x_2}=2\lambda_0x_2+2\lambda_1x_2=0;$

բ) Լուծման թույլատրելիության պայմանը՝

$$\begin{cases}x_1^2+x_2^2-1=0;\\ \quad -x_1\le 0;\end{cases}$$

գ) $\lambda_2\ge 0$; - մինիմումի համար; $\lambda_2\le 0$; -մաքսիմումի համար:

դ) $\lambda_2(-x_1)=0$:

3. Լուծենք համակարգը երկու տարբերակով.

Առաջին տարբերակ $\lambda_0=0$: Այդ դեպքում 2. ա)-ից կունենանք՝

$$\begin{cases}2\lambda_1(x_1-\alpha)-\lambda_2=0;\\ \quad 2\lambda_1x_2=0;\end{cases}$$

Դիտարկենք 2.դ) պայմանը բավարարելու երկու տարբերակ.

Առաջին տարբերակ. Եթե $\lambda_2=0$, ապա $\lambda_1=0$-ի համար հայտանիշ 3.8 պնդումը չի բավարարվում, իսկ $\lambda_1\neq 0$-ի համար ստանում ենք $x_1=x_2=0$, այդ դեպքում 2.դ) –ի սահմանափակում- հավասարության պայմանը չի բավարարվում:

Երկրորդ տարբերակ. Եթե $\lambda_2\neq 0$, ապա $x_1=0$ և $\lambda_2=0$, ստացանք հակասություն:

Երկրորդ տարբերակում $\lambda_0\neq 0$ դեպքում, բաժանենք համակարգը λ_0-ի վրա, λ_1/λ_0 և λ_2/λ_0 փոխարինենք համապատասխանաբար λ_1-ով և λ_2-ով, կստանանք

$$\frac{\partial L(x;\lambda)}{\partial x_1}=2(x_1-\alpha)+2\lambda_1x_1-\lambda_2=0;\quad \frac{\partial L(x;\lambda)}{\partial x_2}=2x_2+2\lambda_1x_2=0:$$

Դիտարկենք 2.դ)-ի բավարարման երկու դեպք՝

1) $\lambda_2=0$, կունենանք՝

$$\begin{cases}2(x_1-\alpha)+2\lambda_1x_1=0;\\ \quad 2x_2(1+\lambda_1)=0;\\ \quad x_1^2+x_2^2-1=0;\end{cases}$$

Երկրորդ հավասարումից կստանանք՝ $\lambda_1=-1$ կամ $x_2=0$: $\lambda_1=-1$ դեպքում, 1-ին հավասարումը անհամատեղելի է, քանի որ $\alpha\neq 0$: Երբ $x_2=0$ կստանանք՝ $x_1=\pm 1$: 2.բ)-ին բավարարում է $x_1=1$: Այդ դեպքում $\lambda_1=\alpha-1$: Կստանանք պայմանական ստացիոնար կետ՝

$$A:\quad x_1^*=1;\ \ x_2^*=0;\ \ \lambda_1^*=\alpha-1;\ \ \lambda_2^*=0;$$

1) $\lambda_2 \neq 0$, կունենանք՝ $x_1 = 0$; $x_2 = \pm 1$: 2.ա)-ից հետևում է $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -2\alpha$;
Ստացանք երկու պայմանական ստացիոնար կետեր՝

$$B: \quad x_1^* = 0;\ \ x_2^* = 1;\ \ \ \lambda_1^* = -1;\ \ \lambda_2^* = -2\alpha;$$

$$C: \quad x_1^* = 0;\ \ x_2^* = -1;\ \ \ \lambda_1^* = -1;\ \ \lambda_2^* = -2\alpha;$$

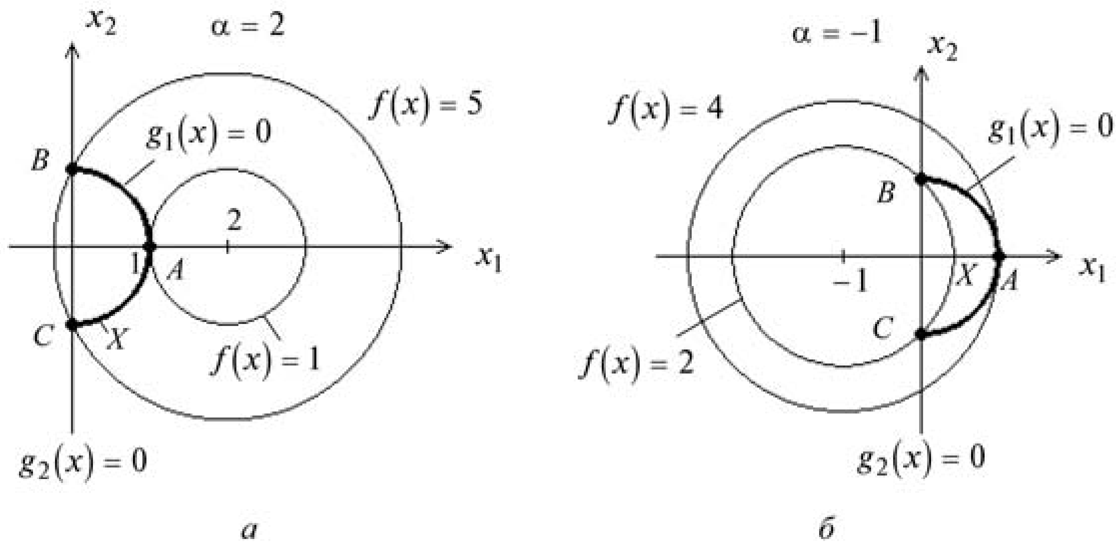
$\alpha > 0$-ի համար կետերում կարող են հասնել մաքսիմումի, քանի որ $\lambda_2^* < 0$-ից, իսկ $\alpha < 0$-ի համար՝ մինիմումի, քանի որ $\lambda_2^* > 0$:

4. Ստուգենք էքստրեմումի բավարար պայմանը:

A կետում սահմանափակում-անհավասարությունը ակտիվ չէ, ուստի $l = 1 < n = 2$ և պայմանները չեն կատարվում:

B և C կետերում սահմանափակում-անհավասարությունը ակտիվ է, այսինքն՝ $l = n = 2$: Երբ $\alpha = 2$, ստանում ենք $\lambda_2^* = -4 < 0$ և այդ կետերում պայմանական լոկալ մաքսիմումի կետեր են (Աղյուսակ 3.4 տող 2): Երբ $\alpha = -1$, ստանում ենք $\lambda_2^* = 2 > 0$ և այդ B-ում և C-ում պայմանական լոկալ մինիմումի կետեր են (Աղյուսակ 3.4 տող 1):

Ստուգենք երկրորդ կարգի էքստրեմության համար բավարար պայմանները:



Նկ. 3.21

Հետազոտենք A կետը, որում սահմանափակում-անհավասարությունը ակտիվ չէ.

$$d^2L(A) = (2 + 2\lambda_1^*)dx_1^2 + (2 + 2\lambda_1^*)dx_2^2 = (2 + 2\lambda_1^*)(dx_1^2 + dx_2^2);$$

$$dg_1(\mathrm{A}) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 2dx_1 = 0;$$

որտեղից՝ $2dx_1 = 0$ և $d^2L(A) = (2 + 2\lambda_2^*)dx_2^2$: Եթե $\alpha = 2$, ստանում ենք $\lambda_1^* = 1$ և այդ դեպքում $d^2L(A) = 4dx_2^2 > 0$, երբ $dx_2 \neq 0$: Հետևաբար A կետը պայմանական լոկալ մինիմում է (Աղյուսակ 3.5 տող 1): Եթե $\alpha = -1$, ստանում ենք $\lambda_1^* = -2$ և այդ դեպքում $d^2L(A) = -2dx_2^2 < 0$, երբ $dx_2 \neq 0$: Հետևաբար A-ն պայմանական լոկալ մաքսիմում է

(Աղյուսակ 3.5 տող 2):

Հետազոտենք $B; C$ կետերը (դրանք կարելի է և չստուգել, քանի որ արդեն արված է եզրակացությունը): Քանի որ $\lambda_1^* = -1$, ապա $d^2L(B) = d^2L(C) \equiv 0$: Պահանջում է այս դեպքում լրացուցիչ ուսումնասիրություն (Աղյուսակ 3.5 տողեր 5 և 6):

Քանի որ սահմանափակում- հավասարությունը գծային չէ, անհնար է եզրակացնել գլոբալ մինիմումի և մաքսիմումի մասին (Դիտողություններ 3.6-ի բաժին 3):

Գրաֆիկական լուծումը ցույց է տալիս, որ B և C կետերում $\alpha = 2$-ում հասնում է գլոբալ պայմանական մաքսիմումի, իսկ $\alpha = -1$-ում հասնում է գլոբալ պայմանական մինիմումի (նկ. 3.21):

5. Ֆունկցիայի արժեքները էքստրեմում կետերում կլինեն՝

$$\begin{cases} \alpha = 2; & f(A) = 1; \ f(B) = f(C) = 5; \\ \alpha = -1; & f(A) = 4; \ f(B) = f(C) = 2; \end{cases}$$

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

1. Գտնել

$$\begin{cases} f(x) = x_1 + x_2 \to \text{extr}; \\ \text{g}_1(\text{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0; \end{cases}$$

խնդրում պայմանական էքստրեմումը:

Պատասխան՝ $x^* = (-2,-2)^T$-ում պայմանական մինիմում է, իսկ $x^{**} = (2,2)^T$ –ում պայմանական մաքսիմում է:

2. Ստուգել, արդյոք $x^* = (-2,2)^T$-ն հանդիսանում է

$$\begin{cases} f(x) = x_1 x_2 \to \min; \\ \text{g}_1(\text{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0; \end{cases}$$

խնդրի լուծումը:

Պատասխան՝ այո:

3. Գտնել

$$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \min; \\ \text{g}_1(\text{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0; \end{cases}$$

խնդրում պայմանական էքստրեմումը:

Պատասխան՝ $x^* = (0,-2)^T$ և $x^{**} = (0,2)^T$:

4. Գտնել

$$\begin{cases} f(x) = (x_1 + 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + 1 \to \min; \\ \text{g}_1(\text{x}) = 2x_1 - x_2 - 2 \le 0; \\ \text{g}_2(\text{x}) = -x_1 \le 0; \\ \text{g}_3(\text{x}) = -x_2 \le 0; \end{cases}$$

խնդրում պայմանական էքստրեմումը:

Պատասխան՝ $x^* = (0,4)^T$- պայմանական մինիմում և չկա պայմանական մաքսիմում:

5. Ստուգել արդյոք հանդիսանում է՝ $x^* = (0,4)^T$ –ը

$$\begin{cases} f(x) = x_1^2 - x_2^2 \to \min; \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 \le 0; \\ x_1 + x_2 \ge 4; \end{cases}$$

խնդրի լուծումը:

Պատասխան՝ այո:

6. Գտնել

$$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \text{extr}; \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0; \\ g_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0; \end{cases}$$

խնդրի լուծումը:

Պատասխան՝ $x^* = (1;1;2)^T$-պայմ. մինիմում, $x^* = (1;1;2)^T$-պայմ. մաքսիմում:

7. Գտնել

$$\begin{cases} f(x) = -4x_1^2 - 4x_1 - x_2^2 + 8x_2 - 5 \to \text{extr}; \\ g_1(x) = 2x_1 - x_2 - 6 = 0; \end{cases}$$

խնդրի լուծումը:

Պատասխան՝ $x^* = (2.25;-1.5)^T$-պայմ. մինիմում

8. Գտնել

$$\begin{cases} f(x) = (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \text{extr}; \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0; \\ g_2(x) = -x_1 \le 0;\ g_3(x) = x_2 \le 0; \end{cases}$$

խնդրի պայմանական էքստրեմումը:

Պատասխան՝ $x^* = (0;4)^T$-պայմանական մինիմում, պայմանական մաքսիմում չկա:

9. Լուծել

$$\begin{cases} f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 \to \min \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4 \le 0; \\ g_2(x) = 4x_1^2 + x_2^2 - 4 \ge 0; \end{cases}$$

խնդիրը:

Պատասխան՝ $x^* = (1;0)^T$ և $x^{**} = (-1;0)^T$- ոչռեգուլյար պայմանական մինիմում:

10. Լուծել

$$\begin{cases} f(x) = 6x_1 - x_1^2 + x_2 \to \max \\ g_1(x) = 2x_1 + 3x_2 - 24 \le 0; \\ g_2(x) = x_1 + 2x_2 - 15 \le 0; \\ g_3(x) = 3x_1 + 2x_2 - 24 \le 0; \\ x_2 \le 4;\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

խնդիրը:

Պատասխան՝ $x^* = (3;4)^T$ կետում պայմանական մաքսիմում:

Գլուխ 2. § 4. Ոչպայմանական էքստրեմումի որոնման թվային մեթոդներ

Գլուխ 1.-ի § 2-ում տրված անվերապահ էքստրեմության(ծայրահեղության) համար անհրաժեշտ և բավարար պայմանների կիրառումը արդյունավետ է սահմանափակ թվով խնդիրների, օրինակների հետազոտման համար, որոնցում պայմաններից բխող հարաբերություններն ունեն վերլուծական լուծում: Գործնական խնդիրների մեծ մասի լուծման համար դրանք չեն կարող առաջարկվել հետևյալ պատճառներով՝

1. Նպատակային $f(x)$ ֆունկցիան չի կարող ունենալ մինչև 2-րդ կարգի ներառյալ անընդհատ ածանցյալներ:

2. Առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանի օգտագործումը կապված է ոչ գծային հանրահաշվական n-րդ կարգի հավասարումների համակարգի լուծման հետ, որն ինքնուրույն խնդիր է, այսինքն էքստրեմումի որոնման խնդրի լուծման բարդությունը համեմատելի է թվային լուծման բարդության հետ:

3. Լինում են դեպքեր, երբ նպատակային ֆունկցիայի մասին հայտնի է միայն այն, որ դրա արժեքը կարելի է հաշվել պահանջվող ճշգրտությամբ, իսկ ֆունկցիան ինքնին նշված է անուղղակիորեն:

4.1. Նպատակային ֆունկցիայի ոչպայմանական էքստրեմումի որոնման թվային մեթոդների կառուցման սկզբունքները. Թվային օպտիմիզացման մեթոդների ճնշող մեծամասնությունը պատկանում է կրկնվող մեթոդների դասին, գեներացնում է կետերի հաջորդականությունը՝ սահմանված կանոնների համաձայն, ներառյալ ավարտման չափանիշը:

Հաշվի առնելով x^0 մեկնարկային կետը, մեթոդները ստեղծում են $x^0;\ x^1;\ x^2; x^3; \cdots$ հաջորդականություն, վորածելով x^k կետը x^{k+1}-որը հանդիսանում է կրկնություն:

Հստակության համար դիտարկենք ոչպայմանական լոկալ մինիմումի որոնման խնդիրը՝

$$f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x)\,; \tag{4.1}$$

Վերոգրյալ (4.1) խնդրի թվային լուծումը, որպես կանոն, կապված է հետազոտվող կետերի $\{x^k\}$ հաջորդականության կառուցման հետ, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

$$f(x^{k+1}) < f(x^k); \quad (k = 0; 1; 2;\ \cdots); \tag{4.2}$$

$\{x^k\}$ հաջորդականությունը կառուցելու ընդհանուր կանոնն ունի հետևյալ ձևը՝

$$x^{k+1} = x^k + t_k d^k; \ \ (k = 0; 1; 2;\ \cdots), \tag{4.3}$$

որտեղ x^0-ն որոնման նախնական կետն է, d^k-ն x^k -ից x^{k+1} կետ անցման ընդունելի ուղղությունն է, որն ապահովում է (4.2)պայմանի կատարումը և կոչվում է վայրէջքի ուղղություն, իսկ t_k-ն քայլի չափն է:

Վայրէջքի ընդունելի ուղղությունը՝ d^k-ը պետք է բավարարի հետևյալ պայմանին՝

$$(\nabla f(x^k); d^k) < 0; \tag{4.4}$$

որն ապահովում է $f(x)$ ֆունկցիայի նվազումը: Ընդունելի ուղղության օրինակ է հանդիսանում հակագրադիենտ վեկտորի ուղղությունը՝ $d^k = -\nabla f(x^k)$:

t^k քայլի չափը ընտրվում է կամ (4.2) պայմանից, կամ էլ վայրէջքի ուղղությամբ ֆունկցիայի մինիմումի պայմանից՝

$$f(x^k + t_k d^k) \to \min_{t_k}: \tag{4.5}$$

t^k քայլի ընտրությունը (4.5) պայմանից դարձնում է ամենաարագ վայրէջքը d^k-ի ուղղությամբ:

Սահմանում 4.1. $\{x^k\}$հաջորդականությունը կոչվում է մինիմիզացնող, եթե

$$\lim_{k\to\infty} f(x^k) = f^*:$$

այսինքն՝ հաջորդականությունը զուգամիտում է ներքին եզրին՝

$$f^* = \inf_{x\in R^n} f(x):$$

Սահմանում 4.2. Ասում են, որ $\{x^k\}$ հաջորդականությունը կոչվում է զուգամիտող x^*մինիմում կետին եթե $\|x^k - x^*\| \to 0$-ի $k \to \infty$-ի դեպքում:

$\{x^k\}$ հաջորդականության զուգամիտումը ըստ d^k վայրէջքի ընդունելի ուղղության և t_k քայլի չափի ընտրության (4.2) կամ (4.5) պայմանի դեպքում, կախված է $f(x)$ ֆունկցիայի բնույթից և սկզբնական x^0 կետի ընտրությունից:

Օրինակ 4.1. Դասակարգել ըստ 4.1 և 4.2 սահմանումների.

ա) $\{x^k\} = k$ հաջորդականությունը

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^4}$$

ֆունկցիայի համար:

բ) $\{x^k\}$հաջորդականությունը, տրված $x^{k+1} = x^k - {}^1\!/_2\, \nabla f(x^k)$ կանոնով, հետևյալ $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ ֆունկցիայի համար:

Լուծում.Օգտվենք 4.1 և 4.2 սահմանումներից:

ա) $\{x^k\} = k$ հաջորդականությունը $(k = 1; 2; 3; \cdots)$

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^4}$$

ֆունկցիայի համար հանդիսանում է մինիմիզացնող, քանի որ՝

$$\lim_{k\to\infty} f(x) = 0 = f^*,$$

բայց նա չի զուգամիտում $x^* = 0$;

բ) $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ ֆունկցիայի համար $x^{k+1} = x^k - {}^1\!/_2\, \nabla f(x^k)$ կանոնով գործող հաջորդականությունը հանդիսանում է ոչ միայն նվազեցնող, այլ նաև զուգամիտում է

$x^* = (0;0)^T;\ f(x^*) = f^* = 0$, քանի որ

$$\nabla f(x^k) = (2x_1^2; 2x_2^2\ )^T \quad \text{և} \quad \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2x_1^k \\ 2x_2^k \end{pmatrix}:$$

Կախված $f(x)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալների ամենաբարձր կարգից, որն օգտագործվում է d^k և t_k ձևավորման համար, ոչպայմանական մինիմիզացիայի (4.1) խնդիրը լուծելու թվային մեթոդները սովորաբար բաժանվում են երեք խմբի.

1. Զրոյական կարգի մեթոդներ, որոնք օգտագործվում են միայն $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքի մասին տեղեկատվության համար:

2. Առաջին կարգի մեթոդներ, որոնք օգտագործվում են $f(x)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի ածանցյալների մասին տեղեկատվություն ստանալու համար:

3. Երկրորդ կարգի մեթոդներ, որոնց իրականացման համար պահանջվում է $f(x)$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալների վերաբերյալ իմացություն:

Մեթոդի արդյունավետությունը դեռ չի երաշխավորվում համապատասխան $\{x^k\}$ հաջորդականության զուգամիտության ապացույցով. անհրաժեշտ է զուգամիտության որոշակի արագություն:

Պետք է նկատի առնենք, սակայն, որ գործնականում զուգամիտության ընդհանուր տեսության հետևանքները պետք է օգտագործվեն մեծ խնամքով: Այսպիսով, օրինակ, անհնար է գնահատել ալգորիթմները դրանց ստեղծած հաջորդականությունների տեսական զուգամիտության տեմպերով, թեև այդ տեմպերը որոշ չափով որոշում են մեթոդների արդյունավետությունը, այն պայմանները, որոնց դեպքում դրանք հասանելի են, և հազվադեպ են իրականացվում:

Նույն կերպ, ալգորիթմը չի կարող անտեսվել միայն այն պատճառով, որ դրա զուգատիմության արագության թեորեմներն ապացուցված չեն: դա կարող է պայմանավորված լինել մեթոդի ցածր որակով, բայց հնարավոր է, որ ապացույցներ չկան պարզապես այն պատճառով, որ այն շատ դժվար է իրականացնել:

Դիտարկենք $\{x^k\}$ հաջորդականությունը, որը ձգտում է x^*-ին: Ենթադրենք, որ նրա բոլոր տարրերը տարբեր են, և x^k կետերից ոչ մեկը չի համընկնում x^*-ի հետ:

Զուգամիտության արագությունը գնահատելու ամենաարդյունավետ միջոցը x^{k+1} և x^*-ի, ու x^{k+1} և x^*-ի միջև եղած հեռավորության համեմատելն է:

Սահմանում 4.3. $\{x^k\}$ հաջորդականությունը կոչվում է զուգամետ r կարգով, եթե r-ն առավելագույն թիվն է, որի համար

$$0 \le \lim_{k\to\infty} \frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|^r} < \infty:$$

Քանի որ r մեծությունը որոշվում է $\{x^k\}$-ի սահմանային հատկություններով, այն կոչվում է զուգամիտության ասիմպտոտիկ արագություն:

Սահմանում 4.4. Եթե $\{x^k\}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է r կարգով, ապա

$$c = \lim_{k\to\infty} \frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|^r}$$

թիվը կոչվում է ասիմպտոտիկ սխալի պարամետր:

Սահմանում 4.5. Եթե $r = 1, c < 1$, ապա զուգամիտությունը գծային է. եթե $r = 2$, ապա զուգամիտությունը քառակուսային է, եթե $r > 1$ կամ $r = 1, c = 0$, ապա զուգամիտությունը գերգծային է:

Գծային զուգամիտությունը հոմանիշ է, երկրաչափական պրոգրեսիայի արագությամբ զուգամիտության հետ:

Օրինակ 4.2. Որոշել $\left\{x^k = a^{2^k}; k = 0; 1; \cdots\right\}$ հաջորդականության զուգամիտության կարգը, որտեղ $0 \leq a < 1$:

Լուծում. Այս հաջորդականության յուրաքանչյուր հաջորդ անդամը հավասար է նախորդի քառակուսուն, իսկ դրա սահմանը հավասար է զրոյի: Ըստ **սահմանում 4.4**.-ի

$$\frac{|x^{k+1} - 0|}{|x^k - 0|^2} = a,$$

հետևաբար $r = 2$ և զուգամիտությունը քառակուսային է: Այստեղից, կունենանք, որ առակուսի զուգամիտությունը, նշանակում է, որ յուրաքանչյուր քայլի հետ x^k-ում ճշտգրիտ թվանշանների թիվը կրկնապատկվում է:

Աղյուսակ 4.1

k	x^k	y^k	z^k
0	0.99	2.2	
1	0.9801	1.4832397	1.0
2	0.96059601	1.2178833	0.25
3	0.92274469	1.1035775	0.03703704
4	0.85145777	1.0505130	0.00390625
5	0.72498033	1.0249453	0.00032
6	0.52559649	1.0123958	0.00002143
7	0.27625167	1.0061788	0.00000121
8	0.07631498	1.0030847	0.000000596
9	0.00582398	1.0015411	0.000000026
10	0.00003392	1.0007703	−
11	$0.11515 \cdot 10^{-8}$	1.0003851	−
12	$0.13236 \cdot 10^{-17}$	1.0001925	−
13	$0.17519 \cdot 10^{-36}$	1.0000963	−
14	$0.30692 \cdot 10^{-72}$	1.0000481	−

$a = 0{,}99$ պարամետրով հաջորդականության առաջին տասնչորս անդամները բերված են Աղյուսակ 4.1-ի երկրորդ սյունակում: Նկատենք, որ ճիշտ թվանշանների թվի կրկնապատկումը անմիջապես չի սկսվում, այլ, երբ $k \geq 7$-ը:

Օրինակ 4.3. Որոշել
ա) $y^k = a^{2^{-k}}; k = 0; 1; 2; \cdots$, որտեղ $a > 0$:
բ) $\gamma^k = 1 + 2^{-k};\ k = 0; 1; 2; \cdots$,
հաջորդականությունների զուգամիտության կարգը:
Լուծում. Օգտվենք **սահմանումներ $\mathbf{4.3 \div 4.5}$-ից**:
ա) այս հաջորդականության յուրաքանչյուր հաջորդ անդամը նախորդ անդամի քառակուսի արմատն է: Նրա սահմանը ցանկացած $a > 0$-ի համար հավասար է 1-ի, ընդ որում

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a^{2^{-(k+1)}} - 1}{a^{2^{-k}} - 1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{a^{2^{-(k+1)}} + 1} = \frac{1}{2}:$$

Հետևաբար, $r = 1$ և կոնվերգենցիան գծային է: Այս հաջորդականության առաջին տասնչորս անդամները a = 2.2-ի համար տրված են Աղյուսակ 4.1-ի 3-րդ սյունակում;
բ) $\{\gamma^k\} = \left\{2; \frac{3}{2}; \frac{5}{4}; \frac{9}{8}; \cdots\right\}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է $x^* = 1$ կետին, ընդ որում՝

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\gamma^{k+1} - 1}{\gamma^k - 1} = \frac{1}{2}:$$

Հետևաբար $r = 1$, և զուգամիտությունը գծային է:

Օրինակ 4.4. Որոշել $\{z^k = k^{-k}; k = 1; 2; \cdots\}$ հաջորդականության զուգամիտության կարգը
Լուծում. $\{z^k\}$ հաջորդականության սահմանը հավասար է 0-ի և

$$\lim_{k\to\infty} \frac{z^{k+1} - 1}{z^k - 1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}} = 0;$$

Քանի $r = 1$, և $c = 0$, ապա զուգամիտությունը գերգծային է:

Դիտողություններ 4.1.
1. Գործնականում գծային զուգամիտությունը կարող է դանդաղ լինել, մինչդեռ քառակուսի կամ գերգծային զուգամիտությունը բավականին արագ է: Կրկնվող գործընթացի իրական վարքագիծը կախված է c հաստատունից, օրինակ, $c = 0{,}001$ հաստատունով գծային զուգամիտությունը, հավանաբար, բավականին բավարար է, բայց $c = 0{,}9$ հաստատունով՝ ոչ:
2. Ալգորիթմների համեմատության ժամանակ հաճախ օգտագործվող զուգամետության չափանիշներից մեկը հանդիսանում էքառակուսային ֆունկցիաները էֆեկտիվ

ձևով նվազագույնի հասցնելու նրանց կարողությունն է: Սա բացատրվում է նրանով, որ մինիմումի (նվազագույնի) մոտ քառակուսի ֆունկցիան կարող է լինել օբյեկտիվ (նպատակային) ֆունկցիայի բավականին լավ մոտարկում: Այսպիսով, ալգորիթմը, որը լավ արդյունքներ չի տալիս քառակուսային ֆունկցիան մինիմումի հասցնելիս, դժվար թե հաջողությամբ օգտագործվի ընդհանուր ոչ գծային ֆունկցիայի դեպքում, երբ ընթացիկ կետը գտնվում է մինիմումի մոտակայքում:

4.2.Առաջադրանքներ ինքնուրույն կատարման համար.

1. Դասակարգել

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10x_1^k - 15 \\ 2x_2^k - 1 \\ 6x_3^k + 6 \end{pmatrix}$$

հաջորդականությունը $f(x) = 5x_1^2 - 15x_1 + x_2^2 - x_2 + 3x_3^2 + 6x_3 + 10$:

Պատ. հաջորդականությունը մինիմումի է հասցվում և մոտենում է մինիմում կետին՝ $x^* = (1.5; 0.5; -1)^T$:

2. Դասակարգել

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8x_1^k + 16 \\ 6x_2^k + 18 \\ 2x_3^k - 4 \end{pmatrix}$$

հաջորդականությունը $f(x) = 4x_1^2 + 16x_1 + 3x_2^2 + 18x_2 + x_3^2 - 4x_3 + 16$:

Պատ. հաջորդականությունը մինիմումի է հասցվում և մոտենում է մինիմում կետին՝ $x^* = (2; -3;\ 2)^T$:

3. Որոշել $\{x^k = 1 + 3^{-k}; k = 0; 1; 2;\ \cdots\}$ հաջորդականության զուգամիտության կարգը:

Պատ. հաջորդականությունը զուգամիտում է $x^* = 1$-ին գծային, երբ $c = 1/3$:

4. Դասակարգել

$$x^{k+1} = x^k - \frac{1}{8}\nabla f(x^k)$$

հաջորդականությունը $f(x) = 4x^2 - 8x + 7$:

Պատ. հաջորդականությունը մինիմումի է հասցվում և զուգամիտում է ֆունկցիայի $x^* = 1$ մինիմում կետին:

5. Դասակարգել

$$x_1^{k+1} = -\frac{1}{8}x_2^k + \frac{9}{8}; k = 0; 1; 2;\ \cdots$$
$$x_2^{k+1} = \frac{1}{5}x_1^k + \frac{4}{5}:$$

հաջորդականությունը:

Պատ. հաջորդականությունը զուգամիտում է $x^* = (1{:}\,1)^T$ կետին:

§ 5. Զրոյական կարգի մեթոդներ

5.1. Միաչափ մինիմիզացման մեթոդներ .

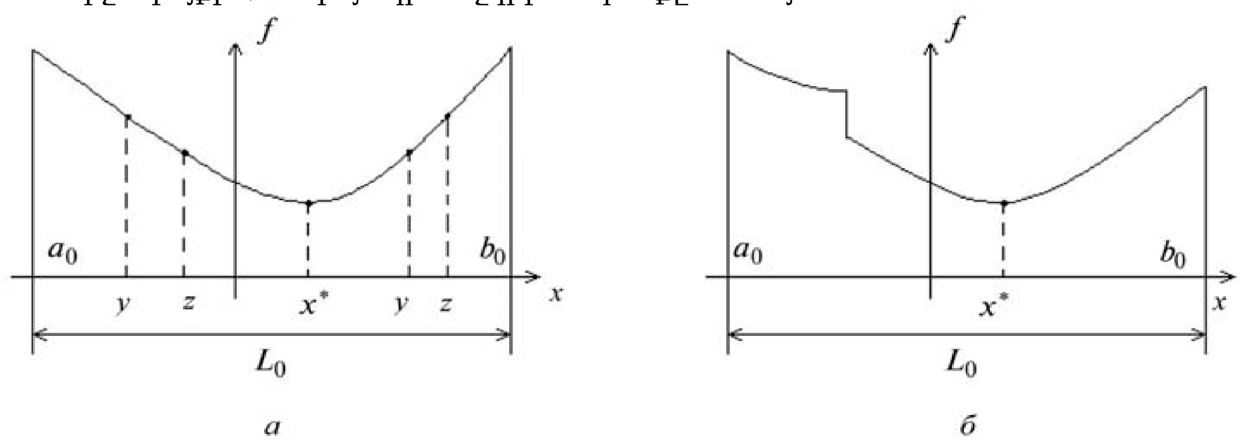
5.1.1. Խնդրի դրվածքը և որոնման ալգորիթմը. Պահանջվում է գտնել մեկ փոփոխականից $f(x)$ ֆունկցիայի ոչպայմանական մինիմումը, այսինքն՝ այնպիսի $x^* \in R$, որ

$$f(x^*) = \min_{x \in R} f(x):$$

Դիտարկվող մինիմիզացման խնդիրը լուշվում է օգտագործելով ոչպայմանական էքստրեմության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները (տես § 2).

Դիտողություններ 5.1.

1. Միաչափ մինիմիզացիայի մեթոդների համար բնորոշ է նվազագույն կետի դիրքի մասին տեղեկատվություն սահմանել՝ օգտագործելով նախնական անորոշության միջակայքը $L_0 = [a_0; b_0]$(նկ. 5.1): Ենթադրվում է, որ x^*նվազագույն կետը պատկանում է L0 միջակայքին, սակայն դրա ճշգրիտ արժեքը անհայտ է:



Նկ. 5.1

2. Միաչափ մինիմալացման հայտնի մեթոդների մեծ մասը կիրառվում է միամոդալ ֆունկցիաների դասի նկատմամբ:

Սահմանում 5.1. $f(x)$-ը կոչվում է միամոդալ ֆունկցիա $L_0 = [a_0; b_0]$ միջակայքի վրա, եթե նա հասնում է գլոբալ մինիմումի $[a_0; b_0]$ միջակայքի միակ x^* կետում, ընդ որում այդ կետից ձախ ֆունկցիան խիստ նվազում է, իսկ աջ խիստ աճում է: Եթե $a_0 \le y < z < x^*$, ապա $f(y) > f(z)$, իսկ եթե $x^* < y < z \le b_0$, ապա $f(y) > f(z)$ (Նկ. 5.1 a): Նկատի առնենք, որ անընդհատ խիստ ուռուցիկ ֆունկցիան միամոդալ է: Այնուամենայնիվ, ֆունկցիաները, որոնք շարունակական չեն և ուռուցիկ, կարող են բավարարել սահմանում 5.1.-ին (նկ. 5.1բ):

3. Միաչափ մինիմիզացիայի մեթոդները լայնորեն կիրառվում են 1-ին և 2-րդ կարգի մեթոդներում՝ t_k քայլի օպտիմալ չափը գտնելու համար: Այս դեպքում ձախ սահմանը,

նախնական անորոշության միջակայքի, ինչպես կանոն, սովորաբար համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ, այսինքն՝ $a_0 = 0$:

Որոնման ռազմավարությունը.

Գոյություն ունեն երկու սկզբունքորեն տարբեր ռազմավարություններ՝ ընտրելու այն կետերը, որոնցում հաշվվում են ֆունկցիայի արժեքները: Եթե նախապես բոլոր կետերը տրված են նախօրոք, ապա նախքան հաշվարկների մեկնարկը, սա պասիվ (զուգահեռ) ռազմավարություն է: Եթե որոնման գործընթացում այս կետերը ընտրվեն հաջորդաբար՝ հաշվի առնելով նախորդ հաշվարկների արդյունքները, այս դեպքում ռազմավարությունը անվանում են հաջորդական:

Պասիվ ռազմավարության իրականացման օրինակ է որոնման միասնական մեթոդը (տես 5.1.1 կետ):

Հաջորդական ռազմավարությունը կարող է իրականացվել հետևյալ եղանակներով.

ա) օգտագործելով քառակուսի և խորանարդ ինտերպոլացիա (ներդրում), որտեղ ինտերպոլացիայի բազմանդամը կառուցված է ֆունկցիայի մի քանի հաշվարկված արժեքներից, և դրա մինիմումը ցույց է տալիս ցանկալի էքստրեմումի կետի հաջորդ մոտարկումը.

բ) միմյանց մեջ տեղադրված ընդմիջումների հաջորդականության կառուցումով, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է մինիմումի կետ:

Որոնման ռազմավարությունը ներառում է երեք փուլ.

1. Անորոշության նախնական միջակայքի ընտրություն: Միջակայքի $[a_0; b_0]$ եզրերը պետք է լինեն այնպիսին, որ $f(x)$ ֆունկցիան լինի միամոդալ (տես սահմանում 5.1):

2. Անորոշության միջակայքի նվազում:

3. Ավարտի պայմանների ստուգում: Որոնումն ավարտվում է, երբ անորոշության ընթացիկ $[a_k; b_k]$ միջակայքի երկարությունը պարզվում է, որ պակաս է սահմանված արժեքից:

Պատասխանը հանդիսանում է անորոշության վերջին միջակայքին պատկանող կետերի բազմությունը, որոնց թվում ինչ-որ կերպ ընտրվում է դիտարկվող խնդրի x^* լուծումը:

Դիտողություններ 5.2.

Կետ 1. Որոշ մեթոդներում նախապես տրվում է կամ որոնվում է ֆունկցիայի N քանակի հաշվարկներ: Այս դեպքում որոնման տևողությունը սահմանափակ է:

Կետ 2. Նախնական անորոշության միջակայքի հեուրիստական ընտրության համար կարող են օգտագործվել Սվենի ալգորիթմները (W. H. Swann):

1) կամայականորեն սահմանեք հետևյալ պարամետրերը. x^0-որոշակի կետ, $t > 0$ քայլի չափը: Վերցնել $k = 0$;

2) հաշվարկել ֆունկցիայի արժեքը երեք կետերում ՝$x^0 - t$; x^0; $x^0 + t$:

3) Ստուգեք ավարտի պայմանը.

ա) եթե $f(x^0 - t) \geq f(x^0) \leq f(x^0 + t)$, ապա անորոշության սկզբնական միջակայքը գտնված է ՝ $[a_0; b_0] = [x^0 - t;\ x^0 + t]$:

բ) եթե $f(x^0 - t) \le f(x^0) \ge f(x^0 + t)$, այս դեպքում $f(x)$-ը միամոդալ ֆունկցիան չի հանդիսանում (տես **սահմանում 5.1**.), իսկ պահանջվող անորոշության միջակայքը չի կարող որոնվել և հաշվարկները դադարվում են (խորհուրդ է տրվում սահմանել մեկ այլ մեկնարկային x^0 կետ);

գ) եթե ավարտի պայմանը չի բավարարվում, ապա անցեք 4-րդ քայլին;

4) Որոշել Δ-ի մեծությունը՝

ա) եթե $f(x^0 - t) \ge f(x^0) \ge f(x^0 + t)$, ապա $\Delta = t;\ a_0 = x^0;\ \ x^1 = x^0 + t; k = 1$:

բ) եթե $f(x^0 - t) \le f(x^0) \le f(x^0 + t)$, ապա $\Delta = -t;\ b_0 = x^0;\ \ x^1 = x^0 - t; k = 1$:

5) Գտնել հաջորդ կետը՝ $x^{k+1} = x^k + 2^k\Delta$:

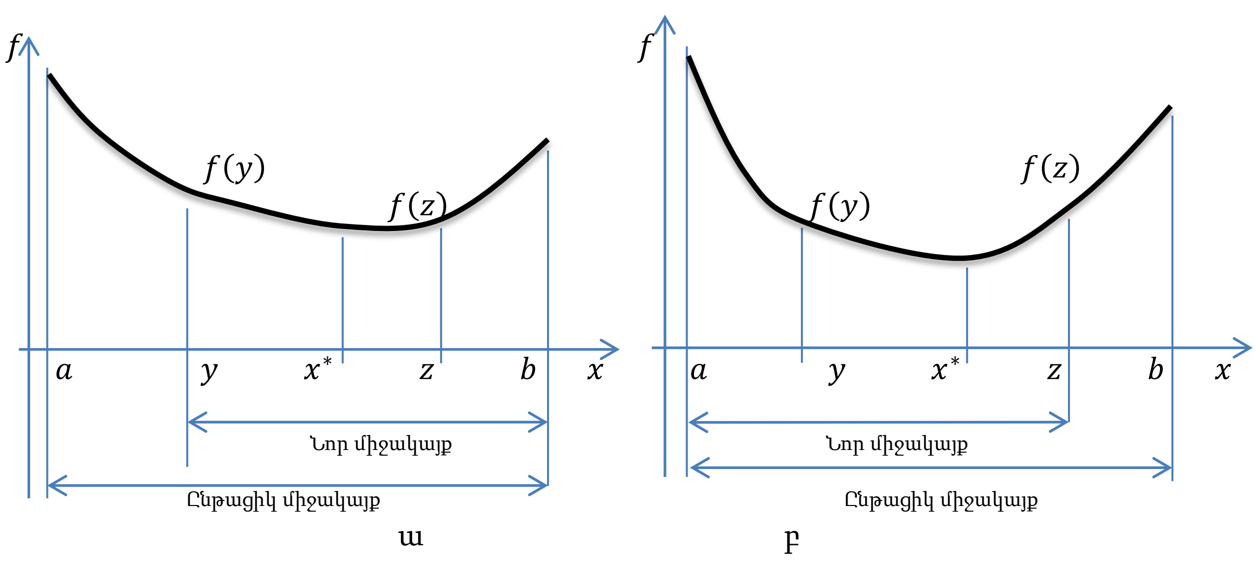
6) Ստուգել ֆունկցիայի նվազման պայմանը՝

ա) Եթե $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ և $\Delta = t$, ապա $a_0 = x^k$, եթե $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ և $\Delta = -t$, ապա $b_0 = x^k$: Երկու դեպքերում էլ վերցնել $k = k + 1$ և անցնել քայլ 5-ին:

բ) եթե $f(x^{k+1}) \ge f(x^k)$, ընթացակարգը ավարտվում է: Երբ $\Delta = t$, վերցնել $b_0 = x^{k+1}$, իսկ $\Delta = -t$ դեպքում վերցնել $a_0 = x^{k+1}$: Արդյունքում մենք ունենք [a0, b0] — ցանկալի անորոշության նախնական միջակայքը:

Կետ 3. Անորոշության միջակայքի նվազումը, որն իրականացվում է հաջորդական ռազմավարության օգտագործմամբ, կատարվում է ֆունկցիայի ընթացիկ միջակայքի երկու կետերում հաշվարկի հիման վրա: Ունիմոդալության հատկությունը թույլ է տալիս որոշել, թե հնարավոր ենթածրագրերից որի մեջ է բացակայում մինիմումի կետը:

Դիցուք $[a; b]$միջակայքի y և z կետերում հաշված են ֆունկցիայի արժեքները՝ $f(y)$ և $f(z)$: Եթե $f(y) > f(z)$, ապա $x^* \notin [a; y)$ և հետևաբար $x^* \in [y; b]$ (Նկ. 5.2ա):



Նկ. 5.2.

Եթե $f(y) < f(z)$, ապա $x^* \notin (z; b]$ և հետևաբար $x^* \in [a; z]$(Նկ. 5.2բ): Այլ կերպ ասած, որպես նոր միջակայք վերցվում է «երաշխավորող միջակայք», որը պարունակում է անշուշտ մինիմումի կետ: Եթե $f(y) = f(z)$, որպես նոր միջակայք կարելի է վերցնել նկար 5.2-ում պատկերվածներից որևէ մեկը:

Սահմանում 5.2. Անորոշության նախնական միջակայքի հարաբերական նվազման $R(N)$ բնութագրիչ կոչվում է միջակայքի երկարության, որն ստացվում է ֆունկցիայի n հաշվման արդյունքում, հարաբերությունը անորոշության նախնական միջակայքի երկարությանը՝

$$R(N) = \frac{|L_N|}{|L_0|}:$$

Օրինակ 5.1. Գտնել անորոշության նախնական միջակայքը

$$f(x) = (x-5)^2$$

ֆունկցիայի մինիմումի որոնման համար:

Լուծում. Օգտագործենք Սվենի ալգորիթմը:

1^0. Տանք $x^0 = 1$ և $t = 1$: Վերցնենք $k = 0$:

2^0. Հաշվենք ֆունկցիայի արժեքները $x^0 - t = 0$; $x^0 = 1$; $x^0 + t = 2$:

$$f(0) = 25;\ \ f(1) = 16;\ \ f(2) = 9:$$

3^0. Ավարտի պայմանները չեն բավարարվում:

4^0. Քանի որ $f(0) > f(1) > f(2)$, ապա $\Delta = 1$; $a_0 = 1$; $x^1 = x^0 + t = 2$; $k = 1$:

5^0. Գտնենք հաջորդ կետը՝ $x^2 = x^1 + 2\Delta = 2 + 2 = 4$:

6^0. Քանի որ $f(x^2) = 1 < f(x^1)$ և $\Delta = 1$, ապա $a_0 = x^1 = 2$: Վերցնենք $k = 2$ և անցնենք քայլ 5^0-ին:

5^1. Գտնենք հաջորդ կետը՝ $x^3 = x^2 + 4\Delta = 4 + 4 = 8$:

6^1. Քանի որ $f(x^3) = 9 > f(x^2) = 1$ և $\Delta = t = 1$, ապա որոնումն ավարտված է և աջ եզրը միջակայքի կլինի՝ $b_0 = x^3 = 8$:Այստեղից հետևում է, անորոշության նախնական միջակայքն ունի հետևյալ տեսքը՝ $[a_0;\ b_0] = [2; 8]$:

5.2. Հավասարաչափ որոնման մեթոդը. **Խնդրի դրվածքը**. Պահանջվում է գտնել մեկ փոփոխականի $f(x)$ ոչպայմանական մինիմումը, այսինքն այնպիսի $x^* \in R$, որ

$$f(x^*) = \min_{x^* \in R} f(x):$$

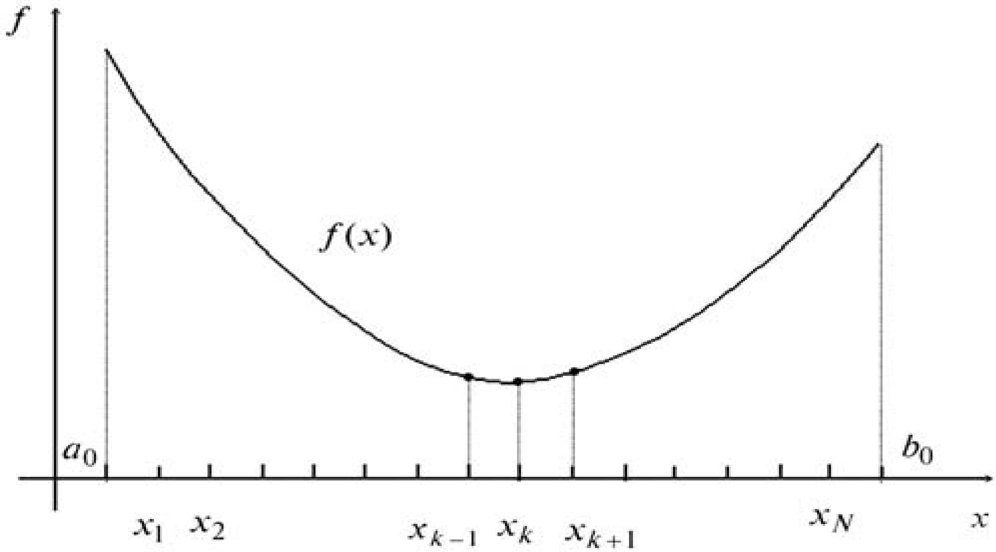
Որոնման ռազմավարությունը

Տվյալ մեթոդը վերաբերվում է պասիվ ռազմավարություններին: Անորոշության նախնական միջակայքը սահմանվում է $L_0 = [a_0;\ b_0]$ և ֆունկցիայի հաշվարկների քանակը հավասար N-ի: Հաշվարկները կատարվում են N հավասար հեռավորության վրա գտնվող կետերում (Այս դեպքում L_0 միջակայքը բաժանվում է $N + 1$ հավասար միջակայքերի): Համեմատելով $f(x_i)$; $i = \overline{1; N}$ արժեքները, որոնվում է x_k կետը, որում ֆունկցիաի արժեքը մմինիմում է: Որոնելի x^* կետը գտնվում է $[x_k; x_{k+1}]$ միջակայքում (Նկ. 5.3):

Ալգորիթմը

Քայլ 1. Սահմանել նախնական անորոշության միջակայքը $L_0 = [a_0;\ b_0]$, և N-ը $f(x)$ ֆունկցիայի հաշվարկների քանակը:

Քայլ 2. Հաշվել իրարից հավասարաչափ հեռավորության վրա գտնվող կետերը՝



Նկ. 5.3

$$x_i = a_0 + \frac{i \cdot (b_0 - a_0)}{N+1}; \; i = \overline{1; N}:$$

Քայլ 3. Հաշվել ֆունկցիայի արժեքները գտնված N կետերում՝ $f(x_i); i = \overline{1; N}$:

Քայլ 4. Գտնված x_i; $i = \overline{1; N}$ կետերի շարքում վերցնել այն մեկը, որում ֆունկցիան ընդունում է մինիմում արժեքը:

Քայլ 5. Մինիմումի x^* կետը պատկանում է $x^* \in [x_{k-1}; \; x_{k+1}] = L_N$ միջակայքին, որում որպես մոտավոր լուծում կարելի է ընտրել $x^* \cong x_k$:

Զուգամիտություն

Հավասարաչափ որոնման մեթոդի համար անորոշության սկզբնական միջակայքի հարաբերական նվազման բնութագիրը հայտնաբերվում է բանաձևով

$$R(N) = \frac{2}{N+1},$$

որտեղ N-ը ֆունկցիայի արժեքների քանակն է:

Դիտողություններ 5.3.

1. Եթե տրված է $R(N)$ արժեքը, ապա ֆունկցիայի անհրաժեշտ հաշվարկների ցանկալի ճշգրտությանը հասնելու համար պահանջվող քանակը որոշվում է որպես ամենափոքր ամբողջ թիվ, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝

$$N \geq \frac{2}{R(N)} - 1:$$

2. $[a_0; \; b_0]$ միջակայքը $N+1$ հավասար մասերի բաժանելիս օգտագործվում է գերդասավորված մեթոդը: Խնդրի լուծման համար կիրառվող մեթոդը հետևյալն է:

ա) հաշվարկել կետերը՝

$$x_i = a_0 + \frac{i \cdot (b_0 - a_0)}{N + 1}; \quad i = \overline{1; N},$$

որոնք իրարից տեղադրված են հավասարաչափ հեռավորության վրա:

բ) Հաշվել ֆունկցիայի արժեքները գտնված կետերում՝ $f(x_i)$; $i = \overline{1; N}$:

գ) Տրված $i = \overline{1; N}$ կետերում գտնել այն կետը, որում ֆունկցիան կընդունի մինիմում արժեքը՝

$$f(x_k) = \min_{0 \le i \le N+1} f(x_i):$$

Տվյալ գերդասավորված մեթոդով (метод перебора) մինիմումի կետի որոնման սխալը չի գերազանցում

$$\frac{(b_0 - a_0)}{N + 1}:$$

Օրինակ 5.2. Հավասարաչափ որոնման մեթոդով գտնել

$$f(x) = 2x^2 - 12x$$

ֆունկցիայի մինիմումը:

Լուծում. Օգտվում ենք հավասարաչափ որոնման մեթոդի ալգորիթմից:

1. Փնտրենք նախնական անորոշության միջակայքը Սվեննի մեթոդով (տես կետ 2. **դիտողություններ 5.2**):

ա) Տրվում է նախնական կետը՝ $x^0 = 5$; քայլ $t = 5$: Վերցնում ենք $k = 0$:

բ) հաշվել ֆունկցիայի արժեքները երեք կետերում՝ $x^0 - t = 0$; $x^0 = 5$; $x^0 + t = 10$;

$$f(x^0 - t) = 0; \quad f(x^0) = 10; \quad f(x^0 + t) = 80:$$

գ) քանի որ $f(x^0 - t) > f(x^0) < f(x^0 + t)$, այդ դեպքում նախնական անորոշության միջակայքը գտնված է՝ $L_0 = [0; 10]$: Վերցնենք $N = 9$ կստանանք $N + 1 = 10$ հավասար ենթամիջակայքեր:

2. Որոշենք ֆունկցիայի արժեքների հաշվման կետերը՝

$$x_i = 0 + \frac{i \cdot (10 - 0)}{10}; \quad i = \overline{1; 9}:$$

3. Հաշվենք ֆունկցիայի արժեքները ինը կետերում՝

$$f(1) = -10; \quad f(2) = -16; \quad f(3) = -18; \quad f(4) = -16; \quad f(5) = -10;$$

$$f(6) = 0; \quad f(7) = 14; \quad f(8) = 32; \quad f(9) = 54:$$

4. $x = 3$ կետում ֆունկցիան ընդունում է ամենափոքր արժեքը ՝ $f(3) = -18$:

5. Ինը հաշվարկներից հետո որոնվելիք մինիմումի ցանկալի կետը պատկանում է միջակայքին ՝$x^* \in [2; 4] = L_9$, որում ընտրվում է $x^* \cong x_3 = 3$:կետը:

Նախնական անորոշության միջակայքի համեմատության բնութաքիրը կլինի՝

$$R(N) = \frac{|L_9|}{|L_0|} = \frac{4 - 2}{10 - 0} = 0.2 = \frac{2}{9 + 1}:$$

5.3. Միջակայքը կիսով չափ բաժանելու մեթոդը. Խնդրի դրվածքը. Պահանջվում է գտնել մեկ փոփոխականի $f(x)$ ֆունկցիայի ոչպայմանական մինիմումը, այսինքն այնպիսի $x^* \epsilon R$ կետ, որ

$$f(x^*) = \min_{x^* \epsilon R} f(x):$$

Որոնման ռազմավարությունը

Մեթոդը վերաբերում է հաջորդական ռազմավարություններին և թույլ է տալիս բացառել անորոշության ընթացիկ միջակայքի ճշգրիտ կեսը յուրաքանչյուր կրկնության հետագա դիտարկումից: Անորոշության նախնական միջակայքը սահմանվում է, իսկ միջակայքը նվազեցնելու ալգորիթմը, ինչպես ընդհանուր դեպքում, «երաշխավորում է» (տես նկ. 5.2), հիմնված է ընթացիկ միջակայքում հավասարաչափ բաշխված երեք կետերում ֆունկցիայի արժեքների վերլուծության վրա (այն բաժանելով չորս հավասար մասերի): Որոնման գործընթացի ավարտի պայմանները ստանդարտ են. որոնումն ավարտվում է, երբ անորոշության ընթացիկ միջակայքի երկարությունը պարզվում է, որ պակաս է սահմանված մեծությունից:

Ալգորիթմը

Քայլ 1. Սահմանեք նախնական անորոշության միջակայքը. $L_0 = [a_0;\ b_0]$ և $l > 0$-պահանջվող ճշտությունը:

Քայլ 2. Վերցնել $k = 0$:

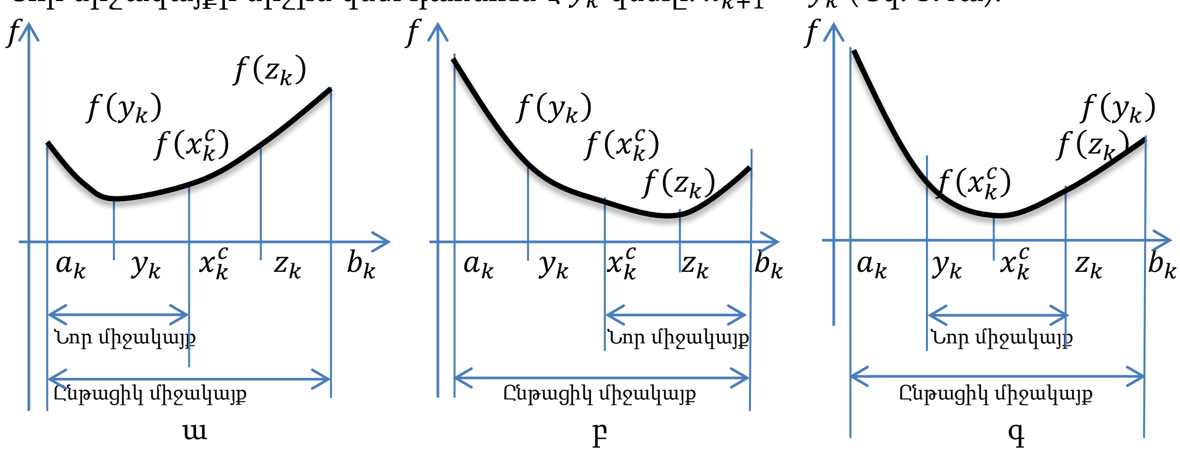
Քայլ 3. Հաշվարկել միջին կետը. $x_k^c = {(a_k + b_k)}/{2}$; $|L_{2k}| = b_k - a_k$; $f(x_k^c)$:

Քայլ 4. Հաշվարկել կետերը. $y_k = a_k + {|L_{2k}|}/{4}$; $z_k = b_k - {|L_{2k}|}/{4}$ և $f(y_k)$; $f(z_k)$:

Նկատենք, որ y_k; x_k^c և z_k միջակայքը բաժանում են չորս հավասար մասերի:

Քայլ 5. Համեմատել $f(y_k)$ և $f(z_k)$ ֆունկցիաները:

ա) Եթե $f(y_k) < f(x_k^c)$, ապա բացառել $(x_k^c;\ b_k]$, տեղադրելով $b_{k+1} = x_k^c$; $a_{k+1} = a_k$: Նոր միջակայքի միջին կետ դառնում է y_k կետը. $x_{k+1}^c = y_k$ (Նկ. 5.4ա):



Նկ. 5.4

բ) Եթե $f(y_k) \geq f(x_k^c)$, անցնել **Քայլ 6.** – ին:

Քայլ 6. Համեմատել $f(z_k)$ և $f(x_k^c)$ ֆունկցիաները:

ա) Եթե $f(z_k) < f(x_k^c)$, ապա բացառել $[a_k;\ x_k^c)$ միջակայքը, տեղադրելով $a_{k+1} = x_k^c$; $b_{k+1} = b_k$: Նոր միջակայքի միջին կետ է դառնում z_k-ն. $x_{k+1}^c = z_k$(Նկ. 5.4բ): Պետք է այս դեպքում անցնել **Քայլ 7**. –ին:

բ) Եթե $f(z_k) \geq f(x_k^c)$, ապա բացառել $[a_k;\ y_k)$; $(z_k;\ b_k]$ միջակայքերը,, տեղադրելով $a_{k+1} = y_k$; $b_{k+1} = z_k$: Նոր միջակայքի միջին կետ է դառնում x_k^c –ն. $x_{k+1}^c = x_k^c$(Նկ. 5.4գ):

Քայլ 7. Հաշվել $|L_{2(k+1)}| = |b_{k+1} - a_{k+1}|$-ը և ստուգել ավարտման պայմանը

ա) Եթե $|L_{2(k+1)}| \leq L$, ապա որոնման գործընթացն ավարտվում է և $x^* \in L_{2(k+1)} = [a_{k+1};\ b_{k+1}]$ Որպես մոտավոր լուծում, կարող եք վերցնել վերջին միջակայքի կեսը. $x^* \cong x_{k+1}^c$:

բ) Եթե $|L_{2(k+1)}| > L$, ապա տեղադրել $k = k + 1$ և անցնել **Քայլ 4**.-ին:

Զուգամիտություն

Միջակայքը կիսով չափ բաժանելու մեթոդի համար անորոշության նախնական միջակայքի հարաբերական նվազման բնութագիրը հայտնաբերվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$R(N) = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}},$$

որտեղ N- ը ֆունկցիայի հաշվված արժեքների քանակն է:

Դիտողություններ 5.4.

1. Հաջորդաբար ստացված միջակայքերի միջին կետը միշտ համընկնում է նախորդ կրկնության մեջ հայտնաբերված երեք փորձարկված կետերից մեկի հետ: Հետևաբար, յուրաքանչյուր կրկնության համար անհրաժեշտ է ֆունկցիայի երկու նոր հաշվարկ:

2. Եթե տրված է $R(N)$-I արժեքը, ապա $f(x)$ ֆունկցիայի հաշվարկների ցանկալի ճշգրտությանը հասնելու համար պահանջվող N քանակը այն ամենափոքր ամբողջ թիվն է, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝

$$N \geq \frac{2 \ln R(N)}{\ln 0{,}5}:$$

3. Ընթացիկ միջակայքերն ունեն զույգ համարներ $L_0;\ L_2;\ L_4;\ \cdots;$ որտեղ ինդեքսը ցույց է տալիս ֆունկցիայի հաշվարկների կատարված քանակը:

Օրինակ 5.3. Միջակայքը կեսով չափի բաժանման որոնման մեթոդով գտնել

$$f(x) = 2x^2 - 12x$$

ֆունկցիայի մինիմումը:

Լուծում. 1. Վերցնենք նախնական անորոշության միջակայքը՝ $L_0 = [0; 10]$ և $l = 1$:

2. Վերցնենք $k = 0$:

3^0. Հաշվենք՝ $x_0^c = \frac{0+10}{2} = 5$; $|L_0| = |10 - 0| = 10$; $f(x_0^c) = -10$:

4^0. Հաշվենք՝

$$y_0 = a_0 + \frac{|L_0|}{4} = 0 + \frac{10}{4} = 2{,}5; \;\; z_0 = b_0 - \frac{|L_0|}{4} = 10 - \frac{10}{4} = 7{,}5:$$

$$f(y_0) = -17{,}5; \quad f(z_0) = 22{,}5:$$

5^0. Համեմատել $f(y_0)$; $f(x_0^c)$ ֆունկցիաները: Քանի որ $f(y_0) = -17{,}5 < f(x_0^c) = 10$, ապա տեղադրենք $a_1 = a_0 = 0$; $b_1 = x_0^c = 5$; $x_1^c = y_0 = 2.5$:

6^0. Կստանանք՝ $L_2 = [0; 5]$. $|L_2| = 5 > l = 1$: Անցնում ենք քայլ 4^1-ին:

4^1. Հաշվենք՝

$$y_1 = a_1 + \frac{|L_2|}{4} = 0 + \frac{5}{4} = 1{,}25; \;\; z_1 = b_1 - \frac{|L_2|}{4} = 5 - \frac{5}{4} = 3{,}75:$$

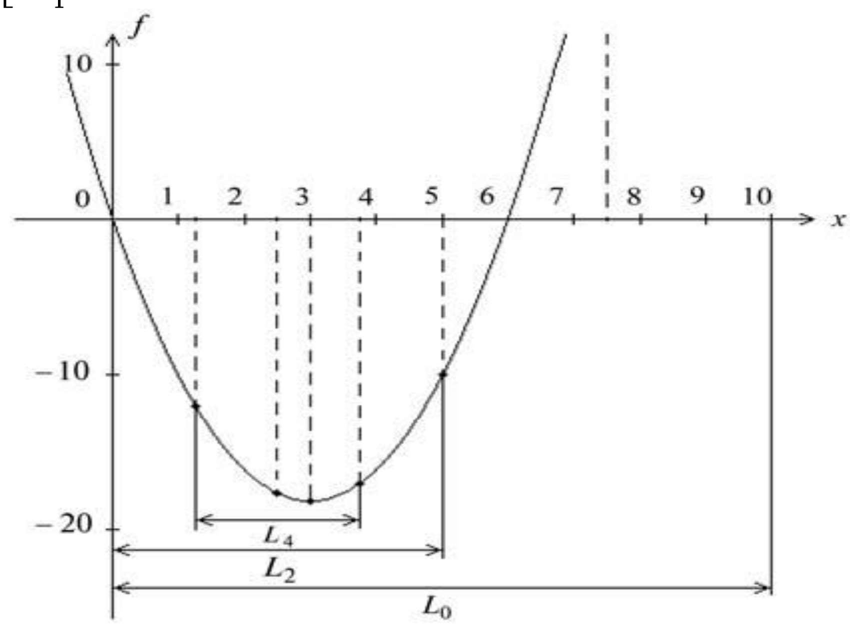
$$f(y_1) = -11{,}875; \quad f(z_1) = 16{,}875:$$

5^1. Համեմատել $f(y_1)$ և $f(x_1^c) = f(y_0) = -1.75$ ֆունկցիաները:

Քանի որ $f(y_1) = -11{,}875 > f(x_1^c) = -17.5$, այդ դեպքում անցնում ենք քայլ 6.-ին:

6^1. Համեմատել $f(z_1)$; $f(x_1^c)$ ֆունկցիաները: $f(z_1) = -11{,}875 > f(x_1^c) = -17.5$, և տեղադրենք $a_2 = y_1 = 1.25$; $b_2 = z_1 = 3.75$; $x_2^c = x_1^c = 2{,}5$:

7^1. Կստանանք $L_4 = [1{,}25; 3{,}75]$, $|L_4| = 3{,}75 - 1{,}25 = 2{,}5 > l = 1$: Վերցնենք $k = 2$ և անցնել քայլ 4.-ին:



Նկ. 5.5

4^2. Հաշվենք՝

$$y_2 = a_2 + \frac{|L_4|}{4} = 1{,}25 + \frac{2{,}5}{4} = 1{,}875; \;\; z_2 = b_2 - \frac{|L_4|}{4} = 3.75 - \frac{2{,}5}{4} = 3{,}125:$$

$$f(y_2) = -15{,}47; \quad f(z_2) = -17{,}97:$$

5^2. Համեմատել $f(y_2)$ և $f(x_2^c) = f(x_1^c) = -17{,}5$ ֆունկցիաները:
Քանի որ $f(y_2) = -15{,}47 > f(x_2^c) = -17{,}5$, անցնում ենք քայլ 6.-ին:
6^2. Համեմատել $f(z_2)$; $f(x_2^c) = -17{,}5$ ֆունկցիաները:
Քանի որ $f(z_2) = -17{,}97 < f(x_2^c) = -17{,}5$, ապա կվերցնենք՝ $a_3 = x_2^c = 2{,}5$; $b_3 = b_2 = 3{,}75$; $x_2^c = z_2 = 3{,}125$:
7^2. Կստանանք $L_6 = [2{,}5; 3{,}75]$, $|L_6| = 3{,}75 - 2{,}5 = 1{,}25 > l = 1$: Վերցնենք $k = 3$ և անցնել քայլ 4.-ին:
4^3. Հաշվենք՝

$$y_3 = a_3 + \frac{|L_6|}{4} = 2{,}5 + \frac{1{,}25}{4} = 2{,}81;\ \ z_3 = b_3 - \frac{|L_6|}{4} = 3.75 - \frac{1{,}25}{4} = 3{,}43:$$

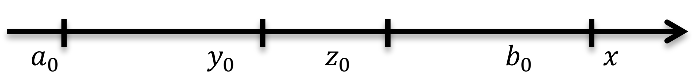
$$f(y_3) = -17{,}93; \quad f(z_3) = -17{,}62:$$

5^3. Համեմատել $f(y_3)$ և $f(x_3^c) = f(z_3) = -17{,}97$ ֆունկցիաները:
Քանի որ $f(y_3) = -17{,}93 > f(x_3^c) = -17{,}97$, ապա անցնում ենք քայլ 6.-ին:
6^3. Համեմատել $f(z_3)$; $f(x_3^c)$ ֆունկցիաները:
Քանի որ $f(z_3) = -17{,}62 > f(x_3^c) = -17{,}97$, ապա կվերցնենք՝ $a_4 = y_3 = 2{,}81$; $b_4 = z_3 = 3.43$; $x_4^c = x_3^c = 3{,}125$:
7^3. Կստանանք $L_8 = [2{,}81; 3{,}43]$, $|L_8| = 3{,}43 - 2{,}81 = 0{,}62 < l = 1$: $x^* \in L_8$: Որպես լուծում, կարող ենք վերցնել վերջին միջակայքի միջին կետը՝ $x^* \cong x_4^c = 3.125$:

5.4. Ոսկե հատման մեթոդը. Հատուկ միաչափ մինիմազացման մեթոդ կառուցելու համար, որն աշխատում է անորոշության միջակայքի հաջորդական կրճատման սկզբունքով, անհրաժեշտ է տալ յուրաքանչյուր քայլում երկու ներքին կետերի ընտրության կանոն:

Իհարկե, ցանկալի է, որ դրանցից մեկը միշտ օգտագործվի որպես ներքին և հաջորդ ինտերվալի համար: Այնուհետև ֆունկցիայի հաշվարկների թիվը կկրճատվի երկու անգամ,և մեկ կրկնությունը կպահանջի միայն մեկ նոր ֆունկցիայի արժեքի հաշվարկ: Այս մեթոդում ոսկե հատվածի կետերն ընտրվում են որպես երկու ներքին կետեր:

Սահմանում 5.3. Կետը արտադրում է հատվածի «ոսկե հատումը», եթե ամբողջ հատվածի երկարության և մեծ մասի հարաբերությունը հավասար է մեծ մասի և փոքր հատվածի հարաբերությանը:



Նկ. 5.6

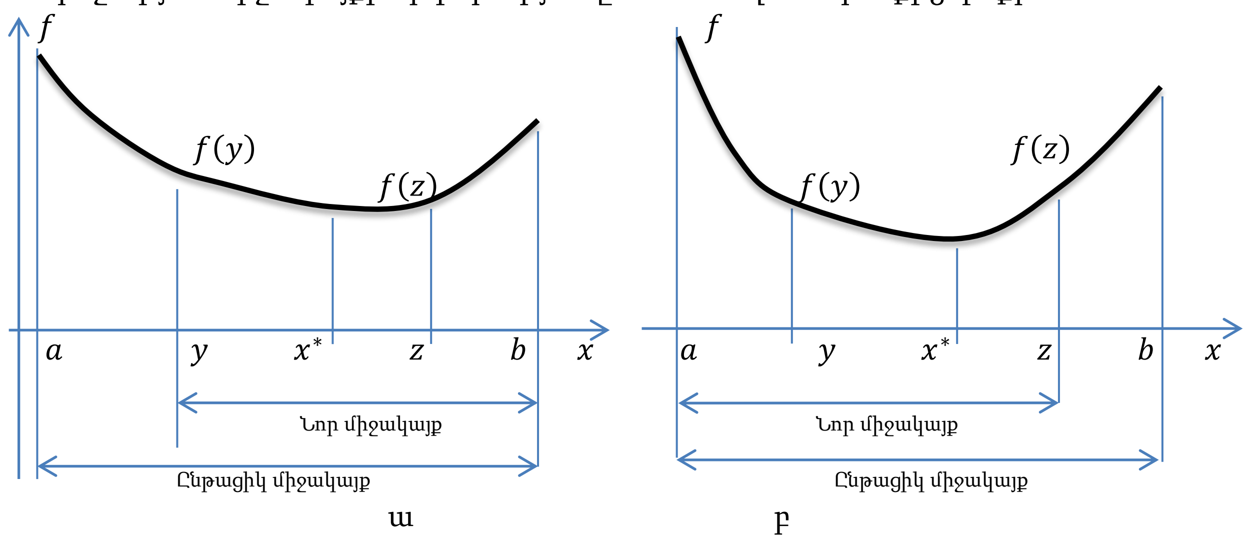
$[a_0; b_0]$ հատվածի վրա կան երկու y_0 և z_0 կետեր, որոնք սիմետրիկ են դրա ծայրերի նկատմամբ.

$$\frac{b_0 - a_0}{b_0 - y_0} = \frac{b_0 - y_0}{y_0 - a_0} = \frac{b_0 - a_0}{z_0 - a_0} = \frac{z_0 - a_0}{b_0 - z_0} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618:$$

Բացի այդ, y_0 կետը արտադրում է հատվածի ոսկե հատույթը $[a_0;\ z_0]$, իսկ z_0 կետը միջակայքի $[y_0;\ b_0]$ հատվածը (նկ. 5.6):

Որոնման ռազմավարությունը.

Նախնական անորոշության միջակայքը և պահանջվող ճշգրտությունը սահմանվում են: Ինտերվալի կրճատման ալգորիթմը հիմնված է երկու կետում $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքների վերլուծության վրա (Նկար 5.2): Որպես ֆունկցիայի հաշվարկման կետեր ընտրվում են ոսկե հատվածի կետերը: Այնուհետև, հաշվի առնելով ոսկե հատվածի հատկությունները, յուրաքանչյուր կրկնության ժամանակ, բացառությամբ առաջինի, պահանջվում է ֆունկցիայի միայն մեկ նոր հաշվարկ: Որոնման գործընթացը դադարեցնելու պայմանները ստանդարտ են. որոնումն ավարտվում է, երբ ընթացիկ անորոշության միջակայքի երկարությունը սահմանված արժեքից փոքր է:



Նկ. 5.7

ԱԼԳՈՐԻԹՄ

Քայլ 1. Տալ նախնական անորոշության միջակայքը $L_0 = [a_0; b_0]$, ճշտությունը $l > 0$:

Քայլ 2. Վերցնել $k = 0$:

Քայլ 3. Հաշվել

$$y_0 = a_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0);\ \ z_0 = a_0 + b_0 - y_0;\ \ \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cong 0{,}38196;$$

Քայլ 4. Հաշվել $f(y_k); f(z_k)$:

Քայլ 5. Համեմատել $f(y_k)$ և $f(z_k)$:

ա) Եթե $f(y_k) \le f(z_k)$, ապա տեղադրել $a_{k+1} = a_k;\ b_{k+1} = z_k;\ y_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - y_k;\ \ z_{k+1} = y_k$ (Նկ. 5.7ա) և անցնել **Քայլ 6**-ին:

բ) Եթե $f(y_k) > f(z_k)$, ապա տեղադրել $a_{k+1} = y_k;\ b_{k+1} = b_k;\ y_{k+1} = z_k;\ z_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - z_k$; (Նկ. 5.7բ):

Քայլ 6. Հաշվել $\Delta = |a_{k+1} - b_{k+1}|$ և ստուգել ավարտի պայմանը.

ա) Եթե $\Delta \le l$, ապա որոնման գործողությունը ավարտվում է և $x^* \in [a_{k+1}; b_{k+1}]$: Որպես մոտավոր լուծում կարելի է վերցնել վերջին միջակայքի կենտրոնը՝

$$x^* \cong \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}:$$

բ) Եթե $\Delta > l$, ապա վերցնել $k = k+1$ և անցնել **Քայլ 4.** –ին:

ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆ

Ոսկե հատման մեթոդի համար սկզբնական անորոշության միջակայքի հարաբերական նվազման բնութագիրը որոշվում է $R(N) = (0.618)^{N-1}$ բանաձևով, որտեղ N-ը ֆունկցիայի հաշվարկների թիվն է:

Դիտողություններ 5.6.

1. Ընթացիկ անորոշության միջակայքերը հետևյալն են. $L_0;\ L_2;\ L_3;\ L_4 \cdots$: Դրանք արտացոլում են այն փաստը, որ գործառույթի երկու գնահատումը կատարվում է առաջին կրկնման ժամանակ, և մեկ անգամ՝ հաջորդ կրկնությունների ժամանակ:
2. Անորոշության միջակայքի երկարության կրճատումը հաստատուն է:

$$\frac{|L_0|}{|L_2|} = \frac{|L_2|}{|L_3|} = \frac{|L_3|}{|L_4|} = \cdots = \frac{1+\sqrt{5}}{2}:$$

3. Եթե տրված է $R(N)$ արժեքը, ապա ցանկալի ճշտությանը հասնելու համար պահանջվող ֆունկցիաների գնահատումների քանակը հայտնաբերվում է որպես պայմանը բավարարող ամենափոքր ամբողջ թիվ՝

$$N \geq 1 + \frac{\ln R(N)}{\ln 0{,}618}:$$

Օրինակ 5.4. Ոսկե հատման մեթոդով գտնել

$$f(x) = 2x^2 - 12x$$

ֆունկցիայի մինիմումը:

Լուծում. 1. Սահմանենք նախնական անորոշության միջակայքը. $L_0 = [0;\ 10]$:

2. Վերցնել $k = 0$:

3^0. Հաշվել

$$y_0 = a_0 + 0.382(b_0 - a_0) = 0 + 0{,}382\ \cdot 10 = 3{,}82:$$

$$z_0 = a_0 + b_0 - y_0 = 0 + 10 - 3{,}82 = 6.18:$$

4^0. Հաշվել $f(y_0) = -16{,}65;\quad f(z_0) = 2{,}22:$

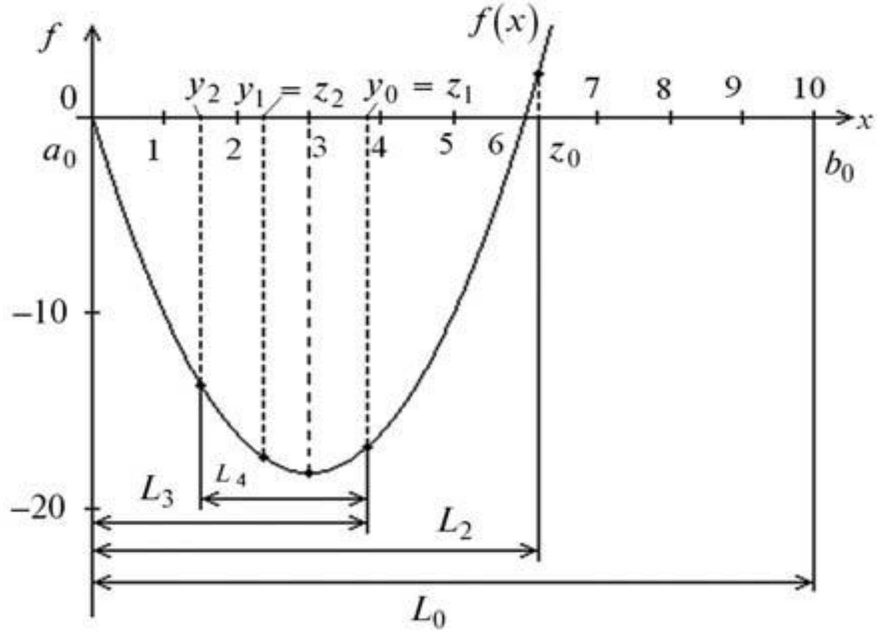
5^0. Համեմատել $f(y_0)$-ը և $f(z_0)$-ը: Քանի որ $f(y_0) < f(z_0)$, ապա $a_1 = a_0 = 0;\ b_1 = z_0 = 6{,}18$ (Նկ. 5.9 a): $y_1 = a_1 + b_1 - y_0 = 0 + 6{,}18 - 3{,}82 = 2{,}36:\ z_1 = y_0 = 3{,}82:$

6^0. Կստանանք՝ $L_2 = [0; 6{,}18];\ \ |L_2| = 6{,}18 > l = 1$: Տեղադրենք $k = 1$ և անցնենք Քայլ 4.-ին:

4^1. Հաշվել $f(y_1) = -17{,}18;\quad f(z_1) = -16{,}65:$

5^1. Համեմատել $f(y_1)$ և $f(z_1)$: Քանի որ $f(y_1) < f(z_1)$, ապա $a_2 = a_1 = 0;\ b_2 = z_1 = 3{,}82;\ y_2 = a_2 + b_2 - y_1 = 0 + 3{,}82 - 2{,}36 = 1.46;\ z_2 =\ y_1 = 2{,}36:$

6^1. Կստանանք $L_3 = [0; 3{,}82];\ \ |L_3| = 3{,}82 > l = 1$: Տեղադրենք $k = 2$ և անցնենք քայլ 4.-ին:



Նկ. 5.8

4^2. Հաշվել $f(y_2) = -13{,}25$; $f(z_2) = -17{,}18$:

5^2. Համեմատել $f(y_2)$ և $f(z_2)$: Քանի որ $f(y_2) > f(z_2)$, ապա $a_3 = y_2 = 1.46$; $b_3 =$ $= b_2 = 3{,}82$; $y_3 = z_2 = 2{,}36$: $z_3 = a_3 + b_3 - z_2 = 1{,}46 + 3{,}82 - 2{,}362 = 2{,}92$

6^2. Կստանանք $L_4 = [1{,}46; 3{,}82]$; $|L_4| = 3{,}82 - 1.46 = 2{,}36 > l = 1$: Տեղադրենք $k = 3$ և անցնենք քայլ 4.-ին:

4^3. Հաշվել $f(y_3) = f(z_2) = -17{,}18$ (որը հաշված էր քայլ 4^2-ում), $f(z_3) = -17{,}99$:

5^3. Համեմատել $f(y_3)$ և $f(z_3)$: Քանի որ $f(y_3) > f(z_3)$, ապա $a_4 = y_3 = 2{,}36$; $b_4 =$ $b_3 = 3{,}82$; $y_4 = z_3 = 2{,}92$: $z_4 = a_4 + b_4 - z_3 = 2{,}36 + 3{,}82 - 2{,}92 = 3{,}26$:

6^3. Կստանանք $L_5 = [2{,}36; 3{,}82]$; $|L_5| = 3{,}82 - 2{,}36 = 1{,}46 > l = 1$: Տեղադրենք $k = 4$ և անցնենք քայլ 4.-ին:

4^4. Հաշվել $f(y_4) = f(z_3) = -17{,}99$ (հայտնի էր), $f(z_4) = -17{,}86$:

5^4. Համեմատել $f(y_4)$ և $f(z_4)$: Քանի որ $f(y_4) < f(z_4)$, ապա $a_5 = a_4 = 2{,}36$; $b_5 =$ $= z_4 = 3{,}26$; $y_5 = a_5 + b_5 - z_4 = 2{,}36 + 3{,}26 - 2{,}92 = 2{,}7$: $z_5 = y_4 = 2{,}92$:

6^4. Կստանանք $L_6 = [2{,}36; 3{,}26]$; $|L_5| = 3{,}26 - 2{,}36 = 0{,}9 < l = 1$: $x^* \in L_6$; $N = 6$:

$$x^* \cong (3{,}26 + 2.36) : 2 = 2{,}81:$$

Որոնման առաջին կրկնությունները ներկայացված են (նկ. 5.8)-ում:

Ինքնուրույն առաջադրանք. Ոսկե հատույթի մեթոդով գտնել

$$f(x) = \frac{127}{4}x^2 - \frac{61}{4}x + 2$$

ֆունկցիայի մինիմումը:

§ 6. Առաջին կարգի մեթոդներ

6.1. Գրադիենտային վայրէջքի մեթոդը հաստատուն քայլով. Խնդրի դրվածքը. Դիտք տրված $f(x)$ ֆունկցիան, որը ներքևից սահմանափակված է R^n բազմության վրա և ունի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ իր բոլոր կետերում: Պահանջվում է գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումը (տեղական նվազագույնը) թույլատրելի լուծումների բազմության վրա՝ $X = R^n$, այսինքն. գտնել այնպիսի x^* կետ , որ

$$f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x):$$

Որոնման ռազմավարությունը

Խնդրի լուծման ռազմավարությունը բաղկացած է կետերի հաջորդականության կառուցումից՝ $\{x^k\}$; $(k = 0; 1; 2; \cdots)$ այնպիսին, որ $f(x^{k+1}) > f(x^k)$; $(k = 0; 1;\ 2; \cdots)$: Հաջորդականության կետերը հաշվարկվում են ըստ կանոնի՝

$$x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k);\ \ (k = 0; 1;\ 2; \cdots); \tag{6.1}$$

որտեղ x^0 կետը տվում է օգտագործողի կողմից; $\nabla f(x^k)$ –ը x^k կետում հաշվարկված $f(x)$ ֆունկցիայի գրադիենտն է; t_k քայլի մեծությունը սահմանվում է օգտագործողի կողմից և մնում է հաստատուն, քանի դեռ ֆունկցիան նվազում է $\{x^k\}$-ն կետերում, ինչը վերահսկվում է պայմանի կատարումը ստուգելու միջոցով՝ $f(x^{k+1}) - f(x^k) < 0$ կամ $f(x^{k+1}) - f(x^k) < -\varepsilon \cdot |\nabla f(x^k)|^2$; $(0 < \varepsilon < 1)$:

$\{x^k\}$ հաջորդականության կառուցումն ավարտվում է x^k կետում, որի համար $\|f(x^k)\| < \varepsilon_1$, որտեղ $\varepsilon_1 > 0$-ը տրված փոքր թիվ է, կամ $k \geq M$, որտեղ M ը կրկնվող գործողությունների սահմանային թիվն է, կամ երկու անհավասարությունների միաժամանակյա կրկնակի կատարման դեպքում՝

$$\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_2;\quad \|f(x^{k+1}) - f(x^k)\| < \varepsilon_2;$$

որտեղ $\varepsilon_2 > 0$-ը տրված փոքր թիվ է:

Հարց, թե արդյոք xk կետը կարող է դիտվել որպես որոնված նվազագույն կետի հայտնաբերված մոտավորություն, այն լուծվում է լրացուցիչ ուսումնասիրություն կատարելով, որը նկարագրված է ստորև:

Ալգորիթմ

Քայլ 1. Տրվում է x^0-ն, $0 < \varepsilon < 1$; $\varepsilon_1 > 0$; $\varepsilon_2 > 0, M$- կրկնվող գործողությունների (իտերացիայի) սահմանային թիվն է: Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի գրադիենտը՝

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}; \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}; \cdots; \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T:$$

Քայլ 2. Վերցնել $k = 0$:

Քայլ 3. Հաշվել $\nabla f(x^k)$:

Քայլ 4. Ստուգել ավարտի չափանիշի կատարումը. $\|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon_1$:

ա) եթե չափանիշը կատարված է, ուրեմն հաշվարկն ավարտված է և $x^* = x^k$:

բ) եթե չափանիշը կատարված չէ, ապա անցնել Քայլ 5.-ին:

Քայլ 5. Ստուգել անհավասարության կատարումը՝ $k \geq M$:

ա) եթե անհավասարությունը կատարված է, ուրեմն հաշվարկն ավարտված է և $x^* = x^k$:

բ) եթե անհավասարությունը կատարված չէ, ապա անցնել Քայլ 6.-ին:

Քայլ 6. Սահմանեք t_k քայլի չափը:

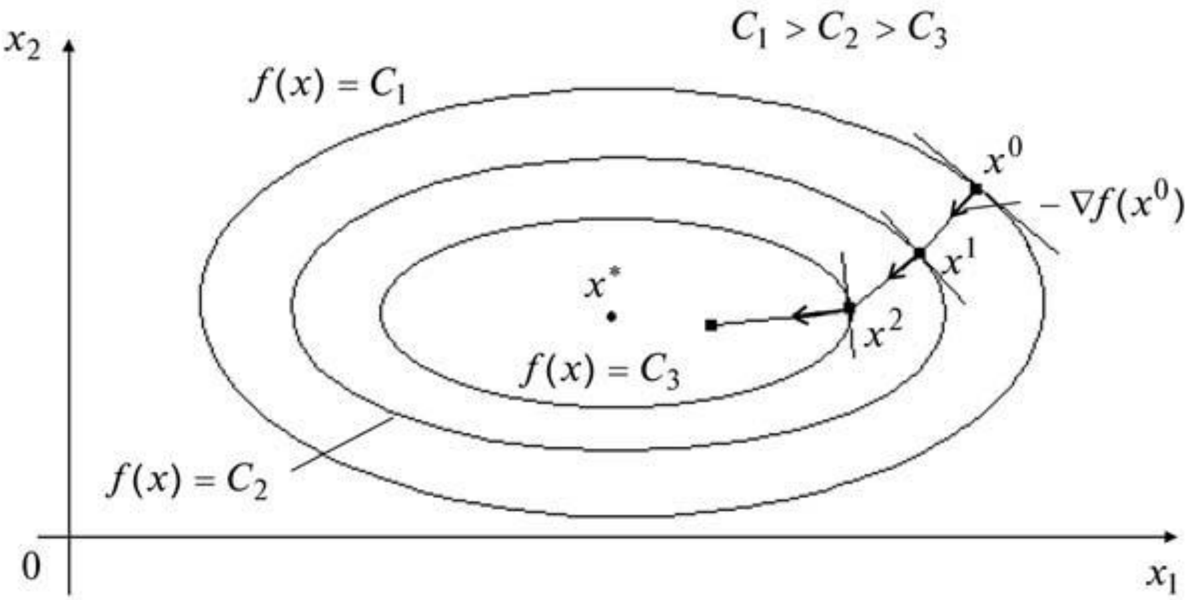
Քայլ 7. Հաշվել $x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k)$-ն:

Քայլ 8. Ստուգել պայմանի կատարումը՝

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) < 0 \text{ կամ } f(x^{k+1}) - f(x^k) < -\varepsilon \cdot |\nabla f(x^k)|^2; \;\; (0 < \varepsilon < 1):$$

ա) եթե պայմանը կատարված է, անցնել Քայլ 9.-ին:

բ) եթե չափանիշը կատարված չէ, վերցնել $t_k = {t_k}/{2}$ և անցնել Քայլ 7.-ին:



Նկ. 6.1

Քայլ 9. Ստուգել պայմանի կատարումը՝ $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_2$; $\|f(x^{k+1}) - f(x^k)\| < \varepsilon_2$;

ա) Եթե երկու պայմաններն էլ բավարարված են k-ի և $k = k - 1$-ի արժեքներով, ապա հաշվարկն ավարտված է և $x^* = x^{k+1}$:

բ) եթե Եթե պայմաններից գոնե մեկը չի բավարարվում, վերցնել $k = k + 1$ անցել Քայլ 3-ին:

Նկար 6.1-ում ներկայացված է **Գրադիենտային վայրէջքի մեթոդի** երկրաչափական մեկնաբանությունը:

Զուգամիտություն

Հայտանիշ 6.1. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է և սահմանափակ է ներքևից R^n-ով, իսկ նրա գրադիենտը բավարարում է Լիպշիցի պայմանին՝

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\|; \quad \forall\, x; y \in R^n; L > 0:$$

Այդ դեպքու ցանկացած $x^0 \in R^n$ դեպքում հաստատուն քայլով գրադիենտային վայրէջքի մեթոդի համար կունենանք՝

$$\lim_{k\to\infty} \|\nabla f(x^k)\| = 0; \qquad (6.2)$$

Դիտողություններ 6.1.

1. ***Հայտանիշ* 6.1**.-ը երաշխավորում է $\{x^k\}$ հաջորդականության զուգամիտությունը x^* ստացիոնար կետին, որտեղ $f(x^*) = 0$: Հետևաբար, գրադիենտային վայրէջքի մեթոդի կիրառման արդյունքում հայտնաբերված x^k կետը լրացուցիչ հետազոտման կարիք ունի ՝ այն դասակարգելու համար:

2. Գրադիենտային վայրէջքի մեթոդի երաշխավորում է $\{x^k\}$ հաջորդականության զուգամիտությունը մինիմումի կետին խիստ ուռուցիկ ֆունկցիաների համար:

3. Օրինակներ լուծելիս կրկնվող գործընթացով հաջող t_k-ի արժեքի ընտրությունը արտացոլվում է 7-րդ և 8-րդ քայլերի ինդեքսավորման մեջ: Առաջին ինդեքսը համընկնում է k համարի հետ, իսկ երկրորդ ինդեքսը համընկնում է ընթացիկ արժեքի բաժանումների քանակով, երբ $t_k = {t_k}/{2}$:

Զուգամիտության արագությունը

Զուգամիտության արագության գնահատումները ստացվում են միայն խիստ ուռուցիկ ֆունկցիաների համար, երբ $\{x^k\}$ հաջորդականությունը երկրաչափական պրոգրեսիայի արագությամբ զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիայի մինիմումի կետին՝

$$f(x^k) - f(x^*) \le q^k \cdot [f(x^0) - f(x^*)]; \;\; \|x^k - x^*\| \le C\left(\sqrt{q}\right)^k;$$

որտեղ $q \in (0;1), C > 0$ հաստատուններ են:

Խնդրի լուծման կարգը

1. Օգտագործելով հաստատուն քայլով գրադիենտային վայնէջքի մեթոդը, գտնել x^k կետը, որում կատարվում գոնե հաշվարկների ավարտման չափանիշներից մեկը:

2. Կատարել x^k կետի վերլուծություն ' պարզելու նպատակով, թե արդյոք x^k կետը խնդրի լուծման հայտնաբերված մոտավորությունն է: Վերլուծության կարգը որոշվում է $f(x)$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի անընդհատ ածանցյալների առկայությամբ: Եթե $f(x) \in C^2$, ապա պետք է ստուգել մինիմումի բավարար պայմանների կատարումը՝ $H(x^*) > 0$: Եթե $H(x^*) > 0$, ապա x^k կետը x^* կետի գտնված ցանկալի մոտարկումն է: Եթե $f(x) \in C^1$, ապա անհրաժեշտ է ստուգել $f(x)$ֆունկցիայի ուռուցիկությունը x^k-ի Q-շրջակայքում, օգտագործելով $f(x) \in C^1$-ի համար ուռուցիկության հայտանիշը:

Դիտողություն 6.2.

Եթե պահանջվում գտնել $f(x)$ գլոբալ մինիմումը, ապա խիստ ուռուցիկ $f(x)$ - ի համար այս խնդրի լուծումը նման է ֆունկցիայի լոկալ մինիմումը գտնելուն: Այն դեպքում, երբ $f(x)$- ն ունի մի քանի լոկալ մինիմում, գլոբալ մինիմումի որոնումն իրականացվում է բոլոր լոկալ մինիմումների թվարկման արդյունքում :

Օրինակ 6.1. Գտնել $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումը:

Լուծում. Առաջին կետ. x^k կետի որոնում, որում կատարվել է հաշվարկների ավարտի չափանիշներից առնվազն մեկը:

1. Տրված են՝ $x^0 = (0{,}5; 1)^T$; $\varepsilon_1 = 0{,}1$; $\varepsilon_2 = 0{,}15$; $M = 10$: Որոնենք ֆունկցիայի գրադիենտը կամայական կետում՝ $\nabla f(x) = (4x_1 + x_2; x_1 + 2x_2)^T$:

2. Վերցնենք $k = 0$:

3^0. Հաշվել $\nabla f(x^0) = (3; 2{,}5)^T$

4^0. Հաշվել $\|\nabla f(x^0)\| = 3{,}9 > 0{,}1$: Անցնել քայլ 5.-ին:

5^0. Ստուգել $k \geq M$ պայմանը: $k = 0 < 10 = M$: Անցնել քայլ 6.-ին:

6^0. Վերցնենք $t_0 = 0{,}5$:

7^0. Հաշվել x^1-ը: $x^1 = (0{,}5; 1)^T - 0{,}5 \cdot (3; 2.5)^T = (-1; -0{,}25)^T$; $f(x^1) = 2{,}31$:

8^0. Համեմատել $f(x^1)$ և $f(x^0) = 2$: Կունենանք $f(x^1) > f(x^0)$: Եզրակացություն՝ $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ պայմանը չի կատարվում: Վերցնենք $t_0 = 0{,}25$ և անցնենք քայլ 7.-ի և քայլ 8.-ի կրկնությանը:

7^{01}. Հաշվել x^1-ը: $x^1 = (0{,}5; 1)^T - 0{,}25 \cdot (3; 2.5)^T = (-0{,}25; 0{,}375)^T$; $f(x^1) = 0{,}171$:

8^{01}. Համեմատել $f(x^1)$ և $f(x^0) = 2$: Կունենանք $f(x^1) < f(x^0)$: Անցնել քայլ 9.-ին:

9^0. Հաշվել $\|x^1 - x^0\|$-ն և $|f(x^1) - f(x^0)|$-ը:

$$\|x^1 - x^0\| = 0{,}976 > 0{,}15;\ |f(x^1) - f(x^0)| = 1{,}289 > 0{,}15:$$

Եզրակացություն. ընդունել $k = 1$ և անցնել քայլ 3.-ին:

3^1. Հաշվել $\nabla f(x^1) = (-0{,}625; 0{,}51)^T$:

4^1. Հաշվել $\|\nabla f(x^1)\| = 0{,}81 > 0{,}1$: Անցնել քայլ 5.-ին:

5^1. Ստուգել $k \geq M$ պայմանը: $k = 1 < 10 = M$: Անցնել քայլ 6.-ին:

6^1. Վերցնենք $t_1 = 0{,}25$:

7^1. Հաշվել՝ $x^2 = (-0{,}25; 0375)^T - 0{,}25 \cdot (-0{,}625; 0.5)^T = (-0{,}094; 0{,}25)^T$;

$$f(x^2) = 0{,}56:$$

8^1. Համեմատել $f(x^2)$ և $f(x^1)$: Կունենանք $f(x^2) < f(x^1)$: Անցնել քայլ 9.-ին:

9^1. Հաշվել $\|x^2 - x^1\|$-ն և $|f(x^2) - f(x^1)|$-ը:

$$\|x^2 - x^1\| = 0{,}2 > 0{,}15;\ |f(x^2) - f(x^1)| = 0{,}115 < 0{,}15:$$

Եզրակացություն. ընդունել $k = 2$ և անցնել քայլ 3.-ին:

3^2. Հաշվել $\nabla f(x^2) = (-0{,}126; 0{,}406)^T$:

4^2. Հաշվել $\|\nabla f(x^2)\| = 0{,}425 > 0{,}1$: Անցնել քայլ 5.-ին:

5^2. Ստուգել $k \geq M$ պայմանը: $k = 2 < 10 = M$: Անցնել քայլ 6.-ին:

6^2. Վերցնենք $t_1 = 0{,}25$:

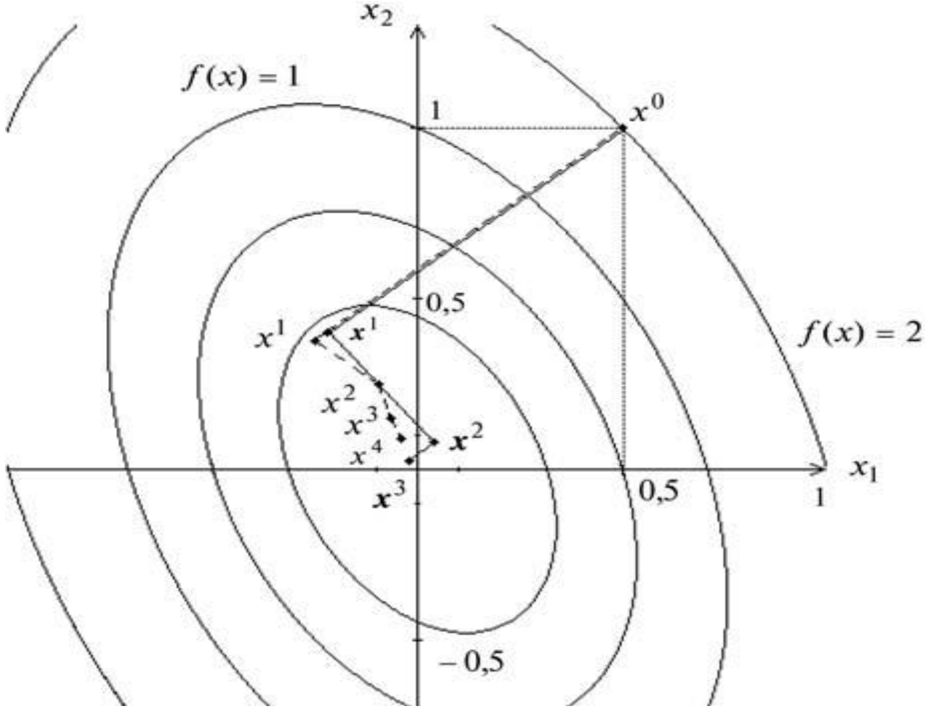
7^2. Հաշվել՝ $x^3 = (-0{,}094; 0{,}25)^T - 0{,}25 \cdot (-0{,}126; 0.406)^T = (-0{,}063; 0{,}15)^T$;

$$f(x^3) = 0{,}021$$

8^2. Համեմատել $f(x^3)$ և $f(x^2)$: Կունենանք $f(x^3) < f(x^2)$: Անցնել քայլ 9.-ին:
9^2. Հաշվել $\|x^3 - x^2\|$-ն և $|f(x^3) - f(x^2)|$-ը:

$$\|x^3 - x^2\| = 0{,}105 < 0{,}15; \ |f(x^3) - f(x^2)| = 0{,}035 < 0{,}15:$$

Եզրակացություն. ընդունել $k = 3$ և անցնել քայլ 3.-ին:



Նկ. 6.2

3^3. Հաշվել $\nabla f(x^3) = (-0{,}102; 0{,}237)^T$:
4^3. Հաշվել $\|\nabla f(x^3)\| = 0{,}257 > 0{,}1$: Անցնել քայլ 5.-ին:
5^3. Ստուգել $k \geq M$ պայմանը: $k = 3 < 10 = M$: Անցնել քայլ 6.-ին:
6^3. Վերցնենք $t_1 = 0{,}25$:
7^3. Հաշվել՝ $x^3 = (-0{,}063; 0{,}15)^T - 0{,}25 \cdot (-0{,}102; 0.237)^T = (-0{,}038; 0{,}091)^T$;

$$f(x^4) = 0{,}0076:$$

8^3. Համեմատել $f(x^4)$ և $f(x^3)$: Կունենանք $f(x^4) < f(x^3)$: Անցնել քայլ 9.-ին:
9^3. Հաշվել $\|x^3 - x^2\|$-ն և $|f(x^3) - f(x^2)|$-ը:

$$\|x^4 - x^3\| = 0{,}064 < 0{,}15; \ |f(x^4) - f(x^3)| = 0{,}015 < 0{,}15:$$

Եզրակացություն. $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_2$; $|f(x^3) - f(x^2)| < \varepsilon_2$ պայմանները կատարվել են $k = 2; 3$ դեպքում: Գտնվել է $x^4 = (-0{,}038; \ 0{,}091)^T$; $f(x^4) = 0{,}0076$:

Նկար 6.2-ում ստացված կետերը միացված են շտրիխներով:

Երկրորդ կետ. Գտնված x^4 կետի վերլուծություն:

Տրված $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ ֆունկցիան կրկնակի դիֆերենցելի է, ուստի x^4-ում կատարենք ստուգում մինիմումի բավարար պայմանը, այսինքն եկեք վերլուծենք Հեսսիան մատրիցը՝

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}:$$

Մատրիցան հաստատուն է և դրական որոշյալ, այսինքն՝ $H > 0$, քանի որ գլխավոր մինորները դրական են՝

$$\Delta_1 = 4 > 0;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 7 > 0:$$

Հետևաբար $x^4 = (-0{,}038;\ 0{,}091)^T$ կետը մոտավոր լոկալ մինիմումի $x^* = (0; 0)^T$ կետն է, իսկ $f(x^4) = 0{,}0076$ -ը $f(x^*) = 0$-ի մոտավոր արժեքը:

Նկատենք, որ $H > 0$ պայմանը միաժամանակ $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ ֆունկցիայի խիստ ուռուցիկության պայմանն է R^2-ի վրա: Հետևաբար $x^4 = (-0{,}038;\ 0{,}091)^T$ –ն և $f(x^4) = 0{,}0076$ –ը համապատասխանաբար գլոբալ մինիմումի կետ է և նրա մինիմում արժեքը R^2-ում:

6.2. Գրադիենտային ամենաարագ վայրէջքի մեթոդը. Խնդրի դրվածքը. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակված է ներքևից R^n՝բազմության վրա և բոլոր կետերում իր բոլոր կետերում ունի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ:

Պահանջվում է գտնել $f(x)$ ֆունկցիաի լոկալ մինիմումը թույլատրելի լուծումների բազմության վրա $X = R^n$, այսինքն՝ գտնել այդպիսի կետ՝ $x^* \in R^n$, որ՝

$$f(x^*) = \min_{x^* \in R^n} f(x):$$

Որոնման ռազմավարությունը

Խնդրի լուծման ռազմավարությունը բաղկացած է կետերի $\{x^k\}$; $(k = 0; 1; 2; \cdots)$ հաջորդականության կառուցումից, այնպիսին, որ $f(x^{k+1}) < f(x^{k+1})$; $(k = 0; 1; \cdots)$ հաջորդականության կետերը հաշվարկվում են ըստ կանոնի՝

$$x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k); \tag{6.3}$$

որտեղ x^0-ն տրվում օգտագործողի կողմից, իսկ t_k-ն որոշվում է k-ի յուրաքանչյուր արժեքի համար հետևյալ պայմանից՝

$$\varphi(t_k) = f\Big(x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k)\Big) \to \min_{t_k}: \tag{6.4}$$

Վերոգրյալ (6.4) խնդրի լուծումը կարող է իրականացվել մինիմումի պահանջվող

$$\frac{d\varphi(t_k)}{dt_k} = 0; \tag{6.4ա}$$

պայմանի օգտագործմամբ, որին հաջորդում է մինիմումի բավարար պայմանի ստուգումը՝

$$\frac{d^2\varphi(t_k)}{dt_k^2} > 0: \qquad (6.4բ)$$

Նման ուղին կարող է օգտագործվել կամ $\varphi(t_k)$ բավականին պարզ նվազեցված ֆունկցիայով, կամ բավականին բարդ $f\left(x^{k+1} = x^k - t_k\nabla f(x^k)\right)$-ի փոխակերպումը նախնական մոտավորմամբ $P(t_k)$ բազմանդամով (սովորաբար երկրորդ կամ երրորդ աստիճանի), իսկ հետո պայմանները փոխարինվում են ներքոգրյալ տեսքերով՝

$$\left\{\frac{d\varphi(t_k)}{dt_k} = 0; \ \rightarrow \ \frac{dP(t_k)}{dt_k} = 0\right\}; \quad \left\{\frac{d^2\varphi(t_k)}{dt_k^2} > 0; \rightarrow \ \frac{d^2\varphi(t_k)}{dt_k^2} > 0\right\}:$$

(6.4) խնդրի լուծման մեկ այլ ուղի կապված է թվային մեթոդների օգտագործման հետ, երբ որոնվում է՝

$$\min_{t_k[a;b]} \varphi(t_k) = \min_{t_k[a;b]} f\left(x^{k+1} = x^k - t_k\nabla f(x^k)\right),$$

որտեղ $[a;b]$ միջակայքի եզրերը տրվում է օգտագործողի կողմից:

Ընդ որում, գտնված t_k արժեքի մոտիկության աստիճանը t_k^* օպտիմալ արժեքին, որը բավարարում է (6.4 ա); (6.4 բ) պայմանները, կախված է $[a;b]$-ի առաջադրանքից և միաչափ նվազեցման մեթոդների ճշգրտությունից:

$\{x^k\}$ $(k = 0; 1; 2; \cdots)$հաջորդականության կառուցումը ավարտվում է x^k կետում, որի համար $\|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon_1$, որտեղ ε_1-ը տրված թիվ է, կամ եթե $k \geq M$, որտեղ M-ը կրկնությունների սահմանային թիվն է, կամ անհավասարությունների կրկնակի միաժամանակյա կատարման դեպքում՝

$$\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_2; \quad \left|f(x^{k+1}) - f(x^k)\right| < \varepsilon_2;$$

որտեղ ε_2-ը փոքր դրական թիվ է: Այն հարցը, թե արդյոք x^k կետը կարող է համարվել որպես լոկալ minimwum x^*կետի որոնված մոտավորություն, կատարվում է լրացուցիչ հետազոտություն:

Ալգորիթմ

Քայլ 1. Սահմանել x^0; $\varepsilon_1 > 0$; $\varepsilon_2 > 0$ և M-կրկնությունների քանակը. Գտնել

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)^T$$

գրադիենտ ֆունկցիան կամայական կետում:

Քայլ 2. Վերցնել $k = 0$:

Քայլ 3. Հաշվել $\nabla f(x)$-ը:

Քայլ 4. Ստուգել ավարտի չափանիշի կատարումը՝ $\|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon_1$:

ա) եթե չափանիշը բավարարված է, ապա $x^* = x^k$:

բ) եթե չափանիշը բավարարված չէ, ապա անցնել քայլ 5.-ին:

Քայլ 5. Ստուգել անհավասարության կատարումը՝ $k \geq M$:

ա) եթե անհավասարությունը բավարարված է, ապա $x^* = x^k$:

բ) եթե անհավասարությունը բավարարված չէ, ապա անցնել քայլ 6.-ին:

Քայլ 6. Հաշվել t_k քայլի չափը հետևյալ պայմանից՝

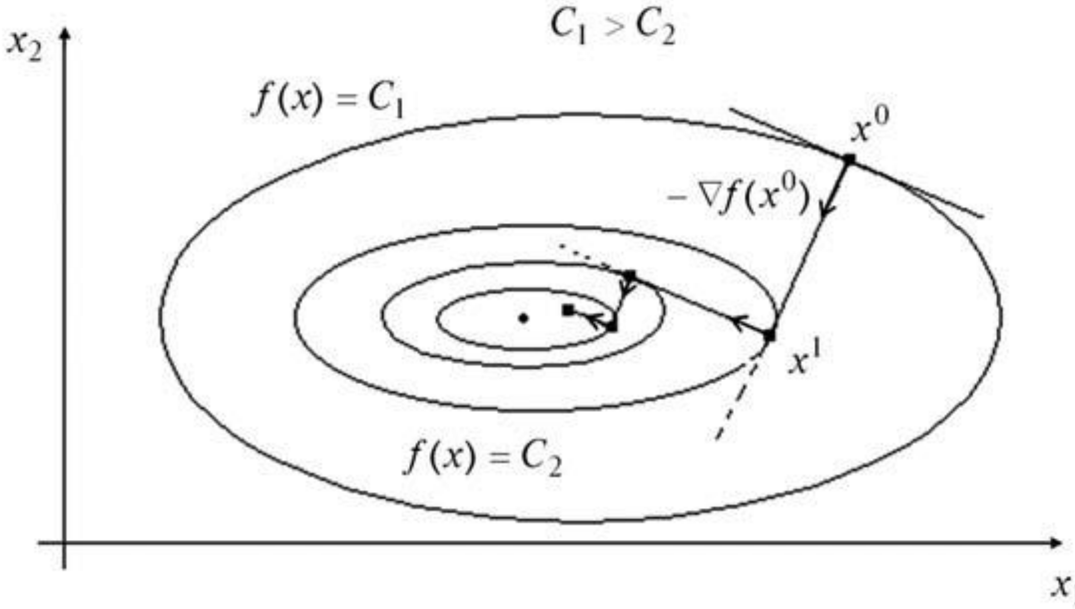
$$\varphi(t_k) = f\left(x^k - t_k \nabla f(x^k)\right) \to \min_{t_k}:$$

Քայլ 7. Հաշվել $x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k)$:

Քայլ 8. Ստուգել պայմանի կատարումը՝ $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_2$; $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon_2$:

ա) եթե ընթացիկ k և $k = k - 1$ դեպքում երկու պայմաններն էլ բավարարված են, ապա հաշվարկն ավարտված է և $x^* = x^{k+1}$:

բ) եթե երկու պայմաններից գոնե մեկը չի բավարարվում, ապա վերցնել $k = k + 1$ և անցնել քայլ 3.-ին:



Նկ. 6.3

Մեթոդի երկրաչափական մեկնաբանությունը ($n = 2$)-ի համար ներկայացված է նկար 6.3-ում:

Զուգամիտություն

Հայտանիշ 6.2. Թող $f(x)$ ֆունկցիան բավարարի **Հայտանիշ 6.1.**-ի պայմանները: Այդ դեպքում, կամայական $x^0 \in R^n$ ելակետի համար, գրադիենտային ամենաարագ վայրէջքի մեթոդի համար կունենանք $\|\nabla f(x^k)\| \to 0; k \to \infty$-ի դեպքում:

Դիտողություններ 6.3.

1. Հայտանիշը երաշխավորում է $\{x^k\}$ հաջորդականության զուգամիտությունը x^* լոկալ կետին, որտեղ $f(x^*) = 0$: Հետևաբար, գրադիենտային ամենաարագ վայրէջքի մեթոդի կիրառման արդյունքում հայտնաբերված x^k-ը լրացուցիչ ուսումնասիրության կարիք ունի՝ այն դասակարգելու համար:

2. Գրադիենտային ամենաարագ վայրէջքի մեթոդը երաշխավորում է $\{x^k\}$ $(k = 0; 1; \cdots)$ հաջորդականության զուգամիտությունը նվազագույն կետին խիստ ուռուցիկ ֆունկցիաների համար:

Զուգամիտության արագությունը

Զուգամիտության արագության գնահատականները ստացվել են միայն խիստ ուռուցիկ ֆունկցիաների համար, երբ $\{x^k\}$ հաջորդականությունը երկրաչափական պրոգրեսիայի արագությամբ զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիայի նվազագույն կետին (գծային զուգամիտություն).

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \frac{M - m}{M + m}\|x^k - x^*\|;$$

որտեղ M և m-ը $f(x)$ ֆունկցիայի H(x) մատրիցի ամենամեծ և ամենափոքր սեփական արժեքների գնահատականներն են:

Դիտողություններ 6.4.

1. Խնդրի լուծման կարգը համընկնում է հայտանիշ 6.1- ում նկարագրված կարգին:
2. Ինչ վերաբերում է f(x) ֆունկցիայի գլոբալ նվազագույնի որոնման ընթացակարգին, 6.2 դիտողությունը մնում է ուժի մեջ:

Օրինակ 6.2. Գտնել $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումը:

Լուծում. I. Որոշել xk կետը, որտեղ բավարարված է դադարեցման չափանիշներից առնվազն մեկը:

1. Վերցնենք $x^0 = (0{,}5; 1)^T$; $\varepsilon_1 = 0{,}1$; $\varepsilon_2 = 0{,}15$; $M = 10$: Գտնել ցանկացած կետում ֆունկցիայի գրադիենտը՝ $\nabla f(x) = (4x_1{+}x_2;\ x_1 + 2x_2)^T$:
2. Վերցնենք $k = 0$:

3^0. Հաշվել $\nabla f(x^0) = (3;\ 2{,}5)^T$:

4^0. Հաշվել $\|\nabla f(x^0)\| = 3{,}9 > 0{,}1$; Անցնում ենք քայլ 5.-ին:

5^0. Ստուգել $k \geq M$ պայմանը՝ $k = 0 < 10 = M$: Անցնում ենք քայլ 6.-ին:

6^0. Հաջորդ կետը որոնվում է հետևյալ բանաձևից՝

$$x^1 = x^0 - t_0\nabla f(x^0) = (0{,}5; 1)^T - t_0(3;\ 2{,}5)^T = (0{,}5 - 3t_0; 1 - 2{,}5t_0)^T:$$

Տեղադրենք ստացված $x_1^1 = 0{,}5 - 3t_0$ և $x_2^1 = 1 - 2{,}5t_0$ կոորդինատային արժեքները փոխարինենք $f(x)$-ում և $\varphi(t_0)$-ն կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\varphi(t_0) = 2(0{,}5 - 3t_0)_1^2 + (0{,}5 - 3t_0)(1 - 2{,}5t_0) + (1 - 2{,}5t_0)_2^2$$

Գտնել $\varphi(t_0)$ ֆունկցիայի մինումումը t_0-ի նկատմամբ՝ օգտագործելով անվերապահ էքստրեմության համար անհրաժեշտ պայմանները.

$$\frac{d\varphi(t_0)}{dt_0} = -15{,}25 + 63{,}25t_0 = 0:$$

Այստեղից կստանանք՝ $t_0^* \cong 0{,}24$: Քանի որ՝
$$\frac{d^2\varphi(t_0)}{dt_0^2} = 63{,}25 > 0,$$
ապա գտնված քայլի արժեքը ապահովում է $\varphi(t_0)$ ֆունկցիայի նվազագույնը t_0-ի նկատմամբ:

Նկատենք, որ t_k^* քայլի լավագույն չափի համար կարելի է ստանալ կամայական կրկնության դեպքում հետևյալ պայմանից՝

$$\varphi(t_k) = f\left(x^k - t_k \nabla f(x^k)\right) \to \min_{t_k}:$$

Ունենք

$$\nabla f(x^k) = \left(4x_1^k + x_2^k;\; x_1^k + 2x_2^k\right)^T;$$

$$x^k - t_k \nabla f(x^k) = \left[x_1^k - t_k\left(4x_1^k + x_2^k\right);\; x_2^k - t_k\left(x_1^k + 2x_2^k\right)\right]^2:$$

$$\varphi(t_k) = 4\left[x_1^k - t_k\left(4x_1^k + x_2^k\right)\right]^2 + \left[x_2^k - t_k\left(x_1^k + 2x_2^k\right)\right]^2 +$$
$$+\left[x_1^k - t_k\left(4x_1^k + x_2^k\right)\right]\left[x_2^k - t_k\left(x_1^k + 2x_2^k\right)\right]:$$

Հաշվի առնելով վերոգրյալ արտահայտությունները,

$$\frac{d\varphi(t_k)}{dt_k} = 0$$

պայմանից կստանանք՝

$$t_k^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(4x_1^k + x_2^k\right)^2 + \left(x_1^k + 2x_2^k\right)^2}{2\left(4x_1^k + x_2^k\right)^2 + \left(4x_1^k + x_2^k\right)\left(x_1^k + 2x_2^k\right) + \left(x_1^k + 2x_2^k\right)^2}:$$

Որոշենք t_0^* -ն, կստանանք՝ $t_0^* = 0.24$:

7^0. Գտնել $x^1 = x^0 - t_0^* \nabla f(x^0)$: $x^1 = (0{,}5; 1) - 0{,}24 \cdot (3; 2{,}5)^T = (-0{,}22;\; 0{,}4)^T$;

8^0. Հաշվել $\|x^1 - x^0\| = 0{,}937 > 0{,}15$; $|f(x^1) - f(x^0)| = 1{,}83 > 0{,}15$:

Եզրակացություն. վերցնել $k = 1$ և անցնել քայլ 3.-ին:

3^1. Հաշվել $\nabla f(x^1) = (-0{,}48;\; 0{,}58)^T$:

4^1. Հաշվել $\|\nabla f(x^1)\| = 0{,}752 > 0{,}1$; Անցնում ենք քայլ 5.-ին:

5^1. Ստուգել $k \geq M$ պայմանը՝ $k = 1 < 10 = M$: Անցնում ենք քայլ 6.-ին:

6^1. Հաշվել t_1^*-ը: Ըստ քայլ 6^0-ի կստանանք՝ $t_1^* = 0{,}546$:

7^1. Գտնել $x^2 = x^1 - t_1^* \nabla f(x^1)$:

$$x^2 = (-0{,}22;\; 0{,}4) - 0{,}546 \cdot (-0{,}48;\; 0{,}58)^T = (0{,}04;\; 0{,}08)^T;$$

8^1. Հաշվել $\|x^2 - x^1\| = 0{,}41 > 0{,}15$; $|f(x^2) - f(x^1)| = 1{,}156 > 0{,}15$:

Եզրակացություն. վերցնել $k = 2$ և անցնել քայլ 3.-ին:

3^2. Հաշվել $\nabla f(x^2) = (0{,}24;\; 0{,}2)^T$:

4^2. Հաշվել $\|\nabla f(x^2)\| = 0{,}312 > 0{,}1$; Անցնում ենք քայլ 5.-ին:
5^2. Ստուգել $k \geq M$ պայմանը՝ $k = 2 < 10 = M$: Անցնում ենք քայլ 6.-ին:
6^2. Հաշվել t_2^*-ը: Ըստ քայլ 6^0-ի կստանանք՝ $t_2^* = 0{,}24$:
7^2. Գտնել $x^3 = x^2 - t_2^* \nabla f(x^2)$:

$$x^3 = (-0{,}04;\ 0{,}08) - 0{,}24 \cdot (0{,}24;\ 0{,}2)^T = (-0{,}0176;\ 0{,}032)^T;$$

8^2. Հաշվել $\|x^3 - x^2\| = 0{,}0749 < 0{,}15$; $|f(x^3) - f(x^2)| = 0{,}0116 < 0{,}15$:
Ընդունել $k = 3$ և անցնել քայլ 3.-ին:
3^3. Հաշվել $\nabla f(x^3) = (-0{,}012;\ -0{,}0816)^T$:
4^3. Հաշվել $\|\nabla f(x^3)\| = 0{,}082 < 0{,}1$: Հաշվարկն ավարտված է: Որոնված է

$$x^3 = (-0{,}0176;\ 0{,}032)^T; f(x^3) = 0{,}00127$$

Նկար 6.2-ում ստացված կետերը ընդգծված և միացված է հոծ գծով:
II. x^3 կետի վերլուծությունը:
Օրինակ 6.1-ում ցույց է տրվել, որ $f(x)$ ֆունկցիան խիստ ուռուցիկ է և, հետևաբար, x^3 կետը գլոբալ նվազագույն կետի հայտնաբերված մոտարկումն է, այսինքն՝ $x^* = x^3$:

Ինքնուրույն առաջադրանքներ

Օրինակ 6.3. Գտնել $f(x) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2$ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումը:

Օրինակ 6.4. Գտնել $f(x) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + 4x_3^2 - 5x_3$ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումը:

Օրինակ 6.5. Գտնել $f(x) = x_1^2 - 7x_2^2 - 5x_3^2$ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումը:

Օրինակ 6.6. Գտնել $f(x) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2$ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումը:

Օրինակ 6.7. Գտնել $f(x) = -x_1^2 + 11x_2^2 - 9x_2x_3 + x_3^2 - 15x_2$ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումը:

Օրինակ 6.8. Գտնել $f(x) = -\sqrt{2}x_1^2 + \pi^2 x_2^2 - 4x_3^2$ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումը:

Օրինակ 6.9. Գտնել $f(x) = 3x_1^2 - e^2 x_1x_2 + 2\pi x_2^2 - (x_1 - x_2)^2$ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումը:

Օրինակ 6.10. Գտնել $f(x) = \sin 30^\circ\, x_1^2 + \sqrt{3}\cos 30^\circ\, x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 - \sqrt{2}\sin 45^\circ\, x_3$ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումը:

Օրինակ 6.11. Գտնել $f(x) = 12x_1^2 - 7x_1x_2 - 5x_3^2 + 5x_1x_2 - 7x_1x_2$ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումը:

Գրականություն

1. *Азарян С.А.* Об одном методе решения плоской задачи неоднородных анизотропных тел. «Первое Международное книжное издание стран СНГосударств «ЛУЧШИЙ НАУЧНЫЙ СОТРУДНИК - 2023» VI том; ст. 82-88.
2. *Алексеев*, *В. М.* Сборник задач по оптимизации. В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. М. : Наука, 1984.
3. *Аоки*, *М.* Введение в методы оптимизации. М. : Мир, 1977.
4. *Базара*, *М.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М. Базара, К. Шетти. М. : Мир,1982.
5. *Банди*, *Б.* Методы оптимизации. Вводный курс. М. : Радио и связь, 1988.
6. *Бертсекас*, *Д.* Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М. : Радио и связь, 1987.
7. *Васильев*, *Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М. : Наука, 1980.
8. *Волгин*, *Л. Н.* Принцип согласованного оптимума. М. : Советское радио, 1977.
9. *Гельфанд*, *И. М.* Вариационное исчисление. И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. М. : Физматгиз, 1961.
10. *Гилл*, *Ф.* Практическая оптимизация. Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. М. : Мир, 1985.
11. *Демьянов, В. Ф. Л. В. Васильев*. Недифференцируемая оптимизация М. : Наука, 1983.
12. *Дэннис, Дж, Р. Шнабель*. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений.М. : Мир, 1988.
13. *Евтушенко*, *Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М. : Наука, 1982.
14. *Жиглявский*, *А. А.* Методы поиска глобального экстремума / А. А. Жиглявский, А. Г. Жилинскас.— М. : Наука, 1991.
15. *Краснов*, *М. Л. и другие.* Вариационное исчисление. М. : Наука, 1973.
16. *Лесин*, *В. В.* Основы методов оптимизации / В. В. Лесин, Ю. П. Лисовец. — СПб. : Лань, 2011.
17. *Летова*, *Т. А. и дуугие.* Экстремум функций в примерах и задачах М. : Изд-во МАИ, 1998.
18. *Пантелеев*, *А. В.* Вариационное исчисление в примерах и задачах. — М. : Высш. шк., 2006.
19. *Пантелеев*, *А. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах / А. В.
20. *Сухарев*, *А. Г. и другие.* Курс методов оптимизации. М. : Наука, 1986.
21. *Фиакко*, *А. Г. Мак-Кормик.* Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М. : Мир, 1972.
22. *Химмельблау*, *Д.* Прикладное нелинейное программирование. М. : Мир, 1975.
23. Численные методы условной оптимизации / под ред. Ф. Гилла, У. Мюррея. М. : Мир, 1977.
24. *Эльсгольц*, *Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М. : Наука, 1969.
25. Sarkisyan V.S.,Ovsepyan L.O.,Mamrillova A.,Azaryan S.A.”Koncentracia naprjahenij okolo nekruplich otwerstij v neodnorodnich beskonecnych plastinkach”,Jerevan,Uchenie zapiski EGU, No 2(156), 1984.
26. Mamrilla J.,Sarkisyan V.S.,Ovsepyan L.O.,Mamrillova A.,Azaryan S.A.”The concentrat-ion of strains in the inhomogeneonus boundless this plate with the circuliaropening”.Acta Phizica, Univ.Comen,XXVI,1985.
27. Mamrillova A.,Sarkisyan V.S., Azaryan S.A.”The selution of the planer inhomogenus problem for regions with the openinq of the pure shear”. Acta Phizica, Univ.Comen,XXVIII, 1985.
28. Mamrillova A.,Azaryan S.A.”New aproach to the solution of problems of inhomogeneus thin plates a hole planar”, Acta Phizica,Univ.Comen.,XXIX,1989.