ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Զ.Բ.ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Խնդիրներ և լուծումներ

ԵՐԵՎԱՆ 2023

Բովանդակություն

Նախաբան

Ժողովածուում շարադրված են մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների դասական տեսության պարզագույն խնդիրների լուծման հիմնական մեթոդները: Յուրաքանչյուր բաժին հագեցված է տիպային խնդիրների լուծման օրինակներով, իսկ բաժնի վերջում առաջադրված են խնդիրներ՝ ինքնուրույն և լսարանային աշխատանքի համար:

Աշխատանքի ուղղվածությունից ելնելով, խնդիրների լուծման գոյությանը և միակությանը վերաբերվող փաստերը բերված են առանց ապացույցների:

Նախատեսված է ԵՊՀ ԻԿՄ ֆակուլտետի ուսանողների համար և կարող է օգտակար լինել ֆիզիկամաթեմատիկական և տեխնիկական մասնագիտությունների դասախոսներին և ուսանողներին:

Նախնական գաղափարներ

Մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարում (այսուհետ հավասարում) կոչվում է այն հավասարումը, որտեղ անհայտը մեկից ավելի փոփոխականի ֆունկցիա է: Ընդ որում այն պետք է էապես պարունակի անհայտ ֆունկցիայի մեկ կամ մի քանի մասնական ածանցյալ և կարող է պարունակել անկախ փոփոխականներն ու որոնելի ֆունկցիան:

Հավասարումը կոչվում է m -րդ կարգի, եթե նրա մեջ մասնակցում է որոնելի ֆունկցիայի առնվազն մեկ m -րդ կարգի մասնական ածանցյալ, իսկ m-ից բարձր կարգի ածանցյալներ չեն մասնակցում:

Ցանկացած հավասարում ունի

$$\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \ldots\right) = 0$$

տեսքը, որտեղ Φ ֆունկցիան կապ է ստեղծում $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անկախ փոփոխականների, $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ որոնելի ֆունկցիայի և նրա ածանցյալների միջև: Այստեղ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ վեկտոր է, որի բաղադրիչները ոչ բացասական ամբողջ թվեր են, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leqslant m$, m-ը հավասարման կարգն է:

Այսուհետ u ֆունկցիայի մասնական ածանցյալների համար կօգտագործենք նաև

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

նշանակումները:

Հավասարումը կոչվում է գծային, եթե Φ ֆունկցիան գծորեն է կախված u-ից և նրա ածանցյալներից[1]: Այսպես, երկրորդ կարգի գծային հավասարման ընդհանուր տեսքն է՝

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f(x):$$

[1]Կասենք, որ $k+m$ հատ փոփոխականներից կախված $G(t_1, t_2, \ldots, t_k, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ ֆունկցիան $(k \geqslant 0,\ m > 0$ ամբողջ թվեր են$)$ գծային է $y_1, y_2, \ldots, y_m$ փոփոխականների նկատմամբ, կամ գծորեն է կախված $y_1, y_2, \ldots, y_m$ փոփոխականներից, եթե այն ունի

$$G(t_1, t_2, \ldots, t_k, y_1, y_2, \ldots, y_m) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t_1, t_2, \ldots, t_k) y_i + b(t_1, t_2, \ldots, t_k)$$

տեսքը: a_i ֆունկցիաները կոչվում են գործակիցներ, իսկ b-ն՝ ազատ անդամ: Եթե $b \equiv 0$, ապա G -ն կոչվում է համասեռ գծային ֆունկցիա:

Այստեղ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $u(x)$-ը անհայտ ֆունկցիան է, $a_{ij}(x), b_i(x), c(x)$ ֆունկցիաները կոչվում են հավասարման գործակիցներ, $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է ազատ անդամ կամ աջ մաս: Եթե $f(x) \equiv 0$, ապա գծային հավասարումը կոչվում է համասեռ:

Հետագայում կհամարենք, որ բարձր կարգի ածանցյալների գործակիցներից կազմված $A(x)=\|a_{ij}(x)\|_{i,j=1}^{n}$ մատրիցը սիմետրիկ է: Իրոք, հաշվի առնելով, որ մինչև երկրորդ կարգի անընդհատ ածանցյալ ունեցող ֆունկցիաների երկրորդ կարգի "խառը" մասնական ածանցյալները հավասար են՝ $u_{x_ix_j}=u_{x_jx_i}$, կունենանք

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}(x)+a_{ji}(x)}{2}\, u_{x_ix_j},$$

հետևաբար $A(x)$ մատրիցը միշտ կարելի է փոխարինել

$$\frac{1}{2}(A(x)+A^T(x)) = \left\| \frac{a_{ij}(x)+a_{ji}(x)}{2} \right\|_{i,j=1}^{n}$$

սիմետրիկ մատրիցով, առանց փոխելու հավասարումը:

Եթե Φ ֆունկցիան գծորեն է կախված որոնելի ֆունկցիայի ամենաբարձր՝ m-րդ կարգի ածանցյալներից, ապա հավասարումը կոչվում է քվազիգծային: Երկրորդ կարգի քվազիգծային հավասարման ընդհանուր տեսքն է՝

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,u,u_{x_1},u_{x_2},\ldots,u_{x_n})\, u_{x_ix_j} + F(x,u,u_{x_1},u_{x_2},\ldots,u_{x_n}) = 0:$$

Եթե քվազիգծային հավասարման մեջ ամենաբարձր կարգի ածանցյալների գործակիցները կախված են միայն անկախ փոփոխականներից, ապա այն կոչվում է կիսագծային հավասարում: Օրինակ, երկու՝ (x,y) անկախ փոփոխականների դեպքում, երկրորդ կարգի կիսագծային հավասարումը կունենա

$$a(x,y)\,u_{xx} + 2\,b(x,y)\,u_{xy} + c(x,y)\,u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$$

տեսքը:

Դիցուք Ω-ն n չափանի R^n էվկլիդեսյան տարածության որևէ տիրույթ է (բաց կապակցված բազմություն): Կասենք, որ $u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ֆունկցիան հավասարման լուծում է Ω տիրույթում, եթե այն այդ տիրույթում

- որոշված և անընդհատ է.
- գոյություն ունեն և անընդհատ են այն ածանցյալները, որոնք

մասնակցում են հավասարմանը.

- տեղադրելով հավասարման մեջ՝ ստացվում է նույնություն անկախ փոփոխականների նկատմամբ Ω տիրույթում:

Բնության մեջ տեղի ունեցող պրոցեսների ուսումնասիրությունը շատ դեպքերում բերվում է մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարման լուծումներ գտնելու խնդրին. դա է պատճառը, որ այդ հավասարումները կոչվում են նաև մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումներ:

Հավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը կոչվում է ընդհանուր լուծում: Օրինակ, $u_x = 0$ հավասարման ընդհանուր լուծումը տրվում է $u(x, y) = g(y)$ բանաձևով, որտեղ $g(y)$-ը կամայական անընդհատ ֆունկցիա է:

Եթե սովորական դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը պարունակում է կամայական հաստատուններ, ապա մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը պարունակում է կամայական ֆունկցիաներ: m-րդ կարգի հավասարման ընդհանուր լուծումը պարունակում է m հատ կամայական ֆունկցիաներ, որոնց փոփոխականների քանակը մեկով պակաս է որոնելի ֆունկցիայի փոփոխականների քանակից: Ենթադրվում է, որ այդ ֆունկցիաները բավականաչափ ողորկ են:

Օրինակ 1: Լուծել $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 - y$ հավասարումը:

Լուծում: Ներկայացնենք հավասարումը

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = x^2 - y$$

տեսքով: Նախ ինտեգրենք աջ և ձախ մասերը ըստ y-ի՝

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int (x^2 - y)dy = x^2 y - \frac{y^2}{2} + f_1(x), \qquad f_1(x) \text{-ը կամայական ֆունկցիա է:}$$

Այժմ ստացվածը ինտեգրենք ըստ x-ի՝

$$u(x, y) = \frac{x^3 y}{3} - \frac{y^2 x}{2} + f(x) + g(y) :$$

Այստեղ $f(x)$-ը և $g(y)$-ը կամայական դիֆերերենցելի ֆունկցիաներ են ($f(x)$-ը $f_1(x)$-ի նախնականն է):

Պատասխան՝ $u(x, y) = \dfrac{x^3 y}{3} - \dfrac{y^2 x}{2} + f(x) + g(y) :$

Օրինակ 2: Լուծել $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x}$ հավասարումը:

Լուծում: Հավասարումը ներկայացնենք

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - 2u\right) = 0$$

տեսքով: Ինտեգրելով աջ և ձախ մասերը ըստ x-ի, կստանանք՝

$$\frac{\partial u}{\partial y} - 2u = g_1(y), \tag{1}$$

որը, եթե համարենք x-ը պարամետր, առաջին կարգի գծային սովորական դիֆերենցիալ հավասարում է: Լուծենք այն հաստատունի վարիացիայի եղանակով: Համապատասխան համասեռ՝ $u_y - 2u = 0$ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$u_0(x, y) = h(x)e^{2y}$$

տեսքը, որտեղ $h(x)$-ը կամայական ֆունկցիա է: Անհամասեռ՝ (1) հավասարման լուծումը փնտրենք

$$u(x, y) = z(x, y)e^{2y}$$

տեսքով: $z(x, y)$ ֆունկցիան գտնելու համար տեղադրենք (1) հավասարման մեջ՝

$$\frac{\partial z}{\partial y} = g_1(y)e^{-2y},$$

որտեղից, ինտեգրելով ըստ y-ի կստանանք $z(x, y)$ ֆունկցիան՝

$$z(x, y) = g_2(y) + f(x) :$$

Այստեղ $g_2(y)$-ը, որպես $g_1(y)e^{-2y}$ կամայական ֆունկցիայի նախնական, կամայական դիֆերենցելի ֆունկցիա է: Այսպիսով՝

$$u(x, y) = (f(x) + g_2(y))e^{2y} = f(x)e^{2y} + g_2(y)e^{2y} = f(x)e^{2y} + g(y) :$$

Պատասխան՝ $u(x, y) = f(x)e^{2y} + g(y) :$

Խնդիրներ

Պարզել, հետևյալ հավասարություններն արդյո՞ք մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումներ են: Եթե այո, ապա ո՞ր կարգի.

1. $\cos(u_x+u_y)-\cos u_x\cos u_y+\sin u_x\sin u_y=0$:
2. $\dfrac{\partial}{\partial x}\,\operatorname{tg} u-u_x\sec^2 u-3u+2=0$:
3. $\ln|u_{xx}u_{yy}|-\ln|u_{xx}|-\ln|u_{yy}|+u_x+u_y=0$:
4. $u_xu_{xy}^2+\left(u_{xx}^2-2u_{xy}^2+u_y\right)^2-2xy=0$:
5. $2\left(u_x-2u\right)u_{xy}-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(u_x-2u\right)^2-xy=0$:
6. $2u_{xx}u_{xxy}-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(u_{xx}-u_y\right)^2-2u_yu_{xxy}+u_x=0$:
7. $3u_x\,\dfrac{\partial}{\partial y}\,\ln|u_x|+\sin u-3u_{xy}=6u_y$:
8. $\dfrac{\partial}{\partial x}\,\operatorname{ctg} u+6u^2=\dfrac{u_x}{\cos^2 u-1}+x^2y$:
9. $4\sin^2\left(u_x+3u_y\right)+x+y=u^3-2\cos\left(2u_x+6u_y\right)$:

Պարզել, հետևյալ հավասարումներից որո՞նք են գծային (համասեռ կամ անհամասեռ) և որոնք ոչ գծային (քվազիգծային).

10. $u_x\,u_{xy}^2+2x\,u\,u_{yy}-3xy\,u_y-u=0$:
11. $u_y\,u_{xx}-3x^2\,u\,u_{xy}+2\,u_x-f(x,y)\,u=0$:
12. $2\sin(x+y)\,u_{xx}-x\cos y\;u_{xy}+xy\,u_x-3u+1=0$:
13. $x^2y\,u_{xxy}+2e^xy^2\,u_{xy}-(x^2y^2+1)u_{xx}-2u=0$:
14. $3\,u_{xy}-6\,u_{xx}+7u_y-u_x+8x=0$:
15. $u_{xy}\,u_{xx}-3u_{yy}-6x\,u_y+xy\,u=0$:
16. $a(x,y)u_{xx}+b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+d(x,y)u_x+e(x,y)u_y+h(x,y)=0$:

17. $a(x,y,u_x,u_{xy})\,u_{xyy}+b(x,y,u_{yy})\,u_{yyy}+2u\,u_{xy}^2-f(x,y)=0$:

18. $u_{xy}+u_y+u^2-xy=0$:

19. $2x\,u_{xy}-6\,\dfrac{\partial}{\partial x}(u^2-xy)+u_{yy}=0$:

20. $\dfrac{\partial}{\partial y}\,(yu_y+u_x^2)-2u_xu_{xy}+u_x-6u=0$:

Հավասարումը ձևափոխել ξ, η փոփոխականների.

21. $x^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad \xi=xy, \qquad \eta=\dfrac{y}{x}$:

22. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad \xi=\dfrac{x}{x^2+y^2}, \qquad \eta=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$:

23. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{1}{2xy}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad \xi=xy, \qquad \eta=\dfrac{y}{x}$:

Հավասարումը ձևափոխել r, φ բևեռային կոորդինատների.

24. $x\,\dfrac{\partial z}{\partial y}-y\,\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$:

25. $x\,\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$:

26. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ (Լապլասի հավասարումը) :

Ստուգել, որ ցանկացած φ և ψ դիֆերենցելի ֆունկցիաների դեպքում տրված ֆունկցիան հավասարման լուծում է.

27. $y\,\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0, \qquad z=\varphi\,(x^2+y^2)$:

28. $\dfrac{1}{x}\,\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\,\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}, \qquad z=\dfrac{y}{\varphi\,(x^2-y^2)}$:

29. $x^2\,\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\,\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2=0, \qquad z=\dfrac{y^2}{3x}+\varphi(xy)$:

30. $y^2\,\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\,\dfrac{\partial z}{\partial y}=xz, \qquad z=y\,\varphi\,(x^2-y^2)$:

31. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2y\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2x\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + 4xy\,u = 0, \qquad u = e^{x^2+y^2}\,(\varphi(x) + \psi(y))$:

32. $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ (Լարի տատանման հավասարում), $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$:

33. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0, \quad u = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$:

Գտնել հավասարման ընդհանուր լուծումը.

34. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$:

35. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$:

36. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + y$:

37. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 + y$:

38. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{x+y}$:

39. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 5\,\dfrac{\partial u}{\partial y}$:

40. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y\,\dfrac{\partial u}{\partial x}$:

41. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{x}\,\dfrac{\partial u}{\partial y}$:

42. $u_{xx} = 2$:

43. $u_{xy} = 2x$:

44. $u_{yy} = u_y$:

45. $u_{yy} = x + y$:

46. $u_{xx} = 6x$:

47. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$:

48. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0$:

Գտնել հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է տրված պայմաններին.

49. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + y, \;\; u(x, 0) = x, \;\; u(0, y) = y^2$:

50. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + y - xy, \quad u(0, y) = y^2$:

51. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y, \quad z(x, y)\big|_{y=x^2} = 1$:

Գլուխ 1
Առաջին կարգի հավասարումներ

§ 1 Գծային համասեռ հավասարում

Դիտարկենք $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ֆունկցիայի նկատմամբ

$$a_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + a_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \qquad (1.1)$$

հավասարումը, որտեղ $a_1, a_2, \ldots a_n$ գործակիցները $\Omega \subseteq \mathrm{R}^n$ տիրույթում որոշված, անընդհատ ֆունկցիաներ են և միաժամանակ զրո չեն դառնում:

1.1 Ընդհանուր լուծումը: (1.1) հավասարմանը համապատասխանեցնենք սիմետրիկ տեսքով գրված սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների հետևյալ համակարգին.

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)} : \qquad (1.2)$$

Դիցուք, օրինակ, $a_n \neq 0$: Այդ դեպքում, եթե x_n-ը համարենք անկախ փոփոխական, (1.2) համակարգը համարժեք կլինի

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{a_1}{a_n}, \quad \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{a_2}{a_n}, \ \ldots \ , \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad (1.3)$$

նորմալ համակարգին:

Հայտնի է, որ եթե $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ֆունկցիան (1.3) (կամ որ նույնն է (1.2)) համակարգի ինտեգրալ է[2], ապա $u = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ֆունկցիան (1.1) հավասարման լուծում է, և հակառակը՝ եթե $u = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \not\equiv \mathrm{const}$. ֆունկցիան (1.1) հավասարման լուծում է, ապա $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ֆունկցիան (1.3) համակարգի ինտեգրալ է:

Եթե $a_1, a_2, \ldots a_n$ ֆունկցիաների առաջին կարգի մասնական ածանցյալներն անընդհատ են, ապա (1.3) համակարգն ունի $n-1$ հատ գծորեն անկախ՝

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ \ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1.4)$$

ինտեգրալներ: Այդ հավաքածուն կոչվում է (1.2) համակարգի ընդհանուր

[2] $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \not\equiv \mathrm{const}$ ֆունկցիան կոչվում է (1.3) համակարգի ինտեգրալ, եթե այդ համակարգի ցանկացած $x_1 = \varphi_1(x_n),\ x_2 = \varphi_2(x_n), \ \ldots \ , x_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_n)$ լուծման համար $\psi(\varphi_1(x_n), \varphi_2(x_n), \ldots \varphi_{n-1}(x_n), x_n)$ ֆունկցիան հաստատուն է՝ կախված չէ x_n-ից: Այդ դեպքում $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$ հավասարությունը կոչվում է առաջին ինտեգրալ:

ինտեգրալ: Եթե գտնվել է (1.4) ընդհանուր ինտեգրալը, ապա (1.1) հավասարման ընդհանուր լուծումը տրվում է

$$u = F(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$$

բանաձևով, որտեղ F-ը կամայական անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիա է:

Երկու անկախ փոփոխականների դեպքում (1.1) հավասարումը սովորաբար գրվում է

$$P(x,y)\,\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y)\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{1.5}$$

տեսքով, որտեղ $z(x,y)$-ը անհայտ ֆունկցիան է, իսկ $P(x,y)$-ը և $Q(x,y)$-ը տրված ֆունկցիաներ են: Այդ դեպքում (1.2) համակարգը վեր է ածվում մեկ հավասարման՝

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)} : \tag{1.6}$$

Եթե $\psi(x,y)$-ը (1.6) հավասարման ընդհանուր ինտեգրալն է, ապա (1.5) հավասարման ընդհանուր լուծումը տրվում է

$$z = F(\psi(x,y)) \tag{1.7}$$

բանաձևով:

Երկրաչափորեն (1.7) ընդհանուր լուծմանը համապատասխանում է F կամայական ֆունկցիայից կախված մակերևույթ, որը կոչվում է (1.5) հավասարման ինտեգրալ մակերևույթ:

Օրինակ 1.1: Լուծել հավասարումը.

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0 :$$

Լուծում: Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համապատասխան համակարգն է՝

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} :$$

Այն ունի (երբ $x \neq 0$) գծորեն անկախ երկու՝

$$\psi_1 = \frac{y}{x}, \qquad \psi_2 = \frac{z}{x} \tag{1.8}$$

ինտեգրալ: Ընդհանուր լուծումն է՝

$$u = F(\psi_1, \psi_2) = F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right),$$

որտեղ F-ը երկու փոփոխականի կամայական դիֆերենցելի ֆունկցիա է:

Պատասխան` $u = F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$:

1.2. Կոշիի խնդիրը: Պահանջվում է գտնել (1.1) հավասարման այնպիսի $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ լուծում, որը փոփոխականներից մեկի, օրինակ x_n-ի որևէ ֆիքսած` $x_n^0$ արժեքի դեպքում հավասարվում է տրված $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիային`

$$u\Big|_{x_n = x_n^0} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) : \tag{1.9}$$

Լուծման գոյության համար անհրաժեշտ է, որ $a_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) \neq 0$: (1.9) պայմանը կոչվում է Կոշիի կամ սկզբնական պայման:

Կոշիի խնդրի լուծումը կարելի է ստանալ հետևյալ քայլերով.

- Տեղադրել (1.4) ընդհանուր ինտեգրալի մեջ $x_n = x_n^0$: Ստացված ֆունկցիաները նշանակել $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \ldots, \tilde{\psi}_{n-1}$-ով`

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \tilde{\psi}_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \tilde{\psi}_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \tilde{\psi}_{n-1} : \end{cases} \tag{1.10}$$

- Լուծել (1.10) համակարգը $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ փոփոխականների նկատմամբ`

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \ldots, \tilde{\psi}_{n-1}), \\ x_2 = \omega_2(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \ldots, \tilde{\psi}_{n-1}), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \ldots, \tilde{\psi}_{n-1}) : \end{cases}$$

- Տեղադրել φ ֆունկցիայի մեջ`

$$\varphi(\omega_1(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \ldots, \tilde{\psi}_{n-1}), \omega_2(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \ldots, \tilde{\psi}_{n-1}), \ldots \omega_{n-1}(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \ldots, \tilde{\psi}_{n-1})),$$

և փոխարինել $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \ldots, \tilde{\psi}_n$ ֆունկցիաները $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ ֆունկցիաներով: Ստացված`

$$u = \varphi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \omega_2(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}))$$

ֆունկցիան կլինի Կոշիի խնդրի լուծումը:

Երկու փոփոխականի դեպքում պահանջվում է գտնել (1.5) հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $z(x_0, y) = \varphi(y)$ պայմանին: Այս դեպքում (1.10) համակարգը վեր է ածվում մեկ հավասարման՝

$$\psi(x_0, y) = \tilde{\psi} :$$

Այստեղից

$$y = \omega(\tilde{\psi}),$$

և պահանջվող լուծումը կլինի՝

$$z = \varphi(\omega(\psi(x, y))) :$$

Օրինակ 1.2: Գտնել

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է

$$u(2, y, z) = y + z$$

պայմանին:

Լուծում: Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համապատասխան համակարգի ինտեգրալներն են՝ $\psi_1 = y/x$, $\psi_2 = z/x$ (տես 1.1 օրինակը): Տեղադրենք նրանց մեջ $x = 2$ և ստացված ֆունկցիաները նշանակենք $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$-ով.

$$\frac{y}{2} = \tilde{\psi}_1, \quad \frac{z}{2} = \tilde{\psi}_2, \quad \text{կամ} \quad y = 2\tilde{\psi}_1, \quad z = 2\tilde{\psi}_2 :$$

Պահանջվող լուծումը կլինի՝ $u = 2\psi_1 + 2\psi_2 = \dfrac{2(y+z)}{x}$:

Պատասխան՝ $u = \dfrac{2(y+z)}{x}$:

Օրինակ 1.3: Գտնել

$$y\,\frac{\partial z}{\partial x} - x\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{1.11}$$

հավասարման այն ինտեգրալ մակերևույթը, որը անցնում է $z = y^2$ կորով, երբ $x = 0$:

Լուծում: (1.11)-ին համապատասխանում է

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$$

անջատվող փոփոխականներով հավասարումը, որի ինտեգրալն է՝ $\psi = x^2 + y^2$: Տեղադրենք $x = 0$ և ստացված ֆունկցիան նշանակենք $\tilde{\psi}$, կստանանք՝ $\tilde{\psi} = y^2$, որտեղից՝

$$y = \pm\sqrt{\tilde{\psi}}\,:$$

Տեղադրելով կորի $z = y^2$ հավասարման մեջ և $\tilde{\psi}$-ը փոխարինելով ψ-ով, կստանանք պահանջվող լուծումը՝

$$z = \left(\pm\sqrt{\psi}\right)^2 = \psi(x,y) = x^2 + y^2\,:$$

Պատասխան՝ $z = x^2 + y^2$:

§ 2 Քվազիգծային հավասարում

Դիտարկենք $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ֆունկցիայի նկատմամբ

$$a_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\,\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\,\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + a_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\,\frac{\partial u}{\partial x_n} = \\ = b(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \quad (1.12)$$

քվազիգծային հավասարումը: Նկատենք, որ երբ a_i գործակիցները և b աջ մասը կախված չեն u-ից, ապա այն գծային անհամասեռ հավասարում է:

2.1. Ընդհանուր լուծումը: Եթե (1.12) հավասարման լուծումը փնտրենք

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0 \qquad (1.13)$$

անբացահայտ տեսքով, ապա V ֆունկցիայի նկատմամբ ստացվում է

$$a_1\,\frac{\partial V}{\partial x_1} + a_2\,\frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + a_n\,\frac{\partial V}{\partial x_n} + b\,\frac{\partial V}{\partial u} = 0 \qquad (1.14)$$

գծային համասեռ հավասարումը: Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համապատասխան համակարգն է՝

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)} = \frac{du}{b(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)}\,:$$

Դիցուք այն ունի n հատ

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u),\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \qquad (1.15)$$

գծորեն անկախ ինտեգրալներ: Այդ դեպքում

$$V = F(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$$

բանաձևով կտրվի (1.14) հավասարման ընդհանուր լուծումը, որտեղ F-ը կամայական դիֆերենցելի ֆունկցիա է: Հաշվի առնելով (1.13)-ը՝ (1.12) հավասարման ընդհանուր լուծումը կգրվի

$$F(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = 0 \tag{1.16}$$

անբացահայտ տեսքով: Եթե հաջողվի (1.16)-ը լուծել u-ի նկատմամբ, ապա կստանանք լուծումը բացահայտ տեսքով՝ $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

Երկու անկախ փոփոխականների դեպքում ունենք

$$P(x, y, z)\,\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\,\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \tag{1.17}$$

հավասարումը: Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համապատասխան համակարգը այդ դեպքում կլինի՝

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}: \tag{1.18}$$

Եթե

$$si_1(x, y, z), \qquad \psi_2(x, y, z) \tag{1.19}$$

ֆունկցիաներն այդ համակարգի անկախ ինտեգրալներ են, ապա (1.17) հավասարման ընդհանուր լուծումն է՝

$$F(\psi_1, \psi_2) = 0:$$

2.2. Կոշիի խնդիրը: Պահանջվում է գտնել (1.12) հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է

$$u\Big|_{x_n = x_n^0} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \tag{1.20}$$

պայմանին: Այստեղ φ-ն տրված անընդհատ ֆունկցիա է:

Կոշիի խնդիրը լուծելու համար օգտվենք (1.15) ինտեգրալներից: Դրա համար պետք է՝

• այդ ինտեգրալներում տեղադրել $x_n = x_n^0$՝

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0, u) = \tilde{\psi}_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0, u) = \tilde{\psi}_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0, u) = \tilde{\psi}_n. \end{cases} \tag{1.21}$$

• լուծել $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u$ փոփոխականների նկատմամբ՝

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \ldots, \tilde{\psi}_n), \\ x_2 = \omega_2(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \ldots, \tilde{\psi}_n), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \ldots, \tilde{\psi}_n), \\ u = \omega(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \ldots, \tilde{\psi}_n). \end{cases} \tag{1.22}$$

• տեղադրել ստացված լուծումը (1.20)-ի մեջ և փոխարինել $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \ldots, \tilde{\psi}_n$ ֆունկցիաները $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ ֆունկցիաներով՝

$$\omega(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = \varphi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n), \omega_2(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)) :$$

Ստացված հավասարմամբ կորոշվի Կոշիի խնդրի լուծումը անբացահայտ տեսքով:

Երկու փոփոխականի դեպքում պահանջվում է գտնել (1.17) հավասարման այն $z = z(x, y)$ լուծումը, որը բավարարում է

$$z(x_0, y) = \varphi(y) \tag{1.23}$$

պայմանին:

Լուծումը ստանալու համար (1.18) համակարգի (1.19) ինտեգրալներում տեղադրենք $x = x_0$ և նշանակենք ստացվածը $\tilde{\psi}_1,\ \tilde{\psi}_2$-ով՝

$$\begin{cases} \psi_1(x_0, y, z) = \tilde{\psi}_1, \\ \psi_2(x_0, y, z) = \tilde{\psi}_2, \end{cases}$$

որտեղից

$$\begin{cases} y = \omega_1(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2), \\ z = \omega(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2) : \end{cases}$$

Կոշիի խնդրի լուծումը կլինի՝

$$\omega(\psi_1, \psi_2) = \varphi(\omega_1(\psi_1, \psi_2)) :$$

Օրինակ 1.4: Լուծել

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u \tag{1.24}$$

հավասարումը և առանձնացնել այն լուծումը, որը բավարարում է

$$u(2, y, z) = \frac{1}{2}(y + z) \tag{1.25}$$

պայմանին:

Լուծում: Փնտրելով (1.24) հավասարման ընդհանուր լուծումը

$$V(x, y, z, u) = 0 \tag{1.26}$$

անբացահայտ տեսքով, V ֆունկցիայի նկատմամբ կստացվի

$$x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} + z\frac{\partial V}{\partial z} + u\frac{\partial V}{\partial u} = 0 \tag{1.27}$$

հավասարումը: Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համապատասխան համակարգն է՝

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{u}, \tag{1.28}$$

որի երեք գծորեն անկախ ինտեգրալներն են (երբ $x \neq 0$)

$$\psi_1 = \frac{y}{x}, \qquad \psi_2 = \frac{z}{x}, \qquad \psi_3 = \frac{u}{x} : \tag{1.29}$$

(1.27) հավասարման ընդհանուր լուծումն է՝

$$V = F\Big(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{u}{x}\Big),$$

որտեղ F-ը կամայական դիֆերենցելի ֆունկցիա է: Համաձայն (1.26)-ի, (1.24) հավասարման ընդհանուր լուծումը անբացահայտ տեսքով կլինի՝

$$F\Big(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{u}{x}\Big) = 0,$$

իսկ բացահայտ տեսքով՝

$$u = xf\Big(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\Big), \tag{1.30}$$

որտեղ f-ը կամայական դիֆերենցելի ֆունկցիա է:

Այժմ գտնենք այն լուծումը, որը բավարարում է (1.25) պայմանին: Տեղադրենք (1.29) ինտեգրալներում $x=2$ և նշանակենք

$$\tilde{\psi}_1=\frac{y}{2},\qquad \tilde{\psi}_2=\frac{z}{2},\qquad \tilde{\psi}_3=\frac{u}{2},$$

որտեղից

$$y=2\tilde{\psi}_1,\quad z=2\tilde{\psi}_2,\quad u=2\tilde{\psi}_3: \tag{1.31}$$

Տեղադրենք (1.31)-ը (1.25)-ի մեջ և $\tilde{\psi}_1,\tilde{\psi}_2,\tilde{\psi}_3$ -ը փոխարինենք ψ_1,ψ_2,ψ_3 -ով, կստանանք

$$2\psi_3=\frac{1}{2}(2\psi_1+2\psi_2)$$

կամ

$$2\,\frac{u}{x}=\frac{1}{2}\Big(2\,\frac{y}{x}+2\,\frac{z}{x}\Big),$$

որտեղից՝ $u=\dfrac{y+z}{2}$:

Պատասխան՝ $F\Big(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x},\dfrac{u}{x}\Big)=0$ կամ $u=xf\Big(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\Big),\quad u=\dfrac{y+z}{2}$:

Խնդիրներ

Լուծել հավասարումը.

52. $(x^2+y^2)\,\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$:

53. $\dfrac{\partial u}{\partial x}-(y+2z)\,\dfrac{\partial u}{\partial y}+(3y+4z)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$:

54. $\dfrac{\partial z}{\partial x}+(2y-z)\,\dfrac{\partial z}{\partial y}=y+2z$:

55. $x\,\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\,\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$:

56. $\sin x\,\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sin y\,\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin z$:

57. $yz\,\dfrac{\partial z}{\partial x}+xz\,\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$:

58. $y\,\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$:

59. $\sqrt{x}\,\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{y}\,\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}$:

Լուծել հավասարումը և առանձնացնել այն լուծումը, որը բավարարում է նշված պայմանին.

60. $x\,\dfrac{\partial u}{\partial x}+yz\,\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\quad u=x^y,$ երբ $z=1$:

61. $(z-y)^2\,\dfrac{\partial u}{\partial x}+z\,\dfrac{\partial u}{\partial y}+y\,\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\quad u=2y(y-z),$ երբ $x=0$:

62. $(1+x^2)\,\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad z=y^2,$ երբ $x=0$:

63. $y\,\dfrac{\partial u}{\partial x}+z\,\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\quad u=\ln z-\dfrac{1}{y},$ երբ $x=1$:

64. $yz\,\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad z=x^2,$ երբ $y=1$:

65. $x\,\dfrac{\partial z}{\partial x}=z,\quad z=z(x,y),\quad z=y,$ երբ $x=1$:

66. $x\,\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\,\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\,\dfrac{\partial u}{\partial z}=u,\quad u=y+z,$ երբ $x=1$:

67. $x\,\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad z=-y,,$ երբ $x=1$:

68. $x\,\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\,\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z,\quad z=y,$ երբ $x=1$:

Գլուխ 2
Երկրորդ կարգի հավասարումների դասակարգումը և կանոնական տեսքը

§ 1. Երկու անկախ փոփոխականների դեպքը

Դիտարկենք

$$a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0, \tag{2.1}$$

հավասարումը, որտեղ $u(x,y)$ անհայտ ֆունկցիան է, $(x,y)\in\Omega\subseteq\mathrm{R}^2$: Դիցուք $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ գործակիցներն անընդհատ են և Ω -ի ոչ մի կետում միաժամանակ զրո չեն դառնում: Այդ հավասարումը դասակարգվում է ըստ

$$D(x,y)=(b(x,y))^2-a(x,y)\cdot c(x,y)$$

դիսկրիմինանտի նշանի: Այսպես, հավասարումը $(x,y)\in\Omega$ կետում կոչվում է

- հիպերբոլական տիպի, եթե $D(x,y)>0$,
- պարաբոլական տիպի, եթե $D(x,y)=0$,
- էլիպտական տիպի, եթե $D(x,y)<0$:

Եթե հավասարումը հիպերբոլական (պարաբոլական, էլիպտական) տիպի է $E\subseteq\Omega$ բազմության բոլոր կետերում, ապա այն կոչվում է հիպերբոլական (պարաբոլական, էլիպտական) տիպի E բազմությունում:

Կատարենք փոփոխականների փոխարինում: (x,y) փոփոխականների փոխարեն ներմուծենք նոր՝ (ξ,η) անկախ փոփոխականներ՝

$$\xi=\varphi(x,y), \qquad \eta=\psi(x,y)$$

բանաձևերով, որտեղ $\varphi,\psi\in C^2(\Omega)$, և

$$\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}=\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x\neq 0: \tag{2.2}$$

Ածանցյալները ձևափոխվում են

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x,$$
$$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y,$$

$$
\begin{aligned}
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}, \\
u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}, \\
u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}
\end{aligned}
$$

բանաձևերով։ Տեղադրելով (2.1) հավասարման մեջ, նոր փոփոխականներով հավասարումը կընդունի

$$A(\xi,\eta)u_{\xi\xi} + 2B(\xi,\eta)u_{\xi\eta} + C(\xi,\eta)u_{\eta\eta} + \tilde{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0 \tag{2.3}$$

տեսքը, որտեղ

$$
\begin{aligned}
A(\xi,\eta) &= a(x,y)\xi_x^2 + 2b(x,y)\xi_x\xi_y + c(x,y)\xi_y^2, \\
C(\xi,\eta) &= a(x,y)\eta_x^2 + 2b(x,y)\eta_x\eta_y + c(x,y)\eta_y^2, \\
B(\xi,\eta) &= a(x,y)\xi_x\eta_x + 2b(x,y)(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c(x,y)\xi_y\eta_y :
\end{aligned}
$$

Անմիջական տեղադրումով կարելի է ցույց տալ, որ

$$B^2 - AC = (b^2 - ac)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2,$$

իսկ դա նշանակում է, որ փոփոխականների փոխարինում կատարելիս հավասարման տիպը չի փոխվում (ինվարիանտ է ձևափոխության նկատմամբ)։

Կասենք, որ (2.3) հավասարումն ունի կանոնական տեսք, եթե այն ունի՝

- հիպերբոլական տիպի դեպքում

$$u_{\xi\eta} + \tilde{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0 \quad \text{կամ} \quad u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \tilde{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0$$

  տեսքը,

- պարաբոլական տիպի դեպքում

$$u_{\xi\xi} + \tilde{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0 \quad \text{կամ} \quad u_{\eta\eta} + \tilde{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0$$

  տեսքը,

- էլիպտական տիպի դեպքում

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \tilde{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0$$

  տեսքը։

Դիտարկենք

$$a(x,y)(dy)^2 - 2b(x,y)dxdy + c(x,y)(dx)^2 = 0 \tag{2.4}$$

սովորական դիֆերենցիալ հավասարումը, որը կոչվում է (2.1) հավասարման բնութագրիչների (կամ բնութագրիչ) հավասարում: (2.1) հավասարումը կանոնական տեսքի բերելու համար պետք է կազմել (2.4) բնութագրիչ հավասարումը, որը տրոհվում է երկու հավասարումների՝

$$y - \left(b + \sqrt{b^2 - ac}\right) dx = 0, \tag{2.5}$$

$$y - \left(b - \sqrt{b^2 - ac}\right) dx = 0 : \tag{2.6}$$

Այնուհետև պետք է գտնել սրանց ընդհանուր ինտեգրալները և ըստ դրա որոշել փոփոխականների այնպիսի փոխարինում, որով հավասարումը կբերվի կանոնական տեսքի: Քննարկենք դեպքերից յուրաքանչյուրն առանձին-առանձին:

ա) Հ ի պ ե ր բ ո լ ա կ ա ն տ ի պ ի հ ա վ ա ս ա ր ու մ ն ե ր՝ $b^2 - ac > 0$: Այս դեպքում (2.5) և (2.6) հավասարումների ընդհանուր ինտեգրալներն իրական են և միմյանցից տարբեր՝ $\varphi(x,y) = c$ և $\psi(x,y) = c$: Օգտագործելով այս ինտեգրալները, ներմուծենք նոր (ξ, η) փոփոխականներ $\xi = \varphi(x,y)$ և $\eta = \psi(x,y)$ բանաձևերով: Այդպես վարվելով կստանանք՝ $A(\xi,\eta) = 0$, $C(\xi,\eta) = 0$, և հավասարումը կբերվի կանոնական տեսքի՝

$$u_{\xi\eta} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 : \tag{2.7}$$

Եթե կատարենք փոփոխականների

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \qquad \beta = \frac{\xi - \eta}{2}$$

փոխարինում, ապա՝

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \quad u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \quad u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}),$$

և տեղադրելով (2.7)-ի մեջ՝ կստանանք

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \tilde{F}_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) = 0 :$$

Այն կոչվում է հիպերբոլական տիպի հավասարման երկրորդ կանոնական տեսք:

բ) Պ ա ր ա բ ո լ ա կ ա ն տ ի պ ի հ ա վ ա ս ա ր ու մ ն ե ր՝ $b^2 - ac = 0$: Այս դեպքում (2.5) և (2.6) հավասարումները համընկնում են, և կունենանք միայն մեկ ընդհանուր ինտեգրալ՝ $\varphi(x,y) = c$: Կատարենք

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y) \tag{2.8}$$

փոփոխականների փոխարինումը, որտեղ $\psi(x,y)$-ը երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի այնպիսի ֆունկցիա է, որ տեղի ունի (2.2) պայմանը (սովորաբար ընդունվում է $\psi(x,y)=x$, եթե $\varphi_y \neq 0$ կամ $\psi(x,y) = y$, եթե $\varphi_x \neq 0$)։ Այս դեպքում հավասարումը բերվում է

$$u_{\eta\eta}+\tilde{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=0$$

կանոնական տեսքի։

գ) Էլիպտական տիպի հավասարումներ՝ $b^2-ac<0$։
Այս դեպքում (2.5) և (2.6) հավասարումների ընդհանուր ինտեգրալները կոմպլեքս համալուծ են՝

$$\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=c,$$
$$\varphi(x,y)-i\psi(x,y)=c:$$

Եթե ընդհանուր ինտեգրալներից մեկի իրական մասը վերցնենք որպես ξ, իսկ կեղծ մասը որպես η՝

$$\xi=\varphi(x,y), \quad \eta=\psi(x,y),$$

ապա հավասարումը կբերվի

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\tilde{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=0$$

կանոնական տեսքի։

Այն դեպքում, երբ հավասարման գործակիցները հաստատուններ են, կանոնական տեսքի բերելուց հետո կարելի է կատարել հետագա պարզեցումներ։ Այսպես, եթե փնտրենք անհայտ ֆունկցիան

$$u(\xi,\eta)=e^{\lambda\xi+\mu\eta}w(\xi,\eta)$$

տեսքով, ապա նոր՝ $w(\xi,\eta)$ ֆունկցիայի նկատմամբ հավասարումը նորից կունենա կանոնական տեսք։ Բացի դրանից, համապատասխան ձևով ընտրելով λ և μ պարամետրերը, կարելի է հանգել հավասարման, որի մեջ բացակայեն առաջին կարգի ածանցյալները, եթե հավասարումն էլիպտական կամ հիպերբոլական տիպի է, կամ որոնելի ֆունկցիան ու առաջին կարգի ածանցյալներից որևէ մեկը, եթե հավասարումը պարաբոլական տիպի է։

Երբեմն կանոնական տեսքի բերելուց հետո հավասարումը հնարավոր է լինում տրոհել սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների։ Դա նշանակում է, որ բնութագրիչ կորերի վրա մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումը վեր է ածվում սովորական դիֆերենցիալ հավասարման։ Այդ սովորական դիֆերենցիալ հավասարման լուծումները գտնելուց հետո և վերադառնալով հին փոփոխականներին, կստանանք մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը: Ընդհանուր լուծումը գտնելու այդ ձևը կոչվում է բնութագրիչների մեթոդ:

Օրինակ 2.1: Բերել կանոնական տեսքի.

$$2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0:$$

Լուծում: $D=1/4>0$, հետևաբար հավասարումը հիպերբոլական տիպի է: Գտնենք $2(dy)^2-3dxdy+(dx)^2 = 0$ բնութագրիչ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալները՝

$$\left[\begin{array}{r} 2dy = dx, \\ dy = dx, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{r} 2y - x = c, \\ y - x = c: \end{array}\right.$$

Վերցնենք $\xi = 2y - x, \quad \eta = y - x$: Ունենք

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -u_\xi - u_\eta,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = 2u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{xx} = (-u_\xi - u_\eta)_x = -(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) - (u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = (-u_\xi - u_\eta)_y = -(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) - (u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = -2u_{\xi\xi} - 3u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = (2u_\xi + u_\eta)_y = 2(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + (u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = 4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}:$$

Տեղադրելով հավասարման մեջ՝

$$2(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) + 3(-2u_{\xi\xi} - 3u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta}) + 4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + \\ + 7(-u_\xi - u_\eta) + 4(2u_\xi + u_\eta) - 2u = 0,$$

և կատարելով նման անդամների միացում, կստանանք կանոնական տեսքը:

Պատասխան՝ $\quad u_{\xi\eta} - u_\xi + 3u_\eta + 2u = 0, \qquad \xi = 2y - x, \quad \eta = y - x:$

Օրինակ 2.2: Բերել կանոնական տեսքի.

$$9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 10u_x - 15u_y - 50u + x - 2y = 0:$$

Լուծում: $D = 9 - 9 = 0$: Հավասարումը պարաբոլական տիպի է: Բնութագրիչ $9(dy)^2 + 6dxdy + (dx)^2 = 0$ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալն է՝ $3y - x = c$: Վերցնենք՝

$$\begin{cases} \xi = 3y + x, \\ \eta = x : \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_x = 1, \ \xi_y = 3, \\ \eta_x = 1, \ \eta_y = 0 : \end{cases} \qquad J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 :$$

Ունենք

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = 3u_\xi,$$

$$u_{xx} = (u_\xi + u_\eta)_x = (u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) + (u_{\xi\eta}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = (3u_\xi)_x = 3(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) = 3u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\eta},$$

$$u_{yy} = (3u_\xi)_y = 3(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) = 9u_{\xi\xi} :$$

Տեղադրելով ստացված ածանցյալները հավասարման մեջ՝

$$9(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - 6(3u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\eta}) + 9u_{\xi\xi} + 10(u_\xi + u_\eta) - 15 \cdot 3u_\xi - 50u + x - 2y = 0,$$

և հաշվի առնելով, որ $x = \eta$, $y = (\xi - \eta)/3$, կստանանք կանոնական տեսքը:

Պատասխան՝ $u_{\eta\eta} - \dfrac{35}{9}u_\xi + \dfrac{10}{9}u_\eta - \dfrac{50}{9}u + \dfrac{5\eta - 2\xi}{27} = 0, \qquad \xi = 3y + x, \ \ \eta = x :$

Օրինակ 2.3: Բերել կանոնական տեսքի.

$$(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y - 2u = 0 :$$

Լուծում: Բնութագրիչ հավասարումն է՝ $(1 + x^2)(dy)^2 + (1 + y^2)(dx)^2 = 0$: Քանի որ

$$D = 0 - (1 + x^2)(1 + y^2) < 0,$$

ապա հավասարումն էլիպտական տիպի է $\mathbb{R}^2$-ում: Գտնենք բնութագրիչ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը: Ունենք

$$(1 + x^2)(dy)^2 = -(1 + y^2)(dx)^2$$

կամ

$$\frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \pm i \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} :$$

Ինտեգրենք աջ և ձախ մասերը՝

$$\ln(y + \sqrt{1 + y^2}) \pm i \cdot \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = c :$$

Կատարենք փոփոխականների փոխարինում՝

$$\begin{cases} \xi = \ln(y+\sqrt{1+y^2}), \\ \eta = \ln(x+\sqrt{1+x^2}), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_x = 0, & \xi_y = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \\ \eta_x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \eta_y = 0 : \end{cases}$$

Հաշվենք ածանցյալները.

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, u_\eta, \qquad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\, u_\xi,$$

$$u_{xx} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, u_\eta\right)_x = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' u_\eta + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(u_\eta)_x =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\, u_\eta + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) =$$

$$= \frac{1}{1+x^2}\, u_{\eta\eta} - \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\, u_\eta,$$

$$u_{yy} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\, u_\xi\right)_y = \frac{1}{1+y^2}\, u_{\xi\xi} - \frac{y}{\sqrt{(1+y^2)^3}}\, u_\xi :$$

Տեղադրենք հավասարման մեջ.

$$u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, u_\eta - \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\, u_\xi + x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, u_\eta + y\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\, u_\xi - 2u = 0 :$$

Պատասխան՝ $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-2u=0, \quad \xi = \ln(x+\sqrt{1+x^2}), \quad \eta = \ln(y+\sqrt{1+y^2})$:

Օրինակ 2.4: Բերել կանոնական տեսքի.

$$xu_{xx} + yu_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0 :$$

Լուծում: Բնութագրիչ հավասարումն է՝ $x(dy)^2 + y(dx)^2 = 0 :$ $D = -xy$:
ա) Պարաբոլական տիպի է, երբ $x = 0,\ y \neq 0,$ կանոնական տեսքը՝

$$u_{yy} + \frac{2}{y}(u_x + u_y) = 0,$$

և երբ $y=0,\ x\neq 0,$ կանոնական տեսքը՝

$$u_{xx}+\frac{2}{x}(u_x+u_y)=0:$$

բ) Հիպերբոլական տիպի է, երբ $x>0,\ y<0$ (IV քառորդ), և երբ $x<0,\ y>0$ (II քառորդ): Ստանանք կանոնական տեսքը, երբ $x>0,\ y<0$: Բնութագրիչ հավասարումից՝

$$\left[\begin{array}{l} xdy=-\sqrt{-xy}\ dx, \\ xdy=\ \ \sqrt{-xy}\ dx, \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{\sqrt{-y}}=\dfrac{-\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}}, \\ \dfrac{dy}{\sqrt{-y}}=\dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}}: \end{array}\right.$$

Ինտեգրենք՝

$$\left[\begin{array}{l} -2\sqrt{-y}=-2\sqrt{x}+c, \\ -2\sqrt{-y}=\ \ 2\sqrt{x}+c, \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \sqrt{-y}-\sqrt{x}=c, \\ \sqrt{-y}+\sqrt{x}=c: \end{array}\right.$$

Վերցնենք՝

$$\begin{cases} \xi=\sqrt{-y}-\sqrt{x}, \\ \eta=\sqrt{-y}+\sqrt{x}: \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=(\eta-\xi)^2, \\ y=-(\eta+\xi)^2: \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_x=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ \xi_y=-\dfrac{1}{2\sqrt{-y}}, \\ \eta_x=\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ \eta_y=-\dfrac{1}{2\sqrt{-y}}: \end{cases}$$

Ունենք

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=\frac{1}{2\sqrt{x}}(u_\eta-u_\xi),$$

$$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=-\frac{1}{2\sqrt{-y}}(u_\eta+u_\xi),$$

$$u_{xx}=\frac{1}{4x\sqrt{x}}(u_\xi-u_\eta)+\frac{1}{4x}(u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}),$$

$$u_{yy}=-\frac{1}{4y\sqrt{-y}}(u_\xi+u_\eta)-\frac{1}{4y}(u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}):$$

Տեղադրենք սրանք հավասարման մեջ.

$$\frac{1}{4\sqrt{x}}(u_\xi-u_\eta)+\frac{1}{4}(u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta})-\frac{1}{4\sqrt{-y}}(u_\xi+u_\eta)-\frac{1}{4}(u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta})+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{x}}(u_\eta-u_\xi)-\frac{1}{\sqrt{-y}}(u_\eta+u_\xi)=0:$$

Պարզեցնելով, կստանանք կանոնական տեսքը՝

$$u_{\xi\eta}+\frac{3}{\xi^2-\eta^2}\left(\eta u_\xi-\xi u_\eta\right)=0:$$

$x<0,\ y>0$ դեպքում ստացվում է նույն կանոնական տեսքը, եթե կատարենք

$$\begin{cases}\xi=\sqrt{y}-\sqrt{-x},\\ \eta=\sqrt{y}+\sqrt{-x}:\end{cases}$$

փոփոխականների փոխարինումը:

գ) Էլիպտական տիպի է, երբ $x>0,\ y>0$ (I քառորդ), և երբ $x<0,\ y<0$ (III քառորդ): Ստանանք կանոնական տեսքը, երբ $x>0,\ y>0$: Բնութագրիչ հավասարումն է՝

$$\sqrt{x}\,dy=\ \pm i\ \sqrt{y}\,dx\Rightarrow\frac{dy}{\sqrt{y}}\ =\ \pm i\ \frac{dx}{\sqrt{x}}:$$

Ինտեգրենք՝

$$2\sqrt{y}=\pm 2i\sqrt{x}+c\Rightarrow\sqrt{y}\pm i\sqrt{x}=c:$$

Կատարելով

$$\begin{cases}\xi=\sqrt{y},\\ \eta=\sqrt{x}:\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\xi^2,\\ x=\eta^2\end{cases}$$

փոփոխականների փոխարինում, ստանում ենք հետևյալ կանոնական տեսքը՝

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+3\left(\frac{1}{\xi}u_\xi+\frac{1}{\eta}u_\eta\right)=0:$$

$x<0,\ y<0$ դեպքում ստացվում է նույն կանոնական տեսքը, եթե կատարենք

$$\begin{cases}\xi=\sqrt{-y},\\ \eta=\sqrt{-x}:\end{cases}$$

փոփոխականների փոխարինումը:

Պատասխան՝

Պարաբոլական, երբ $x=0,\ y\neq 0$, $u_{yy}+\dfrac{2}{y}(u_x+u_y)=0$, և երբ $x\neq 0,\ y=0$,

$$u_{xx}+\frac{2}{x}(u_x+u_y)=0:$$

Հիպերբոլական II, IV քառորդներում (երբ $xy<0$),

$$u_{\xi\eta}+\frac{3}{\xi^2-\eta^2}(\eta u_\xi-\xi u_\eta)=0,$$

$$\text{II քառորդում՝ } \xi=\sqrt{y}-\sqrt{-x}, \quad \eta=\sqrt{y}+\sqrt{-x},$$

$$\text{II քառորդում՝ } \xi=\sqrt{y}-\sqrt{-x}, \quad \eta=\sqrt{y}+\sqrt{-x},$$

Էլիպտական I, III քառորդներում (երբ $xy>0$),

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+3\left(\frac{1}{\xi}u_\xi+\frac{1}{\eta}u_\eta\right)=0,$$

$$\text{I քառորդում՝ } \xi=\sqrt{y}, \ \eta=\sqrt{x},$$

$$\text{III քառորդում՝ } \xi=\sqrt{-y}, \ \eta=\sqrt{-x}:$$

Օրինակ 2.5: Բերել կանոնական տեսքի և կատարել հետագա պարզեցումներ.

$$2u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+4u_x+4u_y+u=0:$$

Լուծում: $D=-1<0$, հետևաբար հավասարումն էլիպտական տիպի է: Բնութագրիչ հավասարումն է՝

$$2(dy)^2-2dxdy+(dx)^2=0 \quad \text{կամ} \quad 2dy=(1\pm i)\,dx,$$

որի ինտեգրալն է՝ $2y-x\pm ix=c$: Համապատասխան փոփոխականների փոխարինումը կլինի

$$\begin{cases}\xi=2y-x, \\ \eta=x:\end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases}\xi_x=-1, \quad \xi_y=2, \\ \eta_x=1, \quad \eta_y=0:\end{cases}$$

Ածանցյալները կձևափոխվեն

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=-u_\xi+u_\eta, \qquad u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=2u_\xi,$$

$$u_{xx}=(-u_\xi+u_\eta)_x=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}, \quad u_{xy}=(-u_\xi+u_\eta)_y=-2u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta},$$

$$u_{yy}=(2u_\xi)_y=4u_{\xi\xi}$$

բանաձևերով: Տեղադրելով հավասարման մեջ՝

$$2(u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta})+2(-2u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta})+4u_{\xi\xi}+4(-u_\xi+u_\eta)+4\cdot 2u_\xi+u=0,$$

կստանանք կանոնական տեսքը`

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_\xi + 2u_\eta + \frac{1}{2}\,u = 0 : \tag{2.9}$$

Հետագա պարզեցումների համար կատարենք որոնելի ֆունկցիայի

$$u(\xi,\eta) = e^{\lambda\xi+\mu\eta} w(\xi,\eta)$$

փոխարինումը: Այդ դեպքում

$$u_\xi = (\lambda w + w_\xi) e^{\lambda\xi+\mu\eta}, \quad u_\eta = (\mu w + w_\eta) e^{\lambda\xi+\mu\eta},$$

$$u_{\xi\xi} = (\lambda^2 w + 2\lambda w_\xi + w_{\xi\xi}) e^{\lambda\xi+\mu\eta}, \quad u_{\eta\eta} = (\mu^2 w + 2\mu w_\eta + w_{\eta\eta}) e^{\lambda\xi+\mu\eta} :$$

Տեղադրելով (2.9) կանոնական տեսքի մեջ` կստանանք

$$(\lambda^2 w + 2\lambda w_\xi + w_{\xi\xi}) e^{\lambda\xi+\mu\eta} + (\mu^2 w + 2\mu w_\eta + w_{\eta\eta}) e^{\lambda\xi+\mu\eta} + 2(\lambda w + w_\xi) e^{\lambda\xi+\mu\eta} +$$
$$+ 2(\mu w + w_\eta) e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \frac{1}{2} e^{\lambda\xi+\mu\eta} w(\xi,\eta) = 0 :$$

Բաժանենք աջ և ձախ մասերը $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$-ի և խմբավորենք`

$$w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + 2(\lambda+1) w_\xi + 2(\mu+1) w_\eta + (\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda + 2\mu + 1/2) w = 0 :$$

Ընտրենք λ և μ պարամետրերն այնպես, որ w_η-ի և w_ξ-ի գործակիցները դառնան զրո`

$$\begin{cases} 2(\lambda+1) = 0, \\ 2(\mu+1) = 0 : \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1, \\ \mu = -1 : \end{cases}$$

Տեղադրելով, կստանանք այն կանոնական տեսքը, որը չի պարունակում առաջին կարգի ածանցյալներ:

Պատասխան` $w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} - \dfrac{3}{2}\,w = 0, \quad u(\xi,\eta) = w(\xi,\eta) e^{-\xi-\eta}, \quad \xi = 2y - x, \ \ \eta = x :$

Օրինակ 2.6: Բերել կանոնական տեսքի և կատարել հետագա պարզեցումներ.

$$u_{xy} + u_{xx} - u_y - 10u + 4x = 0 :$$

Լուծում: $D = 1/4 > 0$, հետևաբար հավասարումը հիպերբոլական տիպի է: Բնութագրիչ հավասարումն է`

$$-dxdy + (dy)^2 = 0 \quad \text{կամ} \quad dy(dy - dx) = 0,$$

որտեղից

$$\left[\begin{array}{c} dy = 0, \\ dy - dx = 0 : \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{c} y = c, \\ y - x = c : \end{array}\right.$$

Վերցնենք՝

$$\begin{cases} \xi = y, \\ \eta = y - x : \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_x = 0, \quad \xi_y = 1, \\ \eta_x = -1, \quad \eta_y = 1 : \end{cases}$$

Կունենանք

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -u_\eta, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{xx} = (-u_\eta)_x = u_{\eta\eta}, \quad u_{xy} = (-u_\eta)_y = -u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta} :$$

Տեղադրելով հավասարման մեջ և հաշվի առնելով, որ $x = \xi - \eta$, կստանանք կանոնական տեսքը՝

$$u_{\xi\eta} + u_\xi + u_\eta + 10u - 4(\xi - \eta) = 0 : \tag{2.10}$$

Հետագա պարզեցումների համար կատարենք $u(\xi,\eta) = e^{\lambda\xi+\mu\eta}w(\xi,\eta)$ փոխարինումը: Հաշվենք ածանցյալները.

$$u_\xi = (\lambda w + w_\xi)e^{\lambda\xi+\mu\eta}, \quad u_\eta = (\mu w + w_\eta)e^{\lambda\xi+\mu\eta},$$

$$u_{\xi\eta} = (w_{\xi\eta} + \lambda w_\eta + \mu w_\xi + \mu\lambda w)e^{\lambda\xi+\mu\eta} :$$

Տեղադրենք (2.10) կանոնական տեսքի մեջ, բաժանենք $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$-ի և խմբավորենք՝

$$w_{\xi\eta} + (\mu + 1)w_\xi + (\lambda + 1)w_\eta + (\mu\lambda + \lambda + \mu + 10)w - 4(\xi - \eta)e^{-(\lambda\xi+\mu\eta)} = 0 :$$

Եթե վերցնենք

$$\begin{cases} \lambda + 1 = 0, \\ \mu + 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1, \\ \mu = -1, \end{cases}$$

կստանանք այն կանոնական տեսքը, որը չի պարունակում առաջին կարգի ածանցյալներ:

Պատասխան՝

$$w_{\xi\eta} + 9w + 4(\eta - \xi)e^{\xi+\eta} = 0, \quad u(\xi,\eta) = w(\xi,\eta)e^{-\xi-\eta}, \quad \xi = y, \quad \eta = y - x :$$

Օրինակ 2.7: Բերել կանոնական տեսքի և կատարել հետագա պարզեցումներ.

$$u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}-3u_x+12u_y+27u=0:$$

Լուծում: $D=0$, հավասարումը պարաբոլական տիպի է: Բնութագրիչ հավասարումն է՝ $(dy)^2+2dxdy+(dx)^2=0$ կամ $(dy+dx)^2=0$: Ընդհանուր ինտեգրալն է՝ $y+x=c$:

Վերցնենք՝

$$\begin{cases}\xi=y+x,\\ \eta=x,\end{cases}\qquad \begin{cases}\xi_x=1, & \xi_y=1,\\ \eta_x=1, & \eta_y=0:\end{cases}$$

Հաշվենք ածանցյալները.

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=u_\xi+u_\eta,\qquad u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=u_\xi,$$

$$u_{xx}=(u_\xi+u_\eta)_x=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta},\quad u_{xy}=(u_\xi)_x=u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta},\quad u_{yy}=(u_\xi)_y=u_{\xi\xi}:$$

Տեղադրելով հավասարման մեջ և կատարելով խմբավորում, կստանանք կանոնական տեսքը՝

$$u_{\eta\eta}+9u_\xi-3u_\eta+27u=0: \tag{2.11}$$

Հետագա պարզեցումների համար կատարենք $u(\xi,\eta)=e^{\lambda\xi+\mu\eta}\ w(\xi,\eta)$ փոխարինումը: Կունենանք

$$u_\xi=(\lambda w+w_\xi)e^{\lambda\xi+\mu\eta},\quad u_\eta=(\mu w+w_\eta)e^{\lambda\xi+\mu\eta},\quad u_{\eta\eta}=(\mu^2w+2\mu w_\eta+w_{\eta\eta})e^{\lambda\xi+\mu\eta}:$$

Տեղադրենք (2.11) կանոնական տեսքի մեջ, բաժանենք $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$-ի և կատարենք խմբավորում՝

$$w_{\eta\eta}+(2\mu-3)w_\eta+9w_\xi+(9\lambda-3\mu+\mu^2+27)w=0:$$

Եթե վերցնենք

$$\begin{cases}2\mu-3=0,\\ 9\lambda-3\mu+\mu^2+27=0,\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-\dfrac{11}{4},\\ \mu=\dfrac{3}{2},\end{cases}$$

կստանանք այն կանոնական տեսքը, որը չի պարունակում որոնելի ֆունկցիան և ըստ η-ի առաջին կարգի ածանցյալը:

Պատասխան՝ $w_{\eta\eta}+9w_\xi=0,\quad u(\xi,\eta)=w(\xi,\eta)\,e^{(6\eta-11\xi)/4},\quad \xi=y+x,\ \ \eta=x:$

Օրինակ 2.8: Գտնել ընդհանուր լուծումը.

$$3u_{xx} - 10u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 4u_y + \frac{5}{16}u = 0 :$$

Լուծում: $D = 25 - 9 = 16 > 0$, հավասարումը հիպերբոլական տիպի է: Բերենք կանոնական տեսքի: Բնութագրիչ հավասարումն է`

$$3(dy)^2 + 10dxdy + 3(dx)^2 = 0,$$

որտեղից

$$\left[\begin{array}{l} dy = -3dx, \\ 3dy = -dx : \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y + 3x = c, \\ 3y + x = c : \end{array}\right.$$

Վերցնենք`

$$\begin{cases} \xi = y + 3x, \\ \eta = 3y + x : \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_x = 3, \quad \xi_y = 1, \\ \eta_x = 1, \quad \eta_y = 3 : \end{cases}$$

Ածանցյալները կձևափոխվեն

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = 3u_\xi + u_\eta, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + 3u_\eta,$$

$$u_{xx} = (3u_\xi + u_\eta)_x = 9u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = (3u_\xi + u_\eta)_y = 3u_{\xi\xi} + 10u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = (u_\xi + 3u_\eta)_y = u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta} :$$

բանաձևերով: Տեղադրելով հավասարման մեջ`

$$3(9u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - 10(3u_{\xi\xi} + 10u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta}) + 3(u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + \\ + 9u_{\eta\eta}) - 2(3u_\xi + u_\eta) + 4(u_\xi + 3u_\eta) + \frac{5}{16}u = 0,$$

կստանանք կանոնական տեսքը`

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{32}u_\xi - \frac{5}{32}u_\eta - \frac{5}{1024}u = 0 : \tag{2.12}$$

Կատարենք հետագա պարզեցումներ`

$$u(\xi, \eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta} w(\xi, \eta) : \tag{2.13}$$

Հաշվենք ածանցյալները`

$$u_\xi = (\lambda w + w_\xi)e^{\lambda\xi+\mu\eta}, \qquad u_\eta = (\mu w + w_\eta)e^{\lambda\xi+\mu\eta},$$

$$u_{\xi\eta} = (w_{\xi\eta} + \lambda w_\eta + \mu w_\xi + \mu\lambda w)e^{\lambda\xi+\mu\eta} \,:$$

Տեղադրենք (2.12) կանոնական տեսքի մեջ և բաժանենք $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$-ի: Կատարելով խմբավորում՝ կունենանք

$$w_{\xi\eta} + \left(\mu + \frac{1}{32}\right)w_\xi + \left(\lambda - \frac{5}{32}\right)w_\eta + \left(\mu\lambda + \frac{\lambda}{32} - \frac{5\mu}{32} - \frac{5}{1024}\right)w = 0 \,:$$

Վերցնելով

$$\begin{cases} \mu = -\dfrac{1}{32}, \\ \lambda = \dfrac{5}{32}, \end{cases}$$

կստանանք՝ $w_{\xi\eta} = 0\,:$ Ստացված հավասարման ընդհանուր լուծումն է՝

$$w(\xi, \eta) = g(\xi) + f(\eta),$$

որտեղ f-ն և g-ն կամայական դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են:

(2.13)-ից՝

$$u(\xi, \eta) = e^{(5\xi-\eta)/32}\big(g(\xi) + f(\eta)\big) \,:$$

Տեղադրելով $\xi = y + 3x,\ \eta = 3y + x,$ կստանանք ընդհանուր լուծումը:

Պատասխան՝ $u(x, y) = (f(x + 3y) + g(3x + y))e^{(7x+y)/16}\,:$

Օրինակ 2.9: Գտնել ընդհանուր լուծումը.

$$e^{-2x}u_{xx} - e^{-2y}u_{yy} - e^{-2x}u_x + e^{-2y}u_y + 8e^y = 0 \,:$$

Լուծում: $D = e^{-2x}e^{-2y} > 0$, հավասարումը հիպերբոլական տիպի է: Բերենք կանոնական տեսքի: Բնութագրիչ հավասարումն է՝

$$e^{-2x}(dy)^2 - e^{-2y}(dx)^2 = 0,$$

որտեղից

$$\left[\begin{array}{l} e^{-x}dy - e^{-y}dx = 0, \\ e^{-x}dy + e^{-y}dx = 0 \,: \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} e^x - e^y = c, \\ e^x + e^y = c \,: \end{array}\right.$$

Կատարենք փոփոխականների փոխարինում.

$$\begin{cases} \xi = e^x + e^y, \\ \eta = e^x - e^y \,: \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_x = e^x, \quad \xi_y = e^y, \\ \eta_x = e^x, \quad \eta_y = -e^y \,: \end{cases}$$

Հաշվենք ածանցյալները.

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = (u_\xi + u_\eta)e^x,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = (u_\xi - u_\eta)e^y,$$

$$u_{xx} = ((u_\xi + u_\eta)e^x)_x = (u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})e^{2x} + (u_\xi + u_\eta)e^x,$$

$$u_{yy} = ((u_\xi - u_\eta)e^y)_y = (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})e^{2x} + (u_\xi - u_\eta)e^x \, :$$

Տեղադրենք հավասարման մեջ՝

$$e^{-2x}((u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})e^{2x} + (u_\xi + u_\eta)e^x) - e^{-2y}((u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})e^{2x}+ \\ + (u_\xi - u_\eta)e^x) - e^{-2x}(u_\xi + u_\eta)e^x + e^{-2y}(u_\xi - u_\eta)e^y + 8e^y = 0,$$

որտեղից՝

$$4u_{\xi\eta} + 8e^y = 0 \, :$$

Հաշվի առնելով, որ $e^y = (\xi - \eta)/2$, կստանանք՝

$$u_{\xi\eta} = \eta - \xi \, :$$

Ինտեգրենք աջ և ձախ մասերը նախ ըստ η-ի՝

$$u_\xi = \frac{\eta^2}{2} - \xi\eta + f_1(\xi),$$

այնուհետև ըստ ξ-ի՝

$$u(\xi,\eta) = \frac{\eta^2\xi}{2} - \frac{\eta\xi^2}{2} + \int f_1(\xi)d\xi + g(\eta) = \xi\eta \cdot \frac{\eta - \xi}{2} + f(\xi) + g(\eta) \, :$$

Այստեղ f-ը և g-ն կամայական դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են։ Անցնելով (x,y) փոփոխականների՝ կստանանք ընդհանուր լուծումը։

Պատասխան՝ $u(x,y) = (e^{2y} - e^{2x})e^y + f(e^x + e^y) + g(e^x - e^{-y}) \, :$

Օրինակ 2.10: Գտնել ընդհանուր լուծումը.

$$y^2\, u_{xx} - 2xy\, u_{xy} + x^2\, u_{yy} - x\, u_x - y\, u_y = 0, \qquad (x \neq 0, \quad y \neq 0) \, :$$

Լուծում: Հավասարումը պարաբոլական տիպի է։ Բնութագրիչ հավասարումն է՝

$$y^2(dy)^2 + 2xydxdy + x^2(dx)^2 = 0 \quad \text{կամ} \quad ydy + xdx = 0 \, :$$

Ընդհանուր ինտեգրալն է՝

$$x^2 + y^2 = c\,:$$

Կատարելով

$$\xi = x^2 + y^2, \qquad \eta = x$$

փոփոխականների փոխարինումը, կստանանք կանոնական տեսքը՝

$$u_{\eta\eta} - \frac{\eta}{\xi - \eta^2}\, u_\eta = 0\,:$$

Լուծենք ստացված հավասարումը՝ համարելով ξ-ն պարամետր.

$$\frac{du_\eta}{u_\eta} = \frac{\eta d\eta}{\xi - \eta^2} \quad\Rightarrow\quad \ln|u_\eta| = -\frac{1}{2}\ln|\xi - \eta^2| + \ln|f(\xi)| \quad\Rightarrow\quad u_\eta = \frac{f(\xi)}{\sqrt{\xi - \eta^2}},$$

որտեղից՝

$$u(\xi, \eta) = f(\xi)\arcsin\frac{\eta}{\sqrt{\xi}} + g(\xi)\,:$$

Անցնելով (x, y) փոփոխականների՝ կստանանք

$$u(x, y) = f(x^2 + y^2)\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + g(x^2 + y^2)\,:$$

Պատասխան՝ $u(x, y) = f(x^2 + y^2)\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + g(x^2 + y^2)$:

Օրինակ 2.11: Գտնել ընդհանուր լուծումը.

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2y u_y = 0, \quad x \neq 0,\ y \neq 0\,:$$

Լուծում: Քանի որ $D = x^2y^2 > 0$, ապա հավասարումը հիպերբոլական տիպի է: Բնութագրիչ հավասարումն է՝ $x^2(dy)^2 - y^2(dx)^2 = 0$ կամ $xdy = \pm ydx$: Ընդհանուր ինտեգրալներն են՝

$$xy = c, \qquad y/x = c\,:$$

Կատարելով $\xi = xy$, $\eta = y/x$ փոփոխականների փոխարինումը՝ կստանանք

$$2\eta u_{\xi\eta} + u_\xi = 0$$

կանոնական տեսքը: Ներմուծելով նոր՝ $v = u_\xi$ ֆունկցիա, կստանանք

(ξ -ն համարելով պարամետր)

$$\frac{dv}{d\eta} = -\frac{v}{2\eta}$$

անջատվող փոփոխականներով սովորական դիֆերենցիալ հավասարումը, որի ընդհանուր լուծումն է՝

$$v(\xi,\eta) = \frac{f_1(\xi)}{\sqrt{|\eta|}} :$$

Այստեղ $f_1(\xi)$ -ն կամայական ֆունկցիա է: Այսպիսով՝

$$u_\xi = \frac{f_1(\xi)}{\sqrt{|\eta|}} :$$

Ինտեգրելով վերջին հավասարումն ըստ ξ -ի՝

$$u(\xi,\eta) = \frac{f(\xi)}{\sqrt{|\eta|}} + g(\eta),$$

և անցնելով (x,y) փոփոխականների, կստանանք ընդհանուր լուծումը:

Պատասխան՝ $\quad u(x,y) = \sqrt{|x/y|}\, f(xy) + g\,(y/x)$:

Օրինակ 2.12: Գտնել ընդհանուր լուծումը.

$$u_{xy} + xu_x - u + \cos y = 0 :$$

Լուծում: Աջ և ձախ մասերը ածանցնենք ըստ x -ի՝

$$u_{xxy} + xu_{xx} + u_x - u_x = 0 \quad \text{կամ} \quad u_{xxy} + xu_{xx} = 0 :$$

Նշանակելով

$$u_{xx} = v, \tag{2.14}$$

v ֆունկցիայի որոշման համար կստացվի

$$v_y + xv = 0$$

հավասարումը: Լուծենք այն՝ համարելով x -ը պարամետր.

$$\frac{v_y}{v} = -x \;\Rightarrow\; \ln|v| = -xy + f_1(x) \;\Rightarrow\; v = f(x)e^{-xy}, \qquad \left(f(x) = \pm e^{f_1(x)}\right) :$$

Տեղադրելով ստացված v ֆունկցիան (2.14)-ի մեջ, u ֆունկցիայի որոշման համար կստանանք $u_{xx} = f(x)e^{-xy}$, հավասարումը: Այստեղից՝

$$u_x = \int\limits_0^x f(\xi)e^{-\xi y}d\xi + g(y) : \tag{2.15}$$

և

$$u = \int\limits_0^x \int\limits_0^\eta f(\xi)e^{-\xi y}d\xi d\eta + xg(y) + h(y) : \tag{2.16}$$

Ածանցենք (2.15)-ը ըստ y-ի՝

$$u_{xy} = -\int\limits_0^x \xi f(\xi)e^{-\xi y}d\xi + g'(y) : \tag{2.17}$$

Տեղադրենք հավասարման մեջ՝

$$-\int\limits_0^x \xi f(\xi)e^{-\xi y}d\xi + g'(y) + x\left(\int\limits_0^x f(\xi)e^{-\xi y}d\xi + g(y)\right) - \\ - \int\limits_0^x \int\limits_0^\eta f(\xi)e^{-\xi y}d\xi d\eta - xg(y) - h(y) + \cos y = 0,$$

որտեղից

$$h(y) = -\int\limits_0^x \xi f(\xi)e^{-\xi y}d\xi + g'(y) + x\left(\int\limits_0^x f(\xi)e^{-\xi y}d\xi + g(y)\right) - \\ - \int\limits_0^x \int\limits_0^\eta f(\xi)e^{-\xi y}d\xi d\eta - xg(y) + \cos y :$$

Ստացված $h(y)$ ֆունկցիան տեղադրելով (2.16)-ի մեջ՝ կունենանք

$$u(x,y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^\eta f(\xi)e^{-\xi y}d\xi d\eta + xg(y) - \int\limits_0^x \xi f(\xi)e^{-\xi y}d\xi + g'(y) + \\ + x\int\limits_0^x f(\xi)e^{-\xi y}d\xi + xg(y) - \int\limits_0^x \int\limits_0^\eta f(\xi)e^{-\xi y}d\xi d\eta - xg(y) + \cos y$$

կամ

$$u(x,y) = xg(y) + g'(y) + \cos y + \int\limits_0^x (x-\xi)f(\xi)e^{-\xi y}d\xi : \tag{2.18}$$

Դիտողություն: Ընդհանուր լուծումը կարելի է ստանալ նաև հետևյալ կերպ: Հավասարումից ունենք $u = u_{xy} + xu_x + \cos y$: Տեղադրելով ձախ մասում (2.15)-ից՝ u_x-ը, իսկ (2.17)-ից՝ u_{xy}-ը, կստանանք (2.18) ընդհանուր լուծումը:

Պատասխան` $u(x,y) = xg(y) + g'(y) + \cos y + \int\limits_0^x (x-\xi)f(\xi)e^{-\xi y}d\xi$:

Օրինակ 2.13: Գտնել ընդհանուր լուծումը.

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_x + u) + 2x^2y(u_x + u) = 0 :$$

Լուծում: Նշանակելով

$$u_x + u = v, \tag{2.19}$$

հավասարումը կգրվի

$$v_y + 2x^2yv = 0$$

տեսքով, որը, եթե համարենք x-ը պարամետր, անջատվող փոփոխականներով սովորական դիֆերենցիալ հավասարում է: Լուծելով այն` կստանանք

$$v = \psi(x)e^{-x^2y^2} \qquad (\psi\text{-ն կամայական ֆունկցիա է}) :$$

(2.19)-ից`

$$u_x + u = \psi(x)e^{-x^2y^2}, \tag{2.20}$$

որը, եթե համարենք y-ը պարամետր, գծային սովորական դիֆերենցիալ հավասարում է: Լուծենք այն հաստատունի վարիացիայի եղանակով: Համասեռ` $u_x + u = 0$ հավասարման ընդհանուր լուծումն է`

$$u_0(x,y) = g(y)e^{-x} :$$

Անհամասեռ հավասարման լուծումը փնտրենք

$$u(x,y) = g(x,y)e^{-x} \tag{2.21}$$

տեսքով: Տեղադրելով (2.20)-ի մեջ` ստանում ենք

$$g_xe^{-x} - ge^{-x} + ge^{-x} = \psi(x)e^{-x^2y^2}$$

կամ

$$g_x = \psi(x)e^{x-x^2y^2},$$

որտեղից

$$g(x,y) = \int\limits_0^x \psi(\xi)e^{\xi-\xi^2y^2}d\xi + \varphi(y) \qquad (\varphi\text{-ն կամայական ֆունկցիա է}) :$$

Տեղադրելով (2.21)-ի մեջ՝ կստանանք ընդհանուր լուծումը:

Պատասխան՝ $u(x,y)=e^{-x}\left(\int\limits_0^x \psi(\xi)e^{\xi-\xi^2y^2}d\xi+\varphi(y)\right):$

Օրինակ 2.14: Գտնել ընդհանուր լուծումը.

$$u_{xy}+xu_x+2yu_y+2xyu=0:$$

Լուծում: Հավասարումը գրենք

$$(u_y+xu)_x-u+2y(u_y+xu)=0$$

տեսքով, որը համարժեք է

$$\begin{cases} u=v_x+2yv, \\ v=u_y+xu \end{cases} \tag{2.22}$$

համակարգին: Արտաքսելով u-ն՝ կստանանք $v=(v_x+2yv)_y+x(v_x+2yv)$, որը կարելի է գրել $(v_y+xv)_x+2y(v_y+xv)=0$ տեսքով: Նշանակելով

$$w=v_y+xv, \tag{2.23}$$

կստանանք $w_x-2yw=0$, որը, եթե համարենք x-ը պարամետր, անջատվող փոփոխականներով սովորական դիֆերենցիալ հավասարում է: Այդ հավասարման լուծումն է՝ $w(x,y)=g(y)e^{-2xy}$: Տեղադրելով (2.23)-ի մեջ՝ v-ի նկատմամբ կստանանք

$$v_y+xv=g(y)e^{-2xy}$$

առաջին կարգի գծային հավասարումը, որի լուծումն է՝

$$v(x,y)=e^{-xy}\left(f(x)+\int\limits_0^y g(\eta)e^{-x\eta}d\eta\right):$$

(2.22)-ի առաջին հավասարումից՝

$$u=v_x+2yv=e^{-xy}\left(-yf(x)-y\int\limits_0^y g(\eta)e^{-x\eta}d\eta+f'(x)-\int\limits_0^y \eta g(\eta)e^{-x\eta}d\eta+\right.$$
$$\left.+2yf(x)+2y\int\limits_0^y g(\eta)e^{-x\eta}d\eta\right)=e^{-xy}\left(yf(x)+f'(x)+\int\limits_0^y (y-\eta)g(\eta)e^{-x\eta}d\eta\right):$$

Պատասխան՝ $u(x,y)=e^{-xy}\left(yf(x)+f'(x)+\int\limits_0^y (y-\eta)g(\eta)e^{-x\eta}d\eta\right):$

Խնդիրներ

Պարզել հավասարման տիպը.

69. $u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y+2u-x^2y=0:$

70. $2u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+2u_x+2u_y-u=0:$

71. $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y+3u-xy^2=0:$

72. $xu_{xx}+yu_{yy}-u=0:$

73. $u_{xx}-u_{xy}+(4+x^2y^2)u_{yy}+6u_y=x+y:$

74. $x^2y^2u_{xx}+2xyu_{xy}+u_{yy}=u^2-5u_y:$

75. $u_{xx}-2\cos xu_{xy}-\sin^2 xu_{yy}+6u_x=e^{x+y}:$

76. $yu_{xx}+u_{yy}=f(x)$ (Տրիկոմիի հավասարում) :

77. $xu_{xx}+2xu_{xy}+(x+1)u_{yy}=0:$

78. $(x^2+y^2-25)u_{xx}+u_{yy}+xu_x=0:$

79. $(y^2-x)u_{xx}+u_{yy}+7u_x+u_y=0:$

80. $(x^2+4y^2-49)u_{xx}+9u_{yy}+xu_x+u_y=0:$

81. $(\sqrt{x^2+y^2}-6)u_{xx}+(\sqrt{x^2+y^2}+6)u_{yy}+u_x+u_y=0:$

82. $u_{xx}+(y-x^2)u_{yy}+2u_x+yu_y=0:$

83. $(\sqrt{x^2+49y^2}-8)u_{xx}+(\sqrt{x^2+49y^2}+8)u_{yy}+u_x=0:$

84. $u_{xx}+(x^2+y^2-36)u_{yy}+yu_y=0:$

85. $(y+3)u_{xx}-2xu_{xy}-(y-3)u_{yy}+u_y^2+u_x^2=u^2:$

Բերել կանոնական տեսքի բոլոր այն տիրույթներում, որտեղ հավասարումը պահպանում է իր տիպը.

86. $u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}-32u=0:$

87. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+9u_x+9u_y-9u=0:$

88. $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0$:

89. $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y = 0$:

90. $u_{xx} + 4u_{xy} + 10u_{yy} - 24u_x + 42u_y + 2(x + y) = 0$:

91. $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x + 24u_y - 9u + 9(x + y) = 0$:

92. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$:

93. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$:

94. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + cu = 0$:

95. $(1 + x^2)^2\ u_{xx} + u_{yy} + 2x(1 + x^2)\ u_x = 0$:

96. $y^2\ u_{xx} + 2xy\ u_{xy} + x^2\ u_{yy} = 0$:

97. $u_{xx} - (1 + y^2)^2\ u_{yy} - 2y(1 + y^2)\ u_y = 0$:

98. $x^2\ u_{xx} + 2xy\ u_{xy} + y^2\ u_{yy} - 2y\ u_x + y\ e^{x/y} = 0$:

99. $xy^2\ u_{xx} - 2x^2y\ u_{xy} + x^3\ u_{yy} - y^2\ u_x = 0$:

100. $y^2\ u_{xx} + 2xy\ u_{xy} + 2x^2\ u_{yy} + y\ u_y = 0$:

101. $x^2\ u_{xx} + 2xy\ u_{xy} - 3y^2\ u_{yy} - 2x\ u_x + 4y\ u_y + 16x^4\ u = 0$:

102. $u_{xx} - 2\sin x\ u_{xy} - \cos^2 x\ u_{yy} - \cos x\ u_y = 0$:

103. $e^{2x}\ u_{xx} + 2e^{x+y}\ u_{xy} + e^{2y}\ u_{yy} - xu = 0$:

104. $4y^2\ u_{xx} - e^{2x}\ u_{yy} = 0$:

105. $u_{xx} - 2x\ u_{xy} = 0$:

106. $x\ u_{xx} + 2x\ u_{xy} + (x - 1)\ u_{yy} = 0$:

107. $y\ u_{xx} + u_{yy} = 0$:

108. $u_{xx} - x\ u_{yy} = 0$:

109. $x\ u_{xx} - y\ u_{yy} = 0$:

110. $u_{xx} + 2\sin x\ u_{xy} - (\cos^2 x - \sin^2 x)\ u_{yy} + \cos x\ u_y = 0$:

111. $u_{xx} + xy\ u_{yy} = 0$:

112. $y^2\ u_{xx} + x^2\ u_{yy} = 0$:

113. $y^2\ u_{xx} - x^2\ u_{yy} = 0$:

114. $u_{xx} - 2\cos x\ u_{xy} - (3 + \sin^2 x)\ u_{yy} - y u_y = 0$:

115. $u_{xx} - 2\sin x\ u_{xy} + (2 - \cos^2 x)\ u_{yy} = 0$:

116. $\operatorname{tg}^2 x\ u_{xx} - 2y \operatorname{tg} x\ u_{xy} + y^2\ u_{yy} + \operatorname{tg}^3 x\ u_x = 0$:

117. $u_{xx} + 2\sin x\ u_{xy} - \cos^2 x\ u_{yy} + \cos x\ u_x + 0,5 \sin 2x\ u_y = 0$:

118. $\sin^2 x\ u_{xx} - 2y \sin x\ u_{xy} + y^2\ u_{yy} = 0$:

119. $\operatorname{cth}^2 x\ u_{xx} - 2y \operatorname{cth} x\ u_{xy} + y^2 u_{yy} + 2y\ u_y = 0$:

120. $(1 - x^2)\ u_{xx} - 2xy\ u_{xy} + (1 - y^2)\ u_{yy} - 2x\ u_x - 2y\ u_y = 0$:

121. $(1 - x^2)\ u_{xx} - 2xy\ u_{xy} - (1 + y^2)\ u_{yy} - 2x\ u_x - 2y\ u_y = 0$:

Բերել կանոնական տեսքի և կատարել հետագա պարզեցումներ.

122. $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0$:

123. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0$:

124. $2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 2u_y + u + x = 0$:

125. $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y + u = 0$:

126. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y + 4u = 0$:

127. $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y - 4u = 0$:

128. $3u_{xx} + u_{xy} + 3u_x + u_y - u + y = 0$:

129. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} - 2u_x - 2u_y + u = 0$:

130. $5u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} + 24u_x + 32u_y + 64u = 0$:

Գտնել ընդհանուր լուծումը՝ բնութագրիչների մեթոդով.

131. $u_{xx} + 2u_{xy} = 0$:

132. $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0$:

133. $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$:

134. $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 6u_y = 0$:

135. $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2$:

136. $2u_{xx}+6u_{xy}+4u_{yy}+u_x+u_y=0$:

137. $3u_{xx}+10u_{xy}+3u_{yy}+u_x+u_y+\dfrac{1}{16}\,u-16xe^{-\frac{x+y}{16}}=0$:

138. $u_{yy}-2u_{xy}+2u_x-u_y=4e^x$:

139. $u_{xx}+4u_{xy}+4u_{yy}+3u_x+6u_y=0$:

140. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}=0$:

141. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}-9u_x+9u_y-10u=0$:

142. $u_{xx}+2au_{xy}+a^2u_{yy}+u_x+au_y=0$:

143. $u_{xx}-6u_{xy}+8u_{yy}+u_x-2u_y+4e^{5x+\frac{3}{2}y}=0$:

144. $u_{xx}-2\cos x\;u_{xy}-(3+\sin^2 x)\;u_{yy}+u_x+(\sin x-\cos x-2)\;u_y=0$:

145. $u_{xx}-2\sin x\;u_{xy}-\cos^2 x\;u_{yy}-\cos x\;u_y=0$:

146. $xu_{xx}-yu_{yy}+0.5(u_x-u_y)=0, \qquad (x>0, \quad y>0)$:

Գտնել ընդհանուր լուծումը բոլոր այն տիրույթներում, որտեղ հավասարումը պահպանում է իր տիպը.

147. $yu_{xx}+(x-y)u_{xy}-xu_{yy}=0$:

148. $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0$:

149. $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}-3y^2u_{yy}-2xu_x=0$:

150. $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$:

151. $u_{xy}+2xyu_y-2xu=0$:

152. $u_{xy}+u_x+yu_y+(y-1)u=0$:

153. $u_{xy}+au_x=0$:

154. $u_{xy}+au_x+bu_y+abu=0$:

155. $u_{xy}-2u_x-3u_y+6u=2e^{x+y}$:

156. $u_{xy}-xu_x+u=0$:

157. $u_{xy}+yu_y-u=0$:

158. $\operatorname{ch} x\;u_{xy}+(\operatorname{sh} x+y\operatorname{ch} x)\;u_y-\operatorname{ch} x\;u=0$:

159. $\dfrac{\partial}{\partial y}(u_x+u)+x(u_x+u)+x^2y=0:$

160. $u_{xy}+y\ u_x+x\ u_y+xyu=0:$

161. $a^2u_{xx}+2au_{xy}+u_{yy}=0:$

162. $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2\ u_x)=x^2\ u_{yy}:$

163. $(x-y)\ u_{xy}-u_x+u_y=0:$

§ 2 Երկուսից ավելի անկախ փոփոխականների դեպքը

Դիտարկենք

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_ix_j}+F(x,u,u_{x_1},u_{x_2},\dots,u_{x_n})=0, \tag{2.24}$$

հավասարումը, որտեղ $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\Omega\subseteq\mathrm{R}^n,\ n\geqslant 3:$ $a_{ij}(x)$ գործակիցները տրված անընդհատ ֆունկցիաներ են և Ω-ի ոչ մի կետում միաժամանակ զրո չեն դառնում:

Վերցնենք կամայական $x_0\in\Omega$ կետ և դիտարկենք $A(x_0)=\|a_{ij}(x_0)\|_{i,j=1}^n$ մատրիցը: Քանի որ այն սիմետրիկ է, ապա նրա բոլոր սեփական արժեքները իրական են: Դիցուք, հաշվի առնելով պատիկությունները, դրանցից n_- հատը բացասական են, n_0 հատը զրոյական են, իսկ n_+ հատը՝ դրական: Պարզ է որ $n_-+n_0+n_+=n:$ Հավասարումը դասակարգվում է թվերի $\{n_+,n_0,n_-\}$ եռյակի միջոցով: Այսպես, հավասարումը $x_0\in\Omega$ կետում կոչվում է

- հիպերբոլական տիպի, եթե $n_+=n-1,\ n_-=1$ կամ $n_+=1,\ n_-=n-1,$
- ուլտրահիպերբոլական տիպի, եթե $n_+>1,\ n_->1,\ n_0=0,$
- պարաբոլական տիպի, եթե $n_0>0,$
- էլիպտական տիպի, եթե $n_+=n$ կամ $n_-=n:$

Դիցուք $C=\|c_{ij}\|_{i,j=1}^n$ չվերասերվող մատրից է: Եթե $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ փոփոխականներից անցնենք $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ փոփոխականների

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j$$

բանաձևերով, ապա (2.24) հավասարումը կընդունի

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\tilde{a}_{kl}(y)u_{y_k y_l}+\tilde{F}(y,u,u_{y_1},u_{y_2},\ldots,u_{y_n})=0 \tag{2.25}$$

տեսքը, որտեղ

$$\tilde{a}_{kl}(y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)c_{ki}c_{lj}:$$

Ակնհայտ է, որ $\|a_{ij}(x_0)\|_{i,j=1}^{n}$ և $\|\tilde{a}_{kl}(y(x_0))\|_{k,l=1}^{n}$ մատրիցները ունեն նույն սեփական արժեքները (նման մատրիցներ են)։ Այստեղից հետևում է, որ (2.24) և (2.25) հավասարումները x_0 կետում ունեն նույն տիպը։

Կասենք, որ (2.25) հավասարումը $x_0\in\Omega$ կետում ունի կանոնական տեսք, եթե

$$\tilde{a}_{kl}(y(x_0))=0,\ \text{երբ } k\neq l,\qquad \tilde{a}_{kk}(y(x_0))\in\{-1,0,1\}:$$

Հավասարումը x_0 կետում կանոնական տեսքի բերելու համար պետք է.

ա) Կազմել $\xi=(\xi_1,\xi_2\ldots,\xi_n)$ փոփոխականներից կախված

$$\Phi(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x_0)\xi_i\xi_j$$

քառակուսային ձևը։

բ) Գտնել այնպիսի M չվերասերվող մատրից, որ եթե $\xi=(\xi_1,\xi_2\ldots,\xi_n)$ փոփոխականներից անցնենք $\eta=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$ փոփոխականների $\xi=M\eta$ ձևափոխության միջոցով, ապա քառակուսային ձևը կբերվի

$$\Phi(\eta)=\sum_{k=1}^{n}\delta_k\eta_k^2,$$

կանոնական տեսքի։ Այստեղ $\delta_k\in\{1;0;-1\}$, ընդ որում 1-երի, 0-ների և -1-երի քանակը հավասար է համապատասխանաբար n_+, n_0, n_- (կամ n_-, n_0, n_+) թվերին, և կախված չէ ձևափոխությունից (իներցիայի օրենք)։ Այս քայլից հետո $\{n_+,n_0,n_-\}$ թվերի եռյակով կպարզվի հավասարման տիպը x_0 կետում։ Քառակուսային ձևը կանոնական տեսքի կարելի է բերել, օրինակ, Լագրանժի մեթոդով։

գ) Հավասարման մեջ կատարել $y=M^Tx$ փոփոխականի փոխարինումը, որտեղ M^T-ն M-ի տրանսպոնացված մատրիցն է։ Հավասարումը x_0

կետում կբերվի

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k u_{y_k y_k} + \tilde{F}(y, u, u_{y_1}, u_{y_2}, \ldots, u_{y_n}) = 0,$$

կանոնական տեսքի, կամ որ նույնն է՝

- հիպերբոլական տիպի դեպքում՝

$$u_{y_1 y_1} = \sum_{k=2}^{n} u_{y_k y_k} + \tilde{F}(y, u, u_{y_1}, u_{y_2}, \ldots, u_{y_n}),$$

- ուլտրահիպերբոլական տիպի դեպքում՝

$$\sum_{k=1}^{m} u_{y_k y_k} = \sum_{k=m+1}^{n} u_{y_k y_k} + \tilde{F}(y, u, u_{y_1}, u_{y_2}, \ldots, u_{y_n}), \quad (1 < m < n-1, \ \ n \geqslant 4),$$

- պարաբոլական տիպի դեպքում՝

$$\sum_{k=1}^{n-n_0} \delta_k u_{y_k y_k} + \tilde{F}(y, u, u_{y_1}, u_{y_2}, \ldots, u_{y_n}) = 0, \quad (\delta_k \in \{1, -1\}, \ \ n_0 > 0),$$

- էլիպտական տիպի դեպքում՝

$$u_{y_1 y_1} + u_{y_2 y_2} + \cdots + u_{y_n y_n} + \tilde{F}(y, u, u_{y_1}, u_{y_2}, \ldots, u_{y_n}) = 0 :$$

Եթե ունենք հաստատուն գործակիցներով գծային հավասարում՝

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f(x),$$

ապա $\mathbb{R}^n$ -ի բոլոր կետերում կստացվի նույն՝

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k u_{y_k y_k} + \sum_{k=1}^{n} \tilde{b}_k u_{y_k} + \tilde{c} u = \tilde{f}(y)$$

կանոնական տեսքը, որից հետո կարելի է կատարել հետագա պարզեցումներ: Այսպես, եթե փնտրենք անհայտ ֆունկցիան

$$u(y_1, y_2, \ldots, y_n) = w(y_1, y_2, \ldots, y_n) \cdot e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k y_k}$$

տեսքով, ապա նոր՝ $w(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ֆունկցիայի նկատմամբ հավասարումը նորից կունենա կանոնական տեսք և համապատասխան ձևով ընտրելով $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ հաստատունները, կարելի է հանգել հավասարման, որի մեջ բացակայեն՝

- առաջին կարգի ածանցյալները, եթե հավասարումը հիպերբոլական կամ էլիպտական տիպի է,
- որոնելի ֆունկցիան ու որոշ առաջին կարգի ածանցյալներ, եթե հավասարումը պարաբոլական տիպի է:

Օրինակ 2.15: Պարզել հավասարման տիպը.

$$2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yz} + 3u_x - u = 0 :$$

Լուծում: Հավասարմանը համապատասխանող սիմետրիկ մատրիցն է՝

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} :$$

Գտնենք սեփական արժեքները.

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0,$$

$\lambda_1 = 1 > 0,\ \lambda_2 = 1 > 0,\ \lambda_3 = -2 < 0,$ ուրեմն $n_+ = 2,\ n_0 = 0,\ n_- = 1 :$

Պատասխան՝ Հիպերբոլական:

Օրինակ 2.16: Պարզել հավասարման տիպը.

$$4u_{xx} + 2u_{yy} - 6u_{zz} + 6u_{xy} + 10u_{xz} + 4u_{yz} + 2u = 0 :$$

Լուծում:

Առաջին եղանակ: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda E = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 & 5 \\ 3 & 2-\lambda & 2 \\ 5 & 2 & -6-\lambda \end{pmatrix},$

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 66\lambda = 0 :$$

$\lambda_1 = \sqrt{66} > 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -\sqrt{66} < 0 \Rightarrow n_+ = 1,\ n_0 = 1,\ n_- = 1 :$ Հավասարումը պարաբոլական տիպի է:

Երկրորդ եղանակ: Համապատասխան քառակուսային ձևն է՝

$$\Phi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=4\xi_1^2+2\xi_2^2-6\xi_3^2+6\xi_1\xi_2+10\xi_1\xi_3+4\xi_2\xi_3\ :$$

Բերենք կանոնական տեսքի՝ լրիվ քառակուսիներ առանձնացնելով.

$$\Phi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(2\xi_1)^2+2\cdot 2\xi_1\cdot\frac{3}{2}\,\xi_2+2\cdot 2\xi_1\cdot\frac{5}{2}\,\xi_3+\frac{9}{4}\,\xi_2^2+$$

$$+\frac{25}{4}\,\xi_3^2+\frac{15}{2}\,\xi_2\xi_3-\frac{9}{4}\,\xi_2^2-\frac{25}{4}\,\xi_3^2-\frac{15}{2}\,\xi_2\xi_3+2\xi_2^2-6\xi_3^2+4\xi_2\xi_3=$$

$$=\left(2\xi_1+\frac{3}{2}\,\xi_2+\frac{5}{2}\,\xi_3\right)^2-\frac{1}{4}\,\xi_2^2-\frac{7}{2}\,\xi_2\xi_3-\frac{49}{4}\,\xi_3^2=$$

$$=\left(2\xi_1+\frac{3}{2}\,\xi_2+\frac{5}{2}\,\xi_3\right)^2-\left(\frac{1}{2}\,\xi_2+\frac{7}{2}\,\xi_3\right)^2\ :$$

Եթե նշանակենք

$$\eta_1=2\xi_1+\frac{3}{2}\,\xi_2+\frac{5}{2}\,\xi_3,\qquad \eta_2=\frac{1}{2}\,\xi_2+\frac{7}{2}\,\xi_3,\qquad \eta_3=\xi_3,$$

ապա քառակուսային ձևը կգրվի $\Phi(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\eta_1^2-\eta_2^2$ կանոնական տեսքով: Ուրեմն $n_+=1,\ n_0=1,\ n_-=1$:

Պատասխան՝ Պարաբոլական:

Օրինակ 2.17: Պարզել հավասարման տիպը.

$$u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}+4u_{yz}+5u_{zz}-xu_x+yu_z=0\ :$$

Լուծում: *Առաջին եղանակ:* Հավասարմանը համապատասխանող սիմետրիկ մատրիցն է՝

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&5\end{pmatrix}\ :$$

Քանի որ գլխավոր անկյունագծային մինորները դրական են՝

$$\Delta_1=1>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&5\end{vmatrix}=1>0,$$

ապա, համաձայն Սիլվեստրի հայտանիշի, A մատրիցը դրական որոշյալ է: Իսկ դա նշանակում է, որ A մատրիցի բոլոր սեփական արժեքները դրական են՝ $n_+ = 3,\ n_0 = 0,\ n_- = 0,$ հետևաբար հավասարումն էլիպտական տիպի է:

Երկրորդ եղանակ: Գրենք հավասարմանը համապատասխանող քառակուսային ձևը՝

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_2^2 + 4\xi_2\xi_3 + 5\xi_3^2,$$

և բերենք կանոնական տեսքի՝

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 + \xi_2^2 + 4\xi_2\xi_3 + 4\xi_3^2 + \xi_3^2 = (\xi_1 + \xi_2)^2 + (\xi_2 + 2\xi_3)^2 + \xi_3^2 :$$

Եթե նշանակենք $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2,\ \ \eta_2 = \xi_2 + 2\xi_3,\ \ \eta_3 = \xi_3,$ ապա քառակուսային ձևը կգրվի

$$\Phi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2$$

կանոնական տեսքով, որտեղից $n_+ = 3,\ n_0 = 0,\ n_- = 0$:

Պատասխան՝ Էլիպտական:

Օրինակ 2.18: Պարզել հավասարման տիպը.

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} - 2xyu_x + 3xu = 0 :$$

Լուծում: *Առաջին եղանակ:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) - 4(4-\lambda) - 4(1-\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda - 4 =$$
$$= -(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 4\lambda + 4) :$$

Սեփական արժեքները $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ հավասարման արմատներն են: Հավասարման տիպը պարզելու համար պարտադիր չէ գտնել սեփական արժեքները, բավական է պարզել նրանց նշանները: Դրա համար օգտվենք Վիետի թեորեմից[3]: Ունենք

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -4, \qquad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 = 4, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6 :$$

[3] Եթե x_1, x_2, x_3 թվերը $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ հավասարման արմատներն են, ապա $x_1x_2x_3 = -r, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q, \quad x_1 + x_2 + x_3 = -p :$

Քանի որ արմատների արտադրյալը բացասական է, իսկ գումարը՝ դրական, ապա երկու արմատները դրական են, իսկ մեկ արմատը՝ բացասական՝ $n_+ = 2,\ n_0 = 0,\ n_- = 1$: Հավասարումը հիպերբոլական տիպի է:

Երկրորդ եղանակ: Հավասարմանը համապատասխանող քառակուսային ձևը բերենք կանոնական տեսքի.

$$\Phi(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \xi_1^2 - 4\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 + 4\xi_2^2 + \xi_3^2 = \xi_1^2 + 4\xi_2^2 + \xi_3^2 - 4\xi_1\xi_2 + \\ + 2\xi_1\xi_3 - 4\xi_2\xi_3 + 4\xi_2\xi_3 = (\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3)^2 + \xi_2^2 + 2\xi_2\xi_3 + \xi_3 - \\ - (\xi_2^2 - 2\xi_2\xi_3 + \xi_3) = (\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3)^2 + (\xi_2 + \xi_3)^2 - (\xi_2 - \xi_3)^2 :$$

Նշանակելով $\eta_1 = \xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3,\ \eta_2 = \xi_2 + \xi_3,\ \eta_3 = \xi_2 - \xi_3,$ կստանանք կանոնական տեսքը՝

$$\Phi(\eta_1,\eta_2,\eta_3) = \eta_1^2 + \eta_2^2 - \eta_3^2,$$

որտեղից $n_+ = 2,\ n_0 = 0,\ n_- = 1$:

Պատասխան՝ Հիպերբոլական:

Օրինակ 2.19: Բերել կանոնական տեսքի.

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} = 0 :$$

Լուծում: Գրենք համապատասխան քառակուսային ձևը և բերենք կանոնական տեսքի.

$$\Phi(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_2^2 + 4\xi_2\xi_3 + 5\xi_3^2 = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 + \\ + \xi_2^2 + 4\xi_2\xi_3 + 4\xi_3^2 + \xi_3^2 = (\xi_1 + \xi_2)^2 + (\xi_2 + 2\xi_3)^2 + \xi_3^2 :$$

Եթե վերցնենք

$$\eta_1 = \xi_1 + \xi_2, \quad \eta_2 = \xi_2 + 2\xi_3, \quad \eta_3 = \xi_3, \tag{2.26}$$

ապա Φ քառակուսային ձևը կգրվի կանոնական տեսքով՝

$$\Phi(\eta_1,\eta_2,\eta_3) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2,$$

որտեղից $n_+ = 3,\ n_0 = 0,\ n_- = 0,$ այսինքն՝ հավասարումն էլիպտական տիպի է:

(2.26)-ից՝

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}:$$

Նշանակելով

$$M=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix},$$

կունենանք՝

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\xi_1=\eta_1-\eta_2+2\eta_3,\\ \xi_2=\eta_2-2\eta_3,\\ \xi_3=\eta_3:\end{cases}$$

Այսպիսով, M չվերասերվող մատրիցով գծային ձևափոխությունը Φ քառակուսային ձևը բերում է կանոնական տեսքի: Հետևաբար այն գծային ձևափոխությունը, որի մատրիցը M-ի տրանսպոնացված M^T մատրիցն է, կբերի կանոնական տեսքի հավասարմանը: Կանոնական տեսքը ստանալու համար (x,y,z) փոփոխականներից անցնենք (ξ,η,ζ) փոփոխականների հետևյալ բանաձևերով՝

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=M^T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\xi=x,\\ \eta=-x+y,\\ \zeta=2x-2y+z:\end{cases}$$

Գրենք u ֆունկցիայի ածանցյալները նոր փոփոխականներով.

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x+u_\zeta\zeta_x=u_\xi+2u_\zeta,\qquad u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y+u_\zeta\zeta_y=u_\eta-2u_\zeta,$$

$$u_z=u_\xi\xi_z+u_\eta\eta_z+u_\zeta\zeta_z=u_\zeta,\qquad u_{xx}=u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+4u_{\zeta\zeta}-2u_{\xi\eta}+4u_{\xi\zeta}-4u_{\eta\zeta},$$

$$u_{yy}=u_{\eta\eta}+4u_{\zeta\zeta}-4u_{\eta\zeta},\qquad u_{zz}=u_{\zeta\zeta},$$

$$u_{xy}=-u_{\eta\eta}-4u_{\zeta\zeta}+u_{\xi\eta}-2u_{\xi\zeta}+4u_{\eta\zeta},\qquad u_{yx}=-2u_{\zeta\zeta}+u_{\eta\zeta}:$$

Տեղադրելով ստացված ածանցյալները հավասարման մեջ՝ կստանանք

$$u_{\xi\xi}+\ u_{\eta\eta}+u_{\zeta\zeta}=0:$$

Պատասխան՝ $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_{\zeta\zeta}=0,\quad \xi=x,\ \ \eta=-x+y,\ \ \zeta=2x-2y+z:$

Օրինակ 2.20: Բերել կանոնական տեսքի.

$$u_{xy}+u_{yz}+u_x+u_y+u_z=2x+y-z\ :$$

Լուծում: Համապատասխան քառակուսային ձևն է՝

$$\Phi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3,$$

որը չի պարունակում փոփոխականի քառակուսի: Այս դեպքում ներմուծենք նոր՝ ξ_0 փոփոխական, որը քառակուսային ձևի գումարելիներից որևէ մեկի փոփոխականների գումարն է: Վերցնենք, օրինակ, $\xi_0=\xi_1+\xi_2$, որտեղից $\xi_1=\xi_0-\xi_2$: Այն տեղադրենք քառակուսային ձևի մեջ և անջատենք լրիվ քառակուսիներ.

$$\Phi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\xi_0-\xi_2)\xi_2+\xi_2\xi_3=\xi_0\xi_2-\xi_2^2+\xi_2\xi_3=-(\xi_2^2-\xi_0\xi_2-\xi_2\xi_3)=$$
$$=-\left(\xi_2^2-2\cdot\xi_0\cdot\frac{1}{2}\cdot\xi_2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\xi_2\cdot\xi_3\right)=-\left(\xi_2-\frac{1}{2}\,\xi_0-\frac{1}{2}\,\xi_3\right)^2+$$
$$+\frac{1}{4}\,\xi_0^2+\frac{1}{4}\,\xi_3^2+\frac{1}{2}\,\xi_0\,\xi_3=\left(\frac{1}{2}\,\xi_0+\frac{1}{2}\,\xi_3\right)^2-\left(\xi_2-\frac{1}{2}\,\xi_0-\frac{1}{2}\,\xi_3\right)^2\ :$$

Տեղադրելով $\xi_0=\xi_1+\xi_2$, կստանանք՝

$$\Phi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\left(\frac{1}{2}\,\xi_1+\frac{1}{2}\,\xi_2+\frac{1}{2}\,\xi_3\right)^2-\left(\frac{1}{2}\,\xi_1-\frac{1}{2}\,\xi_2+\frac{1}{2}\,\xi_3\right)^2\ :$$

Եթե վերցնենք

$$\eta_1=\frac{1}{2}\,\xi_1+\frac{1}{2}\,\xi_2+\frac{1}{2}\,\xi_3,\quad \eta_2=\frac{1}{2}\,\xi_1-\frac{1}{2}\,\xi_2+\frac{1}{2}\,\xi_3,\quad \eta_3=\xi_3, \tag{2.27}$$

ապա Φ քառակուսային ձևը կգրվի կանոնական տեսքով՝

$$\Phi(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\eta_1^2-\eta_2^2\ :$$

Ստացվեց $n_+=1,\ n_0=1,\ n_-=1,$ այսինքն՝ հավասարումը պարաբոլական տիպի է:

(2.27)-ից ունենք

$$\begin{cases}\xi_1=\eta_1+\eta_2-\eta_3,\\ \xi_2=\eta_1-\eta_2,\\ \xi_3=\eta_3,\end{cases}$$

որտեղից

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} :$$

Այսպիսով, հավասարումը կբերվի կանոնական տեսքի, եթե (x, y, z) փոփոխականներից անցնենք (ξ, η, ζ) փոփոխականների հետևյալ գծային ձևափոխության միջոցով՝

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

կամ որ նույնն է, հետևյալ բանաձևերով՝

$$\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = x - y, \\ \zeta = -x + z : \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\,\xi + \frac{1}{2}\,\eta, \\ y = \frac{1}{2}\,\xi - \frac{1}{2}\,\eta, \\ z = \frac{1}{2}\,\xi + \frac{1}{2}\,\eta + \zeta : \end{cases} \tag{2.28}$$

Հավասարման մեջ մտնող առաջին կարգի ածանցյալները նոր փոփոխականներով կլինեն՝

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x + u_\zeta \zeta_x = u_\xi + u_\eta - u_\zeta,$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y + u_\zeta \zeta_y = u_\xi - u_\eta,$$
$$u_z = u_\xi \xi_z + u_\eta \eta_z + u_\zeta \zeta_z = u_\zeta :$$

Կանոնական տեսքը գրելու համար երկրորդ կարգի ածանցյալները նոր փոփոխականներով կարելի է չհաշվել, այլ օգտվել քառակուսային ձևի կանոնական տեսքից:

Տեղադրելով առաջին կարգի ածանցյակները հավասարման մեջ և հաշվի առնելով, որ $2x + y - z = \xi - \zeta$, կստանանք կանոնական տեսքը:
Պատասխան՝ $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + 2u_\xi = \xi - \zeta, \quad \xi = x + y,\ \eta = x - y,\ \zeta = -x + z :$

Օրինակ 2.21: Բերել կանոնական տեսքի.

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 2u_{yz} + 2u_{zz} - u_x + 2u_y = x + z :$$

Լուծում: Գրենք համապատասխան քառակուսային ձևը և բերենք կանոնական տեսքի.

$$\Phi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\xi_1^2-4\xi_1\xi_2+5\xi_2^2-2\xi_2\xi_3+2\xi_3^2=$$
$$=(\xi_1-2\xi_2)^2+(\xi_2-\xi_3)^2+\xi_3^2=\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2,$$

որտեղ $\eta_1=\xi_1-2\xi_2,\ \eta_2=\xi_2-\xi_3,\ \eta_3=\xi_3$:

Քանի որ $n_+=3,\ n_0=0,\ n_-=0,$ ապա հավասարումն էլիպտական տիպի է:

Ունենք

$$\begin{cases}\eta_1=\xi_1-2\xi_2,\\ \eta_2=\xi_2-\xi_3,\\ \eta_3=\xi_3,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\xi_1=\eta_1+2\eta_2+2\eta_3,\\ \xi_2=\eta_2+\eta_3,\\ \xi_3=\eta_3,\end{cases}$$

որտեղից

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}\Rightarrow M=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}:$$

Հավասարումը կբերվի կանոնական տեսքի, եթե (x,y,z) փոփոխականներից անցնենք (ξ,η,ζ) փոփոխականների հետևյալ գծային ձևափոխության միջոցով՝

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=M^T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},$$

կամ որ նույնն է, հետևյալ բանաձևերով՝

$$\begin{cases}\xi=x,\\ \eta=2x+y,\\ \zeta=2x+y+z:\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\xi,\\ y=-2\xi+\eta,\\ z=-\eta+\zeta:\end{cases}$$

Հավասարման մեջ մտնող առաջին կարգի ածանցյալները նոր փոփոխականներով կարտահայտվեն հետևյալ կերպ.

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x+u_\zeta\zeta_x=u_\xi+2u_\eta+2u_\zeta,$$
$$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y+u_\zeta\zeta_y=u_\eta+u_\zeta:$$

Երկրորդ կարգի ածանցյալները կարելի է չհաշվել, այլ օգտվել քառակուսային ձևի կանոնական տեսքից:

Տեղադրելով հավասարման մեջ, և հաշվի առնելով, որ $x+z=\eta-\xi$, կստանանք կանոնական տեսքը:

Պատասխան՝ $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_{\zeta\zeta}-u_{\xi}=\eta-\xi, \quad \xi=x,\ \eta=2x+y,\ \zeta=2x+y+z:$

Օրինակ 2.22: Բերել կանոնական տեսքի.

$$u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}+2u_{yz}+2u_{yt}+2u_{zz}+3u_{tt}=0:$$

Լուծում: Գրենք համապատասխան քառակուսային ձևը, և բերենք կանոնական տեսքի.

$$\begin{aligned}
&\Phi(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=\xi_1^2+2\xi_1\xi_2+2\xi_2^2+2\xi_2\xi_3+2\xi_2\xi_4+2\xi_3^2+3\xi_4^2=\\
&=(\xi_1+\xi_2)^2+\xi_2^2+2\xi_2\xi_3+2\xi_2\xi_4+2\xi_3^2+3\xi_4^2=(\xi_1+\xi_2)^2+(\xi_2+\xi_3+\xi_4)^2-2\xi_3\xi_4+\xi_3^2+2\xi_4^2=\\
&=(\xi_1+\xi_2)^2+(\xi_2+\xi_3+\xi_4)^2+(\xi_3-\xi_4)^2+\xi_4^2=\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2+\eta_4^2,
\end{aligned}$$

որտեղ $\eta_1=\xi_1+\xi_2,\ \eta_2=\xi_2+\xi_3+\xi_4,\ \eta_3=\xi_3-\xi_4,\ \eta_4=\xi_4:$

Քանի որ $n_+=4,\ n_0=0,\ n_-=0,$ ապա հավասարումն էլիպտական տիպի է:

Ունենք

$$\begin{cases}\eta_1=\xi_1+\xi_2,\\ \eta_2=\xi_2+\xi_3+\xi_4,\\ \eta_3=\xi_3-\xi_4,\\ \eta_4=\xi_4:\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\xi_1=\eta_1-\eta_2+\eta_3+2\eta_4,\\ \xi_2=\eta_2-\eta_3-2\eta_4,\\ \xi_3=\eta_3+\eta_4,\\ \xi_4=\xi_4,\end{cases}$$

որտեղից

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \xi_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&1&-1&-2\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\\ \eta_4\end{pmatrix}\Rightarrow M=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&1&-1&-2\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}:$$

Հավասարումը կբերվի կանոնական տեսքի, եթե (x,y,z,t) փոփոխականներից անցնենք (ξ,η,ζ,τ) փոփոխականների հետևյալ գծային ձևափոխության միջոցով՝

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\\ \tau\end{pmatrix}=M^T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&0\\2&-2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix},$$

կամ որ նույնն է, հետևյալ բանաձևերով՝

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = -x + y, \\ \zeta = x - y + z, \\ \tau = 2x - 2y + z + t : \end{cases}$$

Հավասարման մեջ մասնակցում են միայն երկրորդ կարգի ածանցյալներ, որոնց գործակիցները հաստատուններ են: Դա նշանակում է, որ հավասարման կանոնական տեսքը գրելու համար կարող ենք օգտվել քառակուսային ձևի կանոնական տեսքից:

Պատասխան՝

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_{\tau\tau} = 0, \quad \xi = x, \ \ \eta = -x + y, \ \ \zeta = x - y + z, \ \ \tau = 2x - 2y + z + t :$$

Օրինակ 2.23: Բերել կանոնական տեսքի. $u_{xy} + u_{xz} + u_{xt} + u_{zt} = 0 :$

Լուծում: Քառակուսային ձևն է՝

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_1\xi_4 + \xi_3\xi_4 :$$

Նշանակենք $\xi_0 = \xi_1 + \xi_2 \Rightarrow \xi_2 = \xi_0 - \xi_1$: Տեղադրենք քառակուսային ձևի մեջ և բերենք կանոնական տեսքի.

$$\begin{aligned} \Phi(\xi_0, \xi_1, \xi_3, \xi_4) &= \xi_1(\xi_0 - \xi_1) + \xi_1\xi_3 + \xi_1\xi_4 + \xi_3\xi_4 = \\ &= -\xi_1^2 + \xi_0\xi_1 + \xi_1\xi_3 + \xi_1\xi_4 + \xi_3\xi_4 = -\left(\xi_1^2 - \xi_0\xi_1 - \xi_1\xi_3 - \xi_1\xi_4\right) + \xi_3\xi_4 = \\ &= -\left(\xi_1 - \frac{1}{2}\,\xi_0 - \frac{1}{2}\,\xi_3 - \frac{1}{2}\,\xi_4\right)^2 + \frac{1}{4}\,\xi_0^2 - \frac{1}{4}\,\xi_3^2 - \frac{1}{4}\,\xi_4^2 - \frac{1}{2}\,\xi_0\xi_3 - \frac{1}{2}\,\xi_0\xi_4 + \frac{1}{2}\,\xi_3\xi_4 + \xi_3\xi_4 = \\ &= -\left(\xi_1 - \frac{1}{2}\,\xi_0 - \frac{1}{2}\,\xi_3 - \frac{1}{2}\,\xi_4\right)^2 + \frac{1}{4}\,(\xi_0^2 + 2\xi_0\xi_3 + 2\xi_0\xi_4) + \frac{1}{4}\,\xi_3^2 + \frac{1}{4}\,\xi_4^2 + \frac{3}{2}\,\xi_3\xi_4 = \\ &= -\left(\xi_1 - \frac{1}{2}\,\xi_0 - \frac{1}{2}\,\xi_3 - \frac{1}{2}\,\xi_4\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\,\xi_0 + \frac{1}{2}\,\xi_3 + \frac{1}{2}\,\xi_4\right)^2 + \xi_3\xi_4 = \\ &= \left(\frac{1}{2}\,\xi_0 + \frac{1}{2}\,\xi_3 + \frac{1}{2}\,\xi_4\right)^2 - \left(\xi_1 - \frac{1}{2}\,\xi_0 - \frac{1}{2}\,\xi_3 - \frac{1}{2}\,\xi_4\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\,\xi_3 + \frac{1}{2}\,\xi_4\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\,\xi_3 - \frac{1}{2}\,\xi_4\right)^2 : \end{aligned}$$

Տեղադրելով $\xi_0 = \xi_1 + \xi_2$, կստանանք

$$\Phi(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = \left(\frac{1}{2}\,\xi_1 + \frac{1}{2}\,\xi_2 + \frac{1}{2}\,\xi_3 + \frac{1}{2}\,\xi_4\right)^2 - \\ - \left(\frac{1}{2}\,\xi_1 - \frac{1}{2}\,\xi_2 - \frac{1}{2}\,\xi_3 - +\frac{1}{2}\,\xi_4\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\,\xi_3 + \frac{1}{2}\,\xi_4\right)^2 - \\ - \left(\frac{1}{2}\,\xi_3 - \frac{1}{2}\,\xi_4\right)^2 = \eta_1^2 - \eta_2^2 + \eta_3^2 - \eta_4^2 :$$

Քանի որ $n_+ = 2$, $n_0 = 0$, $n_- = 2$, ապա հավասարումն ուլտրահիպերբոլական տիպի է:
Ունենք

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{1}{2}\,\xi_1 + \frac{1}{2}\,\xi_2 + \frac{1}{2}\,\xi_3 + \frac{1}{2}\,\xi_4, \\ \eta_2 = \frac{1}{2}\,\xi_1 - \frac{1}{2}\,\xi_2 - \frac{1}{2}\,\xi_3 - +\frac{1}{2}\,\xi_4, \\ \eta_3 = \frac{1}{2}\,\xi_3 + \frac{1}{2}\,\xi_4, \\ \eta_4 = \frac{1}{2}\,\xi_3^2 - \frac{1}{2}\,\xi_4 : \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \eta_1 + \eta_2, \\ \xi_2 = \eta_1 - \eta_2 - 2\eta_3, \\ \xi_3 = \eta_3 + \eta_4, \\ \xi_4 = \eta_3 - \eta_4, \end{cases}$$

որտեղից

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} :$$

Հավասարումը կբերվի կանոնական տեսքի, եթե (x,y,z,t) փոփոխականներից անցնենք (ξ,η,ζ,τ) փոփոխականների հետևյալ գծային ձևափոխության միջոցով՝

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = x - y, \\ \zeta = -2y + z + t, \\ \tau = z - t : \end{cases}$$

Պատասխան՝ Ուլտրահիպերբոլական, կանոնական տեսքը՝

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} - u_{\tau\tau} = 0, \quad \xi = x + y, \;\; \eta = x - y, \;\; \zeta = -2y + z + t, \;\; \tau = z - t :$$

Օրինակ 2.24: Հավասարումը բերել կանոնական տեսքի և կատարել հետագա պարզեցումներ.

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + u_{zz} + u_x - u_y + 0.5u = 2x + y + 2z :$$

Լուծում: Գրենք համապատասխան քառակուսային ձևը և բերենք կանոնական տեսքի.

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_1\xi_3 + \xi_3^2 = (\xi_1 + \xi_2 - \xi_3)^2 + 2\xi_2\xi_3 - \xi_2^2 =$$
$$= (\xi_1 + \xi_2 - \xi_3)^2 - (\xi_2 - \xi_3)^2 + \xi_3^2 :$$

Եթե վերցնենք $\eta_1 = \xi_1+\xi_2-\xi_3$, $\eta_2 = \xi_2-\xi_3$, $\eta_3 = \xi_3$, ապա Φ քառակուսային ձևը կգրվի

$$\Phi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \eta_1^2 - \eta_2^2 + \eta_3^2,$$

կանոնական տեսքով, որտեղից $n_+ = 2$, $n_0 = 0$, $n_- = 1$, այսինքն՝ հավասարումը հիպերբոլական տիպի է: Ունենք

$$\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 + \xi_2 - \xi_3, \\ \eta_2 = \xi_2 - \xi_3, \\ \eta_3 = \xi_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \eta_1 - \eta_2, \\ \xi_2 = \eta_2 + \eta_3 \\ \xi_3 = \eta_3, \end{cases}$$

որտեղից

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} :$$

Հավասարումը կբերվի կանոնական տեսք, եթե (x, y, z) փոփոխականներից անցնենք (ξ, η, ζ) փոփոխականների հետևյալ գծային ձևափոխության միջոցով՝

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

կամ որ նույնն է, հետևյալ բանաձևերով՝

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = -x + y, \\ \zeta = y + z : \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \xi, \\ y = \xi + \eta, \\ z = -\xi - \eta + \zeta : \end{cases}$$

Հավասարման մեջ մտնող առաջին կարգի ածանցյալները նոր փոփոխականներով կարտահայտվեն հետևյալ բանաձևերով.

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x + u_\zeta \zeta_x = u_\xi - u_\eta, \qquad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y + u_\zeta \zeta_y = u_\eta + u_\zeta :$$

Քանի որ երկրորդ կարգի ածանցյալների գործակիցները հաստատուններ են, ապա օգտագործելով քառակուսային ձևի կանոնական տեսքը կարող ենք գրել՝

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + (u_\xi - u_\eta) - (u_\eta + u_\zeta) + 0.5u = 2\xi + (\xi + \eta) + 2(-\xi - \eta + \zeta) :$$

Այսպիսով, հավասարման կանոնական տեսքն է՝

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} - u_\xi - 2u_\eta - u_\zeta + 0.5u = \xi - \eta + 2\zeta :$$

Ստացված հավասարումը թույլ է տալիս կատարել հետագա պարզեցումներ: Ներմուծենք նոր՝ $w(\xi, \eta, \zeta)$ ֆունկցիա՝

$$u(\xi, \eta, \zeta) = w(\xi, \eta, \zeta)\ e^{\mu\xi + \nu\eta + \gamma\zeta}$$

բանաձևով: Ունենք

$$u_\xi = (w_\xi + \mu w)\ e^{\mu\xi + \nu\eta + \gamma\zeta}, \qquad u_\eta = (w_\eta + \nu w)\ e^{\mu\xi + \nu\eta + \gamma\zeta}, \qquad u_\xi = (w_\zeta + \gamma w)\ e^{\mu\xi + \nu\eta + \gamma\zeta},$$

$$u_{\xi\xi} = (w_{\xi\xi} + 2\mu w_\xi + \mu^2 w)\ e^{\mu\xi + \nu\eta + \gamma\zeta}, \quad u_{\eta\eta} = (w_{\eta\eta} + 2\nu w_\eta + \nu^2 w)\ e^{\mu\xi + \nu\eta + \gamma\zeta},$$

$$u_{\zeta\zeta} = (w_{\zeta\zeta} + 2\gamma w_\zeta + \gamma^2 w)\ e^{\mu\xi + \nu\eta + \gamma\zeta} :$$

Տեղադրելով կանոնական տեսքի մեջ և բաժանելով աջ և ձախ մասերը $e^{\mu\xi + \nu\eta + \gamma\zeta}$-ի՝ կստանանք

$$w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + w_{\zeta\zeta} + b_1 w_\xi + b_2 w_\eta + b_3 w_\zeta + cw = (\xi - \eta + 2\zeta)\ e^{-\mu\xi - \nu\eta - \gamma\zeta} : \qquad (2.26)$$

Այստեղ $b_1 = 2\mu + 1,\ \ b_2 = -2\nu - 2,\ \ b_3 = 2\gamma - 1,\ \ c = \mu^2 - \nu^2 + \gamma^2 + \mu - 2\nu - \gamma + 0,5$:

Ընտրենք μ, ν և γ թվերը այնպես, որ $b_1 = b_2 = b_3 = 0$: Դրա համար պետք է վերցնել՝ $\mu = -0,5,\ \nu = -1,\ \gamma = 0,5$, որտեղից $c = 1$: Տեղադրելով (2.26)-ի մեջ՝ կստանանք այն կանոնական տեսքը, որը չի պարունակում առաջին կարգի ածանցյալներ:

Պատասխան՝ $\qquad w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + w_{\zeta\zeta} + w = (\xi - \eta + 2\zeta)\ e^{-0,5\xi - \eta + 0,5\zeta},$

$$u(\xi, \eta, \zeta) = w(\xi, \eta, \zeta)\ e^{-0,5\xi - \eta + 0,5\zeta}, \qquad \xi = x, \quad \eta = -x + y, \quad \zeta = y + z :$$

Խնդիրներ

Պարզել հավասարման տիպը.

164. $u_{xy} + u_{yz} + u_{xz} - 3x^2 u_y + y\sin xu + xe^{-y} = 0$:

165. $5u_{xx} + u_{yy} + 5u_{zz} + 4u_{xy} - 8u_{xz} - 4u_{yz} - u + yz^2\sin x = 0$:

166. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_{yz} + 3u_x - u = 0$:

167. $3u_{xx} + 4u_{yy} + 5u_{zz} + 4u_{xy} - 4u_{yz} + 2u_x - u_y + xye^z = 0$:

Բերել կանոնական տեսքի.

168. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0$:

169. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0$:

170. $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0$:

171. $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = 0$:

172. $u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{xz} - 6u_{yz} - u_{zz} = 0$:

173. $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} + 3u_x = 0$:

174. $u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} - u_x + u_y = 0$:

175. $3u_{xy} - 2u_{xz} - u_{yz} - u = 0$:

176. $u_{xx} + 3u_{yy} + 3u_{zz} - 2u_{xy} - 2u_{xz} - 2u_{yz} - 8u = 0$:

177. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 6u_{xy} + 2u_{xz} + 2u_{yz} + 2u_x + 2u_y + 2u_z + 4u = 0$:

178. $2u_{xx} + 5u_{yy} + 2u_{zz} - 6u_{xy} - 4u_{xz} + 6u_{yz} - 3u + y - 2z = 0$:

179. $3u_{yy} - 2u_{xy} - 2u_{yz} + 4u = 0$:

180. $u_{xx} + 4u_{yy} + u_{zz} + 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yz} + 2u = 0$:

181. $u_{xx} + 4u_{yy} + 9u_{zz} + 4u_{xy} + 6u_{xz} + 12u_{yz} - 2u_x - 4u_y - 6u_z = 0$:

182. $u_{xy} + u_{xz} - u_{yz} + 2u_x - 3u = 0$:

183. $u_{xy} - u_{xz} - u_{yz} = 0$:

184. $u_{xy} - 2u_{xz} + u_{yz} + u_x + \frac{1}{2}u_y = 0$:

185. $u_{xy} + u_{zz} + u_x - u_y = 0$:

186. $u_{xy} - u_{xt} + u_{zz} - 2u_{zt} + 2u_{tt} = 0$:

187. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} - 4u_{yz} + 2u_{yt} + u_{zz} = 0$:

188. $u_{xx} + 2u_{xz} - 2u_{xt} + u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 2u_{tt} = 0$:

Բերել կանոնական տեսքի և կատարել հետագա պարզեցումներ.

189. $u_{xy} - u_{xz} - u_x + u_y + u_z + u = 0$:

190. $u_{xy} + u_{yz} + 2u_x - 3u_y + 4u_z - u = 0$:

191. $u_{xx} + u_{xy} + u_{zz} + u_x + u_y + u_z + u = 0$:

192. $u_{yy} - 2u_{xy} + u_{zz} + u_x + u_y + u_z + u = 0$:

193. $u_{xx} - 2u_{xy} - 2u_{xz} + u_x + u_y + 2u_z + u = 0$:

194. $u_{xx} - u_{zz} - 2u_{xy} + u_x + u_y + u_z + u = 0$:

195. $2u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2u_{xy} + 2u_x + u_y + u_z + 4u = 0$:

196. $2u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y + u_z + u = 0$:

197. $3u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_{xy} + 2u_{xz} + 2u_x + 2u_y + 2u_z = 0$:

198. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_{xy} + 2u_{xz} - 2u_{yz} + 2u_x - u_z + u = 0$:

Գլուխ 3. Հիպերբոլական տիպի հավասարումներ

§ 1 Հիպերբոլական հավասարման բերվող պարզագույն խնդիրներ

Հիպերբոլական տիպի հավասարումներն առավել հաճախ հանդիպում են այնպիսի ֆիզիկական խնդիրներում, որոնք կապված են տատանողական պրոցեսների հետ: Դիտարկենք ֆիզիկական խնդիրների օրինակներ, որոնք բերվում են գծային հիպերբոլական տիպի հավասարումների: Կքննարկենք նաև սկզբնական և եզրային պայմանների դրվածքը:

1.1 Լարի լայնական տատանումների հավասարումը: Դիցուք ճկուն, առաձգական, $\rho(x)$ գծային խտություն ունեցող լարը ձգված է T_0 ճիգով: Ենթադրենք, որ հավասարակշռության վիճակում այն ընկած է Oxu կոորդինատային հարթության Ox առանցքի վրա: Լարի շարժումը բնութագրվում է $u(x,t)$ ֆունկցիայի միջոցով, որը ժամանակի t պահին լարի x աբսցիս ունեցող կետի օրդինատն է: $u(x,t)$ ֆունկցիան բավարարում է

$$\rho(x)\, u_{tt} - T_0\, u_{xx} = 0$$

հավասարմանը, որը կոչվում է լարի տատանման հավասարում:

Հաստատուն խտության դեպքում, երբ $\rho = \text{const}$, հավասարումը կարելի է գրել

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \qquad a = \sqrt{T_0/\rho}$$

տեսքով:

Եթե լարի x աբսցիս ունեցող կետում ժամանակի t պահին ազդում է $F(x,t)$ խտությամբ ուժ, ապա նրա շարժումը նկարագրվում է անհամասեռ հավասարմամբ`

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho} :$$

Դիցուք լարը գտնվում է մի միջավայրում, որը դիմադրում է նրա շարժմանը: Կարելի է ընդունել, որ F_η դիմադրության ուժը համեմատական է լարի կետերի արագությանը ($F_\eta = k u_t,\ k > 0$): Այդ դեպքում լարի շարժումը նկարագրող հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը`

$$u_{tt} + b\, u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad b = \frac{k}{\rho} :$$

Դիֆերենցիալ հավասարումներն ունեն անթիվ քանակությամբ լուծումներ: Պրոցեսը միարժեք նկարագրելու համար դիֆերենցիալ հավասարմանը պետք է կցել որոշ լրացուցիչ պայմաններ: Ժամանակի ցանկացած պահին լարի կետերի դիրքը, կամ որ նույնն է $u(x,t)$ ֆունկցիան որոշելու համար անհրաժեշտ է ունենալ ամեն մի կետի դիրքը և արագությունը ժամանակի ինչ որ t_0 պահին: Սովորաբար այդ պահը անվանում են սկզբնական և վերցնում են $t_0 = 0$: Դա նշանակում է, որ $u(x,t)$ ֆունկցիան պետք է բավարարի

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x)$$

պայմաններին, որտեղ $\varphi(x)$ և $\psi(x)$-ը տրված ֆունկցիաներ են: Այդ պայմանները կոչվում են սկզբնական կամ Կոշիի պայմաններ: Եթե φ կամ ψ ֆունկցիաներից որևէ մեկը նույնաբար զրո է, ապա համապատասխան սկզբնական պայմանը կոչվում է համասեռ, հակառակ դեպքում՝ անհամասեռ:

Անվերջ լարի դեպքում միայն սկզբնական պայմաններով լարի դիրքը միարժեք որոշվում է: Կիսաանվերջ կամ վերջավոր լարի դեպքում միայն սկզբնական պայմաները բավարար չեն: Անհրաժեշտ է տալ որոշակի պայմաններ նաև լարի ծայրերում: Դրանք կոչվում են եզրային պայմաններ: Օրինակ, վերջավոր լարի դեպքում ($0 \leqslant x \leqslant \ell$), երբ ծայրերը ամրացված են, եզրային պայմանները կունենան

$$u(0,t) = 0, \qquad u(\ell,t) = 0$$

տեսքը: Եթե լարի ծայրերը շարժվում են ինչ որ օրենքով, ապա եզրային պայմանները կընդունեն

$$u(0,t) = \mu(t), \qquad u(\ell,t) = \nu(t)$$

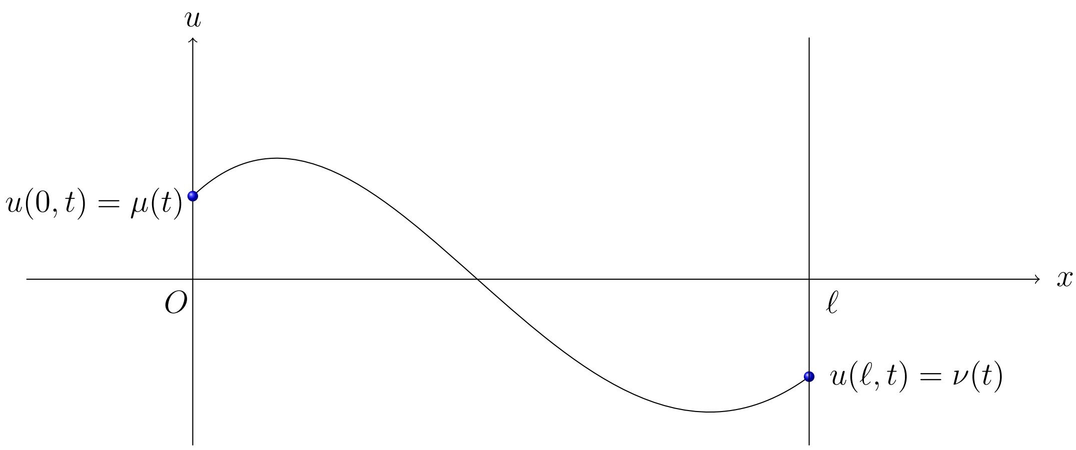
տեսքը, որտեղ $\mu(t)$-ն և $\nu(t)$-ն տրված ֆունկցիաներ են՝ կախված t ժամանակից (նկ. 1):

Հնարավոր են նաև ուրիշ տիպի եզրային պայմաններ: Օրինակ, երբ լարի $x = \ell$ ծայրը ազատ է (բացակայում է արտաքին ուժը), ապա կունենանք

$$u_x(\ell,t) = 0$$

եզրային պայմանը (նկ. 2): Եթե լարի $x = 0$ ծայրը շարժվում է $\mu(t)$ օրենքով, իսկ $x = \ell$ ծայրում ազդում է $\theta(t)$ ուժը, ապա կունենանք

$$u(0,t) = \mu(t), \qquad u_x(\ell,t) = \theta(t)$$



Նկ. 1 Լարի ծայրերը շարժվում են տրված օրենքով:

եզրային պայմանները:

Դիցուք լարի ծայրերից մեկը, օրինակ $x=\ell$, ամրացված է առաձգական զսպանակի: Այդ դեպքում եզրային պայմանն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$u_x(\ell,t)=-hu(\ell,t),$$

որտեղ h-ը զսպանակի կոշտությունը բնութագրող հաստատուն է՝ առաձգականության գործակիցը: Եթե լարի ծայրերը ամրացված են առաձգական զսպանակների (նկ.3) և շարժվում են տրված օրենքով, ապա եզրային պայմանները կլինեն՝

$$u_x(0,t)=h_1(u(0,t)-\chi_1(t)),\qquad u_x(\ell,t)=-h_2(u(\ell,t)-\chi_2(t)):$$

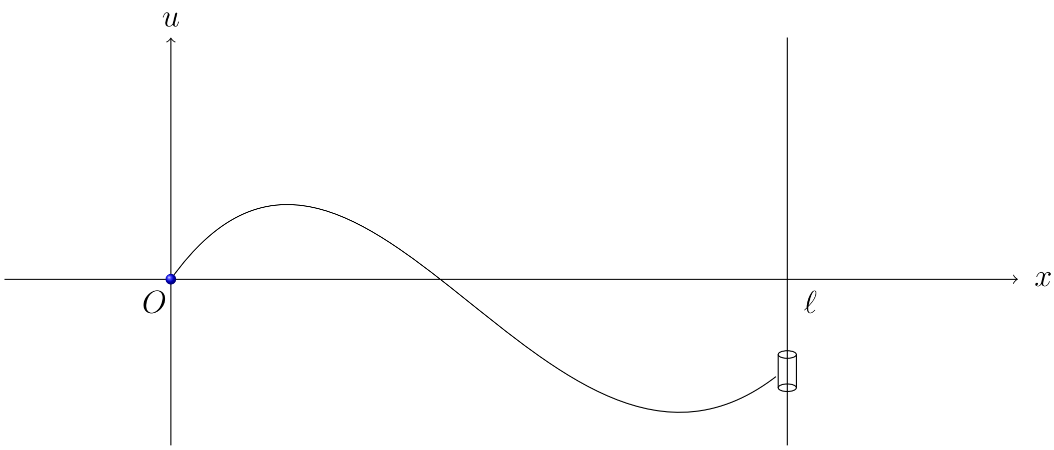
Այսպիսով, $x=0$ ծայրում հիմնական եզրային պայմանները հետևյալ երեքն են՝

- առաջին տիպի՝ $u(0,t)=\mu(t)$ (տրված է շարժման օրենքը),
- երկրորդ տիպի՝ $u_x(0,t)=\theta(t)$ (տրված է ազդող ուժը),
- երրորդ տիպի՝ $u_x(0,t)=h(u(0,t)-\chi(t))$ (առաձգական ամրացում):

Նմանատիպ եզրային պայմաններ կարող են դրվել նաև $x=\ell$ ծայրում:

Եթե աջ մասում գրված $\mu(t),\nu(t)$ կամ $\chi(t)$ ֆունկցիաներից որևէ մեկը զրո է, ապա համապատասխան եզրային պայմանը կոչվում է համասեռ, հակառակ դեպքում՝ անհամասեռ:

1.2 Ձողի երկայնական տատանումների հավասարումը: Ձողը հաստատուն լայնական կտրվածք ունեցող առաձգական գլանային



Նկ. 2 Լարի ձախ ծայրը ամրացված է, իսկ աջ ծայրը՝ ազատ: Լարի աջ ծայրում առնի է, որը շարժվում է առանց շփման:

մարմին է: $Oxyz$ կոորդինատային համակարգը ընտրենք այնպես, որ Ox աբսցիսների առանցքը ուղղվի ձողի երկայնքով: Երկայնական տատանումների դեպքում ձողի լայնական հատույթի բոլոր կետերը տեղափոխվում են Ox առանցքի ուղղությամբ և ունեն նույն աբսցիսը, որը կանվանենք հատույթի կոորդինատ: Դիցուք այն հատույթը, որը ձողի հավասարակշռության վիճակում ուներ x կոորդինատը, ժամանակի t պահին ունի $v(x,t)$ կոորդինատը: Երկայնական տատանումները նկարագրվում են $u(x,t) = v(x,t) - x$ ֆունկցիայի միջոցով: Այն բավարարում է

$$(E(x)u_x)_x - \rho(x)\, u_{tt} = F(x,t),$$

հավասարմանը, որտեղ $F(x,t)$-ն t պահին ձողի առանցքի x կոորդինատ ունեցող կետում ազդող ուժի խտությունն է, $E(x)$-ը՝ առաձգականության գործակիցը, $\rho(x)$-ը՝ խտությունը: Եթե ձողը համասեռ է ($E = \mathrm{const}$, $\rho = \mathrm{const}$), հավասարումը կգրվի

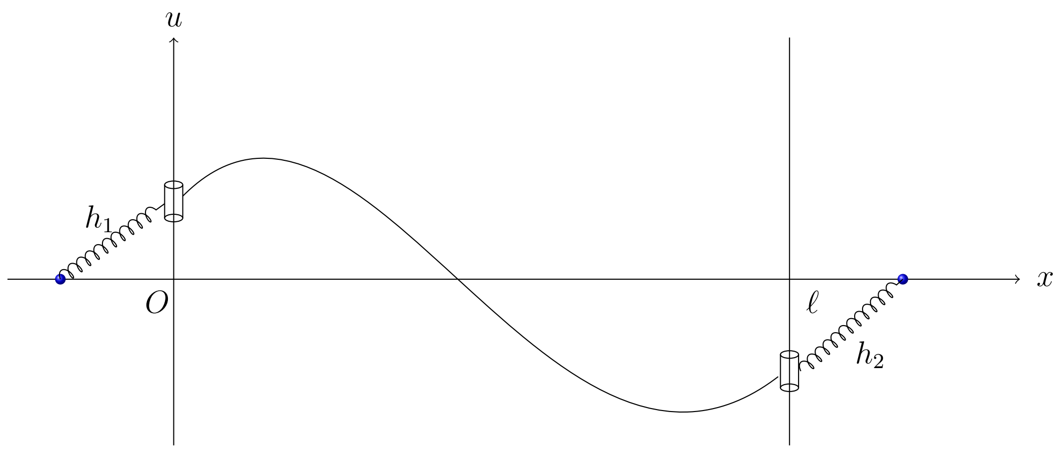
$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad a = \sqrt{E/\rho}, \;\; f(x,t) = F(x,t)/\rho$$

տեսքով:

` Այդ հավասարումներից յուրաքանչյուրի համար Կոշիի խնդիրը ձևակերպվում է այսպես. գտնել այն լուծումը, որը բավարարում է

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x)$$

սկզբնական պայմաններին, որտեղ $\varphi(x)$-ը ձողի կետերի սկզբնական շեղումն



Նկ. 3 Առաձգական ամրացում. h_1, h_2 -ը զսպանակների առաձգականության գործակիցներն են:

է, $\psi(x)$ -ը՝ արագությունը:

Վերջավոր ձողի դեպքում, երբ այն զբաղեցնում է Ox առանցքի $[0,\ell]$ հատվածը, դրվում են նաև առաջին, երկրորդ կամ երրորդ տիպի եզրային պայմաններ:

1.3 Էլեկտրական տատանումների հավասարումը: Հաղորդալարով հոսող էլեկտրական հոսանքը բնութագրվում է I հոսանքի ուժով և E լարվածությամբ: Այդ մեծությունները կախված են հաղորդալարի x կետից և ժամանակի t պահից: $I(x,t)$ և $E(x,t)$ ֆունկցիաները բավարարում են

$$I_{xx} = CLI_{tt} + (CR + GL)I_t + GRI$$

$$E_{xx} = CLE_{tt} + (CR + GL)E_t + GRE$$

հավասարումներին, որտեղ R-ը միավոր երկարության հաղորդալարի էլեկտրական դիմադրությունն է, L-ը՝ ինքնինդուկցիայի գործակիցը, C-ն՝ ունակությունը, G-ն՝ հոսքը հաղորդալարի մակերևույթից:

Եթե հաղորդալարի մակերևույթը մեկուսացված է՝ $G \approx 0$ և դիմադրությունը շատ փոքր է՝ $R \approx 0$, ապա այդ հավասարումները վեր են ածվում տատանման հավասարումների՝

$$I_{tt} - a^2 I_{xx} = 0, \qquad E_{tt} - a^2 E_{xx} = 0, \qquad a = \sqrt{\frac{1}{LC}}\ :$$

1.4 Մեմբրանի լայնական տատանումների հավասարումը: Մեմբրան է կոչվում հարթ թաղանթը, որը չի դիմադրում ծռմանը: Դիցուք մեմբրանը վերագրված է $Oxyz$ ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգի

Oxy հարթությանը: Ենթադրվում է, որ մեմբրանի կետերը տեղաշարժվում են Oz առանցքի ուղղությամբ: Եթե $u(x,y,t)$-ով նշանակենք ժամանակի t պահին մեմբրանի x աբսցիս, y օրդինատ ունեցող կետի ապլիկատը, ապա այն բավարարում է

$$\rho\, u_{tt} - T_0\,(u_{xx} + u_{yy}) = F(x,y,t)$$

հավասարմանը, որտեղ T_0-ն լարումն է, $\rho = \rho(x,y)$-ը մակերևութային խտությունը, $F(x,y,t)$-ն արտաքին ուժի խտությունը: Այն կոչվում է մեմբրանի տատանման հավասարում:

Համասեռ մեմբրանի դեպքում $(\rho = \text{const})$ հավասարումը կգրվի

$$u_{tt} - a^2\,(u_{xx} + u_{yy}) = f(x,y,t), \qquad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad f(x,y,t) = \frac{F(x,y,t)}{\rho},$$

տեսքով:

1.5 Հիդրոդինամիկայի և ակուստիկայի հավասարումները: Հեղուկների և գազերի շարժումը բնութագրվում է $v_1(x,y,z,t)$, $v_2(x,y,z,t)$, $v_3(x,y,z,t)$ ֆունկցիաներով, որոնք ժամանակի t պահին (x,y,z) կետում $\vec{v}$ արագության վեկտորի կոմպոնենտներն են, ինչպես նաև $\rho(x,y,z,t)$ խտությունով, $p(x,y,z,t)$ ճնշումով և արտաքին ուժերի $\vec{F}(x,y,z,t)$ խտությունով: Այդ մեծությունները բավարարում են հիդրոդինամիկայի հավասարումների համակարգին՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = \vec{F} - \dfrac{1}{\rho}\nabla p & \text{իդեալական հեղուկի շարժման հավասարումը,} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0 & \text{անխզելիության հավասարումը,} \\ p = f(\rho) & \text{թերմոդինամիկական վիճակի հավասարումը,} \end{cases}$$

որտեղ

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z},$$

հետևաբար

$$\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = v_1\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_2\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_3\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}, \qquad \nabla p = \vec{i}\,\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial p}{\partial z},$$

$$\nabla\cdot(\rho\vec{v}) = \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial z}\,:$$

Դիտարկենք գազերում ձայնի տարածման խնդիրը: Ենթադրենք՝

- արտաքին ուժերը բացակայում են՝ $\vec{F} = 0$.

- ձայնի տարածման պրոցեսը ադիաբատ է՝

$$f(\rho) = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \quad \text{կամ} \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \qquad \left(\gamma = \frac{C_p}{C_V}\right),$$

  որտեղ ρ_0-ն գազի սկզբնական խտությունն է, p_0-ն սկզբնական ճնշումը, C_p-ն և C_V-ն ջերմունակություններն են հաստատուն ճնշման և ծավալի դեպքում.

- գազի տատանումները փոքր են՝ արագության և խտության փոփոխությունները կարելի է անտեսել:

Այդ դեպքում արագության $U = -\nabla \cdot \vec{v}$ պոտենցիալը բավարարում է

$$U_{tt} - a^2(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = 0$$

հավասարմանը, որտեղ $a = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ ձայնի արագությունն է:

Նման տեսքի հավասարումների են բավարարում նաև p ճնշումը և $\vec{v}$ արագությունը, որոնք կոչվում են ակուստիկայի հավասարումներ:

§ 2 Կոշիի խնդիրը

2.1 Կոշիի խնդիրը երկու անկախ փոփոխականների դեպքում: Բնութագրիչների մեթոդը: Դիտարկենք հիպերբոլական տիպի

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} + b_1(x,y)u_x + b_2(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), \quad (3.1)$$

հավասարումը, որտեղ $u = u(x,y)$ անհայտ ֆունկցիան է, իսկ $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2$ գործակիցները և f աջ մասը տրված անընդհատ ֆունկցիաներ են, $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$:

Դիցուք Oxy կոորդինատային հարթությունում ունենք S ողորկ կոր, որը տրվում է $y = g(x)$, $g \in C^1(R)$ (կամ $x = h(y)$, $h \in C^1(R)$) հավասարումով, և որի ոչ մի կետում շոշափողը չի համընկնում այդ կետով անցնող բնութագրիչ կորի շոշափողի հետ: Տրված է նաև S կորի վրա որոշված $l(x,y)$ վեկտորը, որը ցանկացած $(x,y) \in S$ կետում չունի շոշափողի ուղղությունը: Նշանակենք $\Omega = \{(x,y) \mid x \in \mathrm{R},\ y < g(x)$ (կամ $y > g(x)$)$\}$: Պահանջվում է գտնել $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ֆունկցիա, որը Ω տիրույթում բավարարում է (3.1) հավասարմանը և

$$u\Big|_{y=g(x)} = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{y=g(x)} = \psi(x), \quad (3.2)$$

պայմաններին, որտեղ $\varphi(x)$-ը և $\psi(x)$-ը տրված ֆունկցիաներ են: Այդ պայմանները կոչվում են Կոշիի պայմաններ, իսկ (3.1)-(3.2) խնդիրը` Կոշիի խնդիր:

Եթե $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2$ գործակիցները և f աջ մասը անընդհատ են Ω տիրույթում, $\varphi \in C^1(R)$, $\psi \in C(R)$, ապա (3.1)-(3.2) խնդրն ունի միակ լուծում:

Դիցուք գտնվել է (3.1) հավասարման ընդհանուր լուծումը, որը կպարունակի մեկ փոփոխականից կախված երկու կամայական ֆունկցիաներ: Կոշիի խնդիրը լուծելու համար պետք է այդ ֆունկցիաներն ընտրել այնպես, որ բավարարվեն (3.2) Կոշիի պայմանները: (3.1) հավասարումը, և հետևաբար Կոշիի խնդիրը, երբեմն հնարավոր է լինում լուծել բնութագրիչների մեթոդով:

Օրինակ 3.1: Լուծել Կոշիի խնդիրը. $\begin{cases} y^2 u_{xy} + u_{yy} - \dfrac{2}{y} u_y = 0, \quad y > 0, \\ u\big|_{y=1} = 1 - x, \qquad u_y\big|_{y=1} = 3 : \end{cases}$

Լուծում: Գտնենք հավասարման ընդհանուր լուծումը: Կազմենք բնութագրիչ հավասարումը` $-y^2 dxdy + (dx)^2 = 0,$ որի ընդհանուր ինտեգրալներն են` $x = c,\ 3x - y^3 = c :$ Կատարելով $\xi = x,\ \eta = 3x - y^3$ փոփոխականների փոխարինումը, հավասարումը կբերվի կանոնական տեսքի` $u_{\xi\eta} = 0,$ որի ընդհանուր լուծումն է` $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$: Անցնելով (x, y) փոփոխականների` կստանանք հավասարման ընդհանուր լուծումը` $u(x, y) = f(x) + g(3x - y^3)$:

f և g ֆունկցիաները որոշենք սկզբնական պայմաններից`

$$\begin{cases} f(x) + g(3x - 1) = 1 - x, \\ -3g'(3x - 1) = 3 : \end{cases}$$

Ածանցելով առաջին հավասարումը` $f'(x) + 3g'(3x - 1) = -1$, և երկրորդից տեղադրելով $g'(3x - 1) = -1$, կստանանք $f'(x) = 2$, որտեղից` $f(x) = 2x + c$:

Առաջին հավասարումից` $g(3x - 1) = 1 - x - f(x) = 1 - 3x - c$: Այստեղ $x$-ի փոխարեն տեղադրելով $(x + 1)/3$, կստանանք $g(x) = -x - c$: Այսպիսով, խնդրի լուծումն է`

$$u(x, y) = f(x) + g(3x - y^3) = 2x + c - (3x - y^3) - c = y^3 - x :$$

Պատասխան` $u(x, y) = y^3 - x :$

Օրինակ 3.2: Լուծել Կոշիի խնդիրը. $\begin{cases} u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0, \\ u(x, y)\big|_{x=0} = \varphi(y), \quad u_x(x, y)\big|_{x=0} = \psi(y) : \end{cases}$

Լուծում: Գտնենք հավասարման ընդհանուր լուծումը: Բնութագրիչ հավասարումն է՝

$$(dy)^2 + 2dxdy = 0,$$

որի ընդհանուր ինտեգրալներն են՝ $y = c, \;\; y + 2x = c$:

Կատարելով $\xi = y, \;\; \eta = y + 2x$ փոփոխականների փոխարինումը՝ հավասարումը կբերվի կանոնական տեսքի՝ $u_{\xi\eta} = e^{\xi}$, որտեղից

$$u(\xi, \eta) = \eta e^{\xi} + f(\xi) + g(\eta) :$$

Անցնելով (x, y) փոփոխականների՝ կստանանք հավասարման ընդհանուր լուծումը՝

$$u(x, y) = (y + 2x)e^y + f(y) + g(y + 2x)),$$

որտեղ f-ը և g-ն կամայական ֆունկցիաներ են: Օգտվելով սկզբնական պայմաններից այդ ֆունկցիաների որոշման համար կստացվի հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} f(y) + g(y) = \varphi(y) - ye^y, \\ g'(y) = \dfrac{1}{2}\psi(y) - e^y : \end{cases}$$

Երկրորդ հավասարումից ունենք

$$g(y) = \frac{1}{2}\int\limits_0^y \psi(\eta)d\eta - e^y + c :$$

Տեղադրելով համակարգի առաջին հավասարման մեջ՝

$$f(y) + \frac{1}{2}\int\limits_0^y \psi(\eta)d\eta - e^y + c = \varphi(y) - ye^y,$$

կստանանք՝

$$f(y) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^y \psi(\eta)d\eta + e^y - c + \varphi(y) - ye^y :$$

Ստացված f և g ֆունկցիաները տեղադրենք ընդհանուր լուծման բանաձևի մեջ՝

$$u(x, y) = (y + 2x)e^y + \varphi(y) - ye^y + e^y - c - \frac{1}{2}\int\limits_0^y \psi(\eta)d\eta + \frac{1}{2}\int\limits_0^{y+2x} \psi(\eta)d\eta - e^{y+2x} + c :$$

Օգտվելով

$$\int\limits_0^{y+2x} \psi(\eta)d\eta - \int\limits_0^{y} \psi(\eta)d\eta = \int\limits_y^{y+2x} \psi(\eta)d\eta$$

նույնությունից և կատարելով նման անդամների միացում՝ կստանանք խնդրի լուծումը:

Պատասխան՝ $$u(x,y) = (1+2x-e^{2x})e^y + \varphi(y) + \frac{1}{2}\int\limits_y^{2x+y} \psi(\eta)d\eta :$$

Օրինակ 3.3: Լուծել Կոշիի խնդիրը.

$$\begin{cases} u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0, \\ u(x,y)\big|_{y=\sin x} = x + \cos x, \quad u_y(x,y)\big|_{y=\sin x} = \sin x : \end{cases}$$

Լուծում: Գտնենք հավասարման ընդհանուր լուծումը: Բնութագրիչ հավասարումն է՝

$$(dy)^2 - 2\cos x dx dy - \sin^2 x (dx)^2 = 0,$$

որը տրոհվում է երկու՝

$$\left[\begin{array}{l} dy = (\cos x - 1)dx, \\ dy = (\cos x + 1)dx \end{array}\right.$$

հավասարումների: Ընդհանուր ինտեգրալներն են՝

$$\left[\begin{array}{l} y - \sin x + x = c, \\ y - \sin x - x = c \end{array}\right.$$

Կատարելով

$$\begin{cases} \xi = y - \sin x + x, \\ \eta = y - \sin x - x \end{cases}$$

փոփոխականների փոխարինումը, կստանանք կանոնական տեսքը՝ $u_{\xi\eta} = 0$: Ընդհանուր լուծումն է՝ $u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$, իսկ (x,y) փոփոխականներով՝

$$u(x,y) = f(y - \sin x + x) + g(y - \sin x - x)$$

Օգտվելով սկզբնական պայմաններից f և g ֆունկցիաների որոշման համար կստացվի

$$\begin{cases} f(x)+g(-x)=x+\cos x, \\ f'(x)+g'(-x)=\sin x \end{cases}$$

համակարգը:

Առաջին հավասարումն ածանցենք`

$$f'(x)-g'(-x)=1-\sin x,$$

և գումարենք երկրորդ հավասարմանը, կստանանք $2f'(x)=1$, որտեղից` $f(x)=x/2+c$:

Առաջին հավասարումից`

$$x/2+c+g(-x)=x+\cos x$$

կամ

$$g(-x)=x-x/2+\cos x-c=x/2+\cos x-c,$$

որտեղից, տեղադրելով x-ի փոխարեն $-x$, կստանանք

$$g(x)=-x/2+\cos x-c:$$

Տեղադրելով ստացված f և g ֆունկցիաներն ընդհանուր լուծման բանաձևի մեջ, ստանում ենք խնդրի լուծումը`

$$u(x,y)=\frac{y-\sin x+x}{2}+c+\frac{-(y-\sin x-x)}{2}+\cos(y-\sin x-x)-c=$$
$$=x+\cos(y-\sin x-x):$$

Պատասխան` $u(x,y)=x+\cos(y-\sin x-x)$:

Օրինակ 3.4: Լուծել Կոշիի խնդիրը.

$$\begin{cases} 3u_{xx}-5u_{xy}+2u_{yy}=0, \\ u(x,y)\big|_{y=x}=\dfrac{x}{1+x^2}, \quad u_y(x,y)\big|_{y=x}=\sin x: \end{cases}$$

Լուծում: Գտնենք հավասարման ընդհանուր լուծումը: Բնութագրիչ հավասարումն է` $3(dy)^2+5dxdy+2(dx)^2=0$: Գտնենք ընդհանուր ինտեգրալները՝

$$\left[\begin{array}{l} 3dy = \left(-\dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}\right) dx, \\ 3dy = \left(-\dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}\right) dx : \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} dy + dx = 0, \\ 3dy + 2dx = 0 : \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y + x = c, \\ 3y + 2x = c : \end{array}\right.$$

Կատարելով

$$\begin{cases} \xi = y + x, \\ \eta = 2x + 3y : \end{cases}$$

փոփոխականների փոխարինումը, հավասարումը կբերվի $u_{\xi\eta} = 0$ կանոնական տեսքի, որտեղից $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$: Անցնելով (x, y) փոփոխականների կստանանք հավասարման ընդհանուր լուծումը՝

$$u(x, y) = f(x + y) + g(2x + 3y) : \tag{3.3}$$

Կոշիի պայմաններից f և g ֆունկցիաների որոշման համար կստացվի

$$\begin{cases} f(2x) + g(5x) = \dfrac{x}{1 + x^2}, \\ f'(2x) + 3g'(5x) = \sin x \end{cases}$$

համակարգը: Երկրորդ հավասարումից՝

$$\frac{1}{2} f(2x) + \frac{3}{5} g(5x) = -\cos x + c,$$

կամ

$$f(2x) = -\frac{6}{5} g(5x) - 2\cos x + 2c :$$

Տեղադրենք առաջին հավասարման մեջ՝

$$g(5x) = -10\cos x - \frac{5x}{1 + x^2} + 10c, \tag{3.4}$$

և x-ի փոխարեն տեղադրենք $x/5$, կստանանք՝

$$g(x) = -10\cos\frac{x}{5} - \frac{25x}{25 + x^2} + 10c :$$

(3.4)-ը տեղադրենք համակարգի առաջին հավասարման մեջ՝

$$f(2x) = 10\cos x + \frac{6x}{1 + x^2} - 10c,$$

որտեղից կստանանք՝

$$f(x) = 10\cos\frac{x}{2} + \frac{12x}{4+x^2} - 10c :$$

Տեղադրելով (3.3)-ի մեջ՝ կստացվի խնդրի լուծումը՝

$$u(x,y) = 10\cos\frac{x+y}{2} + \frac{12(x+y)}{4+(x+y)^2} - 10c +$$
$$+\left(-10\cos\frac{2x+3y}{5} - \frac{25(2x+3y)}{25+(2x+3y)^2} + 10c\right) :$$

Պատասխան՝

$$u(x,y) = \frac{12(x+y)}{4+(x+y)^2} + 10\cos\frac{x+y}{2} - \frac{25(2x+3y)}{25+(3x+3y)^2} - 10\cos\frac{2x+3y}{5} :$$

Օրինակ 3.5: Լուծել Կոշիի խնդիրը.

$$\begin{cases} e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = xe^{2y}, \\ u(x,y)\big|_{y=0} = \sin x, \quad u_y(x,y)\big|_{y=0} = \dfrac{1}{1+x^2} : \end{cases}$$

Լուծում: Գտնենք հավասարման ընդհանուր լուծումը: Բնութագրիչ հավասարումն է՝ $-e^y dydx - (dx)^2 = 0$: Գտնենք ընդհանուր ինտեգրալները՝

$$\left[\begin{array}{c} dx = 0, \\ e^y dy + dx = 0 : \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{c} x = c, \\ e^y + x = c : \end{array}\right.$$

Կատարելով

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = e^y + x \end{cases}$$

փոփոխականների փոխարինումը՝ կստանանք $u_{\xi\eta} = \xi$ կանոնական տեսքը: Ընդհանուր լուծումն է՝

$$u(\xi,\eta) = \frac{\xi^2\eta}{2} + f(\xi) + g(\eta),$$

որտեղից

$$u(x,y) = \frac{x^2(e^y+x)}{2} + f(x) + g(e^y+x) :$$

Գտնենք f և g ֆունկցիաները օգտվելով Կոշիի պայմաններից:

$u(x,y)\big|_{y=0} = \sin x$ պայմանից՝

$$\frac{x^2(1+x)}{2} + f(x) + g(1+x) = \sin x: \tag{3.5}$$

Ընդհանուր լուծման բանաձևից՝

$$u_y = \frac{x^2e^y}{2} + e^y g'(e^y+x):$$

Տեղադրելով այստեղ $y=0$ և օգտվելով $u_y(x,y)|_{y=0} = \dfrac{1}{1+x^2}$ պայմանից, կստացվի՝

$$\frac{x^2}{2} + g'(1+x) = \frac{1}{1+x^2},$$

կամ

$$g'(1+x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2} - \frac{(x-1)^2}{2}:$$

Այսպիսով

$$g(x) = \operatorname{arctg}(x-1) - \frac{(x-1)^3}{6} + c:$$

x-ի փոխարեն տեղադրենք $(1+x)$՝ կստանանք $g(1+x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{x^3}{6} + c:$

Ստացվածը տեղադրենք (3.5)- մեջ՝

$$\frac{x^2(1+x)}{2} + f(x) + \operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{6} + c = \sin x:$$

Այստեղից կստանանք f ֆունկցիան՝

$$f(x) = \sin x - \frac{x^2(1+x)}{2} - \operatorname{arctg} x + \frac{x^3}{6} - c = \sin x - \frac{x^2(3+2x)}{6} - \operatorname{arctg} x - c:$$

Կոշիի խնդրի լուծումը կստացվի ընդհանուր լուծման բանաձևից՝

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{x^2(e^y+x)}{2} + \sin x - \frac{x^2(3+2x)}{6} - \operatorname{arctg} x - c + \\ &\quad + \operatorname{arctg}(e^y+x-1) - \frac{(e^y+x-1)^3}{6} + c = \\ &= \frac{x^2(e^y-1)}{2} + \sin x - \frac{x^3-(x-e^y-1)}{6} - \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(e^y+x-1): \end{aligned}$$

Պատասխան՝

$$u(x,y) = \frac{1}{2}x^2(e^y-1) + \sin x + \frac{x^3-(x-e^y-1)^3}{6} + \operatorname{arctg}(x-e^y-1) - \operatorname{arctg} x:$$

Օրինակ 3.6: Լուծել Կոշիի խնդիրը.

$$\begin{cases} y^{10}u_{xx} - u_{yy} + 5y^4 u_x = 0, \quad x > 0, \ \ y > 0, \\ u(x,y)\big|_{y=0} = x^2, \quad u_y(x,y)\big|_{y=0} = 4 : \end{cases}$$

Լուծում: Գտնենք հավասարման ընդհանուր լուծումը: Բնութագրիչ հավասարումն է՝ $y^{10}(dy)^2 - (dx)^2 = 0$: Ստանանք ընդհանուր ինտեգրալները՝

$$\left[\begin{array}{l} y^5 dy + dx = 0, \\ y^5 dy - dx = 0 : \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 6x + y^6 = c, \\ 6x - y^6 = c : \end{array}\right.$$

Կատարելով

$$\begin{cases} \xi = 6x + y^6, \\ \eta = 6x - y^6 \end{cases}$$

փոփոխականների փոխարինումը, հավասարումը կբերվի

$$u_{\xi\eta} + \frac{5}{6(\xi - \eta)}\, u_\eta = 0$$

կանոնական տեսքի: Նշանակելով $v = u_\eta$, v-ի նկատմամբ կստացվի

$$v_\xi + \frac{5}{6(\xi - \eta)}\, v = 0$$

հավասարումը, որը, եթե η-ն համարենք պարամետր, անջատվող փոփոխականներով սովորական դիֆերենցիալ հավասարում է: Լուծենելով այն, կստանանք՝

$$v(\xi,\eta) = (\xi - \eta)^{-5/6} g(\eta),$$

որտեղ g-ն կամայական ֆունկցիա է: u-ի նկատմամբ կստացվի

$$u_\eta = (\xi - \eta)^{-5/6} g(\eta)$$

հավասարումը, որտեղից՝

$$u(\xi,\eta) = \int_0^\eta (\xi - s)^{-5/6} g(s) ds + f(\xi) : \tag{3.6}$$

Հավասարման ընդհանուր լուծումը ստանալու համար անցնենք (x, y) փոփոխականների՝ տեղադրելով (3.6)-ի մեջ $\xi = 6x + y^6$, $\eta = 6x - y^6$:

Ստանում ենք

$$u(x,y) = \int\limits_0^{6x-y^6} (6x+y^6-s)^{-5/6} g(s)ds + f(6x+y^6) : \tag{3.7}$$

Այստեղ f-ը և g-ն մինչև երկրորդ կարգի անընդհատ ածանցյալ ունեցող կամայական ֆունկցիաներ են: Գտնենք այդ ֆունկցիաները՝ օգտվելով Կոշիի պայմաններից:

$u(x,y)\big|_{y=0} = x^2$ պայմանից՝

$$\lim_{y\to 0} \int\limits_0^{6x-y^6} (6x+y^6-s)^{-5/6} g(s)ds + f(6x) = x^2 : \tag{3.8}$$

Ունենք

$$u_y = (6x+y^6-(6x-y^6))^{-5/6} g(6x-y^6)(-6y^5) - \frac{5}{6}\cdot 6y^5 \int\limits_0^{6x-y^6} (6x+y^6-s)^{-11/6} g(s)ds +$$

$$+6y^5 f'(6x+y^6) = -6\cdot 2^{-5/6} g(6x-y^6) - 5y^5 \int\limits_0^{6x-y^6} (6x+y^6-s)^{-11/6} g(s)ds + 6y^5 f'(6x+y^6) :$$

$u_y(x,y)\big|_{y=0} = 4$ պայմանից՝

$$-6\cdot 2^{-5/6} g(6x) - 5\lim_{y\to 0}\left(y^5 \int\limits_0^{6x-y^6} (6x+y^6-s)^{-11/6} g(s)ds \right) = 4 : \tag{3.9}$$

Հաշվենք սահմանը.

$$\lim_{y\to 0}\left(y^5 \int\limits_0^{6x-y^6} (6x+y^6-s)^{-11/6} g(s)ds \right) = \frac{6}{5}\lim_{y\to 0}\left(y^5 \int\limits_0^{6x-y^6} g(s)d\left(\left(6x+y^6-s\right)^{-5/6} \right) \right) =$$

$$= \frac{6}{5}\lim_{y\to 0} y^5 \left(\left(6x+y^6-s\right)^{-5/6} g(s)\Big|_{s=0}^{s=6x-y^6} - \int\limits_0^{6x-y^6} \left(6x+y^6-s\right)^{-5/6} g'(s)ds \right) =$$

$$= \frac{6}{5}\lim_{y\to 0} y^5\left(\left(2y^6\right)^{-5/6} g(6x-y^6)-(6x+y^6)^{-5/6}g(0)+6\int\limits_0^{6x-y^6} g'(s)d\left((6x+y^6-s)^{1/6}\right)\right) =$$

$$= \frac{6}{5}\left(2^{-5/6}g(6x)-g(0)\lim_{y\to 0}\left(\frac{6x}{y^6}+1\right)^{-5/6}+6\lim_{y\to 0}\left(y^5\int\limits_0^{6x-y^6} g'(s)d(6x+y^6-s)^{1/6}\right)\right) =$$

$$= \frac{6}{5}\cdot 2^{-5/6}g(6x)+6\lim_{y\to 0} y^5\left((6x+y^6-s)^{1/6}g'(s)\Big|_{s=0}^{s=6x-y^6} - \int\limits_0^{6x-y^6}(6x+y^6-s)^{1/6}g''(s)ds\right) =$$

$$= \frac{6}{5}\cdot 2^{-5/6}g(6x) \,:$$

Տեղադրենք (3.9)-ի մեջ՝ կստանանք

$$-6\cdot 2^{-5/6}g(6x)-5\left(\frac{6}{5}\cdot 2^{-5/6}g(6x)\right)=4,$$

որտեղից

$$g(6x)\equiv -\frac{1}{3}\cdot 2^{5/6} \quad \text{կամ} \quad g(x)\equiv -\frac{1}{3}\cdot 2^{5/6} \,: \qquad (3.10)$$

f ֆունկցիան ստանալու համար (3.10)-ը տեղադրենք (3.8)-ի մեջ՝

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_0^{6x-y^6}(6x+y^6-s)^{-5/6}\left(-\frac{1}{3}\cdot 2^{5/6}\right)ds+f(6x)=x^2 \,: \qquad (3.11)$$

Հաշվենք սահմանը.

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_0^{6x-y^6}(6x+y^6-s)^{-5/6}\left(-\frac{1}{3}\cdot 2^{5/6}\right)ds = -\frac{1}{3}\cdot 2^{5/6}\lim_{y\to 0}\left(-6(6x+y^6-s)^{1/6}\Big|_{s=0}^{s=6x-y^6}\right) =$$

$$= 2\cdot 2^{5/6}\lim_{y\to 0}\left((2y)^{1/6}-(6x+y^6)^{1/6}\right) = -2^{11/6}\cdot(6x)^{1/6} \,:$$

Տեղադրելով (3.11)-ի մեջ՝ կստանանք

$$f(6x)=x^2+2^{11/6}\cdot(6x)^{1/6} \quad \text{կամ} \quad f(x)=\left(\frac{x}{6}\right)^2+2^{11/6}\cdot x^{1/6} \,: \qquad (3.12)$$

Տեղադրելով (3.10)-ը և (3.12)-ը ընդհանուր լուծման (3.7) բանաձևի մեջ, կստանանք խնդրի լուծումը.

$$u(x,y)=\int\limits_0^{6x-y^6}(6x+y^6-s)^{-5/6}\left(-\frac{1}{3}\cdot 2^{5/6}\right)ds+\left(\frac{6x+y^6}{6}\right)^2+2^{11/6}\cdot(6x+y^6)^{1/6} =$$

$$= 2\cdot 2^{5/6}\left((2y)^{1/6}-(6x+y^6)^{1/6}\right)+\left(x+\frac{y^6}{6}\right)^2+2^{11/6}(6x+y^6)^{1/6} = \left(x+\frac{y^6}{6}\right)^2+4y \,:$$

Պատասխան՝ $u(x,y) = \left(x + \dfrac{y^6}{6}\right)^2 + 4y$:

Օրինակ 3.7: Լուծել Կոշիի խնդիրը. $\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} - 2u_x - 2u_y = 4, \\ u\big|_{y=0} = -x, \qquad u_y\big|_{y=0} = x - 1 : \end{cases}$

Լուծում: Գտնենք հավասարման ընդհանուր լուծումը: Բնութագրիչ հավասարումն է՝ $(dy)^2 - (dx)^2 = 0$: Ընդհանուր ինտեգրալներն են՝

$$y + x = \ c, \qquad y - x = c :$$

Փոփոխականների $\xi = y + x,\ \ \eta = y - x$ փոխարինումով հավասարումը կբերվի $u_{\xi\eta} + u_\xi = -1$ կանոնական տեսքի: Կատարելով $v = u_\xi$ նշանակումը՝ v-ի նկատմամբ կստացվի $v_\eta + v = -1$ հավասարումը: Այն, եթե ξ-ն համարենք պարամետր, անջատվող փոփոխականներով սովորական դիֆերենցիալ հավասարում է: Լուծելով՝ կստանանք

$$v(\xi,\eta) = f_1(\xi)e^{-\eta} + 1,$$

որտեղ $f_1(\xi)$-ն կամայական ֆունկցիա է:

u-ի նկատմամբ կստացվի $u_\xi = f_1(\xi)e^{-\eta} + 1$ հավասարումը: Այն ինտեգրելով ըստ ξ-ի՝ կունենանք

$$u(\xi,\eta) = f_2(\xi)e^{-\eta} + g(\eta) - \xi,$$

որտեղ f_2-ը և g-ն կամայական դիֆերերենցելի ֆունկցիաներ են:

Հավասարման ընդհանուր լուծումը ստանալու համար անցնենք (x,y) փոփոխականների՝ տեղադրելով $\xi = y + x,\ \ \eta = y - x$.

$$u(x,y) = f_2(x+y)e^{x-y} + g(y-x) - y - x :$$

Ստացվածը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$u(x,y) = e^{2x}f(x+y) + g(y-x) - y - x :$$

f և g ֆունկցիաները որոշենք Կոշիի պայմաններից: $u\big|_{y=0} = -x$ պայմանից՝ $e^{2x}f(x) + g(-x) - x = -x$: Ունենք

$$u_y = e^{2x}f'(y+x) + g'(y-x) - 1 :$$

$u_y\big|_{y=0} = x - 1$ պայմանից՝ $e^{2x}f'(x) + g'(-x) - 1 = x - 1$:

Ստացվեց հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} e^{2x}f(x) + g(-x) = 0, \\ e^{2x}f'(x) + g'(-x) = x : \end{cases}$$

Առաջին հավասարման աջ և ձախ մասերը ածանցելով և գումարելով երկրորդ հավասարմանը, կստանանք հետևյալ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումը

$$f'(x) + f(x) = \frac{1}{2}xe^{-2x},$$

որի ընդհանուր լուծումն է՝

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} + c\, e^{-x}, \qquad c \in \mathrm{R} :$$

Տեղադրենք $f(x)$-ը համակարգի առաջին հավասարման մեջ՝

$$g(-x) = e^{2x}\left(\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} - c\, e^{-x}\right) = \frac{1}{2}(x+1) - c\, e^{x} :$$

Այստեղ տեղադրելով x-ի փոխարեն $-x$, ստանում ենք՝

$$g(x) = \frac{1}{2}(1-x) - c\, e^{-x} :$$

Կոշիի խնդրի լուծումը կստացվի հավասարման ընդհանուր լուծումից՝ f ֆունկցիայի արգումենտում տեղադրելով $x+y$, իսկ g ֆունկցիայի արգումենտում՝ $x-y$: Այսպիսով,

$$u(x,y) = e^{2x}\left(-\frac{1}{2}(y+x+1)e^{-2(y+x)} + c\, e^{-y-x}\right) + \frac{1}{2}(1-y+x) + c\, e^{x-y} - y - x =$$
$$= \frac{1}{2}(1-3y-x) - \frac{1}{2}(y+x+1)e^{-2y} :$$

Պատասխան՝ $u(x,y) = \frac{1}{2}(1-3y-x) - \frac{1}{2}(y+x+1)e^{-2y}$:

Օրինակ 3.8: Լուծել Կոշիի խնդիրը. $\begin{cases} 3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + u_y = 0, \\ u(x,y)\big|_{y=0} = \varphi(x), \quad u_y(x,y)\big|_{y=0} = \psi(x) : \end{cases}$

Լուծում: Գտնենք հավասարման ընդհանուր լուծումը: Բնութագրիչ հավասարումն է՝ $3(dy)^2 + 4dxdy + (dx)^2 = 0$, որի ընդհանուր ինտեգրալներն են՝ $x+y=c$, $x+3y=c$:

Կատարելով $\xi = x+y$, $\eta = x+3y$ փոփոխականների փոխարինումը՝

հավասարումը կբերվի
$$u_{\xi\eta}+\frac{1}{2}\;u_{\xi}=0 \tag{3.13}$$
կանոնական տեսքի: Այն կարելի է գրել
$$\frac{\partial}{\partial\xi}\big(u_{\eta}+\frac{1}{2}\;u\big)=0$$
տեսքով: Իսկ դա նշանակում է
$$u_{\eta}+\frac{1}{2}u=g_1(\eta),$$
որտեղ g_1-ը կամայական ֆունկցիա է: Լուծելով ստացված հավասարումը, կստանանք՝
$$u(\xi,\eta)=g(\eta)+f(\xi)e^{-\eta/2}:$$
Անցնենք (x,y) փոփոխականների՝
$$u(x,y)=(g(x+3y)+f(x+y))e^{-(x+3y)/2}:$$
Գտնենք f և g ֆունկցիաները՝ օգտվելով Կոշիի պայմաններից:
$u(x,y)\big|_{y=0}=\varphi(x)$ պայմանից՝ $(g(x)+f(x))e^{-x/2}=\varphi(x)$: Ունենք
$$u_y=(3g'(x+3y)+f'(x+y))e^{-(x+3y)/2}-\frac{3}{2}(g(x+3y)+f(x+y))e^{-(x+3y)/2}$$

$u_y(x,y)\big|_{y=0}=\psi(x)$ պայմանից՝ $(3g'(x)+f(x)-\frac{3}{2}(g(x)+f(x))e^{-x/2}=\psi(x)$:
Ստացվեց հետևյալ համակարգը՝
$$\begin{cases} f(x)+g(x)=\varphi(x)e^{x/2}, \\ 3g'(x)+f'(x)-\dfrac{3}{2}(g(x)+f(x))=\psi(x)e^{x/2}: \end{cases}$$
Առաջին հավասարումը բազմապատկենք $3/2$-ով և գումարենք երկրորդին՝ կստանանք
$$3g'(x)+f'(x)=\left(\frac{3}{2}\varphi(x)+\psi(x)\right)e^{x/2},$$
որտեղից
$$3g(x)+f(x)=\int\limits_0^x\left(\frac{3}{2}\varphi(\tau)+\psi(\tau)\right)e^{\tau/2}d\tau+c:$$

Ստացված հավասարումը լուծելով համակարգի առաջին հավասարման հետ՝ կստանանք

$$g(x) = -\frac{1}{2}\varphi(x)e^{x/2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \left(\frac{3}{2}\varphi(\tau) + \psi(\tau)\right)e^{\tau/2}d\tau + c,$$

$$f(x) = \frac{3}{2}\varphi(x)e^{x/2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^x \left(\frac{3}{2}\varphi(\tau) + \psi(\tau)\right)e^{\tau/2}d\tau - c :$$

Տեղադրենք ընդհանուր լուծման մեջ՝

$$u(x,y) = \Bigg(-\frac{1}{2}\varphi(x+3y)e^{\frac{x+3y}{2}} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x+3y}\left(\frac{3}{2}\varphi(\tau)+\psi(\tau)\right)e^{\tau/2}d\tau + c + \frac{3}{2}\varphi(x+y)e^{\frac{x+y}{2}} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{x+y}\left(\frac{3}{2}\varphi(\tau)+\psi(\tau)\right)e^{\tau/2}d\tau - c\Bigg)e^{-\frac{x+3y}{2}} = \frac{3}{2}\varphi(x+y)e^{-y} - \frac{1}{2}\varphi(x+3y) +$$

$$+\frac{1}{4}e^{-\frac{x+3y}{2}}\int\limits_0^{x+3y}\Big(3\varphi(\tau)+2\psi(\tau)\Big)e^{\tau/2}d\tau - \frac{1}{4}e^{-\frac{x+3y}{2}}\int\limits_0^{x+y}\Big(3\varphi(\tau)+2\psi(\tau)\Big)e^{\tau/2}d\tau =$$

$$= \frac{3}{2}\varphi(x+y)e^{-y} - \frac{1}{2}\varphi(x+3y) + \frac{1}{4}e^{-\frac{x+3y}{2}}\int\limits_{x+y}^{x+3y}\Big(3\varphi(\tau)+2\psi(\tau)\Big)e^{\tau/2}d\tau :$$

Պատասխան՝

$$u(x,y) = \frac{3}{2}\,\varphi(x+y)e^{-y} - \frac{1}{2}\varphi(x+3y) + \frac{1}{4}\,e^{-\frac{x+3y}{2}}\int\limits_{x+y}^{x+3y}(3\varphi(\tau)+2\psi(\tau))\;e^{\tau/2}\;d\tau :$$

Օրինակ 3.9: Լուծել Կոշիի խնդիրը. $\begin{cases} x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} = 0,\ x>0,\ y>0, \\ u(x,y)\big|_{y=1} = \varphi(x), \quad u_y(x,y)\big|_{y=1} = \psi(x) : \end{cases}$

Լուծում: Գտնենք հավասարման ընդհանուր լուծումը: Բնութագրիչ հավասարումն է՝ $x^2(dy)^2 + 2xydxdy - 3y^2(dx)^2 = 0$, որի ընդհանուր ինտեգրալներն են՝ $x/y = c$, $x^3y = c$:

Կատարելով $\xi = x/y$, $\eta = x^3y$ փոփոխականների փոխարինումը՝ հավասարումը կբերվի

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{4\eta}\,u_\xi = 0$$

կանոնական տեսքի: Նշանակելով $u_\xi = v$, կստացվի

$$v_\eta - \frac{1}{4\eta}v = 0$$

հավասարումը: Ստացվածի լուծումն է՝

$$v = f_1(\xi)\eta^{1/4},$$

որտեղ $f_1(\xi)$-ն կամայական ֆունկցիա է: u ֆունկցիայի համար կունենանք

$$u_\xi = f_1(\xi)\eta^{1/4}$$

հավասարումը, որտեղից՝

$$u(\xi,\eta) = f(\xi)\eta^{1/4} + g(\eta):$$

Այստեղ f-ը և g-ն կամայական դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են (f-ը f_1 ֆունկցիայի նախնականն է): Անցնելով (x,y) փոփոխականների, կստանանք հավասարման ընդհանուր լուծումը՝

$$u(x,y) = x^{3/4}y^{1/4}f\left(\frac{x}{y}\right) + g(x^3y):$$

Ածանցենք ըստ y-ի՝

$$u_y(x,y) = -x^{7/4}y^{-7/4}f'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{4}x^{3/4}y^{-3/4}f\left(\frac{x}{y}\right) + x^3g'(x^3y):$$

Օգտվելով Կոշիի պայմաններից, f և g ֆունկցիաների որոշման համար ստացվում է

$$\begin{cases} x^{3/4}f(x) + g(x^3) = \varphi(x), \\ -x^{7/4}f'(x) + \dfrac{1}{4}x^{3/4}f(x) + x^3g'(x^3) = \psi(x) \end{cases}$$

համակարգը: Առաջին հավասարման աջ և ձախ մասերը ածանցենք՝

$$x^{3/4}f'(x) + \frac{3}{4}x^{-1/4}f(x) + 3x^2g'(x^3) = \varphi'(x):$$

Երկրորդ հավասարման աջ և ձախ մասերը բազմապատկենք $-3/x$-ով՝

$$3x^{3/4}f'(x) - \frac{3}{4}x^{-1/4}f(x) - 3x^2g'(x^3) = -\frac{3}{x}\psi(x):$$

Գումարելով ստացված հավասարումները և բաժանելով $4x^{3/4}$-ի՝ կստացվի

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}\varphi'(x) - \frac{3}{4}x^{-7/4}\psi(x),$$

որտեղից

$$f(x)=\frac{1}{4}\int\limits_1^x z^{-3/4}\varphi'(z)dz-\frac{3}{4}\int\limits_1^x z^{-7/4}\psi(z)dz+c=$$

$$=\frac{1}{4}\left(x^{-3/4}\varphi(x)+\frac{3}{4}\int\limits_1^x z^{-7/4}\varphi(z)dz\right)-\frac{3}{4}\int\limits_1^x z^{-7/4}\psi(z)dz+c:$$

Այսպիսով

$$f(x)=\frac{1}{4}x^{-3/4}\varphi(x)+\frac{3}{16}\int\limits_1^x z^{-7/4}\varphi(z)dz-\frac{3}{4}\int\limits_1^x z^{-7/4}\psi(z)dz+c:$$

Տեղադրենք համակարգի առաջին հավասարման մեջ և գտնենք $g(x)$ ֆունկցիան: Ունենք

$$g(x^3)=\varphi(x)-x^{3/4}f(x)=\frac{3}{4}\varphi(x)-\frac{3}{16}x^{3/4}\int\limits_1^x z^{-7/4}\varphi(z)dz-\frac{3}{4}x\,x^{3/4}\int\limits_1^x z^{-7/4}\psi(z)dz-c\,x^{3/4},$$

որտեղից, տեղադրելով x-ի փոխարեն $\sqrt[3]{x}$, կստանանք

$$g(x)=\frac{3}{4}\varphi(\sqrt[3]{x})-\frac{3}{16}x^{1/4}\int\limits_1^{\sqrt[3]{x}} z^{-7/4}\varphi(z)dz-\frac{3}{4}x^{1/4}\int\limits_1^{\sqrt[3]{x}} z^{-7/4}\psi(z)dz-c\,x^{1/4}:$$

Խնդրի լուծումը ստանալու համար տեղադրենք ստացված $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները հավասարման ընդհանուր լուծման բանաձևի մեջ.

$$u(x,y)=x^{3/4}y^{1/4}\left(\frac{1}{4}x^{-3/4}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{3}{16}\int\limits_1^{x/y} z^{-7/4}\varphi(z)dz-\frac{3}{4}\int\limits_1^{x/y} z^{-7/4}\psi(z)dz+c\right)+$$

$$+\frac{3}{4}\varphi(x\sqrt[3]{y})-\frac{3}{16}x^{3/4}y^{1/4}\int\limits_1^{x\sqrt[3]{y}} z^{-7/4}\varphi(z)dz-\frac{3}{4}x^{3/4}y^{1/4}\int\limits_1^{x\sqrt[3]{y}} z^{-7/4}\psi(z)dz-c\,x^{3/4}y^{1/4}=$$

$$=\frac{1}{4}y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{3}{4}\varphi(x\sqrt[3]{y})+\frac{3}{16}\sqrt[4]{x^3y}\int\limits_{x\sqrt[3]{y}}^{x/y} z^{-7/4}\varphi(z)dz-\frac{3}{4}\sqrt[4]{x^3y}\int\limits_{x\sqrt[3]{y}}^{x/y} z^{-7/4}\psi(z)dz:$$

Պատասխան՝

$$u(x,y)=\frac{1}{4}y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{3}{4}\varphi(x\sqrt[3]{y})+\frac{3}{16}\sqrt[4]{x^3y}\int\limits_{x\sqrt[3]{y}}^{x/y} z^{-7/4}\varphi(z)dz-\frac{3}{4}\sqrt[4]{x^3y}\int\limits_{x\sqrt[3]{y}}^{x/y} z^{-7/4}\psi(z)dz:$$

Խնդիրներ

Լուծել Կոշիի խնդիրը՝ բնութագրիչների մեթոդով.

199. $\begin{cases} u_{xx} + 2\,u_{xy} - 3\,u_{yy} = 0, \\ u\big|_{y=0} = 3x^2, \quad u_y\big|_{y=0} = 0: \end{cases}$

200. $\begin{cases} u_{xx} + 4\,u_{xy} - 5\,u_{yy} + u_x - u_y = 0, \\ u\big|_{y=0} = \varphi(x), \quad u_y\big|_{y=0} = \psi(x): \end{cases}$

201. $\begin{cases} 4y^2\,u_{xx} + 2(1-y^2)\,u_{xy} - u_{yy} - \dfrac{2y}{1+y^2}\,(2u_x - u_y) = 0, \\ u\big|_{y=0} = \varphi(x), \quad u_y\big|_{y=0} = \psi(x): \end{cases}$

202. $\begin{cases} e^y\,u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0, \\ u\big|_{y=0} = -\dfrac{x^2}{2}, \quad u_y\big|_{y=0} = -\sin x: \end{cases}$

203. $\begin{cases} u_{xx} - 2\sin x\,u_{xy} - (3+\cos^2 x)\,u_{yy} - \cos x\,u_y = 0, \\ u\big|_{y=\cos x} = \sin x, \quad u_y\big|_{y=\cos x} = \dfrac{1}{2}e^x: \end{cases}$

204. $\begin{cases} u_{xx} - 2\sin x\,u_{xy} - (3+\cos^2 x)\,u_{yy} + u_x + (2-\sin x - \cos x)\,u_y = 0, \\ u\big|_{y=\cos x} = 0, \quad u_y\big|_{y=\cos x} = e^{-x/2}\cos x: \end{cases}$

205. $\begin{cases} u_{xx} - 6\,u_{xy} + 5\,u_{yy} = 0, \\ u\big|_{y=x} = \sin x, \quad u_y\big|_{y=x} = \cos x: \end{cases}$

206. $\begin{cases} u_{xx} + 2\sin x\,u_{xy} - \cos^2 x\,u_{yy} + u_x + (\sin x + \cos x + 1)\,u_y = 0, \\ u\big|_{y=-\cos x} = 1 + 2\sin x, \quad u_y\big|_{y=-\cos x} = \sin x: \end{cases}$

207. $\begin{cases} u_{xx} + 2\cos x\,u_{xy} - \sin^2 x\,u_{yy} + u_x + (1 - \sin x + \cos x)\,u_y = 0, \\ u\big|_{y=\sin x} = \cos x, \quad u_y\big|_{y=\sin x} = \sin x: \end{cases}$

208. $\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} + 5\,u_x + 3\,u_y + 4u = 0, \\ u\big|_{y=0} = xe^{-\frac{5}{2}x - x^2}, \quad u_y\big|_{y=0} = e^{-\frac{5}{2}x}: \end{cases}$

2.2 Կոշիի խնդիրը ալիքային հավասարման համար: Ալիքային հավասարում է կոչվում $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ ֆունկցիայի նկատմամբ

$$u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots + u_{x_nx_n}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) \tag{3.14}$$

հավասարումը: Սա մաթեմատիկական ֆիզիկայի հիմնական հավասարումներից է, որը նկարագրում է տատանողական կամ ալիքային պրոցեսներ մեխանիկայում (լարի, մեմբրանի լայնական տատանումներ), ակուստիկայում (ձայնի տարածում տարբեր միջավայրերում), էլեկտրոդինամիկայում (էլեկտրոմագնիսական ալիքների տարածում) և այլն: Այս բոլոր դեպքերում t անկախ փոփոխականն ունի ժամանակի իմաստ, իսկ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ անկախ փոփոխականներին անվանում են տարածական փոփոխականներ: a-ն դրական հաստատուն է, որը բնորոշում է միջավայրում ալիքի տարածման արագությունը:

$n = 1$ դեպքում ալիքային հավասարումը կոչվում է լարի տատանման հավասարում, իսկ $n = 2$ դեպքում՝ մեմբրանի տատանման հավասարում:

Ալիքային հավասարումը գրվում է նաև

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t)$$

տեսքով, որտեղ $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, իսկ Δ-ն Լապլասի օպերատորն է՝

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}:$$

Քանի որ $\tau = at$ փոփոխականի փոխարինումով ալիքային հավասարումը բերվում է

$$u_{\tau\tau} - \Delta u = f(x, \tau/a)$$

տեսքի, ապա կարելի է դիտարկել միայն $a = 1$ դեպքը:

Դիցուք $\mathrm{R}_+^{n+1} = \mathrm{R}^n \times (0, +\infty) = \{(x, t) \mid x \in \mathrm{R}^n,\ t \in (0, +\infty)\}$: Կոշիի խնդիրը ալիքային հավասարման համար ձևակերպվում է այսպես: Պահանջվում է գտնել $u(x_1, x_2, \cdots x_n, t)$ ֆունկցիա, որը R_+^{n+1}-ում (3.14) հավասարման լուծում է և բավարարում է

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n), \qquad u_t\Big|_{t=0} = \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n), \qquad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathrm{R}^n$$

Կոշիի պայմաններին, որտեղ f-ը, φ-ն և ψ-ն տրված ֆունկցիաներ են: Հայտնի է, որ եթե

$$f \in C(\mathrm{R}_+^{n+1}), \quad \varphi \in C^2(\mathrm{R}^n), \quad \psi \in C^1(\mathrm{R}^n),$$

ապա Կոշիի խնդիրն ունի միակ լուծում:

2.2.1 Կոշիի խնդիրը լարի տատանման հավասարման համար: Դալամբերի բանաձևը: Լարի տատանման հավասարման համար Կոշիի խնդիրն է՝

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \ \ t > 0, \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \end{cases} \tag{3.15}$$

որի լուծումը տրվում է Դալամբերի բանաձևով՝

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau : \qquad (3.16)$$

Օրինակ 3.10: Լուծել Կոշիի խնդիրը. $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=6t, & x\in \mathrm{R},\ t>0, \\ u\big|_{t=0}=\sin x, & u_t\big|_{t=0}=x : \end{cases}$

Լուծում: Գտնենք խնդրի լուծումը՝ օգտվելով (3.16) Դալամբերի բանաձևից.

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\sin(x+t)+\sin(x-t))+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\xi\,d\xi+3\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\tau\,\,d\xi\,d\tau=$$

$$=\sin x\cos t+xt+6\int\limits_{0}^{t}\tau(t-\tau)\,d\tau=\sin x\cos t+xt+t^3 :$$

Պատասխան՝ $u(x,t)=\sin x\cos t+xt+t^3$:

Խնդիրներ

Լուծել Կոշիի խնդիրը ($-\infty < x < +\infty$).

209. $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = \cos x : \end{cases}$

210. $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ u\big|_{t=0} = x^2, \quad u_t\big|_{t=0} = 1 : \end{cases}$

211. $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ u\big|_{t=0} = x, \quad u_t\big|_{t=0} = -x : \end{cases}$

212. $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \dfrac{x}{a}, \quad u_t\big|_{t=0} = \dfrac{1}{x^2} : \end{cases}$

213. $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ u\big|_{t=0} = x, \quad u_t\big|_{t=0} = \cos^2 x : \end{cases}$

214. $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \dfrac{\cos x}{a}, \quad u_t\big|_{t=0} = x\cos x : \end{cases}$

215. $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \sin(a-2x), \\ u_t\big|_{t=0} = 2a\cos(a-2x) : \end{cases}$

216. $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \dfrac{1}{8}\cos 4x, \\ u_t\big|_{t=0} = a\sin 5x \cos x : \end{cases}$

217. $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \cos 5x, \quad u_t\big|_{t=0} = e^{-3x} : \end{cases}$

218. $\begin{cases} u_{tt} - 81\, u_{xx} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \sin \pi x, \quad u_t\big|_{t=0} = 27\pi \sin 3\pi x : \end{cases}$

219. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 6, \\ u\big|_{t=0} = x^2, \quad u_t\big|_{t=0} = 4x : \end{cases}$

220. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = bx^2, \\ u\big|_{t=0} = e^{-x}, \quad u_t\big|_{t=0} = a : \end{cases}$

221. $\begin{cases} u_{tt} - 4\, u_{xx} = xt, \\ u\big|_{t=0} = x^2, \quad u_t\big|_{t=0} = x : \end{cases}$

222. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = axt, \\ u\big|_{t=0} = x, \quad u_t\big|_{t=0} = \sin x : \end{cases}$

223. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = ae^{-t}, \\ u\big|_{t=0} = b\,\sin x, \quad u_t\big|_{t=0} = c\,\cos x : \end{cases}$

224. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin x, \\ u\big|_{t=0} = \sin x, \quad u_t\big|_{t=0} = 0 : \end{cases}$

225. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = e^{x}, \\ u\big|_{t=0} = \sin x, \quad u_t\big|_{t=0} = x + \cos x : \end{cases}$

226. $\begin{cases} u_{tt} - 9\, u_{xx} = \sin x, \\ u\big|_{t=0} = 1, \quad u_t\big|_{t=0} = 1 : \end{cases}$

227. $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin \omega x, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0 : \end{cases}$

228. $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin \omega t, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0 : \end{cases}$

229. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x\sin t, \\ u\big|_{t=0} = \sin x, \quad u_t\big|_{t=0} = \cos x : \end{cases}$

230. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = a\sin bt, \\ u\big|_{t=0} = \cos x, \quad u_t\big|_{t=0} = \sin x : \end{cases}$

231. Ցույց տալ, որ եթե (3.15) խնդրում φ և ψ ֆունկցիաները կենտ են, իսկ f ֆունկցիան կենտ է ըստ x-ի, ապա $u(0,t)=0$:

232. Ցույց տալ, որ եթե (3.15) խնդրում φ և ψ ֆունկցիաները զույգ են, իսկ f ֆունկցիան զույգ է ըստ x-ի, ապա $u_x(0,t)=0$:

2.2.2 Երկու տարածական փոփոխականների դեպքը: Ալիքային հավասարումը երկու տարածական փոփոխականների դեպքում կոչվում է մեմբրանի տատանման հավասարում: Կոշիի խնդիրն է՝

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=f(x,y,t), \quad (x,y)\in \mathrm{R}^2, \;\; t>0, \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x,y), \qquad u_t\big|_{t=0}=\psi(x,y), \end{cases}$$

որի լուծումը տրվում է Պուասոնի բանաձևով՝

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint\limits_{C_{at}}\frac{\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right)+ \\ +\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C_{at}}\frac{\psi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}+ \\ +\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t\iint\limits_{C_{a(t-\tau)}}\frac{f(\xi,\eta,\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}: \quad (3.17)$$

Այստեղ C_r-ը (x,y) կենտրոնով r շառավղով շրջանն է՝ $C_r=\{(\xi,\eta)\;\big|\;(\xi-x)^2+(\eta-y)^2<r^2\}$:

Օրինակ 3.11: Լուծել Կոշիի խնդիրը.

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}=6yt, \quad (x,y)\in \mathrm{R}^2, \;\; t>0. \\ u\big|_{t=0}=x, \qquad u_t\big|_{t=0}=1: \end{cases}$$

Լուծում: Գտնենք խնդրի լուծումը՝ օգտվելով (3.17) Պուասոնի բանաձևից: Ունենք

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint\limits_{C_t}\frac{\xi\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right)+ \\ +\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_t}\frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}+ \\ +\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t\iint\limits_{C_{(t-\tau)}}\frac{6\eta\tau\,d\xi\,d\eta\,d\tau}{\sqrt{t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}:$$

Հաշվենք ինտեգրալները՝ անցնելով բևեռային կոորդինատական համակարգին՝

$$\xi - x = \rho\cos\phi, \quad \eta - y = \rho\sin\phi, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi,$$

առաջին և երկրորդ ինտեգրալներում $0 \leqslant \rho \leqslant t$, իսկ երրորդ ինտեգրալում՝ $0 \leqslant \rho \leqslant t-\tau$ ։

$$\iint\limits_{C_t} \frac{\xi\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} = \int\limits_0^t \int\limits_0^{2\pi} \frac{x+\rho\cos\phi}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\,\rho\, d\phi\, d\rho =$$

$$= -\pi x \int\limits_0^t \frac{d(t^2-\rho^2)}{\sqrt{t^2-\rho^2}} = -2\pi x\sqrt{t^2-\rho^2}\,\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=t} = 2\pi x t\text{:}$$

$$\iint\limits_{C_t} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} = \int\limits_0^t \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\, d\phi\, d\rho = 2\pi \int\limits_0^t \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}} = 2\pi t :$$

$$\int\limits_0^t \iint\limits_{C_{(t-\tau)}} \frac{6\eta\tau\, d\xi\, d\eta\, d\tau}{\sqrt{t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} = 6\int\limits_0^t \tau \left(\int\limits_0^{t-\tau}\int\limits_0^{2\pi} \frac{y+\rho\sin\phi}{\sqrt{(t-\tau)^2-\rho^2}}\,\rho\, d\phi\, d\rho \right) d\tau =$$

$$= -12\pi y \int\limits_0^t \left(\tau\sqrt{(t-\tau)^2-\rho^2}\,\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=t-\tau} \right) d\tau = 12\pi y \int\limits_0^t \tau(t-\tau)d\tau = 2\pi y t^3 :$$

Այսպիսով՝

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(2\pi x t) + \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi t + \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi y t^3 = x + t + y t^3 :$$

Պատասխան՝ $u(x,y,t) = x + t + y t^3$:

2.2.3 Երեք տարածական փոփոխականների դեպքը: Կոշիի խնդիրն է՝

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}) = f(x,y,z,t), & (x,y,z)\in \mathrm{R}^3, \;\; t>0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x,y,z), & u_t\,\big|_{t=0} = \psi(x,y,z), \end{cases}$$

որի լուծումը տրվում է Կիրխհոֆի բանաձևով՝

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\iint\limits_{S_{at}}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\,ds\right)+\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}}\psi(\xi,\eta,\zeta)\,ds+$$
$$+\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{K_{at}}\frac{f\big(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{1}{a}\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}\big)}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta : \quad (3.18)$$

Այստեղ S_{at}-ն (x,y,z) կենտրոնով at շառավղով գնդային մակերևույթն է՝

$$S_{at}=\{(\xi,\eta,\zeta)\mid(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=a^2t^2\},$$

իսկ K_{at}-ն՝ (x,y,z) կենտրոնով at շառավղով գունդը՝

$$K_{at}=\{(\xi,\eta,\zeta)\mid(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2<a^2t^2\} :$$

Օրինակ 3.12: Լուծել Կոշիի խնդիրը.

$$\begin{cases} u_{tt}-(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=12t^2, & (x,y,z)\in\mathrm{R}^3, \quad t>0,\\ u\big|_{t=0}=z^2, \qquad u_t\big|_{t=0}=y : \end{cases}$$

Լուծում: Օգտվենք (3.18) Կիրխհոֆի բանաձևից՝

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\iint\limits_{S_t}\zeta^2\,ds\right)+\frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_t}\eta\,ds+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{K_t}\frac{12\big(t-\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}\big)^2}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta :$$

Հաշվենք ինտեգրալները՝ անցնելով սֆերիկ կոորդինատական համակարգին՝

$$\xi-x=\rho\cos\phi\sin\theta,\;\; \eta-y=\rho\sin\phi\sin\theta,\;\; \zeta-z=\rho\cos\theta,\; 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\; 0\leqslant\phi\leqslant 2\pi,$$

առաջին և երկրորդ ինտեգրալներում՝ $\rho=t$, իսկ երրորդ ինտեգրալում՝

$0 \leqslant \rho \leqslant t$:

$$\iint\limits_{S_t} \zeta^2 \, ds = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} (z + t\cos\theta)^2 t^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi =$$

$$= z^2 t^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta phi + t^4 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta d\phi =$$

$$= 2\pi z^2 t^2 \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta - 2\pi t^4 \int\limits_0^{\pi} \cos^2\theta d(\cos\theta) = 4\pi z^2 t^2 + \frac{4}{3}\pi t^4 :$$

$$\iint\limits_{S_t} \eta \, ds = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} (y + t\sin\phi \sin\theta) t^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = y t^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 4\pi y t^2 :$$

$$\iiint\limits_{K_t} \frac{12\big(t - \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}\big)^2}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta =$$

$$= 12 \int\limits_0^{t} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{\rho} \cdot (t - \rho)^2 \rho^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, d\rho =$$

$$= 48\pi \left(t^2 \cdot \frac{\rho^2}{2} - 2t \cdot \frac{\rho^3}{3} + \frac{\rho^4}{4} \right) \Bigg|_{\rho=0}^{\rho=t} = 4\pi t^4 :$$

Կիրխհոֆի բանաձևից՝

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \big(4\pi z^2 t^2 + \frac{4}{3}\pi t^4 \big) \right) + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{t} \cdot 4\pi y t^2 + \frac{1}{4\pi} \cdot 4\pi t^4 = z^2 + t^2 + yt + t^4 :$$

Պատասխան՝ $u(x, y, z, t) = z^2 + t^2 + yt + t^4$:

2.3 Կոշիի խնդրի լուծումը շարքերի միջոցով: Դիտարկենք համասեռ ալիքային հավասարման համար

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta\, u = 0, \qquad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathrm{R}^n, \quad t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ u_t\,\big|_{t=0} = \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \end{cases} \tag{3.19}$$

Կոշիի խնդիրը: Անմիջական տեղադրումով կարելի է ստուգել, որ եթե φ և ψ ֆունկցիաները անվերջ դիֆերենցելի են, ապա

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{2k} \left(\frac{t^{2k}}{(2k)!} \,\Delta^k \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \,\Delta^k \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \right) \tag{3.20}$$

ֆունկցիան (3.19) խնդրի լուծումն է[4], եթե միայն աջ մասում գրված շարքը և այն շարքերը, որոնք ստացվում են մինչև երկու անգամ անդամ առ անդամ ածանցելիս, հավասարաչափ զուգամետ են:

Եթե φ-ն և ψ -ն բազմանդամներ են, ապա (3.20) շարքը վեր է ածվում վերջավոր գումարի, և հետևաբար (3.19) խնդրի լուծումը նույնպես կլինի բազմանդամ:

Ակնհայտ է, որ τ պարամետրից կախված

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta\, u = 0, \\ u\big|_{t=\tau} = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n, \tau), \\ u_t\,\big|_{t=\tau} = \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n, \tau) \end{cases} \tag{3.21}$$

խնդրի լուծումը կստացվի (3.20) բանաձևից՝ t-ի փոխարեն տեղադրելով $(t-\tau)$.

$$u(x,t,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{2k}\left(\frac{(t-\tau)^{2k}}{(2k)!}\,\Delta^k\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n,\tau) + \frac{(t-\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\Delta^k\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n,\tau)\right): \tag{3.22}$$

Դիտարկենք անհամասեռ ալիքային հավասարման համար համասեռ սկզբնական պայմաններով խնդիրը.

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2\Delta\, w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n, t), \\ w\big|_{t=0} = 0, \\ w_t\,\big|_{t=0} = 0 : \end{cases} \tag{3.23}$$

Այս խնդիրը համապատասխանեցնենք (3.21) տիպի

$$\begin{cases} H_{tt} - a^2\Delta\, H = 0, \\ H\big|_{t=\tau} = 0, \\ H_t\,\big|_{t=\tau} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n, t, \tau) \end{cases} \tag{3.24}$$

օժանդակ խնդրին, որի լուծումը կարելի է ստանալ (3.22)-ից, վերցնելով $\varphi = 0,\ \ \psi = f$.

$$H(x,t,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{2k}\frac{(t-\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\Delta^k f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\tau): \tag{3.25}$$

Հայտնի է Դյուամելի սկզբունքը՝ եթե $H(x,t,\tau)$ ֆունկցիան (3.24) խնդրի

[4] $\Delta^0\varphi = \varphi, \quad \Delta^k\varphi = \Delta\big(\Delta^{k-1}\varphi\big), \quad k = 1, 2, \ldots,$ Δ -ն Լապլասի օպերատորն է:

լուծումն է, ապա

$$w(x,t) = \int\limits_0^t H(x,t,\tau)d\tau \tag{3.26}$$

ֆունկցիան (3.23) խնդրի լուծումն է:

Դյուամելի սկզբունքը թույլ է տալիս անհամասեռ հավասարումով խնդիրը բերել համասեռ հավասարումով խնդրի:

Օրինակ 3.13: Լուծել Կոշիի խնդիրը ($-\infty < x,y,z < +\infty,\ \Delta u = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$).

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = \dfrac{xt}{1+t^2}, \\ u(x,y,z,0) = x\sin y, \\ u_t(x,y,z,0) = y\cos z : \end{cases} \tag{3.27}$$

Լուծում: Դիցուք $v(x,y,z,t)$ ֆունկցիան

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0, \\ v(x,y,z,0) = x\sin y \\ v_t(x,y,z,0) = y\cos z \end{cases} \tag{3.28}$$

խնդրի լուծումն է, իսկ $w(x,y,z,t)$ ֆունկցիան՝

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w = \dfrac{xt}{1+t^2}, \\ w(x,y,z,0) = 0, \\ w_t(x,y,z,0) = 0 : \end{cases} \tag{3.29}$$

խնդրի: Ակնհայտ է, որ (3.27) խնդրի լուծումը կստացվի այդ երկու լուծումները գումարելով՝ $u(x,y,z,t) = v(x,y,z,t) + w(x,y,z,t)$:

(3.28) խնդրի լուծումը կստացվի (3.20)-ից, վերցնելով $a=1,\ \varphi = x\sin y$, $\psi = y\cos z$.

$$v(x,y,z,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t^{2k}}{(2k)!}\,\Delta^k(x\sin y) + \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\Delta^k(y\cos z)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t^{2k}}{(2k)!}\,(-1)^k x\sin y + \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\,(-1)^k y\cos z\right) =$$

$$= x\sin y\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + y\cos z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = x\sin y\cos t + y\cos z\sin t :$$

(3.29) խնդրի լուծումը գտնելու համար կազմենք $H(x,y,z,t,\tau)$

ֆունկցիայի նկատմամբ հետևյալ օժանդակ խնդիրը՝

$$\begin{cases} H_{tt} - \Delta H = 0, \\ H(x,y,z,\tau,\tau) = 0, \\ H_t(x,y,z,\tau,\tau) = \dfrac{x\tau}{1+\tau^2} : \end{cases}$$

Համաձայն (3.25)-ի՝

$$H(x,y,z,t,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k \left(\frac{x\tau}{1+\tau^2} \right) = \frac{x\tau(t-\tau)}{1+\tau^2} :$$

Ստանանք (3.29) խնդրի լուծումը՝ օգտվելով Դյուամելի սկզբունքից.

$$w(x,y,z,t) = \int_0^t H(x,y,z,t,\tau)d\tau = \int_0^t \frac{x\tau(t-\tau)d\tau}{1+\tau^2} = xt\int_0^t \frac{\tau d\tau}{1+\tau^2} - x\int_0^t \frac{\tau^2 d\tau}{1+\tau^2} =$$
$$= \frac{1}{2}xt\ \ln(1+t^2) - xt + x\,\mathrm{arctg}\ t :$$

Այսպիսով՝

$$u(x,y,z,t) = v(x,y,z,t) + w(x,y,z,t) =$$
$$= x\sin y\cos t + y\cos z\sin t + \frac{1}{2}xt\ \ln(1+t^2) - xt + x\,\mathrm{arctg}\ t :$$

Պատասխան՝

$$u(x,y,z,t) = x\sin y\cos t + y\cos z\sin t + \frac{1}{2}xt\ \ln(1+t^2) - xt + x\,\mathrm{arctg}\ t :$$

Խնդիրներ

Լուծել Կոշիի խնդիրը ($-\infty < x, y < +\infty,\ \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$).

233. $$\begin{cases} u_{tt} - 2\,\Delta u = 0, \\ u\big|_{t=0} = 2x^2 - y^2, \quad u_t\big|_{t=0} = 2x^2 + y^2 : \end{cases}$$

234. $$\begin{cases} u_{tt} - a^2\,\Delta u = 0, \\ u\big|_{t=0} = (x^2+y^2)^2, \quad u_t\big|_{t=0} = (x^2+y^2)^2 : \end{cases}$$

235. $\begin{cases} u_{tt} - a^2\,\Delta u = 0, \\ u\big|_{t=0} = \cos(bx+cy), \quad u_t\big|_{t=0} = \sin(bx+cy) : \end{cases}$

236. $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 2, \\ u\big|_{t=0} = x, \quad u_t\big|_{t=0} = y : \end{cases}$

237. $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 6xyt, \\ u\big|_{t=0} = x^2 - y^2, \quad u_t\big|_{t=0} = xy : \end{cases}$

238. $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = x^3 - 3xy^2, \\ u\big|_{t=0} = e^x \cos y, \quad u_t\big|_{t=0} = e^y \sin x : \end{cases}$

239. $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = t \sin y, \\ u\big|_{t=0} = x^2, \quad u_t\big|_{t=0} = \sin y : \end{cases}$

240. $\begin{cases} u_{tt} - 3\,\Delta u = x^3 + y^3, \\ u\big|_{t=0} = x^2, \quad u_t\big|_{t=0} = y^2 : \end{cases}$

241. $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = e^{3x+4y}, \\ u\big|_{t=0} = e^{3x+4y}, \quad u_t\big|_{t=0} = e^{3x+4y} : \end{cases}$

242. $\begin{cases} u_{tt} - a^2\,\Delta u = (x^2+y^2)e^t, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0 : \end{cases}$

243. $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = -xyt, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = xy : \end{cases}$

Լուծել Կոշիի խնդիրը ($-\infty < x, y, z < +\infty,\ \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$).

244. $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, \\ u\big|_{t=0} = xyz, \quad u_t\big|_{t=0} = x^2y^2z^2 : \end{cases}$

245. $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, \\ u\big|_{t=0} = x^2 + y^2 + z^2, \quad u_t\big|_{t=0} = xy : \end{cases}$

246. $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, \\ u\big|_{t=0} = e^x \cos y, \quad u_t\big|_{t=0} = x^2 - y^2 : \end{cases}$

247. $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, \\ u\big|_{t=0} = x^2 + y^2, \quad u_t\big|_{t=0} = 1: \end{cases}$

248. $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, \\ u\big|_{t=0} = e^x, \quad u_t\big|_{t=0} = e^{-x}: \end{cases}$

249. $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = ax + bt, \\ u\big|_{t=0} = xyz, \quad u_t\big|_{t=0} = xy + z: \end{cases}$

250. $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = \dfrac{ayzt^3}{1+t^2}, \\ u\big|_{t=0} = xe^y, \quad u_t\big|_{t=0} = ye^x: \end{cases}$

251. $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 2xyz, \\ u\big|_{t=0} = x^2 + y^2 - 2z^2, \quad u_t\big|_{t=0} = 1: \end{cases}$

252. $\begin{cases} u_{tt} - 8\,\Delta u = t^2x^2, \\ u\big|_{t=0} = y^2, \quad u_t\big|_{t=0} = z^2: \end{cases}$

253. $\begin{cases} u_{tt} - 3\,\Delta u = 6(x^2 + y^2 + z^2), \\ u\big|_{t=0} = x^2y^2z^2, \quad u_t\big|_{t=0} = xyz: \end{cases}$

254. $\begin{cases} u_{tt} - a^2\,\Delta u = 0, \\ u\big|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2)^2, \quad u_t\big|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2)^2: \end{cases}$

255. $\begin{cases} u_{tt} - a^2\,\Delta u = (x^2 + y^2 + z^2)e^t, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0: \end{cases}$

$ 3 Խառը խնդիրներ լարի տատանման հավասարման համար

3.1 Խառը խնդիրներ կիսաառանցքում: Դիտարկենք կիսաանվերջ լար, որը վերագրված է $x \in [0, +\infty)$ դրական կիսաառանցքին: Այս դեպքում լարի դիրքը նկարագրող $u(x,t)$ ֆունկցիան, բացի սկզբնական պայմաններից, պետք է բավարարի նաև որևէ պայմանի լարի ձախ՝ $x = 0$ ծայրակետում (եզրային պայման): Այսպիսով, կունենանք հետևյալ խնդիրը՝

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(0,t) = \mu(t) \quad (\text{կամ } u_x(0,t) = \nu(t)), \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty : \end{cases}$$

Այս խնդրի լուծելիության համար անհրաժեշտ է, որ տեղի ունենան

$$\mu(0) = \varphi(0), \quad \mu'(0) = \psi(0) \quad (\text{կամ } \varphi'(0) = \nu(0), \quad \psi'(0) = \nu'(0))$$

պայմանները (համաձայնեցվածության պայմաններ):

Դիտարկենք համասեռ հավասարման համար հետևյալ խնդիրը՝

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty \end{cases} \tag{3.30}$$

որտեղ $\varphi \in C^2[0,+\infty],\ \psi \in C^1[0,+\infty],\ \varphi(0) = \varphi''(0) = 0,\ \psi(0) = 0$:

Նշանակենք $\Phi(x)$-ով և $\Psi(x)$-ով համապատասխանաբար $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ ֆունկցիաների կենտ շարունակությունները՝

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{երբ } x \geqslant 0, \\ -\varphi(-x), & \text{երբ } x < 0, \end{cases} \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{երբ } x \geqslant 0, \\ -\psi(-x) & \text{երբ } x < 0 : \end{cases}$$

Դիցուք $U(x,t)$ ֆունկցիան

$$\begin{cases} U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \ \ t > 0, \\ U(x,0) = \Phi(x), \quad U_t(x,0) = \Psi(x) \end{cases}$$

Կոշիի խնդրի լուծումն է: Այն տրվում է Դալամբերի բանաձևով՝

$$U(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)\, d\xi : \tag{3.31}$$

Ակնհայտ է, որ երբ $x \in [0,+\infty)$, այդ լուծումը կհամընկնի (3.30) խնդրի լուծման հետ: Վերադառնալով $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ ֆունկցիաներին՝ լուծումը կստացվի

$$u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, & \text{երբ } x\geqslant 0,\ 0\leqslant t<\dfrac{x}{a}, \\ \\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, & \text{երբ } x\geqslant 0,\ t\geqslant \dfrac{x}{a} \end{cases} \tag{3.32}$$

տեսքով:

Եթե պետք է լուծել

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \quad 0<x<+\infty, \quad t>0, \\ u_x(0,t)=0, \quad t\geqslant 0, \\ u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad 0\leqslant x<+\infty \end{cases} \tag{3.33}$$

խնդիրը, ապա (3.31) ում $\Phi(x)$-ը և $\Psi(x)$-ը պետք է վերցնել $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ ֆունկցիաների զույգ շարունակությունները՝

$$\Phi(x)=\begin{cases} \varphi(x), & \text{երբ } x\geqslant 0, \\ \varphi(-x), & \text{երբ } x<0, \end{cases} \qquad \Psi(x)=\begin{cases} \psi(x), & \text{երբ } x\geqslant 0, \\ \psi(-x), & \text{երբ } x<0: \end{cases}$$

Այդ դեպքում (3.33) խնդրի լուծումը կգրվի հետևյալ տեսքով՝

$$u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, & \text{երբ } x\geqslant 0,\ 0\leqslant t<\dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\left(\displaystyle\int\limits_{0}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\int\limits_{0}^{at-x}\psi(\xi)d\xi\right), & \text{երբ } x\geqslant 0,\ t\geqslant \dfrac{x}{a}: \end{cases}$$

Օրինակ 3.14: Լուծել խնդիրը.

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \quad 0<x<+\infty, \quad t>0, \\ u(0,t)=\mu(t), \quad t\geqslant 0, \\ u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad 0\leqslant x<+\infty: \end{cases}$$

Լուծում: Նախ լուծենք համասեռ սկզբնական պայմաններով

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(0,t) = \mu(t), \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x < +\infty \end{cases} \tag{3.34}$$

խնդիրը: Լուծումը փնտրենք $u(x,t) = g(x - at)$ տեսքով: Եզրային պայմանից՝

$$u(0,t) = g(-at) = \mu(t),$$

որտեղից

$$g(z) = \mu\left(-\frac{z}{a}\right),$$

այնպես որ

$$u(x,t) = \mu\left(-\frac{x-at}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right):$$

Բայց քանի որ $\mu(t)$ ֆունկցիան որոշված է միայն երբ $t \geqslant 0$, ապա ստացված ֆունկցիան որոշված կլինի, երբ $at - x \geqslant 0$: Որպեսզի այն որոշված լինի ցանկացած $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ արժեքների դեպքում, շարունակենք այն, ընդունելով $u(x,t) = 0$, երբ $0 \leqslant t < \dfrac{x}{a}$: Այսպիսով (3.34) խնդրի լուծումն է՝

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{երբ } 0 \leqslant t < \dfrac{x}{a}, \\ \mu\left(t - \dfrac{x}{a}\right), & \text{երբ } t \geqslant \dfrac{x}{a}: \end{cases}$$

Սա գումարելով (3.32) բանաձևով որոշվող (3.30) խնդրի լուծմանը, կստանանք մեր խնդրի լուծումը:
Պատասխան՝

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi, & \text{երբ } x \geqslant 0,\ 0 \leqslant t < \dfrac{x}{a}, \\ \mu\left(t - \dfrac{x}{a}\right) + \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi)d\xi, & \text{երբ } x \geqslant 0,\ \ t \geqslant \dfrac{x}{a}: \end{cases}$$

Օրինակ 3.15: Լուծել խնդիրը.

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\, u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x < +\infty, \end{cases}$$

որտեղ $f \in C\big([0,+\infty) \times (0,\infty)\big),\ f(0,t) = 0:$

Լուծում: Դիցուք $F(x,t)$ ֆունկցիան $f(x,t)$ ֆունկցիայի ըստ x-ի կենտ շարունակությունն է՝

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & x \geqslant 0, \\ -f(-x,t), & x < 0: \end{cases}$$

Դիտարկենք

$$\begin{cases} U_{tt} - a^2 U_{xx} = F(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \ \ t > 0, \\ U(x,0) = U_t(x,0) = 0, \quad -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Կոշիի խնդիրը, որի լուծումը կարելի է ստանալ (3.16) բանաձևից՝

$$U(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(z,\tau)\,dz\,d\tau: \tag{3.35}$$

Քանի որ $F(x,t)$ ֆունկցիան կենտ է ըստ x-ի, ապա $U(0,t) = 0$: Ունենք նաև

$$U(x,0) = U_t(x,0) = 0:$$

Այստեղից հետևում է, որ $U(x,t)$ ֆունկցիան համընկնում է մեր խնդրի լուծման հետ, երբ $x \geqslant 0,\ \ t \geqslant 0$:

Ձևափոխենք (3.35) բանաձևն այնպես, որ նրանում բացահայտ ձևով մասնակցի $f(x,t)$ ֆունկցիան: Դիտարկենք երկու դեպք:

1) $x > 0,\ x - at > 0$ ($t < x/a$): Այդ դեպքում $x - a(t-\tau) = x - at + a\tau > 0$, ուրեմն

$$u(x,t) = U(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)\,dz\,d\tau:$$

2) $x > 0,\ x - at < 0\ (t > x/a)$: Այդ դեպքում

$$x - a(t-\tau) = x - at + a\tau \begin{cases} < 0, & 0 < \tau < t - x/a, \\ \geqslant 0, & \tau > t - x/a, \end{cases}$$

հետևաբար

$$u(x,t)=U(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t-x/a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}F(z,\tau)dzd\tau+\frac{1}{2a}\int\limits_{t-x/a}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(z,\tau)dzd\tau=$$

$$=\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t-x/a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{0}(-f(-z,\tau))dzd\tau+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t-x/a}\int\limits_{0}^{x+a(t-\tau)}f(z,\tau)dzd\tau+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{t-x/a}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(z,\tau)dzd\tau=$$

$$=\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t-x/a}\int\limits_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)}f(z,\tau)dzd\tau+\frac{1}{2a}\int\limits_{t-x/a}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(z,\tau)dzd\tau\ :$$

Պատասխան՝

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(z,\tau)dzd\tau, & x\geqslant\ \ 0\leqslant t<\dfrac{x}{a},\\[2ex] \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{0}^{t-x/a}\int\limits_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)}f(z,\tau)dzd\tau+\dfrac{1}{2a}\int\limits_{t-x/a}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(z,\tau)dzd\tau, & x\geqslant\ \ t\geqslant\dfrac{x}{a}:\end{cases}$$

Խնդիրներ

Լուծել խառը խնդիրը.

256. $$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \quad 0<x<+\infty, \quad t>0,\\ u_x(0,t)=\nu(t), \quad t\geqslant 0,\\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \quad 0\leqslant x<+\infty:\end{cases}$$

257. $$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), \quad 0<x<+\infty, \quad t>0,\\ u_x(0,t)=0, \quad t\geqslant 0,\\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \quad 0\leqslant x<+\infty:\end{cases}$$

258. $$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), \quad 0<x<+\infty, \quad t>0,\\ u(0,t)=0, \quad t\geqslant 0,\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad 0\leqslant x<+\infty:\end{cases}$$

259. $$\begin{cases} u_{tt} - a^2\, u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty : \end{cases}$$

260. $$\begin{cases} u_{tt} - a^2\, u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(0,t) = \mu(t), \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty : \end{cases}$$

261. $$\begin{cases} u_{tt} - a^2\, u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = \nu(t), \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty : \end{cases}$$

262. $$\begin{cases} u_{tt} - a^2\, u_{xx} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) - hu(0,t) = \chi(t), \quad h > 0, \;\; t \geqslant 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x < +\infty : \end{cases}$$

3.2 Խառը խնդիրներ հատվածում: Դիցուք ℓ երկարության լարի կետերը հավասարակշռության դիրքում զբաղեցնում են Ox առանցքի $[0,\ell]$ հատվածը: Այս դեպքում լարի դիրքը նկարագրող $u(x,t)$ ֆունկցիան, բացի սկզբնական պայմաններից, պետք է բավարարի նաև որոշակի եզրային պայմանների լարի $x = 0$ և $x = \ell$ ծայրերում: Այդպիսի խնդիրները կոչվում են խառը կամ եզրային խնդիրներ:

Դիտարկենք համասեռ եզրային պայմաններով խառը խնդիրը՝

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad 0 < x < \ell, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0,\ell], \end{cases}$$

որտեղ

$$f \in C\{0 \leqslant x \leqslant \ell, \; t > 0\}, \qquad f(0,t) = f(\ell,t) = 0,$$

$$\varphi \in C^2[0,\ell], \; \psi \in C^1[0,\ell], \; \varphi(0) = \varphi(\ell) = \varphi''(0) = \varphi''(\ell) = 0, \; \psi(0) = \psi(\ell) = 0 :$$

Դիցուք $F(x,t), \Phi(x)$ և $\Psi(x)$ ֆունկցիաները համապատասխանաբար $f(x,t), \varphi(x)$ և $\psi(x)$ ֆունկցիաների կենտ և 2ℓ-պարբերական շարունակություններն են: Այսինքն՝ $F(x,t)$-ն $\{-\infty \leqslant x \leqslant +\infty, \;\; t \geqslant 0\}$ կիսատարածությունում որոշված այն ֆունկցիան է, որը ըստ x-ի

2ℓ-պարբերական է և կամայական $t \geqslant 0$ համար

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & 0 \leqslant x \leqslant \ell, \\ -f(-x,t), & -\ell \leqslant x \leqslant 0, \end{cases}$$

իսկ $\Phi(x)$ և $\Psi(x)$ ֆունկցիաները $(-\infty, +\infty)$ -ում որոշված 2ℓ-պարբերական այն ֆունկցիաներն են, որ

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 \leqslant x \leqslant \ell, \\ -\varphi(-x), & -\ell \leqslant x \leqslant 0, \end{cases} \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & 0 \leqslant x \leqslant \ell, \\ -\psi(-x), & -\ell \leqslant x \leqslant 0 : \end{cases}$$

Դիցուք $U(x,t)$ ֆունկցիան հետևյալ խնդրի լուծումն է՝

$$\begin{cases} U_{tt} - a^2 U_{xx} = F(x,x), \quad -\infty < x < +\infty, \ \ t > 0, \\ U(x,0) = \Phi(x), \quad U_t(x,0) = \Psi(x) : \end{cases}$$

Համաձայն Դալամբերի բանաձևի՝

$$U(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau :$$

Ակնհայտ է, որ $\{0 \leqslant x \leqslant \ell, \quad t \geqslant 0\}$ բազմությունում $U(x,t)$ ֆունկցիան կհամընկնի մեր խնդրի լուծման հետ:

Անհամասեռ եզրային պայմաններով

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < \ell, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = \mu(t), \quad t \geqslant 0, \\ u(\ell,t) = \nu(t), \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,\ell], \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in [0,\ell], \end{cases}$$

խառը խնդրի լուծումը կարելի է փնտրել

$$u(x,t) = v(x,t) + \mu(t) + \frac{x}{\ell}\left(\nu(t) - \mu(t)\right)$$

տեսքով: Այդ դեպքում $v(x,t)$ ֆունկցիայի որոշման համար կստանանք համասեռ եզրային պայմաններով խնդիր:

Խառը խնդրի լուծման վերը շարադրված մեթոդը կոչվում է շարունակման եղանակ:

Խնդիրներ

Լուծել խառը խնդիրը՝ շարունակման եղանակով.

263. $$\begin{cases} u_{tt} - a^2\, u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \sin\dfrac{\pi}{\ell}x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x <\leqslant \ell : \end{cases}$$

264. $$\begin{cases} u_{tt} - a^2\, u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(\ell,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = Ax, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x <\leqslant \ell : \end{cases}$$

265. $$\begin{cases} u_{tt} - a^2\, u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\ell,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \cos\dfrac{\pi}{\ell}x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x <\leqslant \ell : \end{cases}$$

§ 4 Փոփոխականների անջատման մեթոդը

Փոփոխականների անջատման կամ Ֆուրյեի մեթոդը լայն կիրառություն ունեցող մեթոդներից է, որով լուծվում են խառը և եզրային խնդիրներ հիպերբոլական, պարաբոլական և էլիպտական տիպի հավասարումների համար:

4.1 Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրը: Դիտարկենք ինքնահամալուծ տեսքով գրված երկրորդ կարգի գծային համասեռ

$$(p(x)y')' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, \quad x \in (a,b) \tag{3.36}$$

սովորական դիֆերենցիալ հավասարումը, որտեղ $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ և $\rho(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ են (a,b) միջակայքում, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) > 0$, $\rho(x)$-ը սահմանափակ է, λ -ն՝ պարամետր:

Ձևակերպենք հետևյալ խնդիրը՝ փնտրվում է (3.36) հավասարման այն $y(x)$ լուծումը, որը $C^2(a,b) \cap C^1[a,b]$ դասից է, և որը բավարարում է

$$\begin{cases} \alpha_1\, y'(a) + \beta_1\, y(a) = 0, & (3.37) \\ \alpha_2\, y'(b) + \beta_2\, y(b) = 0 & (3.38) \end{cases}$$

եզրային պայմաններին: Այստեղ $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ գործակիցները տրված հաստատուններ են, ընդ որում $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0,\ i = 1, 2$:

(3.36) հավասարմանը և (3.37), (3.38) եզրային պայմաններին միշտ բավարարում է $y(x) \equiv 0$ ֆունկցիան, որը կոչվում է տրիվիալ լուծում: Այն λ թիվը, որի դեպքում (3.36) հավասարումն ունի (3.37) և (3.38) եզրային պայմաններին բավարարող ոչ տրիվիալ լուծում, կոչվում է այդ խնդրի սեփական արժեք, իսկ նրան համապատասխանող ոչ տրիվիալ լուծումը՝ սեփական ֆունկցիա: (3.36)-(3.38) խնդրի բոլոր սեփական արժեքների և նրանց համապատասխանող սեփական ֆունկցիաների որոնման խնդիրը կոչվում է Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիր:

Հայտնի է, որ.

1. Գոյություն ունեն հաշվելի թվով սեփական արժեքներ, որոնք կարելի է համարակալել աճման կարգով՝

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots,$$

ընդ որում՝

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty :$$

2. Բոլոր սեփական արժեքները ոչ բացասական են՝ $\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots$, ընդ որում $\lambda_0 = 0$ թիվը սեփական արժեք է այն և միայն այն դեպքում, երբ $q(x) \equiv 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$:

3. Ամեն մի λ_k սեփական արժեքի համապատասխանում է միակ (հաստատուն արտադրիչի ճշտությամբ) $y_k(x)$ սեփական ֆունկցիա, և ամեն մի սեփական ֆունկցիայի համապատասխանում է միակ սեփական արժեք:

4. Սեփական ֆունկցիաները կազմում են օրթոգոնալ համակարգ $\rho(x)$ կշռով՝
$$\int_a^b \rho(x) y_n(x) y_m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \neq 0, & n = m: \end{cases}$$

5. **Ստեկլովի թեորեմ:** $C^2[a;b]$ դասի ցանկացած $f(x)$ ֆունկցիա, որը բավարարում է (3.37) և (3.38) պայմաններին, ըստ սեփական ֆունկցիաների վերլուծվում է հավասարաչափ զուգամետ Ֆուրյեի շարքի՝
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, y_k(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$
որտեղ
$$a_k = \frac{1}{\|y_k\|^2} \int_a^b \rho(x)\, f(x)\, y_k(x)\, dx, \qquad \|y_k\|^2 = \int_a^b \rho(x)\, \big(y_k(x)\big)^2\, dx, \qquad k = 1, 2, \cdots :$$

Օրինակ 3.16: Լուծել Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրը.
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (0, \ell), \\ y'(0) = 0, \\ y'(\ell) = 0: \end{cases}$$

Լուծում: Դիտարկենք երկու դեպք:

1. $\lambda = 0$: Այս դեպքում հավասարումն ընդունում է $y'' = 0$ տեսքը, որի ընդհանուր լուծումն է՝ $y(x) = c_1 x + c_2$: $y'(0) = 0$ պայմանից ստանում ենք $c_1 = 0$, ուրեմն՝ $y(x) \equiv c_2$: $y'(\ell) = 0$ պայմանը բավարարված է ցանկացած c_2 թվի դեպքում: Այսպիսով, $\lambda_0 = 0$ թիվը սեփական արժեք է, իսկ նրան համապատասխանող $y_0(x)$ սեփական ֆունկցիան՝ զրոյից տարբեր ցանկացած հաստատուն: Պարզության համար վերցնենք $y_0(x) \equiv 1$:

2. $\lambda > 0$: Այս դեպքում հավասարման ընդհանուր լուծումն է՝

$$y(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x \,:$$

$y'(0) = 0$ պայմանից՝ $\sqrt{\lambda}\, c_2 = 0$ կամ $c_2 = 0$, որտեղից՝ $y(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x$:
$y'(\ell) = 0$ պայմանից՝ $-\sqrt{\lambda}\, c_1 \sin\sqrt{\lambda}\ell = 0$ կամ $\sin\sqrt{\lambda}\ell = 0$, որտեղից՝

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2, \quad y_k(x) = \cos\frac{\pi k}{\ell}\, x, \quad k = 1, 2, \ldots :$$

Պատասխան՝ $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2, \quad y_k(x) = \cos\frac{\pi k}{\ell}\, x, \quad k = 0, 1, 2, \ldots :$

4.2 Լարի տատանման հավասարման համար խառը խնդրի լուծումը փոփոխականների անջատման մեթոդով: Դիտարկենք հետևյալ խառը խնդիրը՝

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < \ell, \;\; t > 0, & (3.39)\\ \alpha\, u_x(0,t) - \beta\, u(0,t) = 0, \qquad t \geqslant 0, & (3.40)\\ \gamma\, u_x(\ell,t) + \delta\, u(\ell,t) = 0, \qquad t \geqslant 0, & (3.41)\\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,\ell], & (3.42)\\ u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in [0,\ell], & (3.43) \end{cases}$$

որտեղ $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ են $[0;l]$-ում, իսկ α, β, γ, β հաստատունները ոչ բացասական են և $\alpha + \beta > 0$, $\gamma + \delta > 0$:

Փնտրենք նույնաբար զրոյից տարբեր

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{3.44}$$

տեսքի ֆունկցիա, որը բավարարում է (3.39) հավասարմանը և (3.40), (3.41) եզրային պայմաններին: Տեղադրելով (3.39) հավասարման մեջ՝

$$T''(t)\, X(x) - a^2\, T(t)\, X''(x) = 0$$

և անջատելով փոփոխականները՝ կստանանք

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2\, T(t)} \,: \tag{3.45}$$

$u(x,t)$ ֆունկցիան կլինի (3.39) հավասարման լուծում, եթե (3.45)-ը լինի նույնություն: Իսկ դա հնարավոր է այն և միայն այն դեպքում, երբ աջ և ձախ մասերը հավասար լինեն նույն հաստատունին: Նշանակելով այդ հաստատունը μ-ով՝

$$\frac{X''(x)}{X(x)} \equiv \frac{T''(t)}{a^2\,T(t)} \equiv \mu,$$

$T(t)$ ֆունկցիայի որոշման համար կստանանք

$$T''(t) - \mu\, a^2\, T(t) = 0 \tag{3.46}$$

հավասարումը, իսկ $X(x)$ ֆունկցիայի որոշման համար՝

$$X''(x) - \mu X(x) = 0 \tag{3.47}$$

հավասարումը:

Որպեսզի (3.44) ֆունկցիան բավարարի (3.40) և (3.41) եզրային պայմաններին, $X(x)$ ֆունկցիան պետք է բավարարի

$$\begin{cases} \alpha\, X'(0) - \beta\, X(0) = 0, & (3.48) \\ \gamma\, X'(\ell) + \delta\, X(\ell) = 0 & (3.49) \end{cases}$$

պայմաններին:

(3.47) հավասարումը ունի (3.48) և (3.49) պայմաններին բավարարող ոչ տրիվիալ լուծում, երբ $\mu \leqslant 0$: Հարմարության համար վերցնենք $\mu = -\lambda^2$: Այսպիսով, X(x) ֆունկցիայի որոշման համար ստացվեց

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ \alpha\, X'(0) - \beta\, X(0) = 0, \\ \gamma\, X'(\ell) + \delta\, X(\ell) = 0 \end{cases}$$

խնդիրը, որը կանվանենք (3.39)-(3.43) խնդրին համապատասխան Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիր:

Դիցուք գտնվել են այդ խնդրի բոլոր λ_k սեփական արժեքները և $X_k(x)$ սեփական ֆունկցիաները: Դիտարկենք երկու դեպք.

ա) Զրոն սեփական արժեք չէ՝ $\lambda_k \neq 0$: Տեղադրելով (3.46) հավասարման մեջ $\mu = -\lambda_k^2$ և լուծելով այն՝ կստանանք

$$T_k(t) = a_k \cos a\lambda_k t + b_k \sin a\lambda_k t, \qquad k = 1, 2, \cdots,$$

որտեղ a_k-ն և b_k-ն ցանկացած թվեր են:

Այսպիսով, ստացանք հաշվելի քանակով

$$u_k(x,t) = T_k(t) X_k(x) = \big(a_k \cos a\lambda_k t + b_k \sin a\lambda_k t\big) X_k(x)$$

ֆունկցիաներ, որոնք բավարարում են (3.39) հավասարմանը և (3.40), (3.41) եզրային պայմաններին։ Ակնհայտ է, որ (3.39) հավասարմանը և (3.40), (3.41) եզրային պայմաններին կբավարարի նաև

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos a\lambda_k t+b_k\sin a\lambda_k t\big)X_k(x) \tag{3.50}$$

ֆունկցիան, եթե միայն աջ մասում գրված շարքը և այն շարքերը, որոնք ստացվում են մինչև երկու անգամ անդամ առ անդամ ածանցելիս, հավասարաչափ զուգամետ են։

Պահանջելով, որ (3.50)-ով որոշվող $u(x,t)$ ֆունկցիան բավարարի նաև (3.42) և (3.43) սկզբնական պայմաններին, ստանում ենք

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_kX_k(x)=\varphi(x),\qquad \sum_{k=1}^{\infty}b_ka\lambda_kX_k(x)=\psi(x)$$

հավասարությունները, որոնք տեղի կունենան, եթե a_k և $b_ka\lambda_k$ թվերը լինեն $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ ֆունկցիաների Ֆուրյեի գործակիցները՝

$$a_k=\frac{1}{\|X_k\|^2}\int_0^{\ell}\varphi(x)X_k(x)dx,\quad b_k=\frac{1}{a\lambda_k\|X_k\|^2}\int_0^{\ell}\psi(x)X_k(x)dx,\quad \|X_k\|^2=\int_0^{\ell}\left(X_k(x)\right)^2dx: \tag{3.51}$$

բ) Զրոն սեփական արժեք է՝ $\lambda_0=0,\ \lambda_k>0,\ k=1,2,\cdots:$ Այդ՝ $\lambda_0=0$ սեփական արժեքին համապատասխանող $X_0(x)$ սեփական ֆունկցիան է զրոյից տարբեր ցանկացած հաստատուն։ Պարզության համար վերցնենք $X_0(x)\equiv 1:$

Երբ $\mu=\lambda_0=0$, (3.46) հավասարման ընդհանուր լուծումն է $T_0(t)=a_0+b_0t:$ Այդ դեպքում (3.50) շարքի փոխարեն կվերցնենք

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)X_k(x)=a_0+b_0t+\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos a\lambda_k t+b_k\sin a\lambda_k t\big)X_k(x) \tag{3.52}$$

շարքը, որտեղ

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)dx,\qquad b_0=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(x)dx,$$

իսկ մյուս՝ $a_k,\ b_k,\ k=1,2,\cdots$ գործակիցները որոշվում են (3.51) բանաձևերից։

Այսպիսով, (3.39)-(3.43) խնդիրը լուծելու համար պետք է՝

1. Կազմել խնդրին համապատասխան Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրը։
2. Գտնել ստացված Շտուրմ-Լիուվիլի խնդրի λ_k սեփական արժեքներն ու $X_k(x)$ սեփական ֆունկցիաները։

3. Գտնել a_k և b_k գործակիցները:

4. Տեղադրել (3.50) շարքի կամ, եթե զրոն սեփական արժեք է, (3.52) շարքի մեջ:

Օրինակ 3.17: Լուծել խառը խնդիրը.

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < \ell, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = \cos\dfrac{\pi}{2\ell}x, \ \ u_t(x,0) = \cos\dfrac{3\pi}{2\ell}x + \cos\dfrac{5\pi}{2\ell}x : \end{cases}$$

Լուծում: Համապատասխան Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրն է՝

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X(\ell) = 0, \end{cases}$$

որի սեփական արժեքներն ու սեփական ֆունկցիաներն են՝

$$\lambda_k = \frac{\pi(2k-1)}{2\ell}, \qquad X_k(x) = \cos\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}x, \qquad k = 1, 2.\cdots :$$

Լուծումը, համաձայն (3.50)-ի, կունենա

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{a\pi(2k-1)}{2\ell}t + b_k \sin\frac{a\pi(2k-1)}{2\ell}t \right) \cos\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}x \tag{3.53}$$

տեսքը: Ընտրենք a_k և b_k գործակիցները այնպես, որ $u(x,t)$-ն բավարարի սկզբնական պայմաններին: Տեղադրելով (3.53)-ի մեջ $t = 0$ և օգտվելով

$$u(x,0) = \cos\frac{\pi}{2\ell}x$$

պայմանից՝ կստանանք

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}x = \cos\frac{\pi}{2\ell}x,$$

որտեղից

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = a_3 = \ldots = 0 :$$

(3.53)-ից՝

$$u_t(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a\pi(2k-1)}{2\ell}\biggl(-a_k\sin\frac{a\pi(2k-1)}{2\ell}t+b_k\cos\frac{a\pi(2k-1)}{2\ell}t\biggr)\cos\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}x:$$

Տեղադրելով $t=0$ և օգտվելով

$$u_t(x,0)=\cos\frac{3\pi}{2\ell}x+\cos\frac{5\pi}{2\ell}x$$

պայմանից՝ կունենանք

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a\pi(2k-1)}{2\ell}\,b_k\cos\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}\,x=\cos\frac{3\pi}{2\ell}\,x+\cos\frac{5\pi}{2\ell}\,x$$

Այս հավասարությունը տեղի կունենա, եթե վերցնենք

$$b_1=0,\quad b_2=\frac{2\ell}{3a\pi},\quad b_3=\frac{2\ell}{5a\pi},\qquad b_4=b_5=\ldots=0:$$

Ստացված a_k և b_k թվերը տեղադրելով (3.53) շարքի մեջ՝ կստանանք խնդրի լուծումը:

Պատասխան՝

$$u(x,t)=\cos\frac{a\pi}{2\ell}\,t\cos\frac{\pi}{2\ell}\,x+\frac{2\ell}{3a\pi}\cos\frac{3a\pi}{2\ell}\,t\cos\frac{3\pi}{2\ell}\,x+\frac{2\ell}{5a\pi}\cos\frac{5a\pi}{2\ell}\,t\cos\frac{5\pi}{2\ell}\,x:$$

Օրինակ 3.18: Լարի $x=0$ և $x=5$ ծայրերը ամրացված են: Սկզբնական $t=0$ պահին լարը ունի $\varphi(x)=x(x-5)$ տեսքը, իսկ x աբսցիս ունեցող կետին հաղորդվում է $\psi(x)=x$ արագություն: Գտնել ժամանակի t պահին $u_{tt}-25u_{xx}=0$ հավասարումով որոշվող լարի x աբսցիս ունեցող կետի $u(x,t)$ օրդինատը:

Լուծում: $u(x,t)$ ֆունկցիան

$$\begin{cases} u_{tt}-25u_{xx}=0, \quad 0<x<5, \;\; t>0, \\ u(0,t)=0, \quad u(5,t)=0, \\ u(x,0)=\varphi(x)=x(x-5), \\ u_t(x,0)=\psi(x)=x \end{cases}$$

խնդրի լուծումն է: Հավասարման լուծումը, որը բավարարում է եզրային պայմաններին, փնտրենք $u(x,t)=X(x)T(t)$ տեսքով: $T(t)$ ֆունկցիայի որոշման համար կստանանք

$$T''(t)+25\,\lambda^2\,T(t)=0 \tag{3.54}$$

հավասարումը, իսկ $X(x)$ ֆունկցիայի որոշման համար՝

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2 X(x)=0, \\ X(0)=0, \\ X(5)=0 \end{cases}$$

Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրը: Սեփական արժեքներն ու սեփական ֆունկցիաներն են՝

$$\lambda_k=\frac{\pi k}{5}, \qquad X_k(x)=\sin\frac{\pi k}{5}\,x, \qquad k=1,2,\ldots,$$

ընդ որում՝

$$\|X_k(x)\|^2=\left\|\sin\frac{\pi k}{5}\,x\right\|^2=\int\limits_0^5 \sin^2\frac{\pi k}{5}\,xdx=\frac{5}{2}:$$

Լուծելով (3.54) հավասարմը, երբ $\lambda=\lambda_k=\dfrac{\pi k}{5}$, կստանանք

$$T(t)=T_k(t)=a_k\cos\pi k\,t+b_k\sin\pi k\,t:$$

Խնդրի լուծումը փնտրենք

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos\pi k\,t+b_k\sin\pi k\,t\Big)\sin\frac{\pi k}{5}\,x \tag{3.55}$$

շարքի տեսքով: Հաշվենք a_k և b_k գործակիցներն այնպես, որ բավարարվեն սկզբնական պայմանները.

$$\begin{aligned}
a_k&=\frac{1}{\|X_k(x)\|^2}\int_0^5\varphi(x)X_k(x)\,dx=\frac{2}{5}\int_0^5 x(x-5)\sin\frac{\pi kx}{5}\,dx=\\
&=\frac{2}{5}\left(-\frac{5x(x-5)}{\pi k}\cos\frac{\pi kx}{5}\Bigg|_0^5+\frac{5}{\pi k}\int_0^5(2x-5)\cos\frac{\pi kx}{5}\,dx\right)=\\
&=\frac{2}{\pi k}\left(\frac{(2x-5)\cdot 5}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{5}\Bigg|_0^5-\frac{10}{\pi k}\int_0^5\sin\frac{\pi kx}{5}\,xdx\right)=\\
&=\frac{2}{\pi k}\left(\frac{25}{\pi k}\sin\pi k+\frac{25}{\pi k}\sin 0+\frac{50}{\pi^2k^2}\cos\frac{\pi kx}{5}\Bigg|_0^5\right)=\\
&=\frac{100}{\pi^3k^3}\big(\cos\pi k-\cos 0\big)=\frac{100}{\pi^3k^3}\big((-1)^k-1\big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_k&=\frac{1}{5\lambda_k\|X_k(x)\|^2}\int_0^5\psi(x)X_k(x)dx=\frac{2}{5\pi k}\int_0^5 x\sin\frac{\pi kx}{5}dx=\\
&=\frac{2}{5\pi k}\left(-\frac{5x}{\pi k}\cos\frac{\pi kx}{5}\Bigg|_0^5+\frac{5}{\pi k}\int_0^5\cos\frac{\pi kx}{5}\,dx\right)=\\
&=\frac{2}{5\pi k}\left(-\frac{25}{\pi k}\cos\pi k+0\cdot\cos 0+\frac{5}{\pi k}\int_0^5\cos\frac{\pi kx}{5}\,dx\right)=\\
&=\frac{2}{5\pi k}\left(-\frac{25}{\pi k}(-1)^k+\frac{25}{\pi^2k^2}\sin\frac{\pi kx}{5}\Bigg|_0^5\right)=\\
&=\frac{10}{\pi^2k^2}(-1)^{k+1}+\frac{10}{\pi^3k^3}\big(\sin\pi k-\sin 0\big)=\frac{10}{\pi^2k^2}(-1)^{k+1}:
\end{aligned}$$

Տեղադրելով (3.55) շարքի մեջ՝ կստանանք խնդրի լուծումը:

Պատասխան՝

$$u(x,t)=\frac{10}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{10}{\pi k^3}\big((-1)^k-1\big)\cos\pi kt+\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\sin\pi kt\right)\sin\frac{\pi kx}{5}:$$

Օրինակ 3.19: Զողի մի ծայրը ամրացված է, իսկ մյուս ծայրում ազդում է Q

ուժը: Գտնել ձողի երկայնական տատանումները, եթե $t = 0$ պահից այդ ուժը դադարել է գործել:

Լուծում: Դիցուք ձողը ունի ℓ երկարություն, E Յունգի մոդուլ, ρ խտություն, σ լայնական կտրվածքի մակերես: Ձողի ազատ երկայնական տատանումների հավասարումն է՝

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \qquad a^2 = E/\rho : \tag{3.56}$$

Ենթադրենք ամրացված է ձողի $x = 0$ ծայրը՝

$$u(0, t) = 0, \quad t \geqslant 0 \tag{3.57}$$

իսկ $x = \ell$ ծայրը, երբ ուժը դադարում է գործել, ազատ է՝

$$u_x(\ell, t) = 0, \quad t \geqslant 0 : \tag{3.58}$$

Խնդրի դրվածքից պարզ է, որ ուղղահայաց հատույթների սկզբնական արագությունները զրո են՝

$$u_t(x, 0) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 0 : \tag{3.59}$$

Գտնենք հատույթների սկզբնական շեղումները: Ձողի բոլոր կետերում T լարման ուժը ժամանակի $t = 0$ պահին հավասար է Q-ի: Մյուս կողմից, Հուկի օրենքի համաձայն՝

$$T = E\sigma \, \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{t=0},$$

որտեղից

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{t=0} = \frac{Q}{E\sigma} :$$

Ինտեգրելով՝ կստանանք

$$u(x, 0) = \frac{Q}{E\sigma}\, x + C :$$

C հաստատունը որոշենք օգտվելով (3.57)-ից: Երբ $t = 0$ և $x = 0$, ունենք $u(0, 0) = C = 0$: Ուրեմն՝

$$u(x, 0) = \frac{Q}{E\sigma}\, x \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell : \tag{3.60}$$

Այսպիսով, պետք է գտնել (3.56) հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է (3.57), (3.58) եզրային և (3.59), (3.60) սկզբնական պայմաններին:

Ստացված խնդրին համապատասխան Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրն է՝

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X'(\ell) = 0, \end{cases}$$

որի սեփական արժեքներն ու սեփական ֆունկցիաներն են՝

$$\lambda_k = \frac{\pi(2k-1)}{2\ell}, \qquad X_k(x) = \sin\lambda_k\, x, = \sin\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}x, \qquad k = 1, 2, \cdots :$$

Խնդրի լուծումը, համաձայն (3.50)-ի, ունի

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{a\pi(2k-1)}{2\ell}t + b_k \sin\frac{a\pi(2k-1)}{2\ell}t \right) \sin\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}x$$

տեսքը: Գտնենք a_k և b_k գործակիցները՝ օգտվելով (3.59) և (3.60) սկզբնական պայմաններից:

(3.59) պայմանից ստացվում է $b_k = 0$: (3.60)-ից՝

$$u(x,0) = \sum_{r=1}^{\infty} a_k \sin\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}\, x = \frac{Q}{E\sigma}\, x,$$

որտեղից

$$a_k = \frac{1}{\|\sin\lambda_k\, x\|^2} \int_0^{\ell} \frac{Q}{E\sigma}\, x \sin\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}\, x\, dx :$$

Ունենք

$$\|\sin\lambda_k\, x\|^2 = \int_0^{\ell} \sin^2\lambda_k\, x\, dx = \int_0^{\ell} \sin^2\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}\, x\, dx = \frac{2}{\ell},$$

հետևաբար

$$a_k = \frac{Ql}{2E\sigma}\int_0^{\ell} x \sin\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}\, x\, dx = -\frac{4Q}{E\sigma\pi(2k-1)} \left(x \sin\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}\, x \,\Big|_0^{\ell} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\ell} \cos\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}\, x\, dx \right) = \frac{8Ql}{E\sigma\pi^2(2k-1)^2} \sin\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}\, x \,\Big|_0^{\ell} = \frac{(-1)^{k-1}\, 8Ql}{E\sigma\pi^2(2k-1)^2} :$$

Ստացված գործակիցները տեղադրելով շարքի մեջ՝ կստանանք խնդրի լուծումը:

Պատասխան`

$$u(x,t)=\frac{8Ql}{E\sigma\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\cos\frac{a\pi(2k-1)}{2\ell}\,t\sin\frac{a\pi(2k-1)}{2\ell}\,x\,:$$

Օրինակ 3.20: Լուծել խառը խնդիրը.

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \qquad 0<x<\ell, \ \ t>0, \\ u_x(0,t)=0, \quad u_x(\ell,t)=0, \\ u(x,0)=x, \ \ u_t(x,0)=1 : \end{cases}$$

Լուծում: Համապատասխան Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրն է՝

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2X(x)=0, \\ X`(0)=0, \\ X'(\ell)=0, \end{cases}$$

որի սեփական արժեքներն ու սեփական ֆունկցիաներն են՝

$$\lambda_k=\frac{\pi k}{\ell}, \qquad X_k(x)=\cos\frac{\pi k}{\ell}x, \quad k=0,1,2,\ldots :$$

Համաձայն (3.52)-ի՝

$$u(x,t)=a_0+b_0t+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{a\pi k}{\ell}t+b_k\sin\frac{a\pi k}{\ell}t\right)\cos\frac{\pi k}{\ell}x : \tag{3.61}$$

Ընտրենք a_k և b_k գործակիցները այնպես, որ $u(x,t)$-ն բավարարի սկզբնական պայմաններին:

$u(x,0)=x$ պայմանից՝

$$a_0+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos\frac{\pi k}{\ell}x=x,$$

որտեղից

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}xdx=\frac{\ell}{2},$$

$$a_k=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}x\cos\frac{\pi k}{\ell}x\,dx=\frac{2}{\pi k}\int_0^{\ell}x\,d\left(\sin\frac{\pi k}{\ell}x\right)=\frac{2}{\pi k}\left(x\sin\frac{\pi k}{\ell}x\Big|_0^{\ell}-\int_0^{\ell}\sin\frac{\pi k}{\ell}xdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi k}\left(0+\frac{\ell}{\pi k}\cos\frac{\pi k}{\ell}x\Big|_0^{\ell}\right)=\frac{2}{\pi k}\left(\frac{\ell}{\pi k}\cos\pi k-\frac{\ell}{\pi k}\right)=\frac{2\ell}{\pi^2k^2}((-1)^k-1), \quad k=1,2,\ldots :$$

Ածանցելով (3.61)-ը ըստ t-ի՝ կստանանք

$$u_t(x,t) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\pi k}{\ell}\Big(- a_k \sin\frac{a\pi k}{\ell} t + b_k \cos\frac{a\pi k}{\ell} t\Big) \cos\frac{\pi k}{\ell} x :$$

$u_t(x,0) = 1$ պայմանից՝

$$b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\pi k}{\ell} b_k \cos\frac{\pi k}{\ell} x = 1,$$

որտեղից

$$b_0 = 1, \qquad b_1 = b_2 = \cdots = 0 :$$

Ստացված a_k և b_k թվերը տեղադրելով (3.61) շարքի մեջ՝ կստանանք

$$u(x,t) = t + \frac{\ell}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\ell}{\pi^2 k^2}((-1)^k - 1)\cos\frac{a\pi k}{\ell} t \cos\frac{\pi k}{\ell} x :$$

Պատասխան՝

$$u(x,t) = t + \frac{\ell}{2} - \frac{4\ell}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos\frac{a\pi(2n+1)}{\ell} t \cos\frac{\pi(2n+1)}{\ell} x :$$

Օրինակ 3.21: Լուծել խառը խնդիրը.

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < \ell, \;\; t > 0, \\ u_x(0,t) - hu(0,t) = 0, \quad u_x(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \;\; u_t(x,0) = \psi(x) : \end{cases}$$

Լուծում: Համապատասխան Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրն է՝

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X`(0) - hX(0) = 0, \\ X'(\ell) = 0 : \end{cases}$$

Զրոն սեփական արժեք չէ $(\lambda \neq 0)$, հետևաբար

$$X(x) = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x : \tag{3.62}$$

Եզրային պայմաններից՝

$$\begin{cases} \lambda c_2 - hc_1 = 0, \\ \lambda(-c_1 \sin\lambda\ell + c_2 \cos\lambda\ell) = 0 : \end{cases}$$

Առաջին հավասարումից՝

$$c_1 = \frac{\lambda}{h}\, c_2 \qquad (3.63) :$$

Տեղադրենք երկրորդ հավասարման մեջ՝

$$c_2\left(\frac{\lambda}{h}\ \sin\lambda\ell + \cos\lambda\ell\right) = 0,$$

որտեղից λ-ների որոշման համար կստանանք

$$\lambda\sin\lambda\ell + h\cos\lambda\ell = 0$$

հավասարումը: Այն կարելի է գրել

$$h\,\mathrm{ctg}\,\lambda\ell = \lambda$$

տեսքով: Շտուրմ-Լիուվիլի խնդրի λ_k սեփական արժեքները այդ հավասարման դրական արմատներն են՝

$$\mathrm{ctg}\,\lambda_k\ell = \frac{\lambda_k}{h}, \qquad k = 1, 2, \cdots : \tag{3.64}$$

(3.62)-ում տեղադրելով λ-ի փոխարեն λ_k և հաշվի առնելով (3.63)-ը՝ կստանանք սեփական ֆունկցիաները c_2 հաստատուն արտադրիչի ճշտությամբ՝

$$X_k(x) = c_2\left(\frac{\lambda_k}{h}\cos\lambda_k x + \sin\lambda_k x\right) \qquad k = 1, 2, \cdots :$$

Պարզության համար վերցնենք $c_2 = h$: Այսպիսով,

$$X_k(x) = \lambda_k\cos\lambda_k x + h\ \sin\lambda_k x, \qquad k = 1, 2, \cdots :$$

(3.50)-ից՝

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos a\lambda_k t + b_k\sin a\lambda_k t)(\lambda_k\cos\lambda_k x + h\ \sin\lambda_k x) : \tag{3.65}$$

a_k և b_k գործակիցները որոշվում են (3.51)-ից.

$$\|X_k(x)\|^2=\int\limits_0^\ell(\lambda_k\cos\lambda_kx+h\sin\lambda_kx)^2dx=$$

$$=\lambda_k^2\int\limits_0^\ell\cos^2\lambda_kxdx+2\lambda_kh\int\limits_0^\ell\sin\lambda_kx\cos\lambda_kxdx+h^2\int\limits_0^\ell\sin^2\lambda_kxdx=$$

$$=\lambda_k^2\int\limits_0^\ell\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos2\lambda_kx\right)dx+\lambda_kh\int\limits_0^\ell\sin2\lambda_kxdx+h^2\int\limits_0^\ell\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2\lambda_kx\right)dx=$$

$$=\lambda_k^2\left(\frac{l}{2}+\frac{1}{4\lambda_k}\sin2\lambda_k\ell\right)-\frac{h}{2}\left(\cos2\lambda_k-1\right)+h^2\left(\frac{\ell}{2}-\frac{1}{4\lambda_k}\sin2\lambda_k\ell\right)=$$

$$=\frac{\lambda_k^2\ell+h^2\ell+h}{2}+\frac{\lambda_k^2-h^2}{4\lambda_k}\sin2\lambda_k\ell-\frac{h}{2}\cos2\lambda_k\ell=$$

$$=\frac{\lambda_k^2\ell+h^2\ell+h}{2}+\frac{\lambda_k^2-h^2}{4\lambda_k}\cdot\frac{2\operatorname{ctg}\lambda_k\ell}{\operatorname{ctg}^2\lambda_k\ell+1}-\frac{h}{2}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\lambda_k\ell-1}{\operatorname{ctg}^2\lambda_k\ell+1}:$$

Հաշվի առնելով (3.64)-ը՝

$$\|X_k(x)\|^2=\frac{\lambda_k^2\ell+h^2\ell+h}{2}+\frac{\lambda_k^2-h^2}{4\lambda_k}\cdot\frac{2\lambda_kh}{\lambda_k^2+h^2}-\frac{h}{2}\cdot\frac{\lambda_k^2-h^2}{\lambda_k^2+h^2}=\frac{\ell(h^2+\lambda_k^2)+h}{2}:$$

Պատասխան՝ $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos a\lambda_kt+b_k\sin a\lambda_kt)(\lambda_k\cos\lambda_kx+h\ \sin\lambda_kx),$

$$a_k=\frac{1}{\|X_k(x)\|^2}\int\limits_0^\ell\varphi(x)X_k(x)dx,\quad b_k=\frac{1}{a\lambda_k\|X_k(x)\|^2}\int\limits_0^\ell\psi(x)X_k(x)dx,$$

$$\|X_k(x)\|^2=\frac{\ell(h^2+\lambda_k^2)+h}{2},$$

λ_k թվերը $h\operatorname{ctg}\lambda\ell=\lambda$ հավասարման դրական արմատներն են:

Խնդիրներ

$0<x<\ell,\ \ t>0$ տիրույթում գտնել $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ հավասարման այն $u(x,t)$ լուծումը, որը բավարարում է նշված եզրային և սկզբնական պայմաններին.

266. $u(0,t)=0,\ \ u(\ell,t)=0,\ \ u(x,0)=0,\ \ u_t(x,0)=\sin\dfrac{2\pi}{\ell}x:$

267. $u(0,t)=0,\ \ u_x(\ell,t)=0,\ \ u(x,0)=\sin\dfrac{5\pi}{2\ell}x,\ \ u_t(x,0)=\sin\dfrac{\pi}{2\ell}x:$

268. $u(0,t)=0,\ \ u_x(\ell,t)=0,\ \ u(x,0)=x,\ \ u_t(x,0)=\sin\dfrac{\pi}{2\ell}x+\sin\dfrac{3\pi}{2\ell}x$:

269. $u_x(0,t)=0,\ \ u_x(\ell,t)=0,\ \ u(x,0)=\cos\dfrac{\pi}{\ell}x,\ \ u_t(x,0)=\cos\dfrac{5\pi}{\ell}x$:

270. $u_x(0,t)=0,\ \ u(\ell,t)=0,\ \ u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=\psi(x)$:

271. $u_x(0,t)=0,\ \ u_x(\ell,t)=0,\ \ u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=\psi(x)$:

272. $u(0,t)=0,\ \ u(\ell,t)=0,\ \ u(x,0)=hx(\ell-x),\ \ u_t(x,0)=0$:

273. $u(0,t)=0,\ \ u(\ell,t)=0,\ \ u(x,0)=0,\ \ u_t(x,0)=hx(\ell-x)$:

274. $u(0,t)=0,\ \ u_x(\ell,t)=0,\ \ u(x,0)=Ax,\ \ u_t(x,0)=0$:

275. $u(0,t)=0,\ \ u_x(\ell,t)+hu(\ell,t)=0,\ \ h>0,\ \ u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=\psi(x)$:

276. $u(0,t)=0,\ \ u_x(\ell,t)+hu(\ell,t)=0,\ \ h>0,\ \ u(x,0)=0,\ \ u_t(x,0)=x$:

277. $u_x(0,t)=0,\ \ u_x(\ell,t)+hu(\ell,t)=0,\ \ h>0,;\ u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=\psi(x)$:

278. $u_x(0,t)=0,\ \ u_x(\ell,t)+hu(\ell,t)=0,\ \ h>0,\ \ u(x,0)=0,\ \ u_t(x,0)=1$:

279. $u_x(0,t)-hu(0,t)=0,\ \ u_x(\ell,t)+hu(\ell,t)=0,\ \ h>0,\ \ u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=\psi(x)$:

280. $u_x(0,t)-hu(0,t)=0,\ \ u_x(\ell,t)+hu(\ell,t)=0,\ \ h>0,\ \ u(x,0)=1,\ \ u_t(x,0)=0$:

281. $u_x(0,t)-h_1u(0,t)=0,\ \ u_x(\ell,t)+h_2u(\ell,t)=0,\ \ h_1>0,\ h_2>0,$
$u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=\psi(x)$:

Լուծել $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ հավասարումով որոշվող լարի տատանման խնդիրը, եթե ծայրերը ամրացված են, սկզբնական շեղումը $\varphi(x)$ է, իսկ սկզբնական արագությունը՝ $\psi(x),\ 0\leqslant x\leqslant\ell$.

282. $\varphi(x)$-ը սինուսոիդ է՝ $\varphi(x)=A\sin\dfrac{\pi nx}{\ell},\quad n\in N,\quad \psi(x)\equiv 0$:

283. $\varphi(x)$-ը OAB բեկյալն է, որտեղ $O(0,0),\ A(c,h),\ B(\ell,0),\ 0<c<\ell,\ \psi(x)\equiv 0$: Դիտարկել $c=\ell/2$ դեպքը:

284. $\varphi(x)\equiv 0,\ \ \psi(x)=v_0=\text{const.}$:

285. $\varphi(x)\equiv 0,\ \ \psi(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<\alpha,\\ v_0, & \alpha\leqslant x\leqslant\beta,\\ 0, & \beta<x\leqslant\ell\ :\end{cases}$

286. $\varphi(x) \equiv 0, \;\; \psi(x) = \begin{cases} A\cos\dfrac{\pi(x-x_0)}{2\alpha}\,x, & |x-x_0| \leqslant \alpha, \\ 0, & |x-x_0| > \alpha, \end{cases} \qquad 0 \leqslant x_0 - \alpha < x_0 + \alpha \leqslant \ell :$

4.3 Անհամասեռ հավասարում, համասեռ եզրային պայմաններ:

Փոփոխականների անջատման մեթոդը թույլ է տալիս կառուցել խառը խնդիրների լուծումը նաև այն դեպքում, երբ հավասարումն անհամասեռ է: Դիտարկենք լարի տատանման անհամասեռ հավասարման համար խառը խնդիրը՝

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad 0 < x < \ell, \;\; t > 0, & (3.66) \\ \alpha\, u_x(0,t) - \beta\, u(0,t) = 0, \qquad t \geqslant 0, & (3.67) \\ \gamma\, u_x(\ell,t) + \delta\, u(\ell,t) = 0, \qquad t \geqslant 0, & (3.68) \\ u(x,0) = \varphi(x), & (3.69) \\ u_t(x,0) = \psi(x) : & (3.70) \end{cases}$$

Դիցուք $X_k(x), \;\; k = 1, 2, \cdots$ ֆունկցիաները

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, & (3.71) \\ \alpha\, X'(0)) - \beta\, X(0) = 0, & (3.72) \\ \gamma\, X'(\ell) + \delta\, X(\ell) = 0 & (3.73) \end{cases}$$

Շտուրմ-Լիուվիլի խնդրի λ_k սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական ֆունկցիաներն են:

(3.66)-(3.70) խնդրի լուծումը փնտրենք

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x) \tag{3.74}$$

շարքի տեսքով: Քանի որ $X_k(x)$ ֆունկցիաները բավարարում են (3.72) և (3.73) պայմաններին, ապա (3.74) շարքի $u(t,x)$ գումարը կբավարարի (3.67) և (3.68) եզրային պայմաններին: $u_k(t)$ ֆունկցիաներն ընտրենք այնպես, որ այն բավարարի նաև (3.66) հավասարմանն ու (3.69), (3.70) սկզբնական պայմաններին:

$f(x,t)$ ֆունկցիան x-ի նկատմամբ վերլուծենք Ֆուրյեի շարքի՝ ըստ $X_k(x)$ սեփական ֆունկցիաների՝

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x), \tag{3.75}$$

որտեղ

$$f_k(t) = \frac{1}{\|X_k\|^2}\int\limits_0^\ell f(x,t)X_k(x)dx, \qquad k = 1, 2, \cdots :$$

(3.74)-ը և (3.75)-ը տեղադրելով (3.66) հավասարման մեջ՝ կստանանք

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k''(t)X_k(x) - a^2\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)X_k''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)X_k(x),$$

որտեղից, հաշվի առնելով, որ $X_k''(x) = -\lambda^2 X_k(x)$, կստանանք

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big(u_k''(t) + a^2\lambda^2 u_k(t) - f_k(t)\big)X_k(x) = 0 :$$

Ստացված հավասարությունը տեղի կունենա, եթե $u_k(t)$ ֆունկցիան բավարարի հետևյալ երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային սովորական դիֆերենցիալ հավասարմանը՝

$$u_k''(t) + (a\lambda_k)^2 u_k(t) = f_k(t) : \tag{3.76}$$

$\varphi(x)$ և $\psi(x)$ ֆունկցիաները վերլուծենք Ֆուրյեի շարքի ըստ $X_k(x)$ համակարգի՝

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k X_k(x), \qquad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k X_k(x),$$

որտեղ

$$\varphi_k = \frac{1}{\|X_k\|^2}\int\limits_0^\ell \varphi(x)X_k(x)dx, \qquad \psi_k = \frac{1}{\|X_k\|^2}\int\limits_0^\ell \psi(x)X_k(x)dx, \qquad k = 1, 2, \cdots :$$

(3.69) և (3.70) սկզբնական պայմաններից՝

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k X_k(x),$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(0)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k X_k(x),$$

որտեղից $u_k(0) = \varphi_k,\ u_k'(0) = \psi_k$:

Այսպիսով, $u_k(t)$ ֆունկցիաների որոշման համար ստացվեց

$$\begin{cases} u_k''(t) + (a\lambda_k)^2 u_k(t) = f_k(t), \\ u_k(0) = \varphi_k, \\ u_k'(0) = \psi_k \end{cases}$$

Կոշիի խնդիրը: Գտնելով այս խնդրի $u_k(t)$ լուծումը և տեղադրելով այն (3.74) շարքի մեջ՝ կստանանք (3.66)-(3.70) խնդրի լուծումը:

4.4 Անհամասեռ եզրային պայմաններ: Դիտարկենք անհամասեռ եզրային պայմաններով հետևյալ խնդիրը՝

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad 0 < x < \ell, \;\; t > 0, & (3.77) \\ \alpha\, u_x(0,t) - \beta\, u(0,t) = \mu(t), \qquad t \geqslant 0, & (3.78) \\ \gamma\, u_x(\ell,t) + \delta\, u(\ell,t) = \nu(t), \qquad t \geqslant 0, & (3.79) \\ u(x,0) = \varphi(x), & (3.80) \\ u_t(x,0) = \psi(x) : & (3.81) \end{cases}$$

Փնտրենք լուծումը երկու ֆունկցիաների գումարի տեսքով՝

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

Տեղադրելով այն (3.77)-(3.81)-ի մեջ և w պարունակող անդամները տեղափոխելով աջ մաս՝ կստանանք

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = \tilde{f}(x,t), \\ \alpha\, v_x(0,t) - \beta\, v(0,t) = \tilde{\mu}(t), \\ \gamma\, v_x(\ell,t) + \delta\, v(\ell,t) = \tilde{\nu}(t), \\ u(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \\ u_t(x,0) = \tilde{\psi}(x) : \end{cases}$$

Այստեղ կատարված են

$$\tilde{f}(x,t) = f(x,t) - w_{tt} + a^2 w_{xx},$$
$$\tilde{\mu}(t) = \mu(t) - \alpha w_x(0,t) + \beta w(0,t),$$
$$\tilde{\nu}(t) = \nu(t) - \gamma w_x(\ell,t) - \delta w(\ell,t),$$
$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - w(x,0),$$
$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - w_t(x,0)$$

նշանակումները: Այժմ ընտրենք $w(x,t)$ ֆունկցիան այնպես, որ

$$\tilde{\mu}(t) = \mu(t) - \alpha w_x(0,t) + \beta w(0,t) = 0, \qquad \tilde{\nu}(t) = \nu(t) - \gamma w_x(\ell,t) - \delta w(\ell,t) = 0 :$$

Կարելի է փնտրել

$$w(x,t) = (\gamma_1 x^2 + \gamma_2 x + \gamma_3)\mu(t) + (\delta_1 x^2 + \delta_2 x + \delta_3)\nu(t)$$

տեսքով, որտեղ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ թվերն ենթակա են որոշման:

Այսպիսով, $v(x,t)$-ի նկատմամբ կստանանք համասեռ եզրային պայմաններով հետևյալ խնդիրը՝

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = \tilde{f}(x,t), \\ \alpha v_x(0,t) - \beta v(0,t) = 0, \\ \gamma v_x(\ell,t) + \delta v(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \\ u_t(x,0) = \tilde{\psi}(x) : \end{cases}$$

Լուծելով այն և ստացված $v(x,t)$ ֆունկցիան գումարելով $w(x,t)$ ֆունկցիային՝ կստանանք (3.77)-(3.81) խնդրի լուծումը:

Դիտողություն 1. Եթե (3.77)-(3.81) խնդրում հավասարման աջ մասը կախված չէ t-ից՝ $f(x,t) = f(x)$, իսկ (3.78) և (3.79) եզրային պայմաններում μ և ν ֆունկցիաները հաստատուններ են՝ $\mu(t) = \mu_0$, $\nu(t) = \nu_0$, ապա կարելի է փնտրենլ լուծումը $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$ տեսքով, որտեղ $w(x)$ ֆունկցիան բավարարում է

$$\begin{cases} w''(x) = f(x), \\ \alpha w'(0) - \beta w(0) = \mu_0, \\ \gamma w'(\ell) + \delta w(\ell) = \nu_0 \end{cases}$$

պայմաններին: Այսպես վարվելով $v(x,t)$ ֆունկցիայի որոշման համար կստանանք խնդիր, որտեղ և հավասարումը և եզրային պայմանները համասեռ են՝

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \\ \alpha v_x(0,t) - \beta v(0,t) = 0, \\ \gamma v_x(\ell,t) + \delta v(\ell,t) = 0, \\ v(x,0) = \varphi(x) - w(x), \\ v_t(x,0) = \psi(x): \end{cases}$$

Դիտողություն 2. Եթե (3.78) և (3.79) եզրային պայմանները չեն պարունակում որոնելի ֆունկցիայի ածանցյալ, ուստի ունեն

$$u(0,t) = \mu(t), \qquad u(\ell,t) = \nu(t)$$

տեսքը, ապա լուծումը կարելի է փնտրել $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ տեսքով, որտեղ

$$w(x,t) = \mu(t) + \frac{x}{\ell}\left(\nu(t) - \mu(t)\right) :$$

Այս դեպքում $v(x,t)$ ֆունկցիայի որոշման համար կստացվի համասեռ եզրային պայմաններով խնդիր:

Օրինակ 3.22: Լուծել խառը խնդիրը.

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \quad 0 < x < \ell, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = \alpha, \quad u(\ell,t) = \beta, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 : \end{cases}$$

Լուծում: Եթե փնտրենք լուծումը

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$$

տեսքով, $v(x,t)$ ֆունկցիայի որոշման համար կստանանք

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x) + a^2 w''(x), & \\ v(0,t) = \alpha - w(0) & v(\ell,t) = \beta - w(\ell), \\ v(x,0) = -w(x), & v_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

խնդիրը: Այժմ $w(x)$ ֆունկցիան ընտրենք այնպես, որ

$$\begin{cases} f(x) + a^2 w''(x) = 0, \\ \alpha - w(0) = 0, \\ \beta - w(\ell) = 0 \end{cases} \qquad \text{կամ} \qquad \begin{cases} w''(x) = -\dfrac{1}{a^2} f(x), \\ w(0) = \alpha, \\ w(\ell) = \beta : \end{cases}$$

Առաջին հավասարումից՝

$$w'(x) = -\frac{1}{a^2}\int\limits_0^x f(\xi)d\xi + c_1,$$

$$w(x) = -\frac{1}{a^2}\int\limits_0^x \left(\int\limits_0^y f(\xi)d\xi\right)dy + c_1 x + c_2 : \tag{3.82}$$

$w(0) = \alpha$ պայմանից՝ $c_2 = \alpha$ ։ $w(\ell) = \beta$ պայմանից՝

$$\beta = -\frac{1}{a^2}\int_0^\ell \left(\int_0^y f(\xi)d\xi\right)dy + c_1\ell + \alpha,$$

որտեղից

$$c_1 = \frac{1}{la^2}\int_0^\ell \left(\int_0^y f(\xi)d\xi\right)dy + \frac{\beta-\alpha}{\ell} :$$

Տեղադրելով (3.82)-ի մեջ՝ կստանանք

$$w(x) = -\frac{1}{a^2}\int_0^x \left(\int_0^y f(\xi)d\xi\right)dy + \frac{x}{\ell la^2}\int_0^l \left(\int_0^y f(\xi)d\xi\right)dy + \frac{x(\beta-\alpha)}{l} + \alpha :$$

Այսպիսով, $v(x,t)$ ֆունկցիայի նկատմամբ ստացվեց

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \\ v(0,t) = 0, \qquad v(\ell,t) = 0, \\ v(x,0) = -w(x), \quad v_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

խնդիրը։ Լուծելով այն փոփոխականների անջատման եղանակով՝ կստանանք

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{a\pi k}{\ell}t \sin\frac{\pi k}{\ell}x,$$

որտեղ

$$a_k = -\frac{2}{\ell}\int_0^\ell w(x)\sin\frac{\pi k}{\ell}x dx :$$

Պատասխան՝ $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{a\pi k}{\ell}t \sin\frac{\pi k}{\ell}x + w(x),$
որտեղ

$$w(x) = -\frac{1}{a^2}\int_0^x \left(\int_0^y f(\xi)d\xi\right)dy + \frac{x}{\ell a^2}\int_0^\ell \left(\int_0^y f(\xi)d\xi\right)dy + \frac{x(\beta-\alpha)}{\ell} + \alpha,$$

$$a_k = -\frac{2}{\ell}\int_0^\ell w(x)\sin\frac{\pi k}{\ell}x dx :$$

Օրինակ 3.23: Լուծել խառը խնդիրը.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < \ell, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) - hu(0,t) = \alpha, \\ u_x(\ell,t) + hu(\ell,t) = -\alpha, \ \ h > 0, \\ u(x,0) = 0, \ \ u_t(x,0) = 0 : \end{cases}$$

Լուծում: Փնտրելով լուծումը $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$ տեսքով՝ $v(x,t)$ ֆունկցիայի նկատմամբ կստանանք

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = w''(x), \\ v_x(0,t) - hv(0,t) = \alpha - w'(0) + hw(0), \\ v_x(\ell,t) + hv(\ell,t) = -\alpha - w'(\ell) - hw(\ell), \\ v(x,0) = -w(x), \ \ v_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

խնդիրը: Ընտրենք $w(x)$ ֆունկցիան այնպես, որ տեղի ունենան

$$\begin{cases} w'' = 0, \\ \alpha - w'(0) + hw(0) = 0, \\ -\alpha - w'(\ell) - hw(\ell) = 0 \end{cases}$$

պայմանները: Հեշտ է տեսնել, որ $w(x) \equiv -\alpha/h$ այդ պայմաններին բավարարող միակ ֆունկցիան է: Այսպիսով, $v(x,t)$ ֆունկցիայի նկատմամբ կստացվի համասեռ հավասարումով և եզրային պայմաններով հետևյալ խնդիրը՝

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0, \\ v_x(0,t) - hv(0,t) = 0, \\ v_x(\ell,t) + hv(\ell,t) = 0, \\ v(x,0) = \dfrac{\alpha}{h}, \quad v_t(x,0) = 0 : \end{cases}$$

Համապատասխան Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրն է՝

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X'(0) - hX(0) = 0, \\ X'(\ell) + hX(\ell) = 0 : \end{cases}$$

$\lambda \neq 0$, հետևաբար՝

$$X(x) = c_1 \cos\lambda\, x + c_2 \sin\lambda\, x :$$

Եզրային պայմաններից՝

$$\begin{cases} c_2\lambda - hc_1 = 0, \\ -c_1\lambda\sin\lambda\ell + c_2\lambda\cos\lambda\ell + h(c_1\cos\lambda\ell + c_2\sin\lambda\ell) = 0 : \end{cases}$$

Առաջին հավասարումից՝ $c_1 = \lambda c_2/h$: Տեղադրելով երկրորդ հավասարման մեջ և հաշվի առնելով, որ $c_2 \neq 0$, λ-ի որոշման համար կստանանք

$$2\lambda h\cos\lambda\ell - (\lambda^2 - h^2)\sin\lambda\ell = 0$$

հավասարումը: Այն կարելի է գրել

$$\operatorname{ctg}\lambda\ell = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{h} - \frac{h}{\lambda}\right)$$

տեսքով: Ստացված հավասարման արմատների մոտավոր արժեքները կարելի է գտնել գրաֆիկական եղանակով: Նշանակելով $\xi = \lambda\ell$, կստանանք

$$\operatorname{ctg}\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\ell h} - \frac{lh}{\xi}\right)$$

հավասարումը:

$O\xi\eta$ կոորդինատային հարթությունում $\eta = \operatorname{ctg}\xi$ կոտանգեսոիդի և $\eta = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\xi}{\ell h} - \dfrac{\ell h}{\xi}\right)$ հիպերբոլի հատման կետերի աբսցիսները նշանակենք ξ_k -ով, $k = 1, 2, \ldots,$ (նկ 4): Այդ դեպքում $\lambda_k = \xi_k/\ell$, հետևաբար

$$\operatorname{ctg}\lambda_k\ell = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_k}{h} - \frac{h}{\lambda_k}\right) = \frac{\lambda_k^2 - h^2}{2\lambda_k h} :$$

Հաշվի առնելով, որ $c_1 = \lambda c_2/h$, հավասարման ընդհանուր լուծումից կստանանք

$$X(x) = c_2\left(\frac{\lambda}{h}\cos\lambda\, x + \sin\lambda\, x\right),$$

որտեղից, տեղադրելով $\lambda = \lambda_k$, կստանանք սեփական ֆունկցիաները՝ c_2 հաստատուն արտադրիչի ճշտությամբ: Պարզության համար վերցնենք $c_2 = h$, և հետևաբար

$$X_k(x) = \lambda_k\cos\lambda_k\, x + h\sin\lambda_k\, x, \quad k = 1, 2, \ldots :$$

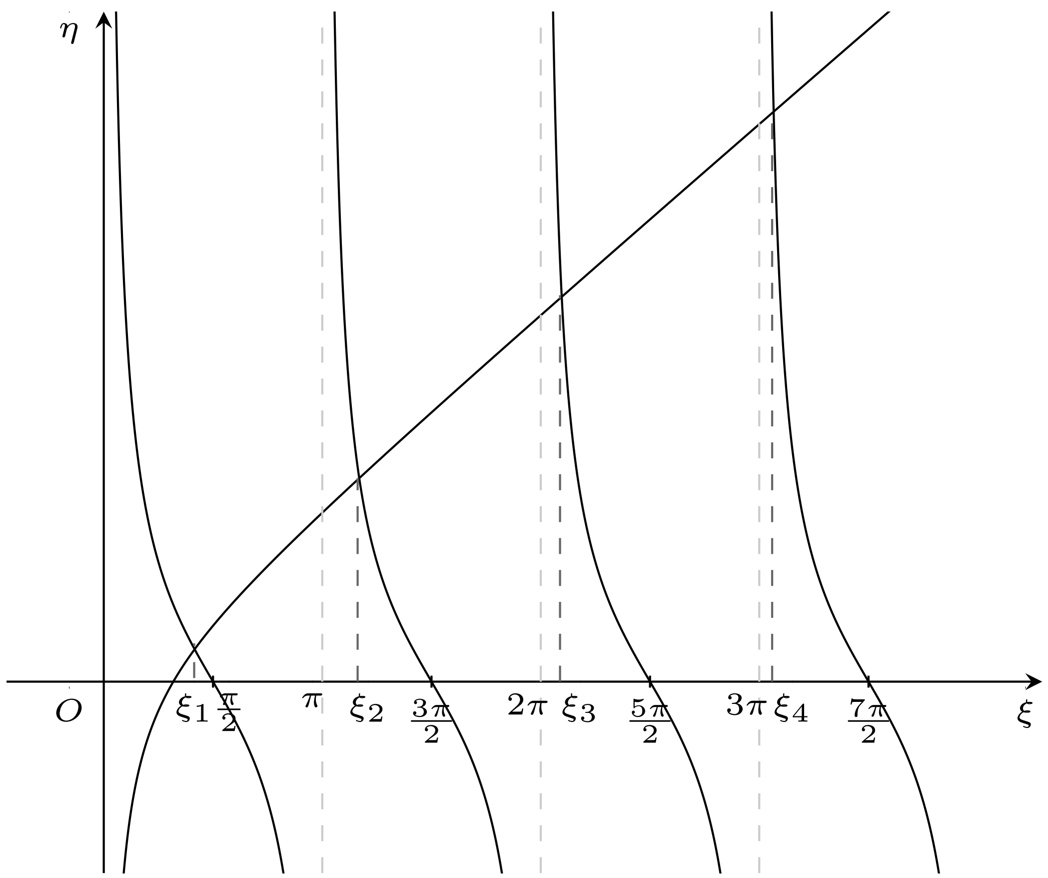
Օգտվելով (3.39)-(3.43) խնդրի լուծման (3.50) բանաձևից՝ կարող ենք գրել

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t\big)(\lambda_k \cos \lambda_k x + h \sin \lambda_k x), \tag{3.83}$$

որտեղ a_k և b_k գործակիցները կստացվեն (3.51) բանաձևերից՝ վերցնելով $a = 1$, $\varphi(x) = \frac{\alpha}{h}$, $\psi(x) = 0$.

$$a_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^{\ell} \frac{\alpha}{h} X_k(x)dx = \frac{\alpha}{h\|X_k\|^2} \int_0^{\ell} X_k(x)dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\lambda_k \|X_k\|^2} \int_0^{\ell} 0 \cdot X_k(x)dx = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots :$$



Նկ. 4

Գտնենք a_k գործակիցները՝ հաշվելով $\|X_k\|^2$ և $\int_0^{\ell} X_k(x)dx$

մեծությունները.

$$
\begin{aligned}
\|X_k\|^2 &= \int\limits_0^\ell (\lambda_k \cos\lambda_k\, x + h\sin\lambda_k\, x)^2 dx = \\
&= \lambda_k^2 \int\limits_0^\ell \cos^2\lambda_k x dx + 2\lambda_k h \int\limits_0^\ell \sin\lambda_k x\cos\lambda_k x dx + h^2 \int\limits_0^\ell \cos^2\lambda_k x dx = \\
&= \frac{\lambda_k^2}{2}\int\limits_0^\ell (1+\cos 2\lambda_k x)dx + \lambda_k h\int\limits_0^\ell \sin 2\lambda_k x dx + \frac{h^2}{2}\int\limits_0^\ell (1-\cos 2\lambda_k x)dx = \\
&= \frac{(\lambda_k^2+h^2)\ell}{2} + \frac{\lambda_k^2-h^2}{2}\int\limits_0^\ell \cos 2\lambda_k x dx + \lambda_k h\int\limits_0^\ell \sin 2\lambda_k x dx :
\end{aligned}
$$

Հաշվենք ստացված ինտեգրալները.

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^\ell \cos 2\lambda_k x dx &= \frac{1}{2\lambda_k}\sin 2\lambda_k x\Big|_0^\ell = \frac{1}{2\lambda_k}\sin 2\lambda_k\ell = \frac{1}{2\lambda_k}\cdot\frac{2\operatorname{ctg}\lambda_k\ell}{1+\operatorname{ctg}^2\lambda_k\ell} = \\
&= \frac{1}{\lambda_k}\cdot\frac{\dfrac{\lambda_k^2-h^2}{2\lambda_k h}}{1+\left(\dfrac{\lambda_k^2-h^2}{2\lambda_k h}\right)^2} = \frac{1}{\lambda_k}\cdot\frac{2\lambda_k h(\lambda_k^2-h^2)}{4\lambda_k^2h^2+(\lambda_k^2-h^2)^2} = \frac{2h(\lambda_k^2-h^2)}{(\lambda_k^2+h^2)^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^\ell \sin 2\lambda_k x dx &= -\frac{1}{2\lambda_k}\cos 2\lambda_k x\Big|_0^\ell = \frac{1}{2\lambda_k}(1-\cos 2\lambda_k\ell) = \frac{1}{\lambda_k}\sin^2\lambda_k\ell = \\
&= \frac{1}{\lambda_k}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\lambda_k\ell} = \frac{1}{\lambda_k}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{\lambda_k^2-h^2}{2\lambda_k h}\right)^2} = \frac{4\lambda_k h^2}{(\lambda_k^2+h^2)^2} :
\end{aligned}
$$

Տեղադրելով՝ կստանանք

$$
\begin{aligned}
\|X_k\|^2 &= \frac{(\lambda_k^2+h^2)\ell}{2} + \frac{\lambda_k^2-h^2}{2}\cdot\frac{2h(\lambda_k^2-h^2)}{(\lambda_k^2+h^2)^2} + \lambda_k h\cdot\frac{4\lambda_k h^2}{(\lambda_k^2+h^2)^2} = \\
&= \frac{(\lambda_k^2+h^2)\ell}{2} + \frac{2h((\lambda_k^2-h^2)^2+4\lambda_k^2h^2)}{2(\lambda_k^2+h^2)^2} = \\
&= \frac{(\lambda_k^2+h^2)\ell}{2} + \frac{2h(\lambda_k^2+h^2)^2}{2(\lambda_k^2+h^2)^2} = \frac{(\lambda_k^2+h^2)\ell}{2} + h = \frac{(\lambda_k^2+h^2)\ell+2h}{2} :
\end{aligned}
$$

$$\int\limits_0^\ell X_k(x)dx = \int\limits_0^\ell (\lambda_k \cos \lambda_k x + h \sin \lambda_k x)dx = \lambda_k \int\limits_0^\ell \cos \lambda_k x dx + h \int\limits_0^\ell \sin \lambda_k x dx =$$

$$= \lambda_k \cdot \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k x \Big|_0^\ell - h \cdot \frac{1}{\lambda_k} \cos \lambda_k x \Big|_0^\ell = \sin \lambda_k \ell + \frac{h}{\lambda_k}(1 - \cos \lambda_k \ell) =$$

$$= \frac{h}{\lambda_k} + \sin \lambda_k \ell \left(1 - \frac{h}{\lambda_k} \operatorname{ctg} \lambda_k \ell\right) = \frac{h}{\lambda_k} + \sin \lambda_k \ell \left(1 - \frac{h}{\lambda_k} \cdot \frac{\lambda_k - h^2}{2\lambda_k h}\right) =$$

$$= \frac{h}{\lambda_k} + \frac{\lambda_k^2 + h^2}{2\lambda_k^2} \sin \lambda_k \ell :$$

Գրաֆիկից (տես նկ. 4) ունենք $\pi(k-1) < \xi_k < \pi(k-1) + \frac{\pi}{2}, \ (k = 1, 2, \cdots)$ կամ

$$\pi(k-1) < \lambda_k \ell < \pi(k-1) + \frac{\pi}{2},$$

հետևաբար $\sin \lambda_k \ell > 0$, երբ k-ն կենտ է, $\sin \lambda_k \ell < 0$, երբ k-ն զույգ է: Այստեղից՝

$$\sin \lambda_k \ell = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \lambda_k \ell}} = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\lambda_k^2 - h^2}{2\lambda_k h}\right)^2}} = \frac{(-1)^{k-1} 2\lambda_k h}{\lambda_k^2 + h^2},$$

ուրեմն

$$\int\limits_0^\ell X_k(x)dx = \frac{h}{\lambda_k} + \frac{\lambda_k^2 + h^2}{2\lambda_k^2} \cdot \frac{(-1)^{k-1} 2\lambda_k h}{\lambda_k^2 + h^2} = \frac{h(1 - (-1)^k)}{\lambda_k} :$$

Այսպիսով,

$$a_k = \frac{\alpha}{h\|X_k\|^2} \int\limits_0^\ell X_k(x)dx = \frac{\alpha}{h} \cdot \frac{2}{2h + (\lambda_k^2 + h^2)\ell} \cdot \frac{h(1 - (-1)^k)}{\lambda_k} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4\alpha}{\lambda_k\big(2h + (\lambda_k^2 - h^2)\ell\big)}, & \text{երբ } k = 2n - 1, \\ 0, & \text{երբ } k = 2n, \ n \in N : \end{cases}$$

Տեղադրելով (3.83) շարքի մեջ՝

$$v(x,t) = 4\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2n-1}(2h + \ell(\lambda_{2n-1}^2 + h^2))} \cos \lambda_{2n-1} t \left(\lambda_{2n-1} \cos \lambda_{2n-1} x + h \sin \lambda_{2n-1} x\right),$$

այնուհետև գումարելով $w(x) \equiv -\alpha/h$, կստանանք խնդրի լուծումը:

Պատասխան՝

$$u(x,t)=-\frac{\alpha}{h}+4\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{2n-1}\big(2h+\ell(\lambda_{2n-1}^2+h^2)\big)}\cos\lambda_{2n-1}t\,\big(\lambda_{2n-1}\cos\lambda_{2n-1}x+h\sin\lambda_{2n-1}x\big),$$

λ_k թվերը $\operatorname{ctg}\lambda\ell=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\lambda}{h}-\dfrac{h}{\lambda}\right)$ հավասարման դրական արմատներն են:

Օրինակ 3.24: Լուծել խառը խնդիրը.

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=Axe^{-t}, \quad 0<x<\ell, \ \ t>0,\\ u(0,t)=0, \quad u(\ell,t)=0,\\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0: \end{cases}$$

Լուծում: Համապատասխան Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրն է

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2X(x)=0,\\ X(0)=0,\\ X(\ell)=0, \end{cases}$$

որի սեփական արժեքներն ու սեփական ֆունկցիաներն են՝

$$\lambda_k=\frac{\pi k}{\ell}, \qquad X_k(x)=\sin\frac{\pi k}{\ell}x, \qquad k=1,2,\cdots:$$

Լուծումը փնտրենք

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin\frac{\pi k}{\ell}x \tag{3.83}$$

շարքի տեսքով:

Վերլուծենք $f(x,t)=Axe^{-t}$ ֆունկցիան

$$f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin\frac{\pi k}{\ell}x$$

Ֆուրյեի շարքի, որտեղ

$$f_k(t)=\frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell f(x,t)\sin\frac{\pi k}{\ell}xdx=\frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell Axe^{-t}\sin\frac{\pi k}{\ell}xdx=\frac{2Ae^{-t}}{\ell}\int\limits_0^\ell x\sin\frac{\pi k}{\ell}xdx=$$

$$=\frac{2Ae^{-t}}{\ell}\cdot\frac{\ell}{\pi k}\int\limits_0^\ell xd\cos\frac{\pi k}{\ell}x=\frac{2Ae^{-t}}{\ell}\cdot\frac{\ell}{\pi k}\left(x\cos\frac{\pi k}{\ell}x\Big|_0^\ell-\int\limits_0^\ell\cos\frac{\pi k}{\ell}xdx\right)=$$

$$=\frac{2Ae^{-t}}{\ell}\cdot\frac{\ell}{\pi k}\left(\ell\cos\pi k-\frac{\ell}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{\ell}x\Big|_0^\ell\right)=\frac{(-1)^{k+1}2A\ell}{\pi k}e^{-t}:$$

Տեղադրենք ստացված շարքերը հավասարման մեջ.

$$\sum_{k=1}^\infty u_k''(t)\sin\frac{\pi k}{\ell}x-a^2\sum_{k=1}^\infty\left(-\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2u_k(t)\sin\frac{\pi k}{\ell}x\right)=\sum_{k=1}^\infty f_k(t)\sin\frac{\pi k}{\ell}x$$

կամ

$$\sum_{k=1}^\infty\left(u_k''(t)+\left(\frac{a\pi k}{\ell}\right)^2u_k(t)-f_k(t)\right)\sin\frac{\pi k}{\ell}x=0,$$

որտեղից՝

$$u_k''(t)+\left(\frac{a\pi k}{\ell}\right)^2u_k(t)=f_k(t):$$

(3.83) շարքի մեջ տեղադրենք $t=0$, և օգտվենք $u(x,0)=0$ պայմանից՝ կստանանք $u_k(0)=0$:

Ածանցենք (3.83)-ը ըստ t-ի, տեղադրենք $t=0$ և օգտվենք $u_t(x,0)=0$ պայմանից՝ կստանանք $u_k'(0)=0$: Այսպիսով, $u_k(t)$ ֆունկցիայի որոշման համար ստանում ենք

$$\begin{cases}u_k''(t)+\left(\dfrac{a\pi k}{\ell}\right)^2u_k(t)=\dfrac{(-1)^{k+1}2A\ell}{\pi k}e^{-t},\\ u_k(0)=0,\\ u_k'(0)=0,\qquad k=1,2,\ldots:\end{cases}$$

Կոշիի խնդիրը: Հավասարման ընդհանուր լուծումը ունի

$$u_k(t)=u_k^{(0)}(t)+u_k^{(1)}(t)$$

տեսքը, որտեղ $u_k^{(0)}(t)$-ն համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է՝

$$u_k^{(0)}(t)=D_k\cos\frac{a\pi}{\ell}t+B_k\sin\frac{a\pi}{\ell}t,$$

իսկ $u_k^{(1)}(t)$ -ն` անհամասեռ հավասարման որևէ լուծում: Փնտրենք

$$u_k^{(1)}(t) = C_k\, e^{-t}$$

տեսքով: Տեղադրելով հավասարման մեջ`

$$C_k e^{-t} + C_k \Big(\frac{a\pi k}{\ell}\Big)^2 e^{-t} = \frac{(-1)^{k+1} 2A\ell}{\pi k}\, e^{-t},$$

որտեղից`

$$C_k = \frac{(-1)^{k+1} 2A\ell}{\pi k\Big(1 + \big(\frac{a\pi k}{\ell}\big)^2\Big)},$$

և հետևաբար`

$$u_k^{(1)}(t) = \frac{(-1)^{k+1} 2A\ell}{\pi k\Big(1 + \big(\frac{a\pi k}{\ell}\big)^2\Big)}\, e^{-t} :$$

Հավասարման ընդհանուր լուծումն է`

$$u_k(t) = D_k \cos\frac{a\pi}{\ell} t + B_k \sin\frac{a\pi}{\ell} t + \frac{(-1)^{k+1} 2A\ell}{\pi k\Big(1 + \big(\frac{a\pi k}{\ell}\big)^2\Big)}\, e^{-t} :$$

$u_k(0) = 0$ պայմանից`

$$D_k + \frac{(-1)^{k+1} 2A\ell}{\pi k\Big(1 + \big(\frac{a\pi k}{\ell}\big)^2\Big)} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_k = -\frac{(-1)^{k+1} 2A\ell}{\pi k\Big(1 + \big(\frac{a\pi k}{\ell}\big)^2\Big)} :$$

Ունենք

$$u_k'(t) = \frac{a\pi k}{\ell}\Big(- D_k \sin\frac{a\pi k}{\ell} t + B_k \cos\frac{a\pi k}{\ell} t\Big) - \frac{(-1)^{k+1} 2A\ell}{\pi k\Big(1 + \big(\frac{a\pi k}{\ell}\big)^2\Big)}\, e^{-t} :$$

$u_k'(0) = 0$ պայմանից`

$$\frac{a\pi k}{\ell} B_k - \frac{(-1)^{k+1} 2A\ell}{\pi k\Big(1 + \big(\frac{a\pi k}{\ell}\big)^2\Big)} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_k = \frac{(-1)^{k+1} 2A\ell^2}{a\pi^2 k^2\Big(1 + \big(\frac{a\pi k}{\ell}\big)^2\Big)} :$$

Այսպիսով,

$$u_k(t) = \frac{(-1)^{k+1} 2A\ell}{\pi k\Big(1+\Big(\dfrac{a\pi k}{\ell}\Big)^2\Big)}\Big(\frac{\ell}{a\pi k}\sin\frac{a\pi k}{\ell}t - \cos\frac{a\pi k}{\ell}t + e^{-t}\Big) :$$

Տեղադրելով (3.83) շարքի մեջ՝ կստանանք խնդրի լուծումը:
Պատասխան՝

$$u(x,t) = \frac{2A\ell}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k\Big(1+\Big(\dfrac{a\pi k}{\ell}\Big)^2\Big)}\Big(\frac{\ell}{a\pi k}\sin\frac{a\pi k}{\ell}t - \cos\frac{a\pi k}{\ell}t + e^{-t}\Big)\sin\frac{\pi k}{\ell}x :$$

Օրինակ 3.25: Լուծել խառը խնդիրը.

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = 0, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) = e^{-t}, \qquad u(\pi,t) = t, \\ u(x,0) = \sin x\cos x, \quad u_t(x,0) = 1 : \end{cases}$$

Լուծում: Փնտրենք լուծումը $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ տեսքով: $v(x,t)$-ի որոշման համար կստանանք

$$\begin{cases} v_{xx} - v_{tt} = w_{tt} - w_{xx}, \\ v(0,t) = e^{-t} - w(0,t), \qquad v(\pi,t) = t - w(\pi,t), \\ v(x,0) = \sin x\cos x - w(x,0), \quad v_t(x,0) = 1 - w_t(x,0) \end{cases}$$

խնդիրը: Վերցնենք

$$w(x,t) = \Big(1-\frac{x}{\pi}\Big)e^{-t} + \frac{x}{\pi}t :$$

Այդ դեպքում $v(x,t)$ ֆունկցիայի նկատմամբ կստացվի

$$\begin{cases} v_{xx} - v_{tt} = f(x,t), & (3.84) \\ v(0,t) = 0, \quad v(\pi,t) = 0, & (3.85) \\ v(x,0) = \varphi(x), \quad v_t(x,0) = \psi(x) & (3.86) \end{cases}$$

խնդիրը, որտեղ

$$f(x,t) = \Big(1-\frac{x}{\pi}\Big)e^{-t}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{x}{\pi} - 1, \qquad \psi(x) = 2\Big(1-\frac{x}{\pi}\Big) :$$

Ստացված խնդրին համապատասխան Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրն է՝

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(\pi) = 0, \end{cases}$$

որի սեփական արժեքներն ու սեփական ֆունկցիաներն են՝

$$\lambda_k = k, \qquad X_k(x) = \sin kx, \quad k = 1, 2, \cdots :$$

Փնտրենք (3.84)-(3.86) խնդրի լուծումը

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \sin kx \tag{3.87}$$

շարքի տեսքով:

Վերլուծենք $f(x,t)$ ֆունկցիան ըստ $X_k(x) = \sin kx$ համակարգի՝

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin kx,$$

որտեղ

$$f_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x,t) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) e^{-t} \sin kx dx =$$

$$= \frac{2e^{-t}}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx - \frac{2e^{-t}}{\pi^2} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = -\frac{2e^{-t}}{\pi} \cos kx \Big|_0^{\pi} + \frac{2e^{-t}}{\pi^2 k} \int_0^{\pi} x d(\cos kx) dx =$$

$$= -\frac{2e^{-t}}{\pi k}\Big((-1)^k - 1\Big) + \frac{2e^{-t}}{\pi^2 k}\left(x \cos kx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos kx dx\right) =$$

$$= -\frac{2e^{-t}}{\pi k}\Big((-1)^k - 1\Big) + \frac{2e^{-t}}{\pi^2 k}\left(\pi \cos \pi k - 0 - \frac{1}{k} \sin kx \Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2e^{-t}}{\pi k} :$$

Տեղադրելով ստացված շարքերը (3.84) հավասարման մեջ, կստանանք

$$v_k''(t) + k^2 v_k(t) = -f_k(t)$$

հավասարումը:

Տեղադրելով (3.87) շարքում $t = 0$ և օգտվելով (3.86)-ի առաջին պայմանից՝ կստանանք

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(0) \sin kx,$$

իսկ դա նշանակում է, որ $v_k(0)$ թվերը $\varphi(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի գործակիցներն են՝

$$v_k(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\sin kx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{x}{\pi} - 1\right)\sin kx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin 2x \sin kx dx + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x}{\pi}\sin kx dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin kx dx = \frac{k\alpha_k - 2}{\pi k} :$$

Այստեղ

$$\alpha_k = \int_0^\pi \sin 2x \sin kx\, dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{k}, & \text{երբ} \quad k = 2, \\ 0, & \text{երբ} \quad k \neq 2, \end{cases}$$

և հետևաբար

$$v_k(0) = \begin{cases} \dfrac{\pi - 2}{\pi k}, & \text{երբ} \quad k = 2, \\ -\dfrac{2}{\pi k}, & \text{երբ} \quad k \neq 2 : \end{cases}$$

Ածանցելով (3.87) շարքի աջ և ձախ մասերը ըստ t-ի, տեղադրելով $t = 0$ և օգտվելով (3.86)-ի երկրորդ պայմանից՝ կստանանք

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k'(0) \sin kx,$$

որտեղից՝

$$v_k'(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \psi(x)\sin kx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\sin kx dx = \frac{4}{\pi k} :$$

Այսպիսով, $v_k(t)$ ֆունկցիաների որոշման համար ստանում ենք

$$\begin{cases} v_k''(t) + k^2 v_k(t) = -\dfrac{2e^{-t}}{\pi k} & (3.88) \\ v_k(0) = \begin{cases} \dfrac{\pi - 2}{\pi k}, & \text{երբ} \quad k = 2 \\ -\dfrac{2}{\pi k}, & \text{երբ} \quad k \neq 2 \end{cases} & (3.89) \\ v_k'(0) = \dfrac{4}{\pi k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots & (3.90) \end{cases}$$

խնդիրը: (3.88) հավասարման ընդհանուր լուծումը ունի

$$v_k(t) = v_k^{(0)}(t) + v_k^{(1)}(t)$$

տեսքը, որտեղ $v_k^{(0)}(t)$-ն համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է՝

$$v_k^{(0)}(t) = A_k \cos kt + B_k \sin kt,$$

իսկ $v_k^{(1)}(t)$ -ն՝ անհամասեռ հավասարման մասնակի լուծումը: Այն կարելի է փնտրել

$$v_k^{(1)}(t) = C_k e^{-t}$$

տեսքով: Տեղադրելով հավասարման մեջ՝ կստանանք

$$C_k e^{-t} + C_k k^2 e^{-t} = -\frac{2e^{-t}}{\pi k},$$

որտեղից՝

$$C_k = -\frac{2}{\pi k(1 + k^2)},$$

և հետևաբար

$$v_k^{(1)}(t) = -\frac{2}{\pi k(1 + k^2)}\, e^{-t} :$$

Այսպիսով,

$$v_k(t) = A_k \cos kt + B_k \sin kt - \frac{2}{\pi k(1 + k^2)}\, e^{-t} : \tag{3.91}$$

(3.89) պայմանից՝

$$A_k - \frac{2}{\pi k(1 + k^2)} = \begin{cases} \dfrac{\pi - 2}{\pi k}, & \text{երբ} \quad k = 2, \\ \\ -\dfrac{2}{\pi k}, & \text{երբ} \quad k \neq 2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A_k = \begin{cases} \dfrac{1}{5\pi} + \dfrac{\pi - 2}{2\pi}, & \text{երբ} \quad k = 2, \\ \\ -\dfrac{2k^2}{\pi k(1 + k^2)}, & \text{երբ} \quad k \neq 2 : \end{cases}$$

Ունենք

$$v_k'(t) = k(-A_k \sin kt + B_k \cos kt) + \frac{2}{\pi k(1+k^2)}\, e^{-t} :$$

(3.90) պայմանից՝

$$k\, B_k + \frac{2}{\pi k(1+k^2)} = \frac{4}{\pi k} \quad \Rightarrow \quad B_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{\pi k} \cdot \frac{2k^2+1}{k^2+1} :$$

Ստացված A_k և B_k թվերը տեղադրելով (3.91)-ի մեջ՝ կստանանք (3.88)-(3.90) խնդրի $v_k(t)$ լուծումը: (3.87)-ից՝

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{1}{2}\cos 2t \sin 2x + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2k^2}{\pi k(1+k^2)} \cos kt + \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{\pi k} \cdot \frac{2k^2+1}{k^2+1} \sin kt - \frac{2}{\pi k(1+k^2)}\, e^{-t} \right) \sin kx = \\ &= \frac{1}{2}\cos 2t \sin 2x - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(1+k^2)} \left(e^{-t} + k^2 \cos kt - \left(2k + \frac{1}{k} \right) \sin kt \right) \sin kx : \end{aligned}$$

Գումարելով $w(x,t)$ ֆունկցիան՝ կստանանք խնդրի լուծումը:

Պատասխան՝

$$\begin{aligned} u(x,t) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) e^{-t} + \frac{xt}{\pi} + \frac{1}{2}\cos 2t \sin 2x - \\ - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(1+k^2)} \left(e^{-t} + k^2 \cos kt - \left(2k + \frac{1}{k} \right) \sin kt \right) \sin kx : \end{aligned}$$

Խնդիրներ

$0 < x < \ell,\quad t > 0$ տիրույթում գտնել $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0$ սկզբնական և նշված եզրային պայմաններին.

287. $u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad a = 1, \quad f(x,t) = 2b :$

288. $u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad f(x,t) = Ae^{-t} \sin \dfrac{\pi}{\ell} x :$

289. $u(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, \quad f(x,t) = A \sin t :$

290. $u(0,t) = u_x(\ell,t) = 0 :$

291. $u_x(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad f(x,t) = Ae^{-t} \cos \dfrac{\pi}{2\ell} x :$

292. $u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0:$

293. $u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad a = 1, \;\; l = \pi, \;\; f(x,t) = \cos t:$

Լուծել խնդիրը $(0<x<\ell,\ \ t>0)$.

294. $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=b\,\mathrm{sh}\,x, \\ u(0,t)=0,\ \ u(\ell,t)=0, \\ u(x,0)=0,\ \ u_t(x,0)=0\ : \end{cases}$

295. $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=bx(x-l), \\ u(0,t)=0,\ \ u(\ell,t)=0, \\ u(x,0)=0,\ \ u_t(x,0)=0\ : \end{cases}$

296. $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x), \\ u_x(0,t)=\alpha,\ \ u_x(\ell,t)=\beta, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=\psi(x)\ : \end{cases}$

297. $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x), \\ u_x(0,t)-hu(0,t)=\alpha,\ \ h>0 \\ u(\ell,t)=\beta, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=\psi(x)\ : \end{cases}$

298. $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x), \\ u_x(0,t)=\alpha, \\ u_x(\ell,t)+hu(\ell,t)=\beta,\ \ h>0 \\ u(x,0)=0,\ \ u_t(x,0)=0\ : \end{cases}$

299. $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+u_t=1,\quad 0<x<1,\ \ t>0, \\ u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0, \\ u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0\ : \end{cases}$

Լուծել խառը խնդիրը.

300. $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=x,\quad 0<x<\pi,\ \ t>0, \\ u(0,t)=0,\quad u(\pi,t)=0, \\ u(x,0)=\sin 2x,\quad u_t(x,0)=0\ : \end{cases}$

301. $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\quad 0<x<\pi,\ \ t>0, \\ u(0,t)=t^2,\quad u(\pi,t)=t^3, \\ u(x,0)=\sin x,\quad u_t(x,0)=0\ : \end{cases}$

302. $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\quad 0<x<\pi,\ \ t>0, \\ u(0,t)=t,\quad u_x(\pi,t)=1, \\ u(x,0)=\sin\dfrac{1}{2}\,x,\quad u_t(x,0)=1\ : \end{cases}$

303. $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\quad 0<x<\ell,\ \ t>0, \\ u_x(0,t)=0,\quad u_x(\ell,t)=Ae^{-t}, \\ u(x,0)=\dfrac{Aa\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}}{\mathrm{sh}\,\dfrac{\ell}{a}},\quad u_t(x,0)=-\dfrac{Aa\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}}{\mathrm{sh}\,\dfrac{\ell}{a}}\ : \end{cases}$

304. $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin 2t, \quad 0 < x < \ell, \;\; t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\ell,t) = \dfrac{2}{a} \sin \dfrac{2\ell}{a} \sin 2t, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = -2\cos \dfrac{2x}{a} : \end{cases}$

305. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \ell, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = t, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 : \end{cases}$

306. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = t + 1, \quad u(1,t) = t^3 + 2, \\ u(x,0) = x + 1, \quad u_t(x,0) = 0 : \end{cases}$

307. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 4u = 0, \quad 0 < x < 1, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x^2 - x, \quad u_t(x,0) = 0 : \end{cases}$

308. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0, \quad 0 < x < \pi, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = \pi x - x^2, \quad u_t(x,0) = 0 : \end{cases}$

309. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0, \quad 0 < x < \pi, \;\; t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x : \end{cases}$

310. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_t = 0, \quad 0 < x < 1, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = t, \quad u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 1 - x : \end{cases}$

311. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u = 0, \quad 0 < x < 2, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = 2t, \quad u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 : \end{cases}$

312. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u = 0, \quad 0 < x < \ell, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = t, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \dfrac{x}{\ell} : \end{cases}$

313. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 4x + 8e^t \cos x, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 2t, \quad u(\frac{\pi}{2}, t) = \pi t, \\ u(x,0) = \cos x, \quad u_t(x,0) = 2x : \end{cases}$

314. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - 2u_t = 4t(\sin x - x), \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 3, \quad u_x(\frac{\pi}{2}, t) = t^2 + t, \\ u(x,0) = 3, \quad u_t(x,0) = x + \sin x : \end{cases}$

315. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - 3u_t - u = -x(4+t) + \cos \dfrac{3x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = t + 1, \quad u(\pi, t) = \pi(t+1), \\ u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = x : \end{cases}$

316. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - 7u_t - 2u_x = -2t - 7x - e^{-x} \sin 3x, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi, t) = \pi t, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x : \end{cases}$

317. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t - 8u = 2x(1-4t) + \cos 3x, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = t, \quad u(\frac{\pi}{2}, t) = \dfrac{\pi t}{2}, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x : \end{cases}$

318. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - 4u = 2 \sin^2 x, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 : \end{cases}$

319. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - 10u = 2 \sin 2x \cos x, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 : \end{cases}$

320. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - 3u_t - 2u_x = -3x - 2t, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi, t) = \pi t, \\ u(x,0) = e^{-x} \sin x, \quad u_t(x,0) = x : \end{cases}$

Գլուխ 4. Պարաբոլական տիպի հավասարումներ

§ 1. Պարաբոլական հավասարման բերվող պարզագույն խնդիրներ

Պարաբոլական տիպի հավասարումներն առավել հաճախ հանդիպում են ջերմության տարածման և դիֆուզիայի երևույթներ ուսումնասիրելիս:

1.1 Ջերմության տարածման խնդիրը: Դիտարկենք ձող, որի կողմնային մակերևույթը ջերմամեկուսացված է և որը բավականաչափ բարակ է, այսինքն՝ կարելի է ենթադրել, որ լայնական կտրվածքի կետերն ունեն նույն ջերմաստիճանը: Ընդունենք, որ Ox կոորդինատային ուղղիղն անցնում է ձողի առանցքով: Նշանակենք $u(x,t)$-ով ժամանակի t պահին x կտրվածքի ջերմաստիճանը: Ձողի ներսում ջերմությունը կարող է կլանվել կամ առաջանալ (օրինակ, երբ նրանով անցնում է էլեկտրական հոսանք, տեղի է ունենում քիմիական ռեակցիա և այլն): Դիցուք $F(x,t)$ ֆունկցիան t պահին x կտրվածքում ջերմության աղբյուրի խտությունն է: Ձողում ջերմաստիճանի տարածման պրոցեսը նկարագրվում է

$$c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)=F(x,t)$$

հավասարումով, որտեղ k-ն ջերմահաղորդականության գործակիցն է, c-ն՝ տեսակարար ջերմունակությունը, ρ-ն՝ խտությունը: Այն կոչվում է ջերմահաղորդականության հավասարում:

Եթե ձողը համասեռ է, այսինքն k, c և ρ մեծությունները հաստատուններ են, ապա ջերմահաղորդականության հավասարումը կգրվի

$$u_t-a^2u_{xx}=f(x,t)\qquad\left(a^2=\frac{k}{c\rho},\quad f(x,t)=\frac{F(x,t)}{c\rho}\right)$$

տեսքով:

Եթե ձողի մակերևույթը ջերմամեկուսացված չէ, ապա միջավայրի հետ ջերմափոխականության արդյունքում միավոր ժամանակում միավոր երկարությամբ ձողը կորցնում է $F_0(x,t)$ քանակի ջերմություն, որը, համաձայն թերմոդինամիկայի օրենքի, համեմատական է ձողի և միջավայրի ջերմաստիճանների տարբերությանը՝

$$F_0(x,t)=h(T-u):$$

Այստեղ $T(x,t)$-ն միջավայրի ջերմաստիճանն է, h-ը՝ ջերմափոխականության գործակիցը: Այսպիսով, եթե ձողում կա $F_1(x,t)$ խտությամբ ջերմային աղբյուր, ապա

$$F(x,t) = F_1(x,t) + F_0(x,t) = F_1(x,t) + h(T(x,t) - u(x,t)),$$

և ջերմահաղորդականության հավասարումն ընդունում է

$$u_t - a^2 u_{xx} + \beta u = f(x,t) \qquad \left(\beta = \frac{h}{c\rho}, \quad f(x,t) = \alpha T(x,t) + \frac{F_1(x,t)}{c\rho}\right)$$

տեսքը:

Ջերմության տարածումը հարթ մեմբրանում, որը վերագրված է Oxy կոորդինատային հարթությանը, բնութագրվում է

$$u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy})u = f(x,y,t)$$

հավասարումով, որտեղ $u(x,y,t)$-ն մեմբրանի (x,y) կոորդինատ ունեցող կետի ջերմաստիճանն է ժամանակի t պահին:

Պինդ մարմնի $u(x,y,z,t)$ ջերմաստիճանը բավարարում է

$$u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f(x,y,z,t)$$

հավասարմանը:

Վերը նշված բոլոր հավասարումները կարելի է գրել

$$u_t - a^2 \Delta u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$$

ընդհանուր տեսքով, որտեղ Δ-ն Լապլասի օպերատորն է:

1.2 Դիֆուզիայի հավասարումը: Միջավայրում, երկու կամ մի քանի նյութերի առկայության պայմաններում, տեղի է ունենում դիֆուզիա՝ տարբեր նյութերի մոլեկուլների փոխադարձ թափանցումը մեկը մյուսի մեջ, ընդ որում բարձր կոնցենտրացիայից մոլեկուլները տեղափոխվում են ավելի ցածր կոնցենտրացիա ունեցող կետեր:

Դիտարկենք դիֆուզիան սնամեջ գլանում (խողովակում), որը լցված է գազերի կամ լուծույթների խառնուրդով: Ենթադրվում է, որ ժամանակի ցանկացած պահին խողովակի առանցքին ուղղահայաց կամայական հատույթի բոլոր կետերում տվյալ նյութի կոնցենտրացիան նույն է: Անցկացնենք Ox կոորդինատային ուղիղը խողովակի առանցքով: Նշանակենք $u(t,x)$-ով x կոորդինատ ունեցող հատույթում նյութերից մեկի կոնցենտրացիան ժամանակի t պահին: Հայտնի է, որ այն բավարարում է

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

հավասարմանը, որտեղ $D(t,x)$-ը դիֆուզիայի գործակիցն է: Եթե դիֆուզիայի գործակիցը հաստատուն է, ապա հավասարումն ընդունում է

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \qquad \left(a = \sqrt{D}\right)$$

տեսքը: Եթե խառնուրդը Ox առանցքի երկայնքով շարժվում է α արագությամբ, ապա $u(t,x)$ կոնցենտրացիան բավարարում է

$$u_t - a^2 u_{xx} + \alpha u_x = 0$$

հավասարմանը: Այն կոչվում է կոնվեկտիվ դիֆուզիայի հավասարում:

1.3 Սկզբնական և եզրային պայմաններ: Որպեսզի ժամանակի ցանկացած պահին գտնենք ձողի կետերի ջերմաստիճանը, անհրաժեշտ է ունենալ ձողի բոլոր կետերի ջերմաստիճանը ժամանակի սկզբնական պահին: Դա նշանակում է, որ $u(t,x)$ ֆունկցիան պետք է բավարարի

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

սկզբնական պայմանին, որտեղ $\varphi(x)$-ը տրված ֆունկցիա է:

Կիսաանվերջ կամ վերջավոր ձողի դեպքում սկզբնական պայմանից բացի անհրաժեշտ է ունենալ նաև պայմաններ ձողի ծայրերում՝ եզրային պայմաններ:

Դիտարկենք վերջավոր ձող ($0 \leqslant x \leqslant \ell$): Կիրառություններում հաճախ հանդիպող եզրային պայմանները հետևյալ երեքն են.

1. Եթե ℓ երկարության ձողի աջ և ձախ ծայրերում t պահին պահպանվում են համապատասխանաբար $\mu(t)$ և $\nu(t)$ ջերմաստիճանները, ապա կունենանք
$$\begin{cases} u(0,t) = \mu(t), \\ u(\ell,t) = \nu(t) \end{cases}$$
եզրային պայմանները:

2. Եթե $x = 0$ եզրում t պահին տրված է $\theta(t)$ ջերմային հոսքը, ապա եզրային պայմանը կընդունի
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \theta(t)$$

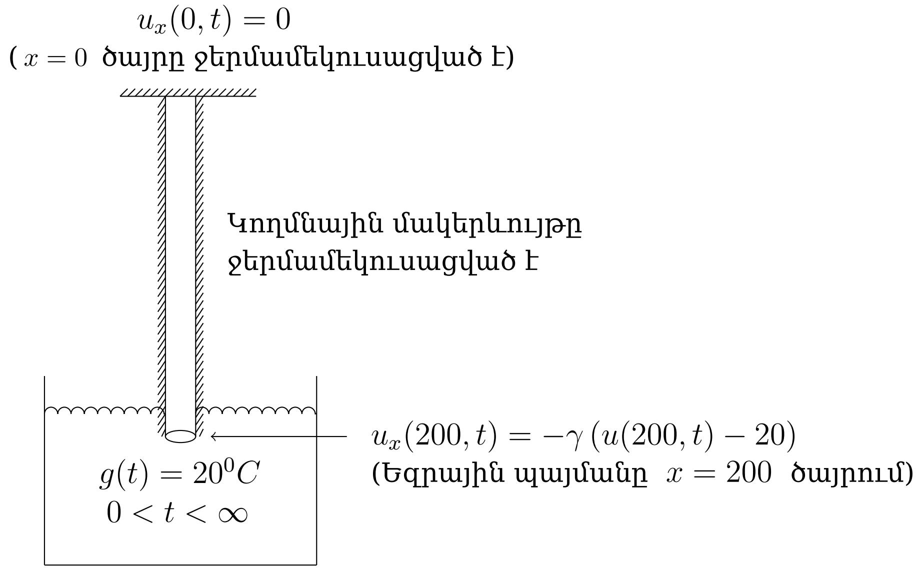
տեսքը:

3. Եթե $x = 0$ եզրում տեղի է ունենում ջերմափոխանակություն ձողի և արտաքին միջավայրի միջև, ապա եզրային պայմանը կունենա

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -\gamma\left(u(0,t) - g(t)\right)$$

տեսքը, որտեղ γ-ն ջերմափոխանակության գործակիցն է, $g(t)$-ն՝ արտաքին միջավայրի ջերմաստիճանը:

Բերենք ջերմության տարածման խնդրի մի օրինակ: Դիցուք երկու մետր երկարություն ունեցող պղնձե ձողի կողմնային մակերևույթը ջերմամեկուսացված է, իսկ սկզբնական ջերմաստիճանը բոլոր կետերում 0^0C է: Ենթադրենք նաև, որ ձողի վերևի $x=0$ ծայրը ջերմամեկուսացված է, իսկ ներքևի՝ $x=200$ ծայրն ընկղմված է ջրով լի անոթի մեջ, որը ունի հաստատուն՝ $g(t)=20^0C$ ջերմաստիճան (նկ. 5):



Նկ. 5 Ջերմահաղորդականության խնդրի օրինակ:

Ժամանակի t պահին ձողի x կոորդինատ ունեցող կետի $u(t,x)$ ջերմաստիճանի որոշման համար ստացվում է

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} = 0, \qquad 0<x<200, \quad 0<t<\infty, \\ u(x,0) = 0, \quad 0\leqslant x\leqslant 200, \\ u_x(0,t)=0, \quad 0<t<\infty, \\ u(200,t) = -\gamma\left(u(200,t)-20\right), \quad 0<t<\infty, \end{cases}$$

խնդիրը, որտեղ $a^2 \approx 1,16$ սմ^2/վրկ -պղնձի ջերմաստիճանահաղորդականության գործակիցն է, իսկ γ ջերմափոխականության գործակիցը որոշվում է փորձնական ճանապարհով (այն կախված է միջավայրի նյութի ջերմաստիճանից, մածուցիկությունից, շարժման արագությունից, միջավայրի և մարմնի շփման մակերևույթից և այլ գործոններից):

§ 2. Կոշիի խնդիրը

Դիցուք $H_T = \{(x,t) \mid x \in \mathrm{R}^n,\ 0 < t < T\}$, $H = H_\infty = \{x \in \mathrm{R}^n,\ t > 0\}$: Կոշիի խնդիրը ձևակերպվում է այսպես: Պահանջվում է գտնել $C^2(H) \cap C(\overline{H})$ դասի $u(x,t)$ ֆունկցիա, որը H-ում բավարարում է

$$u_t - a^2 \Delta u = f(x,t) \tag{4.1}$$

ջերմահաղորդականության հավասարմանը և

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{4.2}$$

սկզբնական պայմանին, որտեղ $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)$, f-ը և φ-ն տրված ֆունկցիաներ են:

2.1 Պուասոնի ինտեգրալը: Եթե $f \in C^2(\overline{H})$ ֆունկցիան և նրա առաջին ու երկրորդ կարգի ածանցյալները ցանկացած $T > 0$ թվի համար սահմանափակ են $\overline{H}_T$-ում, $\varphi \in C(\mathrm{R}^n)$ ֆունկցիան սահմանափակ է, ապա գոյություն ունի (4.1)-(4.2) խնդրի միակ լուծում, որը տրվում է

$$u(x,t) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \int\limits_{\mathrm{R}^n} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}}\, d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathrm{R}^n} \frac{f(\xi,\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n}\, e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\xi \tag{4.3}$$

Պուասոնի բանաձևով: Այստեղ $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, $|x-\xi|^2 = \sum\limits_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2$:

Մեկ տարածական փոփոխականի դեպքում, երբ $n = 1$, Կոշիի խնդիրն է՝

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & -\infty < x < \infty,\ \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

իսկ լուծումը, համաձայն (4.3)-ի, ունի

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi + \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\xi \tag{4.4}$$

տեսքը:

Եթե Կոշիի խնդրում ջերմահաղորդականության հավասարումը համասեռ է՝

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

ապա

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi, \tag{4.5}$$

որը կոչվում է Պուասոնի ինտեգրալ:

Կոշիի խնդրի լուծումը (4.5) բանաձևով է տրվում նաև այն դեպքում, երբ $\varphi(x)$-ը կտոր առ կտոր անընդհատ ֆունկցիա է: Այդ դեպքում սկզբնական պայմանը պետք է հասկանալ հետևյալ իմաստով. ցանկացած x_0 կետում, որտեղ $\varphi(x)$-ը անընդհատ է՝

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \to +0}} u(x,t) = \varphi(x_0) :$$

Օրինակ 4.1: Լուծել Կոշիի խնդիրը.

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1 & \text{երբ } x > 0, \\ T_2 & \text{երբ } x < 0 : \end{cases} \end{cases}$$

Լուծում: Օգտվենք (4.5) բանաձևից.

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi = \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} :$$

Կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝

$$\alpha = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}, \qquad \xi = x + 2a\sqrt{t}\,\alpha, \qquad d\xi = 2a\sqrt{t}\, d\alpha,$$

կստանանք

$$u(x,t) = \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2}\, d\alpha + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{-\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha :$$

Ձևափոխենք ստացված իտեգրալները՝ օգտվելով

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \int\limits_{-\infty}^0 e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

հավասարությունից: Քանի որ

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{-z} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\alpha^2}\,d\alpha - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\,d\alpha$$

և

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-z}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-z}^{0} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

ապա

$$u(x,t) = T_2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2}\,d\alpha\right) + T_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2}\,d\alpha\right):$$

Պատասխան՝ $u(x,t) = \dfrac{T_1+T_2}{2} + \dfrac{T_1-T_2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2}\,d\alpha:$

Դիտարկենք

$$u_t - a^2u_{xx} + \alpha u_x + \beta u = f(x,t)$$

հավասարումը: Այն

$$v(y,t) = e^{\beta t}u(y+\alpha t, t) \tag{4.6}$$

փոխարինումից հետո, բերվում է

$$v_t - a^2v_{yy} = g(y,t)$$

ջերմահաղորդականության հավասարմանը, որտեղ

$$g(y,t) = f(y+\alpha t, t)\,e^{\beta t}:$$

Օրինակ 4.2: Լուծել խնդիրը.

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} - bu_x - u = 1, & -\infty < x < \infty, \;\; t>0, \\ u(x,0) = 1, & -\infty < x < \infty: \end{cases}$$

Լուծում: Կատարենք (4.6) փոխարինումը՝ կստանանք

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{yy} = e^{-t}, & -\infty < y < \infty, \;\; t > 0, \\ v(y,0) = 1, & -\infty < y < \infty : \end{cases}$$

խնդիրը: Լուծենք՝ օգտվելով (4.4) Պուասոնի բանաձևից:

$$v(y,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \, e^{-\frac{(y-\xi)^2}{4a^2 t}} \, d\xi + \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \, e^{-\frac{(y-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)x}} \, d\xi d\tau =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\xi)^2}{4a^2 t}} \, d\xi + \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)x}} \, d\xi \right) d\tau :$$

Քանի որ

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\xi)^2}{4a^2 t}} \, d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)x}} \, d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} \, d\alpha = 1,$$

ապա

$$v(y,t) = 1 + \int\limits_0^t e^{-\tau} d\tau = 2 - e^{-t},$$

և հետևաբար

$$u(y-bt,t) = v(y,t)e^t = (2-e^{-t})e^t = 2e^t - 1, \;\; \text{կամ} \;\; u(x,t) = 2e^t - 1 :$$

Պատասխան՝ $u(x,t) = 2e^t - 1$:

Օրինակ 4.3: Լուծել խնդիրը.

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = xye^{-t}, & -\infty < x,y < \infty, \;\; t > 0, \\ \\ u(x,y,0) = bx \sin y, & -\infty < x,y < \infty : \end{cases}$$

Լուծում: Եթե (4.3) բանաձևում ընդունենք $n = 2$, $\varphi(x,y) = bx \sin y$, $f(x,y,t) = xye^{-t}$, ապա կունենանք

$$
u(x,y,t) = \frac{1}{4a^2\pi t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} b\, \xi \sin\eta \; e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}} d\xi d\eta +
$$

$$
+ \int\limits_{0}^{t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi\eta e^{-\tau}}{4a^2\pi(t-\tau)} \; e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\eta d\tau = I_1(x,y,t) + \int\limits_{0}^{t} I_2(x,y,t,\tau) d\tau : \quad (4.7)
$$

Հաշվենք $I_1(x,y,t)$ և $I_2(x,y,t)$ ինտեգրալներն առանձին-առանձին:

$$
I_1(x,y,t) = \frac{1}{4a^2\pi t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} b\, \xi \sin\eta \; e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}} d\xi d\eta =
$$

$$
= \frac{b}{4a^2t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi \; e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin\eta \; e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}} d\eta = \frac{b}{4a^2t} \; J_1(x,t) \; J_2(y,t) :
$$

Այստեղ

$$
J_1(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi \; e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x + 2a\sqrt{t}\,\alpha) \; e^{-\alpha} \; 2a\sqrt{t} \;\; d\alpha = 2a\sqrt{t}\, x \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha +
$$

$$
+ 4a^2t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2} d\alpha = 2a\sqrt{t}\, x\sqrt{\pi} + 0 = 2a\sqrt{\pi t}\, x :
$$

$$
J_2(y,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin\eta \; e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}} d\eta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(y + 2a\sqrt{t}\,\beta) \; e^{-\beta^2} \; 2a\sqrt{t}\, d\beta =
$$

$$
= 2a\sqrt{t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(\sin y \cos(2a\sqrt{t}\,\beta) + \cos y \sin(2a\sqrt{t}\,\beta) \big) \; e^{-\beta^2} \; d\beta =
$$

$$
= 2a\sqrt{t}\; \sin y \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(2a\sqrt{t}\,\beta) \; e^{-\beta^2} \; d\beta + 2a\sqrt{t}\; \cos y \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(2a\sqrt{t}\,\beta) \; e^{-\beta^2} \; d\beta =
$$

$$
= 4a\sqrt{t}\; \sin y \int\limits_{0}^{\infty} \cos(2a\sqrt{t}\,\beta) \; e^{-\beta^2} \; d\beta + 0 = 4a\sqrt{t}\; \sin y \; \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \; e^{-\frac{(2a\sqrt{t})^2}{4}} = 2a\sqrt{\pi t} \sin y \; e^{-a^2t} :
$$

Օգտագործելով $J_1(x,t)$ և $J_2(y,t)$ մեծությունների հաշված արժեքները, ի վերջ կստանանք

$$
I_1(x,y,t) = \frac{b}{4a^2t} \; J_1(x,t) \; J_2(y,t) = \frac{b}{4a^2t} \cdot 2a\sqrt{\pi t}\, x \cdot 2a\sqrt{\pi t} \sin y \; e^{-a^2t} = bx \sin y \; e^{-a^2t} :
$$

Այժմ ներկայացնենք $I_2(x,y,t,\tau)$ ինտեգրալի հաշվման սխեման: Ունենք՝

$$I_2(x,y,t,\tau)=\frac{e^{-\tau}}{4a^2\pi(t-\tau)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi\eta\, e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\eta=$$

$$=\frac{e^{-\tau}}{4a^2\pi(t-\tau)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\xi\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta\, e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\eta=$$

$$=\frac{e^{-\tau}}{4a^2\pi(t-\tau)}\,J_3(x,t,\tau)\,J_3(y,t,\tau):$$

$$J_3(x,t,\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\xi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x+2a\sqrt{t-\tau}\alpha)\,e^{-\alpha^2}\,2a\sqrt{t-\tau}\,d\alpha=$$

$$=x\cdot 2a\sqrt{t-\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}\,d\alpha+4a(t-\tau)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha\, e^{-\alpha^2}\,d\alpha=x\cdot 2a\sqrt{t-\tau}\sqrt{\pi}+0=2xa\sqrt{\pi(t-\tau)}:$$

$$J_3(y,t,\tau)=2ya\sqrt{\pi(t-\tau)}:$$

$$I_2(x,y,t,\tau)=\frac{e^{-\tau}}{4a^2\pi(t-\tau)}\cdot 2xa\sqrt{\pi(t-\tau)}\cdot 2ya\sqrt{\pi(t-\tau)}=xye^{-\tau}:$$

Տեղադրելով (4.7)-ի մեջ՝ կստանանք

$$u(x,y,t)=I_1(x,y,t)+\int\limits_0^t I_2(x,y,t,\tau)d\tau=bx\sin ye^{-a^2t}+xy\int\limits_0^t e^{-\tau}d\tau=$$

$$=bx\sin ye^{-a^2t}+xy\big(1-e^{-t}\big):$$

Պատասխան՝ $u(x,y,t)=bx\sin y\, e^{-a^2t}+xy\big(1-e^{-t}\big):$

2.3 Կոշիի խնդրի լուծումը շարքերի միջոցով: Դիտարկենք համասեռ ջերմահաղորդականության հավասարման համար Կոշիի խնդիրը.

$$\begin{cases} u_t-a^2\Delta\, u=0, \qquad x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathrm{R}^n, \quad t>0,\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n): \end{cases}\tag{4.8}$$

Անմիջական տեղադրումով կարելի է ստուգել, որ եթե φ ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է, ապա

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}t^k}{k!}\,\Delta^k\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\tag{4.9}$$

ֆունկցիան (4.8) խնդրի լուծումն է, եթե միայն աջ մասում գրված շարքը և այն շարքերը, որոնք ստացվում են մինչև երկու անգամ անդամ առ անդամ անցնելիս, հավասարաչափ զուգամետ են:

Ակնհայտ է, որ τ պարամետրից կախված

$$\begin{cases} u_t - \, a^2\Delta\, u = 0, \\ u\Big|_{t=\tau} = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n, \tau), \end{cases} \tag{4.10}$$

խնդրի լուծումը կստացվի (4.9)-ից՝ t-ի փոխարեն տեղադրելով $(t-\tau)$.

$$u(x,t,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}(t-\tau)^k}{k!}\,\Delta^k\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n, \tau) : \tag{4.11}$$

Անհամասեռ հավասարման համար

$$\begin{cases} w_t - a^2\Delta\, w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n, t), \\ w\Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

խնդրի $w(x,t)$ լուծումը, համաձայն Դյուամելի սկզբունքի, կստացվի

$$\begin{cases} H_t - a^2\Delta\, H = 0, \\ H\Big|_{t=\tau} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n, t, \tau) \end{cases} \tag{4.13}$$

խնդրի $H(x,t,\tau)$ լուծումից՝

$$w(x,t) = \int\limits_0^t H(x,t,\tau)d\tau : \tag{4.14}$$

Օրինակ 4.4: Լուծել խնդիրը.

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta\, u = t\sin(x+y), \\ u(x,y,0) = \cos(x+y) : \end{cases} \tag{4.15}$$

Լուծում: Եթե v ֆունկցիան

$$\begin{cases} v_t - \Delta\, v = 0, \\ v(x,y,0) = \cos(x+y) \end{cases} \tag{4.16}$$

խնդրի լուծումն է, իսկ w ֆունկցիան՝

$$\begin{cases} w_t - \Delta\, w = t\sin(x+y), \\ w(x,y,0) = 0 \end{cases} \tag{4.17}$$

խնդրի, ապա (4.15) խնդրի լուծումը կստացվի այդ ֆունկցիաները գումարելով՝ $u = v + w$։

Գտնենք (4.16) խնդրի լուծումը՝ օգտվելով (4.9)-ից.

$$v(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}t^k}{k!}\,\Delta^k(\cos(x+y)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}t^k}{k!}\,(-2)^k\cos(x+y) =$$

$$= \cos(x+y)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2a^2t)^k}{k!} = e^{-2a^2t}\cos(x+y)\,:$$

(4.17) խնդիրը լուծելու համար կազմենք $H(x,y,t,\tau)$ ֆունկցիայի նկատմամբ հետևյալ օժանդակ խնդիրը՝

$$\begin{cases} H_t - \Delta\, H = 0, \\ H\big|_{t=\tau} = \tau\sin(x+y), \end{cases}$$

որի լուծումը կարելի է գտնել՝ օգտվելով (4.11)-ից.

$$H(x,y,t,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}(t-\tau)^k}{k!}\,\Delta^k\big(\tau\sin(x+y)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}(t-\tau)^k}{k!}\,\tau(-2)^k\sin(x+y) =$$

$$= \tau\sin(x+y)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2a^2(t-\tau))^k}{k!} = \tau\sin(x+y)\,e^{-2a^2(t-\tau)}\,:$$

Այժմ, օգտվելով (4.14) Դյուամելի սկզբունքից, գտնենք (4.17) խնդրի լուծումը՝

$$w(x,y,t) = \int_0^t H(x,y,t,\tau)d\tau = \int_0^t \tau\sin(x+y)\,e^{-2a^2(t-\tau)}d\tau =$$

$$= \sin(x+y)e^{-2a^2t}\int_0^t \tau\,e^{2a^2\tau}d\tau = \sin(x+y)\Big(\frac{t}{2a^4} - \frac{1}{4a^4}\Big(1-e^{-2t}\Big)\Big)\,:$$

(4.15) խնդրի լուծումը կստացվի գումարելով $v(x,y,t)$ և $w(x,y,t)$ ֆունկցիաները։

Պատասխան՝ $u(x,y,t) = e^{-2a^2t}\cos(x+y) + \sin(x+y)\Big(\frac{t}{2a^2} - \frac{1}{4a^4}\Big(1-e^{-2a^2t}\Big)\Big)\,:$

Խնդիրներ

Լուծել Կոշիի խնդիրը ($-\infty < x < +\infty$).

321. $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant \ell, \\ 0, & x < 0, \ \ x > \ell : \end{cases} \end{cases}$

322. $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} u_0, & x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ 0, & x < x_1, \ \ x > x_2 : \end{cases} \end{cases}$

323. $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ell}, & -\ell \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant \ell, \\ 0 & x < -\ell, \ \ x > \ell, \quad \ell > 0 : \end{cases} \end{cases}$

324. $\begin{cases} 4u_t - u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = e^{2x - x^2} : \end{cases}$

325. $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = x e^{-x^2} : \end{cases}$

326. $\begin{cases} 4u_t - u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = \sin x \, e^{-x^2} : \end{cases}$

327. $\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = t + e^t, \\ u(x,0) = 2 : \end{cases}$

328. $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 3t^2, \\ u(x,0) = \sin x : \end{cases}$

329. $\begin{cases} u_t - u_{xx} = \cos x \, e^{-t}, \\ u(x,0) = \cos x : \end{cases}$

330. $\begin{cases} u_t - u_{xx} = \sin x \, e^t, \\ u(x,0) = \sin x : \end{cases}$

331. $\begin{cases} u_t - u_{xx} = \sin t, \\ u(x,0) = e^{-x^2} : \end{cases}$

332. $\begin{cases} u_t - u_{xx} - u = e^t, \\ u(x,0) = \cos x : \end{cases}$

333. $\begin{cases} u_t - 4u_{xx} - 2u = e^t, \\ u(x,0) = \cos x : \end{cases}$

334. $\begin{cases} u_t - u_{xx} - u = t \sin x, \\ u(x,0) = 1 : \end{cases}$

335. $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} - b u_x - c u = 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2} : \end{cases}$

Լուծել Կոշիի խնդիրը ($-\infty < x, y < +\infty, \ \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$).

336. $\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \\ u\big|_{t=0} = x^2 y + x y^2 + xy : \end{cases}$

337. $\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \\ u\big|_{t=0} = (x+y)^5 : \end{cases}$

338. $\begin{cases} 2u_t - \Delta u = 0, \\ u\big|_{t=0} = \cos xy \text{ :} \end{cases}$

339. $\begin{cases} u_t - \Delta u = e^t, \\ u\big|_{t=0} = \cos x \sin y \text{ :} \end{cases}$

340. $\begin{cases} u_t - \Delta u = \sin t \sin x \sin y, \\ u\big|_{t=0} = 1 \text{ :} \end{cases}$

341. $\begin{cases} u_t - \Delta u = \cos t, \\ u\big|_{t=0} = xye^{-x^2-y^2} \text{ :} \end{cases}$

342. $\begin{cases} 8u_t - \Delta u = 1, \\ u\big|_{t=0} = e^{-(x-y)^2} \text{ :} \end{cases}$

Լուծել Կոշիի խնդիրը ($-\infty < x, y, z < +\infty,\ \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$).

343. $\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \\ u\big|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2)^2 \text{ :} \end{cases}$

344. $\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \\ u\big|_{t=0} = (xyz)^2 \text{ :} \end{cases}$

345. $\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \\ u\big|_{t=0} = (xyz)^3 \text{ :} \end{cases}$

346. $\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \\ u\big|_{t=0} = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 \text{ :} \end{cases}$

347. $\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \\ u\big|_{t=0} = x^3 + y^3 + z^3 \text{ :} \end{cases}$

348. $\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \\ u\big|_{t=0} = \cos(xy) \sin z \text{ :} \end{cases}$

349. $\begin{cases} u_t - 2\Delta u = t \cos x, \\ u\big|_{t=0} = \cos y \cos z \text{ :} \end{cases}$

350. $\begin{cases} u_t - 3\Delta u = e^t, \\ u\big|_{t=0} = \sin(x - y - z) \text{ :} \end{cases}$

351. $\begin{cases} 4u_t - \Delta u = \sin 2z, \\ u\big|_{t=0} = \cos 2ye^{-x^2} \text{ :} \end{cases}$

352. $\begin{cases} u_t - \Delta u = \cos(x - y + z), \\ u\big|_{t=0} = e^{-(x+y-z)^2} \text{ :} \end{cases}$

§ 3. Խառը խնդիրներ կիսաառանցքում

Դիցուք ունենք կիսաանվերջ ձող, որի առանցքն ընկած է $[0, +\infty)$ դրական կիսաառանցքի վրա: Այս դեպքում ձողի $u(x, t)$ ջերմաստիճանը, բացի սկզբնական պայմանից, պետք է բավարարի նաև որևէ եզրային պայմանի ձողի ձախ՝ $x = 0$ ծայրում: Այդպիսի խնդիրը կոչվում է խառը խնդիր: Կախված եզրային պայմանից այն կարելի է բերել Կոշիի խնդրի՝ կենտ կամ զույգ ձևով շարունակելով սկզբնական ֆունկցիան:

Օրինակ 4.5: Լուծել խառը խնդիրը, որտեղ $\varphi(x)$-ը տրված սահմանափակ ֆունկցիա է.

$$
\begin{cases}
u_t - a^2\, u_{xx} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0,\\
u(0,t) = 0, \quad t > 0,\\
u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < +\infty :
\end{cases}
$$

Լուծում: Կազմենք

$$
\begin{cases}
U_{tt} - a^2\, U_{xx} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,\\
U(x,0) = \Phi(x), \quad -\infty < x < +\infty
\end{cases}
$$

Կոշիի խնդիրը, որտեղ $\Phi(x)$-ը $\varphi(x)$-ի կենտ շարունակությունն է՝

$$
\Phi(x) = \begin{cases}
\varphi(x) & \text{երբ } x > 0,\\
-\varphi(-x) & \text{երբ } x < 0 :
\end{cases} \tag{4.18}
$$

Այդ խնդրի լուծումը տրվում է

$$
U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi \tag{4.19}
$$

Պուասոնի ինտեգրալով, ընդ որում $U(x,0) = \varphi(x)$, երբ $0 \leqslant x < +\infty$:

Օգտվելով (4.18)-ից՝ (4.19)-ը կգրվի

$$
U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi
$$

տեսքով, որտեղից $U(x,0) = 0$: Այսպիսով՝ $u(x,t) = U(x,t)$, երբ $x \geqslant 0$:

Պատասխան՝

$$
u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(\xi) \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) d\xi :
$$

Օրինակ 4.6: Լուծել խառը խնդիրը.

$$
\begin{cases}
u_t - a^2\,(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, & -\infty < x < +\infty,\ \ 0 < y < +\infty,\ \ 0 < z < +\infty,\ \ t > 0,\\
u(x,0,z,t) = 0, & -\infty < x < +\infty,\ \ 0 < z < +\infty,\ t > 0\\
u(x,y,0,t) = 0, & -\infty < x < +\infty,\ \ 0 < y < +\infty,\ t > 0,\\
u(x,y,z,0) = \varphi(x,y.z), & -\infty < x < +\infty,\ \ 0 < y < +\infty,\ \ 0 < z < +\infty :
\end{cases}
$$

Լուծում: Շարունակենք $\varphi(x,y,z)$ ֆունկցիան ամբողջ տարածության վրա սկզբում կենտ ձևով ըստ y-ի՝

$$\varphi_1(x,y,z)=\begin{cases}\varphi(x,y,z), & y>0,\\ -\varphi(x,-y,z), & y<0,\end{cases}$$

այնուհետև կենտ ձևով ըստ z-ի՝

$$\varphi_2(x,y,z)=\begin{cases}\varphi_1(x,y,z), & z>0,\\ -\varphi_1(x,y,-z), & z<0:\end{cases}$$

Դիտարկենք հետևյալ Կոշիի խնդիրը՝

$$\begin{cases}U_t-a^2(U_{xx}+U_{yy}+U_{zz})=0, & -\infty<x,y,z<+\infty,\ \ t>0,\\ U(x,y,z)=\varphi_2(x,y,z), & -\infty<x,y,z<+\infty:\end{cases}$$

Այս խնդրի լուծումը կարելի է ստանալ (4.3) Պուասոնի բանաձևից $(n=3,\ f\equiv 0)$, այն է

$$U(x,y,z,t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(\xi,\eta,\zeta)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}d\zeta d\eta d\xi:$$

Ակնհայտ է, որ երբ $y>0,\ z>0$, ապա U ֆունկցիան կբավարարի մեր խնդրի հավասարմանը և սկզբնական պայմանին: Ձևափոխենք $U(x,y,z)$ լուծումն այնպես, որ ինտեգրալում բացահայտ տեսքով մասնակցի $\varphi(x,y,z)$ ֆունկցիան: Քանի որ $\varphi_2(x,y,z)$ ֆունկցիան կենտ է ըստ z-ի՝ կունենանք

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(\xi,\eta,\zeta)\,e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}d\zeta=\int\limits_{0}^{\infty}\varphi_1(\xi,\eta,\zeta)\,\left(e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}}\right)d\zeta,$$

հետևաբար

$$U(x,y,z,t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}\int\limits_{0}^{\infty}\varphi_1(\xi,\eta,\zeta)\,\left(e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}}\right)d\zeta d\eta d\xi:$$

Նման ձևով, քանի որ $\varphi_1(x,y,z)$ ֆունկցիան կենտ է ըստ y-ի,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi,\eta,\zeta)\,e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}}d\eta=\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\,\left(e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right)d\eta:$$

Տեղադրելով՝ կստանանք

$$U(x,y,z,t) =$$
$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \int\limits_{0}^{\infty} \left(e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}} \right) \int\limits_{0}^{\infty} \left(e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}} \right) \varphi(\xi,\eta,\zeta)\, d\zeta d\eta d\xi : \quad \blacksquare$$

Այս բանաձևից հետևում է, որ $U(x,0,z,t) = 0, \;\; U(x,y,0,t) = 0$, ուրեմն՝

$$u(x,y.z,t) = U(x,y.z,t), \quad \text{երբ} \quad -\infty < x < +\infty,\; 0 < y, z < +\infty :$$

Պատասխան՝

$$u(x,y,z,t) =$$
$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \int\limits_{0}^{\infty} \left(e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}} \right) \int\limits_{0}^{\infty} \left(e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}} \right) \varphi(\xi,\eta,\zeta)\, d\zeta d\eta d\xi : \quad \blacksquare$$

Խնդիրներ

Լուծել խառը խնդիրը.

353. $$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < +\infty : \end{cases}$$

354. $$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + hu = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < +\infty : \end{cases}$$

355. $$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + hu = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < +\infty : \end{cases}$$

356. $$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad 0 < x < +\infty : \end{cases}$$

357. $\begin{cases} u_t - a^2\, u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad 0 < x < +\infty : \end{cases}$

358. $\begin{cases} u_t - a^2\, u_{xx} + hu = f(x,t), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad 0 < x < +\infty : \end{cases}$

359. $\begin{cases} u_t - a^2\, u_{xx} + hu = f(x,t), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad 0 < x < +\infty : \end{cases}$

360. $\begin{cases} u_t - a^2\, u_{xx} + hu = f(x,t), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < +\infty : \end{cases}$

361. $\begin{cases} u_t - a^2\, u_{xx} + hu = f(x,t), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < +\infty : \end{cases}$

362. $\begin{cases} u_t - a^2\,(u_{xx} + u_{yy}) = 0, & -\infty < x < +\infty,\ \ 0 < y < +\infty,\ \ t > 0, \\ u(x,0,t) = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), & -\infty < x < +\infty,\ \ 0 < y < +\infty : \end{cases}$

363. $\begin{cases} u_t - a^2\,(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, & -\infty < x,y < +\infty,\ \ 0 < z < +\infty,\ \ t > 0, \\ u(x,y,0,t) = 0, & -\infty < x,y < +\infty,\ \ t > 0 \\ u(x,y,z,0) = \varphi(x,y.z), & -\infty < x,y < +\infty,\ \ 0 < z < +\infty : \end{cases}$

364. $\begin{cases} u_t - a^2\,(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, & -\infty < y < +\infty,\ \ 0 < x,z < +\infty,\ \ t > 0, \\ u_x(0,y,z,t) = 0, & -\infty < y < +\infty\ \ 0 < z < +\infty,\ t > 0 \\ u(x,y,0,t) = 0, & -\infty < y < +\infty,\ \ 0 < x < +\infty,\ t > 0, \\ u(x,y,z,0) = \varphi(x,y.z), & 0 < x < +\infty,\ \ = \infty < y < +\infty,\ \ 0 < z < +\infty : \end{cases}$

§ 4.Փոփոխականների անջատման մեթոդը

Փոփոխականների անջատման մեթոդով ջերմահաղորդականության հավասարման համար խառը խնդիրները լուծվում են այնպես, ինչպես լուծվում են խառը խնդիրները լարի տատանման հավասարման համար, այն տարբերությամբ, որ t-ից կախված ֆունկցիաների նկատմամբ ստացվում են առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ:

4.1 Համասեռ հավասարում, համասեռ եզրային պայմաններ: Դիտարկենք

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < \ell, \;\; t > 0, \\ \alpha\, u_x(0,t) - \beta\, u(0,t) = 0, \qquad t \geqslant 0, \\ \gamma\, u_x(\ell,t) + \delta\, u(\ell,t) = 0, \qquad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,\ell] : \end{cases}$$

խառը խնդիրը, որտեղ $\varphi(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[0;\ell]$-ում, իսկ $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \beta$ հաստատունները ոչ բացասական են և $\alpha+\beta>0,\ \gamma+\delta>0$:

Փնտրելով խնդրի լուծումը $u(x,t) = X(x)T(t) \not\equiv 0$ տեսքով, $X(x)$ ֆունկցիայի նկատմամբ կստանանք

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ \alpha X'(0) - \beta X(0) = 0, \\ \gamma X'(\ell) + \delta X(\ell) = 0 \end{cases}$$

Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրը, իսկ $T(t)$ ֆունկցիայի նկատմամբ՝

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0 \tag{4.20}$$

հավասարումը:

Դիցուք λ_k-ն և $X_k(x)$-ը Շտուրմ-Լիուվիլի խնդրի սեփական արժեքներն ու սեփական ֆունկցիաներն են, իսկ $T_k(t)$-ն՝ (4.20) հավասարման ընդհանուր լուծումը, երբ $\lambda = \lambda_k \neq 0$՝

$$T_k(t) = a_k\, e^{-a^2\lambda_k^2 t} :$$

Այդ դեպքում

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e^{-a^2\lambda_k^2 t} X_k(x) \tag{4.21}$$

շարքի գումարը կլինի մեր խնդրի լուծումը, որտեղ

$$a_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^\ell \varphi(x) X_k(x) dx, \qquad \|X_k\|^2 = \int_0^\ell (X_k(x))^2\, dx :$$

Օրինակ 4.7: Լուծել խնդիրը.

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < \ell, \;\; t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, & t \geqslant 0, \\ u(\ell,t) = 0, & t \geqslant 0, \\ u(x,0) = A(\ell - x), & x \in [0,\ell] : \end{cases}$$

Լուծում: Համապատասխան Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրն է՝

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X(\ell) = 0, \end{cases}$$

որի սեփական արժեքներն ու սեփական ֆունկցիաներն են՝

$$\lambda_k = \frac{\pi(2k-1)}{2\ell}, \qquad X_k(x) = \cos\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}x, \qquad k = 1, 2, \cdots :$$

(4.21)-ից՝

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\left(\frac{a\pi(2k-1)}{2\ell}\right)^2 t} \cos\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}x : \tag{4.22}$$

Սկզբնական պայմանից՝

$$A(\ell - x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}x,$$

որտեղից

$$a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell A(\ell - x)\cos\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}x dx = \frac{8A\ell}{(2k-1)^2\pi^2}, \quad k = 1, 2, \cdots :$$

Տեղադրելով (4.22) շարքի մեջ՝ կստանանք խնդրի լուծումը:

Պատասխան՝ $u(x,t) = \dfrac{8Al}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} e^{-\left(\frac{a\pi(2k-1)}{2l}\right)^2 t}\cos\frac{\pi(2k-1)}{2l}x :$

Օրինակ 4.8: Լուծել խնդիրը.

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < \ell, \;\; t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\ell,t) + hu(\ell,t) = 0 & (h > 0), \\ u(x,0) = \varphi(x) : \end{cases}$$

Լուծում: Համապատասխան Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրն է՝

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2 X(x)=0, \\ X'(0)=0, \\ X`(\ell)+hX(\ell)=0 : \end{cases}$$

$\lambda=0$ սեփական արժեք չէ, հետևաբար

$$X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x :$$

$X'(0)=0$ եզրային պայմանից՝ $\lambda c_2=0$ կամ $c_2=0$: Ուրեմն

$$X(x)=c_1\cos\lambda x : \tag{4.23}$$

$X'(\ell)+hX(\ell)=0$ եզրային պայմանից՝ $c_1(-\lambda\sin\lambda\ell+h\cos\lambda\ell)=0$, որտեղից λ_k սեփական արժեքների որոշման համար կստանանք

$$-\lambda\sin\lambda\ell+h\cos\lambda\ell=0 \qquad \text{կամ} \qquad \lambda\,\mathrm{tg}\,\lambda\ell=h \tag{4.24}$$

հավասարումը: Սեփական ֆունկցիաները կստացվեն (4.23)-ից՝

$$X_k(x)=\cos\lambda_k x, \qquad k=1,2,\cdots :$$

Խնդրի լուծումը, համաձայն (4.21)-ի, ներկայացվում է

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{-a^2\lambda_k^2 t}\cos\lambda_k x \tag{4.25}$$

տեսքով, որտեղ

$$a_k=\frac{1}{\|X_k(x)\|^2}\int\limits_0^l\varphi(x)\cos\lambda_k x dx, \quad k=1,2,\cdots :$$

Այստեղ

$$\|X_k(x)\|^2=\|\cos\lambda_k x\|^2=\int\limits_0^\ell\cos^2\lambda_k x dx=\int\limits_0^\ell\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\lambda_k x\right)dx=$$
$$=\frac{\ell}{2}+\frac{1}{4\lambda_k}\sin 2\lambda_k x\Big|_0^\ell=\frac{l}{2}+\frac{1}{4\lambda_k}\sin 2\lambda_k\ell=\frac{\ell}{2}+\frac{1}{4\lambda_k}\frac{2\,\mathrm{tg}\,\lambda_k\ell}{1+\mathrm{tg}^2\,\lambda_k\ell} :$$

Հաշվի առնելով, որ λ_k-ն (4.24) հավասարման արմատ է՝ $\mathrm{tg}\,\lambda_k\ell=h/\lambda_k$, կարող ենք գրել

$$\|X_k(x)\|^2 = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{4\lambda_k}\frac{\dfrac{2h}{\lambda_k}}{1+\dfrac{h^2}{\lambda_k^2}} = \frac{\ell(h^2+\lambda_k^2)+h}{2(h^2+\lambda_k^2)}:$$

Այսպիսով,

$$a_k = \frac{2(h^2+\lambda_k^2)}{\ell(h^2+\lambda_k^2)+h}\int\limits_0^\ell \varphi(x)\cos\lambda_k x dx, \quad k=1,2,\cdots:$$

Տեղադրելով (4.25) շարքի մեջ՝ կստանանք լուծումը:

Պատասխան՝ $u(x,t) = 2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{(h^2+\lambda_k^2)}{\ell(h^2+\lambda_k^2)+h}\int\limits_0^\ell \varphi(x)\cos\lambda_k x dx\right)e^{-a^2\lambda_k^2 t}\cos\lambda_k x,$
որտեղ λ_k թվերը $\lambda\,\mathrm{tg}\,\lambda\ell = h$ հավասարման դրական արմատներն են:

4.2 Անհամասեռ հավասարում, համասեռ եզրային պայմաններ: Այն դեպքում, երբ խառը խնդիրը դրված է ջերմահաղորդականության անհամասեռ հավասարման համար՝

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad 0<x<\ell, \;\; t>0, \\ \alpha\, u_x(0,t) - \beta\, u(0,t) = 0, \qquad t \geqslant 0, \\ \gamma\, u_(\ell,t) + \delta\, u(\ell,t) = 0, \qquad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad x\in[0,\ell], \end{cases}$$

լուծումը փնտրվում է

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x) \tag{4.26}$$

շարքի տեսքով: Այդ դեպքում $u_k(t)$ ֆունկցիայի որոշման համար ստացվում է

$$\begin{cases} u_k'(t) + (a\lambda_k)^2 u_k(t) = f_k(t), \\ u_k(0) = \varphi_k, \end{cases} \tag{4.27}$$

Կոշիի խնդիրը, որտեղ $f_k(t)$-ն և φ_k-ն համապատասխանաբար $f(x,t)$ և $\varphi(x)$ ֆունկցիաների, ըստ $X_k(x)$ սեփական ֆունկցիաների վերլուծության Ֆուրյեի գործակիցներն են՝

$$f_k(t) = \frac{1}{\|X_k\|^2}\int\limits_0^\ell f(x,t)X_k(x)dx, \qquad \varphi_k = \frac{1}{\|X_k\|^2}\int\limits_0^\ell \varphi(x)X_k(x)dx, \qquad k=1,2,\cdots: \tag{4.28}$$

4.3 Անհամասեռ եզրային պայմաններ: Ջերմահաղորդականության հավասարման համար անհամասեռ եզրային պայմաններով

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < \ell, \ \ t > 0, \\ \alpha \, u_x(0,t) - \beta \, u(0,t) = \mu(t), & t \geqslant 0, \\ \gamma \, u_x(\ell,t) + \delta \, u(\ell,t) = \nu(t), & t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

խառը խնդիրը բերվում է համասեռ եզրային պայմաններով խնդրի հետևյալ կերպ. Լուծումը փնտրվում է $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ տեսքով և $w(x,t)$ ֆունկցիան ընտրվում է այնպես, որ $v(x,t)$ ֆունկցիայի որոշման համար ստացվի համասեռ եզրային պայմաններով խնդիր: Սովորաբար փնտրվում է

$$w(x,t) = (\gamma_1 x^2 + \gamma_2 x + \gamma_3)\mu(t) + (\delta_1 x^2 + \delta_2 x + \delta_3)\nu(t)$$

տեսքով, որտեղ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ թվերը ենթակա են որոշման:

Հարկ է նշել, որ ջերմահաղորդականության հավասարման համար խառը խնդիրների դեպքում նույնպես տեղի ունեն 3-րդ գլխի 4.4 կետի դիտողությունները:

Օրինակ 4.9: Լուծել խնդիրը.

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + \beta u = 0, & 0 < x < \ell, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) : \end{cases}$$

Փնտրենք հավասարմանը և եզրային պայմաններին բավարարող $u(x,t)$ ֆունկցիա

$$u(x,t) = X(x)T(t), \quad X \not\equiv 0, \ T \not\equiv 0$$

տեսքով: Տեղադրելով հավասարման մեջ՝

$$X(x)T'(t) - a^2 X''(x)T(t) + \beta X(x)T(t) = 0,$$

և անջատելով փոփոխականները, ստանում ենք

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} + \frac{\beta}{a^2} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

հավասարությունը: Այն կլինի նույնություն, եթե աջ և ձախ մասերը հավասար լինեն նույն հաստատունին: Նշանակենք այդ հաստատունը

$-\lambda^2$-ով (եթե այդ հաստատունը դրական է, ապա ստացվող Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրը կունենա միայն տրիվիալ լուծում)։ Այդ դեպքում $T(t)$ ֆունկցիայի որոշման համար կստանանք

$$T'(t) + (\beta + a^2\lambda^2)T(t) = 0 \tag{4.29}$$

հավասարումը, իսկ $X(x)$ ֆունկցիայի որոշման համար՝

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(\ell) = 0 \end{cases}$$

Շտուրմ-Լիուվիլի խնդրը, որի սեփական արժեքներն ու սեփական ֆունկցիաներն են՝

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{\ell}, \qquad X_k(x) = \sin\frac{\pi k}{\ell}x, \quad k = 1, 2, \cdots :$$

Տեղադրենք λ_k-ն (4.29) հավասարման մեջ, կստանանք

$$T'(t) + \left(\beta + \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2\right)T(t) = 0$$

հավասարումը, որի ընդհանուր լուծումն է՝

$$T_k(t) = a_k e^{-\left(\beta + \left(\frac{a\pi k}{\ell}\right)^2\right)t}, \quad k = 1, 2, \cdots :$$

Կազմենք շարք.

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\, X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\left(\beta + \left(\frac{a\pi k}{\ell}\right)^2\right)t} \sin\frac{\pi k}{\ell}x :$$

Եթե այդ շարքը և այն շարքերը, որոնք ստացվում են մեկ անգամ ըստ t-ի և երկու անգամ ըստ x-ի անդամ առ անդամ ածանցելիս հավասարաչափ զուգամետ են, ապա նրա գումարը նույնպես կբավարարի հավասարմանն ու եզրային պայմաններին։

$u(x,0) = \varphi(x)$ սկզբնական պայմանից՝ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{\pi k}{\ell}x = \varphi(x)$, որտեղից՝

$$a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x) \sin\frac{\pi k}{\ell}x dx :$$

Պատասխան՝ $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\left(\beta+\left(\frac{a\pi k}{\ell}\right)^2\right)t} \sin\frac{\pi k}{\ell}x, \quad a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{\pi k}{\ell}x dx$:

Օրինակ 4.10: Լուծել խնդիրը.

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < \ell, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = T, \\ u_x(\ell,t) + hu(\ell,t) = U, \\ u(x,0) = 0 : \end{cases}$$

Լուծում: Փնտրելով լուծումը $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ տեսքով՝ $v(x,t)$ ֆունկցիայի նկատմամբ կստանանք

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = -w_t + a^2 w_{xx}, \\ v(0,t) = T - w(0,t), \\ v_x(\ell,t) + hv(\ell,t) = U - w_x(\ell,t) - hw(\ell,t), \\ v(x,0) = -w(x,0) \end{cases}$$

խնդիրը: Ընտրենք $w(x,t)$ ֆունկցիան այնպես, որ տեղի ունենան

$$\begin{cases} T - w(0,t) = 0, \\ U - w_x(\ell,t) - hw(\ell,t) = 0 \end{cases}$$

պայմանները: Այն կարելի է փնտրել

$$w(x,t) = (\gamma_1 x + \gamma_2)T + (\delta_1 x + \delta_2)U$$

տեսքով: $T - w(0,t) = 0$ պայմանից՝ $\gamma_2 = 1, \ \delta_2 = 0$, իսկ $U - w_x(\ell,t) - hw(\ell,t) = 0$ պայմանից՝ $\gamma_1 = -\frac{h}{1+h\ell}, \ \delta_1 = \frac{1}{1+h\ell}$: Այսպիսով, եթե վերցնենք

$$w(x,t) = \frac{U - hT}{1+h\ell}x + T,$$

$v(x,t)$ ֆունկցիայի նկատմամբ կստացվի

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, \\ v(0,t) = 0, \\ v_x(\ell,t) + hv(\ell,t) = 0, \\ v(x,0) = \dfrac{hT-U}{1+h\ell}x - T \end{cases}$$

խնդիրը։ Համապատասխան Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրն է՝

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X'(\ell) + hX(\ell) = 0 : \end{cases}$$

Զրոն սեփական արժեք չէ՝ $\lambda^2 > 0$, հետևաբար

$$X(x) = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x :$$

$X(0) = 0$ պայմանից՝ $c_1 = 0$, ուրեմն

$$X(x) = c_2 \sin\lambda x :$$

$X'(\ell)+hX(\ell) = 0$ պայմանից՝ $\lambda c_2 \cos\lambda\ell + hc_2 \sin\lambda\ell = 0$, որտեղից կստանանք

$$\lambda\cos\lambda\ell + h\sin\lambda\ell = 0$$

հավասարումը, որը կարելի է գրել

$$h\,\mathrm{tg}\,\lambda\ell = -\lambda$$

տեսքով։ Շտուրմ-Լիուվիլի խնդրի λ_k սեփական արժեքներն այդ հավասարման դրական արմատներն են, իսկ սեփական ֆունկցիաները՝

$$X_k(x) = \sin\lambda_k x :$$

Օգտվելով (4.21)-ից՝

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-(a\lambda_k)^2 t} \sin\lambda_k x : \tag{4.30}$$

Գտնենք a_k գործակիցները, օգտվելով $v(x,0) = \dfrac{hT-U}{1+h\ell}x - T$ սկզբնական պայմանից: Տեղադրելով (4.30) շարքի մեջ $t=0$, կունենանք՝

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\lambda_k x = \frac{hT-U}{1+h\ell}x - T,$$

որտեղից՝

$$a_k = \frac{1}{\|\sin\lambda_k x\|^2}\int_0^{\ell}\left(\frac{hT-U}{1+h\ell}x-T\right)\sin\lambda_k x dx :$$

Հաշվենք ինտեգրալը.

$$\int_0^{\ell}\left(\frac{hT-U}{1+h\ell}x-T\right)\sin\lambda_k x dx = \frac{hT-U}{1+h\ell}\int_0^{\ell} x\sin\lambda_k x dx - T\int_0^{\ell}\sin\lambda_k x dx =$$

$$= \frac{U\ell+T}{\lambda_k(1+h\ell)}\cos\lambda_k\ell + \frac{hT-U}{\lambda_k^2(1+h\ell)}\sin\lambda_k\ell - \frac{T}{\lambda_k} =$$

$$= \frac{U\ell+T}{\lambda_k(1+h\ell)}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\lambda_k\ell}{1+\operatorname{tg}^2\lambda_k\ell} + \frac{hT-U}{\lambda_k^2(1+h\ell)}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\lambda_k\ell}{\operatorname{tg}^2\lambda_k\ell+1} - \frac{T}{\lambda_k} =$$

$$= \frac{U\ell+T}{\lambda_k(1+h\ell)}\cdot\frac{1-\left(-\frac{\lambda_k}{h}\right)^2}{1+\left(-\frac{\lambda_k}{h}\right)^2} + \frac{hT-U}{\lambda_k^2(1+h\ell)}\cdot\frac{2\left(-\frac{\lambda_k}{h}\right)}{\left(-\frac{\lambda_k}{h}\right)^2+1} - \frac{T}{\lambda_k} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k}\left(\frac{(-1)^k U}{\sqrt{h^2+\lambda_k^2}} - T\right) :$$

Բացի դրանից՝

$$\|\sin\lambda_k x\|^2 = \int_0^{\ell}\sin^2\lambda_k x dx = \int_0^{\ell}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\lambda_k x\right)dx = \frac{\ell}{2} - \frac{1}{4\lambda_k}\sin 2\lambda_k x\Big|_0^{\ell} =$$

$$= \frac{\ell}{2} - \frac{1}{4\lambda_k}\sin 2\lambda_k\ell = \frac{\ell}{2} - \frac{1}{4\lambda_k}\frac{2\operatorname{tg}\lambda_k\ell}{1+\operatorname{tg}^2\lambda_k\ell} = \frac{\ell}{2} - \frac{1}{4\lambda_k}\frac{-2\frac{\lambda_k}{h}}{1+(-\frac{\lambda_k}{h})^2} = \frac{\ell(h^2+\lambda_k^2)+h}{2(h^2+\lambda_k^2)} :$$

Այսպիսով՝

$$a_k = \frac{1}{\|\sin\lambda_k x\|^2}\int_0^{\ell}\left(\frac{hT-U}{1+h\ell}x-T\right)\sin\lambda_k x dx = \frac{2(h^2+\lambda_k^2)}{\ell(h^2+\lambda_k^2)+h}\cdot\frac{1}{\lambda_k}\cdot\left(\frac{(-1)^k U}{\sqrt{h^2+\lambda_k^2}}-T\right) :$$

Պատասխան՝

$$u(x,t) = \frac{U-hT}{1+h\ell}x - T + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(h^2+\lambda_k^2)}{(\ell(h^2+\lambda_k^2)+h)\lambda_k}\left(\frac{(-1)^k U}{\sqrt{h^2+\lambda_k^2}} - T\right)e^{-(a\lambda_k)^2 t}\sin\lambda_k x,$$

որտեղ λ_k թվերը $h\operatorname{tg}\lambda\ell = -\lambda$ հավասարման դրական արմատներն են:

Խնդիրներ

$0<x<\ell,\ \ t>0$ տիրույթում գտնել $u_t-a^2u_{xx}=0$ հավասարման այն $u(x,t)$ լուծումը, որը բավարարում է նշված եզրային և սկզբնական պայմաններին.

365. $u(0,t)=0,\ \ u(\ell,t)=0,\ \ u(x,0)=\varphi(x)$ ։

366. $u(0,t)=0,\ \ u(\ell,t)=0,\ \ u(x,0)=u_0$ ։

367. $u(0,t)=0,\ \ u(\ell,t)=0,\ \ u(x,0)=Ax$ ։

368. $u(0,t)=0,\ \ u(\ell,t)=0,\ \ u(x,0)=2x(\ell-x)$ ։

369. $u(0,t)=0,\ \ u_x(\ell,t)=0,\ \ u(x,0)=\varphi(x)$ ։

370. $u_x(0,t)=0,\ \ u_x(\ell,t)=0,\ \ u(x,0)=\varphi(x)$ ։

371. $u_x(0,t)=0,\ \ u_x(\ell,t)=0,\ \ u(x,0)=U$ ։

372. $u_x(0,t)-hu(\ell,t)=0,\ \ u(\ell,t)=0,\ \ u(x,0)=U,\ \ h>0$ ։

373. $u_x(0,t)-hu(\ell,t)=0,\ \ u_x(\ell,t)+hu(\ell,t)=0,\ \ u(x,0)=U,\ \ h>0$ ։

374. $u(0,t)=0,\ \ u(\ell,t)=0,\ \ u(x,0)=\begin{cases} x, & 0<x\leqslant \ell/2, \\ \ell-x, & \ell/2\leqslant x<\ell \text{ ։} \end{cases}$

375. $u_x(0,t)=0,\ \ u(1,t)=0,\ \ u(x,0)=x^2-1,\ \ a=1,\ \ \ell=1$ ։

Լուծել խառը խնդիրը.

376. $\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}+\beta u=0, \quad 0<x<\ell,\ \ t>0, \\ u(0,t)=0,\ \ u_x(\ell,t)=0, \\ u(x,0)=\sin\dfrac{\pi}{2\ell}\,x \text{ ։} \end{cases}$

377. $\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}+\beta u=0, \quad 0<x<\ell,\ \ t>0, \\ u_x(0,t)=0,\ \ u_x(\ell,t)=0, \\ u(x,0)=\varphi(x) \text{ ։} \end{cases}$

378. $\begin{cases} u_t-u_{xx}+u=0, \quad 0<x<\ell,\ \ t>0, \\ u(0,t)=0,\ \ u(\ell,t)=0, \\ u(x,0)=1 \text{ ։} \end{cases}$

379. $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + \beta u = 0, \quad 0 < x < \ell, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) - hu(0,t) = 0, \ \ u_x(\ell,t) = 0, \ \ h > 0, \\ u(x,0) = U : \end{cases}$

380. $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \ell, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = T, \ \ u(\ell,t) = U, \\ u(x,0) = 0 : \end{cases}$

381. $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x), \quad 0 < x < \ell, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \ \ u_x(\ell,t) = q, \\ u(x,0) = \varphi(x) : \end{cases}$

382. $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \ell, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = q, \ \ u_x(\ell,t) = q, \\ u(x,0) = Ax : \end{cases}$

383. $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + \beta u = \sin \dfrac{\pi}{\ell} x, \quad 0 < x < \ell, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \ \ u(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = 0 : \end{cases}$

384. $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \ell, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \ \ u_x(\ell,t) = Ae^{-t}, \\ u(x,0) = T : \end{cases}$

385. $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \ell, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = At, \ \ u_x(\ell,t) = T, \\ u(x,0) = 0 : \end{cases}$

Գլուխ 5
Էլիպտական տիպի հավասարումներ

$ 1. Էլիպտական հավասարման բերվող պարզագույն խնդիրներ

Էլիպտական տիպի հավասարումները ստացվում են ստացիոնար՝ ժամանակի ընթացքում չփոփոխվող երևույթներ ուսումնասիրելիս: Այդ իսկ պատճառով, ի տարբերություն հիպերբոլական և պարաբոլական տիպի հավասարումների, էլիպտական տիպի հավասարումների խնդիրներում սկզբնական պայմաններ չեն դրվում: Էլիպտական տիպի հավասարումներից առավել հաճախ հանդիպում է Պուասոնի հավասարումը՝

$$\Delta u = f :$$

Այդ հավասարմանը համապատասխանող համասեռ հավասարումը՝ երբ $f \equiv 0$, կոչվում է Լապլասի հավասարում՝

$$\Delta u = 0,$$

որի անընդհատ լուծումները կոչվում են հարմոնիկ ֆունկցիաներ:

Ստորև նշված խնդիրներում դիտարկվում է տարածական մարմին, որը $Oxyz$ կոորդինատական համակարգում զբաղեցնում է Γ մակերևույթով սահմանափակված Ω տիրույթը:

1.1 Ստացիոնար ջերմային դաշտի հավասարումը: Մարմնի կետերի $u(x,y,z,t)$ ջերմաստիճանը բավարարում է $u_t - a^2\Delta u = 0$ ջերմահաղորդականության հավասարմանը: Երբ մարմնի ներսի ամեն մի (x,y,z) կետում հաստատվում է հաստատուն՝ ժամանակի ընթացքում չփոփոխվող $u(x,y,z)$ ջերմաստիճան, ապա այն բավարարում է $\Delta u = 0$ Լապլասի հավասարմանը: Եթե մարմնի ներսում կան ջերմային աղբյուրներ, ապա ստանում ենք

$$\Delta u = -f(x,y,z) \tag{5.1}$$

Պուասոնի հավասարումը, որտեղ $f = F/k$, F-ը ջերմային աղբյուրի խտությունն է՝ ջերմության քանակը, որը անջատվում է միավոր ժամանակում միավոր ծավալից, իսկ k-ն՝ ջերմահաղորդականության գործակիցը:

Մարմնի ներսում ջերմաստիճանի բախշման $u(x,y,z)$ ֆունկցիայի որոշման համար ձևակերպվում է հետևյալ խնդիրը: Պահանջվում գտնել $u(x,y,z)$

ֆունկցիա, որը Ω տիրույթում բավարարում է (5.1) հավասարմանը, իսկ Γ եզրի վրա հետևյալ եզրային պայմաններից որևէ մեկին.

I. $u|_\Gamma = g_1$ (տրված է Γ-ի վրա ջերմաստիճանը):

II. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = g_2$ (տրված է Γ-ի վրա ջերմային հոսքը):

III. $\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + h(u-g_3)\right)\right|_\Gamma = 0$ (Γ մակերևույթով տեղի է ունենում ջերմափոխանակություն արտաքին միջավայրի հետ, որի ջերմաստիճանը g_3 է):

Այստեղ $g_1,\ g_2,\ g_3,\ h$ ֆունկցիաները որոշված են Γ -ի վրա, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ - ածանցյալն է ըստ Γ մակերևույթի արտաքին նորմալի ուղղության:

1.2 Էլեկտրոստատիկայի և մագնիտոստատիկայի հավասարումները: Վակուումում էլեկտրական դաշտի լարվածության $\vec{\mathbf{E}}$ վեկտորը կարելի է ներկայացնել

$$\vec{\mathbf{E}} = -\mathrm{grad}\, u = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{\mathbf{k}}\right)$$

տեսքով, որտեղ $u(x,y,z)$ ֆունկցիան կոչվում է էլեկտրական դաշտի պոտենցիալ: Այն բավարարում է

$$\Delta u = -4\pi\rho(x,y,z)$$

հավասարմանը, որտեղ ρ-ն լիցքերի ծավալային խտությունն է: Եզրային պայմաններն են.

I. $u|_\Gamma = g_1$ (տրված է Γ-ի վրա պոտենցիալը):

II. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = g_2$ (տրված է Γ-ի վրա լիցքերի խտությունը):

Վակուումում մագնիսական դաշտի լարվածության $\vec{\mathbf{H}}$ վեկտորը, էլեկտրական դաշտի բացակայության դեպքում, կարելի է ներկայացնել $\vec{\mathbf{H}} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ տեսքով: Այդ դեպքում φ պոտենցյալը բավարարում է $\Delta\varphi = 0$ Լապլասի հավասարմանը:

1.3 Անսեղմելի հեղուկի պոտենցիալային հոսքը: Դիցուք Ω տիրույթում տեղի է ունենում անսեղմելի հեղուկի հոսք $(\rho = \text{const.})$, որը բնութագրվում է $\vec{\mathbf{v}}(x,y,z)$ արագության վեկտորով: Եթե հեղուկի շարժումը մրրկային չէ, ապա $\vec{\mathbf{v}} = -\mathrm{grad}\,\varphi$, որտեղ φ-ն կոչվում է արագության պոտենցիալ: Անխզելիության (նյութի պահպանման)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\vec{\mathbf{v}}) = 0$$

հավասարումից ստացվում է $\operatorname{div} \vec{\mathbf{v}} = 0$, որտեղից՝ $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$, կամ որ նույնն է φ պոտենցիալը բավարարում է $\Delta\varphi = 0$ հավասարմանը։

Խնդիրներ

Գտնել Լապլասի օպերատորի տեսքը.

386. բևեռային կոորդինատական համակարգում՝

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi\ :$$

387. գլանային կոորդինատական համակարգում՝

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z;$$

388. սֆերիկ կոորդինատական համակարգում՝

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta\ :$$

Գտնել k-ի այն արժեքը, որի դեպքում u ֆունկցիան կլինի հարմոնիկ.

389. $u(x_1, x_2) = x_1^3 + k\,x_1 x_2^2$:

390. $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + k\,x_3^2$:

391. $u(x_1, x_2) = e^{2x_1}\operatorname{ch} kx_2,$

392. $u(x_1, x_2) = \sin 3x_1 \operatorname{ch} kx_2$:

Գտնել R^2-ում հարմոնիկ այն բոլոր ֆունկցիաները, որոնց համար տեղի ունի նշված պայմանը.

393. $u_y(x, y) = 3xy^2 - x^3$:

394. $u_x(x, y) = x^2 - y^2 - 2y$:

395. $u_y(x, y) = u(x, y)$:

396. $u_x(x, y) = 2u(x, y)$:

Դիցուք $u(x),\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է։ Պարզել, հարմոնի՞կ է արդյոք $\tilde{u}(x)$ ֆունկցիան.

397. $\tilde{u}(x) = u(x+h), \quad h = (h_1, h_2, \cdots, h_n)$ – հաստատուն վեկտոր է:

398. $\tilde{u}(x) = u(\lambda x), \quad \lambda$ – սկալյար հաստատուն է:

399. $\tilde{u}(x) = u(Cx), \quad C$ – հաստատուն օրթոգոնալ մատրից է:

400. $\tilde{u}(x) = u_{x_1} u_{x_2}, \quad n = 2$:

401. $\tilde{u}(x) = u_{x_1} u_{x_2}, \quad n > 2$:

402. $\tilde{u}(x) = x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} + x_3 u_{x_3}, \quad n = 3$:

403. $\tilde{u}(x) = x_1 u_{x_1} - x_2 u_{x_2}, \quad n = 2$:

404. з) $\tilde{u}(x) = x_2 u_{x_1} - x_1 u_{x_2}, \quad n = 2$:

405. $\tilde{u}(x) = u_{x_1}^2 - u_{x_2}^2, \quad n = 2$:

406. $\tilde{u}(x) = u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2, \quad n = 2$:

$ 2 Հարմոնիկ ֆունկցիաների հիմնական հատկությունները: Հիմնական խնդիրների դրվածքը էլիպտական հավասարումների համար

Մաքսիմումի սկզբունքը. Ω տիրույթում հարմոնիկ ֆունկցիան, եթե նույնաբար հաստատուն չէ, Ω-ի ոչ մի կետում չի կարող հասնել իր մաքսիմումին:

Թեորեմ միջին արժեքի վերաբերյալ. Դիցուք Ω-ն R^n տարածության տիրույթ է, $u(x)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է Ω-ում, $x^0 \in \Omega$ կամայական կետ է, R-ը կամայական թիվ է, այնպիսին, որ x^0 կենտրոնով R շառավղով $B_R(x^0)$ գունդն ընկած է Ω-ի մեջ, $S_R(x^0)$ սֆերան $B_R(x^0)$ -ի եզրն է: Այդ դեպքում

$$u(x^0) = \frac{1}{\omega_n\ R^{n-1}} \int\limits_{S_R(x^0)} u(x)ds \qquad \text{և} \qquad u(x^0) = \frac{1}{\sigma_n\ R^n} \int\limits_{B_R(x^0)} u(x)dx,$$

որտեղ ω_n-ը միավոր սֆերայի մակերևույթի մակերեսն է, σ_n-ը միավոր գնդի ծավալը R^n-ում:

Լիուվիլի թեորեմը. Եթե R^n-ում հարմոնիկ ֆունկցիան սահմանափակ է վերևից կամ ներքևից, ապա այն հաստատուն է:

Հառնակի անհավասարությունը. Դիցուք $u(x)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է $B_R(0)$ գնդում և անընդհատ է $\overline{B_R(0)}$-ում: Այդ դեպքում

$$u(0)R^{n-1}\,\frac{R-\|x\|}{(R+\|x\|)^{n-1}} \leqslant u(x) \leqslant u(0)R^{n-1}\,\frac{R+\|x\|}{(R-\|x\|)^{n-1}}\,:$$

Թեորեմ հոսքի վերաբերյալ. Դիցուք $u(x)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է Ω սահմանափակ տիրույթում և $u \in C^1(\overline{\Omega})$: Այդ դեպքում

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds = 0,$$

որտեղ ν վեկտորը $\partial\Omega$-ի արտաքին նորմալն է:

Էլիպտական հավասարումների համար հիմնականում դրվում են երեք տիպի խնդիրներ: Ձևակերպենք դրանք հարմոնիկ ֆունկցիաների համար:

Դիցուք Ω-ն Γ եզրով սահմանափակ տիրույթ է:

- *Առաջին եզրային խնդիր կամ Դիրիխլեի խնդիր:* Պահանջվում է գտնել $u \in C(\overline{\Omega})$ հարմոնիկ ֆունկցիա, որը բավարարի

$$u = \varphi(x), \quad x \in \Gamma$$

  եզրային պայմանին, որտեղ $\varphi(x)$-ը Γ-ի վրա տրված անընդհատ ֆունկցիա է:

- *Երկրորդ եզրային խնդիր կամ Նեյմանի խնդիր:* Դիցուք Γ եզրը ողորկ է: Պահանջվում է գտնել $u \in C^1(\overline{\Omega})$ հարմոնիկ ֆունկցիա, որը բավարարի

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma$$

  եզրային պայմանին, որտեղ ν-ն Γ-ի արտաքին նորմալն է, իսկ $\varphi(x)$-ը Γ-ի վրա տրված անընդհատ ֆունկցիա է:

  Որպեսզի Նեյմանի խնդիրը ունենա լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi(x)dx = 0\,:$$

  Այդ դեպքում ասում են, որ Նեյմանի խնդիրը դրված է ճիշտ:

- *Երրորդ եզրային խնդիր կամ խառը խնդիր:* Դիցուք Γ եզրը ողորկ է: Պահանջվում է գտնել $u \in C^1(\overline{\Omega})$ հարմոնիկ ֆունկցիա, որը բավարարի

$$\sigma(x)\,\frac{\partial u}{\partial \nu} + u = \varphi(x), \quad x \in \Gamma$$

եզրային պայմանին, որտեղ $\sigma(x)$-ը և $\varphi(x)$-ը Γ-ի վրա տրված անընդհատ ֆունկցիաներ են:

Խնդիրներ

Գտնել նշված բազմությունում $u(x,y)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը.

407. $u = xy, \quad \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$:

408. $u = x^2-y^2, \quad \big\{(x,y) \bigm| x^2/4+y^2/9 \leqslant 1\big\}$:

409-413 խնդիրներում

$$B_a^n(x^0) = \big\{x \in \mathrm{R}^n \bigm| \|x-x^0\| < a\big\}, \quad S_a^n(x^0) = \big\{x \in \mathrm{R}^n \bigm| \|x-x^0\| = a\big\} :$$

409. $u(x)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է $B_a^n(O)$ գնդում, անընդհատ է $\overline{B_a^n(O)}$-ում և $u(O)=0$: Գտնել կապը

$$\int\limits_{B^+} u(x)dx \qquad \text{և} \qquad \int\limits_{B^-} u(x)dx$$

թվերի միջև, որտեղ $B^+ = \big\{x \in B_a^n(O) \bigm| u(x) > 0\big\}, \quad B^- = \big\{x \in B_a^n(O) \bigm| u(x) < 0\big\}$:

410. $u(r,\varphi)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է $r \leqslant 1$ շրջանում: Գտնել

$$\int\limits_0^{2\pi} u_{rr}(1,\varphi)d\varphi :$$

411. Դիցուք $u \in C^2(B_1^2(0)) \cap C(\overline{B_1^2(0)})$ և

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y) \in B_1^2(0), \\ u = y^2, & (x,y) \in S_1^2(0), \quad y \geqslant 0, \\ u = y, & (x,y) \in S_1^2(0), \quad y < 0 : \end{cases}$$

Գտնել

$$\int\limits_{B_{1/2}^2(0)} u(x)dx :$$

412. Դիցուք $\Delta u = 1, \quad x \in \overline{B_2^2(0)} \setminus B_1^2(0)$: Ո՞րն է մեծ՝

$$\int\limits_{S_1^2(0)} u_r ds \qquad \text{թե} \qquad \int\limits_{S_2^2(0)} u_r ds :$$

413. Գոյություն ու՞նի արդյոք $B_1^3(0)$-ում հարմոնիկ, ոչ բացասական ֆունկցիա այնպիսին, որ

$$u(0,0,0) = 0, \qquad u(0,0,1/2) = 10 :$$

414. Դիցուք Ω-ն $\partial\Omega$ ողորկ եզրով սահմանափակ տիրույթ է, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ և

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \psi(x) & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

որտեղ ν վեկտորը $\partial\Omega$-ի արտաքին նորմալն է: Ապացուցել, որ $\psi(x)$ ֆունկցիան $\partial\Omega$-ի վրա զրո արժեք է ընդունում առնվազն երկու կետում:

§ 3. Փոփոխականների անջատման մեթոդը

Պարզագույն տիրույթների դեպքում (շրջան, ուղղանկյուն) եզրային խնդիրների լուծումը Լապլասի և Պուասոնի հավասարումների համար կարելի է ստանալ փոփոխականների անջատման եղանակով: Դիտարկենք երկչափ Լապլասի հավասարումը բևեռային կոորդինատական համակարգում՝

$$u_{rr} + \frac{1}{r}\, u_r + \frac{1}{r^2}\, u_{\varphi\varphi} = 0 : \tag{5.2}$$

Փնտրենք այդ հավասարման ոչ տրիվիալ լուծումը

$$u(r,\varphi) = F(r) \cdot \Phi(\varphi)$$

տեսքով, $F(r) \not\equiv 0, \;\; \Phi(\varphi) \not\equiv 0$: Հավասարման մեջ տեղադրմամբ հանգում ենք

$$F''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}F'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}F(r)\Phi''(\varphi) = 0 :$$

Անջատելով փոփոխականները՝ կստանանք

$$\frac{r^2F''(r) + rF'(r)}{F(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} :$$

Ստացված հավասարությունը կլինի նույնություն, եթե աջ մասը ցանկացած r-ի, իսկ ձախ մասը ցանկացած φ-ի դեպքում հավասար լինեն նույն հաստատունին՝

$$\frac{r^2F''(r)+rF'(r)}{F(r)}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}\equiv\lambda:$$

Այստեղից $\Phi(\varphi)$ ֆունկցիայի որոշման համար կստանանք

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0 \tag{5.3}$$

հավասարումը, իսկ $F(r)$ ֆունկցիայի որոշման համար՝

$$r^2F''(r)+rF'(r)-\lambda F(r)=0 \tag{5.4}$$

Էյլերի հավասարումը:

Քանի որ $u(r,\varphi+2\pi k)=u(r,\varphi)$, $k\in Z$, ապա $\Phi(\varphi+2\pi k)=\Phi(\varphi)$, այսինքն՝ փնտրվում են (5.3) հավասարման 2π-պարբերական լուծումները: Դիտարկենք երեք դեպք:

1) $\lambda<0$ դեպքում (5.3) հավասարման ընդհանուր լուծումն է՝

$$\Phi(\varphi)=c_1e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}+c_2e^{\sqrt{-\lambda}\varphi},\quad c_1,c_2\in\mathrm{R},$$

որը պարբերական չէ, եթե c_1-ը և c_2-ը միաժամանակ զրո չեն:

2) $\lambda=0$ դեպքում (5.3) հավասարման ընդհանուր լուծումն է

$$\Phi(\varphi)=\alpha_0+\beta_0\,\varphi,\quad \alpha_0,\beta_0\in\mathrm{R},$$

որը կլինի պարբերական, եթե $\beta_0=0$, այսինքն՝ $\lambda=0$ դեպքում (5.3) հավասարման 2π-պարբերական լուծումը ցանկացած հաստատուն է՝ $\Phi_0(\varphi)\equiv\alpha_0$, ընդ որում $\alpha_0\neq0$:

3) $\lambda>0$ դեպքում (5.3) հավասարման ընդհանուր լուծումն է

$$\Phi(\varphi)=c_1\cos\sqrt{\lambda}\varphi+c_2\sin\sqrt{\lambda}\varphi,\quad c_1,c_2\in\mathrm{R}:$$

Քանի որ $c_1^2+c_2^2\neq0$, ապա այն կարելի է ներկայացնել

$$\Phi(\varphi)=A\cos\big(\sqrt{\lambda}\,\varphi-\theta\big),\qquad A=\sqrt{c_1^2+c_2^2},\quad \theta=\operatorname{arctg}\frac{c_2}{c_1}$$

տեսքով: $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$ պայմանից՝

$$A\cos(\sqrt{\lambda}(\varphi+2\pi)-\theta)=A\cos(\sqrt{\lambda}\varphi-\theta),$$

որտեղից, հաշվի առնելով, որ $A \neq 0$, կստանանք

$$-2\sin(\sqrt{\lambda}\,\varphi + 2\pi\sqrt{\lambda} - \theta)\sin\pi\sqrt{\lambda} \equiv 0,$$

ուրեմն՝ $\sin\pi\sqrt{\lambda} = 0,$ որտեղից $\pi\sqrt{\lambda} = \pi n$ կամ $\lambda = n^2,\ \ n = 1, 2, \ldots$ ։

Այսպիսով, $\lambda > 0$ դեպքում (5.3) հավասարման 2π-պարբերական լուծումներն են

$$\Phi_n(\varphi) = \alpha_n\cos n\varphi + \beta_n\sin n\varphi, \quad \alpha_n,\ \beta_n \in \mathrm{R}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

ֆունկցիաները։ Գտնենք (5.4) հավասարման լուծումները ստացված λ-ների դեպքում։

Երբ $\lambda = 0$, (5.4) հավասարման ընդհանուր լուծումն է՝

$$F_0(r) = c_1 + c_2\ln r, \qquad c_1,\ c_2\ \in \mathrm{R},$$

իսկ $\lambda = n^2$ դեպքում՝

$$F_n(r) = c_1^{(n)}\ r^n + c_2^{(n)}\ r^{-n}, \qquad c_1^{(n)},\ c_2^{(n)}\ \in \mathrm{R}\ ։$$

Այսպիսով՝

$$u_0(r,\varphi) = F_0(r)\Phi_0(\varphi) = (c_1 + c_2\ln r)\alpha_0 = A_0 + B_0\ln r,$$

$$\begin{aligned} u_n(r,\varphi) = F_n(r)\Phi_n(\varphi) = (c_1^{(n)}r^n + c_2^{(n)}r^{-n})(\alpha_n\cos n\varphi + \beta_n\sin n\varphi) = \\ = (A_nr^n + B_nr^{-n})\cos n\varphi + (C_nr^n + D_nr^{-n})\sin n\varphi, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

ֆունկցիաները ցանկացած

$$A_0 = c_1\alpha_0, \quad B_0 = c_2\alpha_0, \quad A_n = c_1^{(n)}\alpha_n, \quad B_n = c_2^{(n)}\alpha_n, \quad C_n = c_1^{(n)}\beta_n, \quad D_n = c_2^{(n)}\beta_n$$

հաստատունների դեպքում (5.2) հավասարման լուծումներ են։

Ակնհայտ է, որ այդ հավասարման լուծում է նաև

$$u(r,\varphi) = A_0 + B_0\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\Big((A_nr^n + B_nr^{-n})\cos n\varphi + (D_nr^n + C_nr^{-n})\sin n\varphi\Big) \tag{5.5}$$

ֆունկցիան, եթե միայն աջ մասում գրված շարքը և այն շարքերը, որոնք ստացվում են երկու անգամ անդամ առ անդամ ածանցելիս, հավասարաչափ զուգամետ են։

3.1 Դիրիխլեի խնդիրը շրջանում: Պահանջվում է գտնել $x^2 + y^2 < R^2$

շրջանում հարմոնիկ ֆունկցիա, որը $x^2+y^2=R^2$ շրջանագծի վրա հավասար է տրված $g(x,y)$ ֆունկցիային՝

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2+y^2<R^2, \\ u(x,y)=g(x,y), & x^2+y^2=R^2 : \end{cases}$$

Բևեռային կոորդինատական համակարգում խնդիրը կգրվի

$$\begin{cases} u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=0, \quad r<R, & (5.6) \\ u(R,\varphi)=f(\varphi), \quad 0\leqslant\varphi<2\pi & (5.7) \end{cases}$$

տեսքով, որտեղ $f(\varphi)=g(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$:

$u(r,\varphi)$ ֆունկցիան պետք է լինի սահմանափակ, իսկ դա նշանակում է, որ (5.5) շարքի գումարը կլինի (5.6) հավասարման լուծում $r<R$ շրջանում, եթե $B_0=B_n=C_n=0$, այսինքն՝

$$u(r,\varphi)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos n\varphi+D_n\sin n\varphi) : \tag{5.8}$$

Ընտրենք A_0, A_n և B_n հաստատուններն այնպես, որ տեղի ունենա (5.7) եզրային պայմանը՝

$$f(\varphi)=u(R,\varphi)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty} R^n(A_n\cos n\varphi+D_n\sin n\varphi) :$$

Նշանակելով $a_0=2A_0,\ a_n=A_nR^n,\ b_n=D_nR^n$, կունենանք

$$f(\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi),$$

որտեղից էլ

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi,\ \ a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,\ \ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi,\ \ n=1,2,\ldots : \tag{5.9}$$

Տեղադրելով (5.8) շարքի մեջ՝ կստանանք.

$$u(r,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi), \tag{5.10}$$

որտեղ $a_0,\ a_n$ և b_n գործակիցները որոշվում են (5.9) բանաձևերից:

Անհամասեռ հավասարման դեպքում՝

$$\begin{cases} \Delta u = h(x,y), & x^2+y^2<R^2, \\ u(x,y)=g(x,y), & x^2+y^2=R^2, \end{cases}$$

լուծումը կարելի է փնտրել $u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$ տեսքով, և ընտրել որևէ w ֆունկցիա այնպես, որ $\Delta w = h(x,y)$: Այդ դեպքում v ֆունկցիայի նկատմամբ կստացվի համասեռ հավասարումով

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & x^2+y^2<R^2, \\ v(x,y)=g(x,y)-w(x,y), & x^2+y^2=R^2 \end{cases}$$

խնդիրը:

Օրինակ 5.1: Լուծել Դիրիխլեի խնդիրը.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2+y^2<R^2, \\ u(x,y)=g(x,y)=4xy^2, & x^2+y^2=R^2 : \end{cases}$$

Լուծում: Բևեռային կոորդինատական համակարգում կունենանք (5.6),(5.7) խնդիրը, որտեղ

$$f(\varphi) == g(R\cos\varphi, R\sin\varphi) = 4R\cos\varphi\; R^2\sin^2\varphi = 4R^3(1-\cos^2\varphi)\cos\varphi =$$
$$= 4R^3\Big(\cos\varphi - \cos^3\varphi\Big) = 4R^3\Big(cos\varphi - \frac{3\cos\varphi+\cos 3\varphi}{4}\Big) = R^3\Big(\cos\varphi - \cos 3\varphi\Big) :$$

Խնդրի լուծումը գտնենք օգտագործելով (5.10)-ը: Ունենք

$$u(R,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi) :$$

Սրանից և եզրային պայմանից ստանում ենք.

$$R^3\Big(\cos\varphi - \cos 3\varphi\Big) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi) :$$

Այս հավասարությունը տեղի կունենա, եթե

$$a_0=0, \quad a_1=R^3, \quad a_2=0, \quad a_3=-R^3, \quad a_4=a_5=\ldots=0, \quad b_1=b_2=\ldots=0 :$$

Տեղադրելով ստացված գործակիցները (5.10) շարքի մեջ՝

$$u(r,\varphi)=\left(\frac{r}{R}\right)R^3\cos\varphi+\left(\frac{r}{R}\right)^3(-R^3)\cos 3\varphi=R^2r\cos\varphi-r^3\cos 3\varphi=$$
$$=R^2r\cos\varphi-r^3(4\cos^3\varphi-3\cos\varphi)=(R^2+3r^2)r\cos\varphi-4r^3\cos^3\varphi\,:$$

Անցնելով (x,y) փոփոխականների, կստանանք

$$u(x,y)=(R^2+3(x^2+y^2))x-4x^3\,:$$

Պատասխան՝ $u(x,y)=(R^2+3y^2)x-x^3$:

Օրինակ 5.2: Գտնել $0\leqslant r<R$ շրջանում հարմոնիկ $u(r,\varphi)$ ֆունկցիա, որը բավարարում է $u(R,\varphi)=\varphi\sin\varphi$ եզրային պայմանին:

Լուծում: Օգտվենք (5.10) ներկայացումից: Հաշվենք շարքի գործակիցները՝ օգտվելով (5.9) բանաձևերից, ընդունելով $f(\varphi)=\varphi\sin\varphi$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi\sin\varphi d\varphi=-2,\quad a_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi\sin\varphi\cos\varphi d\varphi=-\frac{1}{2},\quad b_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi\sin^2\varphi d\varphi=\pi,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi\sin\varphi\cos k\varphi d\varphi=\frac{2}{k^2-1},\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi\sin\varphi\sin k\varphi d\varphi=0,\quad k=2,3,\cdots:$$

Տեղադրելով ստացված գործակիցները (5.9) շարքի մեջ՝ կստանանք լուծումը:

Պատասխան՝ $u(r,\varphi)=-1-\dfrac{r}{2R}\cos\varphi+\dfrac{\pi r}{R}\sin\varphi+2\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{k^2-1}\left(\dfrac{r}{R}\right)^k\cos k\varphi$:

Օրինակ 5.3: Լուծել Դիրիխլեի խնդիրը.

$$\begin{cases}\Delta u=y, & x^2+y^2<R^2,\\ u(x,y)=1, & x^2+y^2=R^2\,:\end{cases}$$

Լուծում: Փնտրենք $u(x,t)=v(x,y)+w(x,y)$ տեսքով: Տեղադրելով հավասարման և եզրային պայմանի մեջ, $v(x,y)$ ֆունկցիայի նկատմամբ կստանանք

$$\begin{cases}\Delta v=y-\Delta w, & x^2+y^2<R^2\\ v(x,y)=1-w(x,y), & x^2+y^2=R^2\end{cases}$$

խնդիրը: Ընտրենք $w(x,y)$ ֆունկցիան այնպես, որ $\Delta w=y$: Օրինակ, կարելի է վերցնել

$$w(x,y)=\frac{y^3}{6}\,:$$

Այդ դեպքում $v(x,y)$ ֆունկցիայի նկատմամբ կստացվի

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & x^2+y^2<R^2, \\ v(x,y) = 1-\dfrac{y^3}{6}, & x^2+y^2=R^2 \end{cases}$$

խնդիրը: Բևեռային կոորդինատական համակարգում այդ խնդիրը կգրվի

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad r<R, \\ v(R,\varphi) = 1-\dfrac{R^3}{6}\sin^3\varphi \end{cases}$$

տեսքով: Համաձայն (5.10)-ի սրա լուծումը կունենա

$$v(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n\cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

տեսքը: Տեղադրելով $r = R$, և հաշվի առնելով եզրային պայմանը, կունենանք

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi) = 1-\frac{R^3}{6}\sin^3\varphi = 1-\frac{R^3}{6}\left(\frac{3}{4}\sin\varphi-\frac{1}{4}\sin 3\varphi\right),$$

որտեղից

$$a_0=1, \qquad a_2=a_3=\ldots=0, \qquad b_1=-\frac{R^3}{8}, \quad b_2=0, \quad b_3=\frac{R^3}{24}, \qquad b_4=b_5=\ldots=0:$$

Տեղադրելով ստացված գործակիցները շարքի մեջ՝ կստանանք

$$v(r,\varphi) = 1-\frac{r}{R}\cdot\frac{R^3}{8}\sin\varphi + \left(\frac{r}{R}\right)^3\cdot\frac{R^3}{24}\sin 3\varphi =$$
$$= 1-\frac{R^2}{8}r\sin\varphi + \frac{r^3}{24}\sin 3\varphi = 1-\frac{R^3}{8}r\sin\varphi+\frac{r^3}{24}\left(3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi\right):$$

Անցնենք (x,y) փոփոխականների՝

$$v(x,y) = 1-\frac{R^2}{8}y + \frac{x^2+y^2}{8}y - \frac{y^3}{6},$$

որտեղից

$$u(x,y) = v(x,y)+w(x,y) = 1-\frac{R^2}{8}y+\frac{x^2+y^2}{8}y-\frac{y^3}{6}+\frac{y^3}{6}:$$

Պատասխան՝ $u(x,y) = 1 + \dfrac{(x^2+y^2-R^2)y}{8}$:

3.2 Դիրիխլեի խնդիրը շրջանի արտաքին մասում: Պահանջվում է գտնել $O(0,0)$ կենտրոնով և R շառավղով շրջանի արտաքին մասում սահմանափակ, հարմոնիկ ֆունկցիա, որը շրջանագծի վրա հավասար է տրված $g(x,y)$ ֆունկցիային՝

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2+y^2>R^2, \\ u(x,y)=g(x,y), & x^2+y^2=R^2, \\ |u(x,y)|<\infty : \end{cases}$$

Անցնելով բևեռային կոորդինատական համակարգին՝ կստանանք

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=0, \quad r>R, \\ u(R,\varphi)=f(\varphi), \quad 0\leqslant\varphi<2\pi, \\ |u(r,\varphi)|<\infty : \end{cases}$$

$u(r,\varphi)$ ֆունկցիայի սահմանափակությունից հետևում է, որ (5.5)-ը կլինի Լապլասի հավասարման լուծում $r>R$ տիրույթում, եթե $B_0=A_n=D_n=0$, այսինքն՝

$$u(r,\varphi)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^{-n}(B_n\cos n\varphi+C_n\sin n\varphi) : \tag{5.11}$$

Ընտրենք A_0, B_n և C_n հաստատուններն այնպես, որ տեղի ունենա եզրային պայմանը՝

$$f(\varphi)=u(R,\varphi)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}R^{-n}(A_n\cos n\varphi+D_n\sin n\varphi) :$$

Եթե նշանակենք

$$a_0=2A_0,\ a_n=B_nR^{-n},\ b_n=C_nR^{-n},$$

ապա եզրային պայմանը կընդունի

$$f(\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)$$

տեսքը, որտեղից

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi, \quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi, \quad n=1,2,\ldots : \tag{5.12}$$

Տեղադրելով (5.11) շարքի մեջ՝ կստանանք.

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \,: \tag{5.13}$$

Օրինակ 5.4: Լուծել Դիրիխլեի արտաքին խնդիրը.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2+y^2 > R^2 \\ u(x,y) = g(x,y) = y + 2xy, & x^2+y^2 = R^2 \\ |u(x,y)| < \infty : \end{cases}$$

Լուծում: Բևեռային կոորդինատական համակարգում խնդիրը կգրվի

$$\begin{cases} \Delta u, \quad r > R, \\ u(R,\varphi) = f(\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ |u(r,\varphi)| < \infty : \end{cases}$$

տեսքով, որտեղ

$$f(\varphi) = g(R\cos\varphi, R\sin\varphi) = R\sin\varphi + 2R\sin\varphi R\cos\varphi = R\sin\varphi + R^2\sin 2\varphi :$$

Խնդրի լուծումը գտնելու համար (5.13)-ում տեղադրենք $r = R$.

$$u(R,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi) :$$

Օգտագործելով եզրային պայմանը կստանանք.

$$R\sin\varphi + R^2\sin 2\varphi = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi) :$$

Այս հավասարությունը տեղի կունենա, եթե

$$a_n = 0, \;\; n = 0,1,2,\dots, \qquad b_1 = R, \quad b_2 = R^2, \quad b_3 = b_4 = \ldots = 0 :$$

Տեղադրելով ստացված գործակիցները (5.13) շարքի մեջ՝

$$u(r,\varphi) = \left(\frac{R}{r}\right) R\sin\varphi + \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{R^2}{2}\sin 2\varphi = \frac{R^2}{r^2}\, r\,\sin\varphi + \frac{2R^4}{r^4}\, r\,\sin\varphi r\,\cos\varphi,$$

և անցնելով (x,y) փոփոխականների, կստանանք

$$u(x,y) = \frac{R^2 y}{r^2} + \frac{2R^4 xy}{r^4} = \frac{R^2 y}{x^2+y^2} + \frac{2R^4 xy}{(x^2+y^2)^2} :$$

Պատասխան՝ $u(x,y) = \dfrac{R^2 y}{x^2+y^2} + \dfrac{2R^4 xy}{(x^2+y^2)^2} :$

3.3 Դիրիխլեի խնդիրը օղակում: Պահանջվում է գտնել $R_0^2 < x^2+y^2 < R^2$ օղակում հարմոնիկ ֆունկցիա, որը $x^2+y^2=R^2$ շրջանագծի վրա հավասար է $g_1(x,y)$ ֆունկցիային, իսկ $x^2+y^2=R_0^2$ շրջանագծի վրա՝ $g_2(x,y)$ ֆունկցիային՝

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & R_0^2 < x^2+y^2 < R^2, \\ u(x,y) = g_1(x,y), & x^2+y^2 = R^2, \\ u(x,y) = g_2(x,y), & x^2+y^2 = R_0^2 : \end{cases}$$

Բևեռային կոորդինատական համակարգում խնդիրը կգրվի

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \quad R_0 < r < R, \\ u(R,\varphi) = f_1(\varphi), \\ u(R_0,\varphi) = f_2(\varphi) \end{cases}$$

տեսքով, որտեղ $f_1(\varphi) = g_1(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$, $f_2(\varphi) = g_2(R_0\cos\varphi, R_0\sin\varphi)$:

Լուծումը տրվում է (5.5) շարքի տեսքով, որի գործակիցները որոշվում են եզրային պայմաններից:

Օրինակ 5.5: Լուծել $0 < R_0 < r < R$ օղակում Դիրիխլեի խնդիրը.

$$\begin{cases} \Delta u = 4, \quad R_0 < r < R, \\ u(R,\varphi) = \cos m\varphi, \quad m \in N, \\ u(R_0,\varphi) = 0 : \end{cases} \tag{5.14}$$

Լուծում: Փնտրենք լուծումը $u(r,\varphi) = v(r,\varphi) + w(r,\varphi)$ տեսքով, որտեղ w-ն $\Delta w = 4$ հավասարմանը բավարարող կամայական ֆունկցիա է: Վերցնենք, օրինակ,

$$w(r,\varphi) = r^2 :$$

Տեղադրելով (5.14)-ի մեջ՝ $v(r,\varphi)$ ֆունկցիայի նկատմամբ կստանանք

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad R_0 < r < R, \\ v(R,\varphi) = \cos m\varphi - R^2, \quad m \in N, \\ v(R_0,\varphi) = -R_0^2 : \end{cases} \tag{5.15}$$

խնդիրը: Օգտվենք (5.5) ներկայացումից.

$$v(r,\varphi) = A_0 + B_0\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\big((A_n r^n + B_n r^{-n})\cos n\varphi + (D_n r^n + C_n r^{-n})\sin n\varphi\big) : \tag{5.16}$$

Գտնենք գործակիցները՝ օգտվելով եզրային պայմաններից: Ունենք

$$
\begin{aligned}
v(R,\varphi) = A_0 + B_0 \ln R + \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} \big((A_n R^n + B_n R^{-n}) \cos n\varphi + (D_n R^n + C_n R^{-n}) \sin n\varphi \big) = \cos m\varphi - R^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v(R_0,\varphi) = A_0 + B_0 \ln R_0 + \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} \big((A_n R_0^n + B_n R_0^{-n}) \cos n\varphi + (D_n R_0^n + C_n R_0^{-n}) \sin n\varphi \big) = -R_0^2 :
\end{aligned}
$$

Համադրելով աջ և ձախ մասերը՝ կստանանք

$$
\begin{cases}
A_0 + B_0 \ln R_0 = -R_0^2, \\
A_0 + B_0 \ln R = -R^2, \\
A_m R^m + B_m R^{-m} = 1, \\
A_m R_0^m + B_m R_0^{-m} = 0, \\
A_n = B_n = 0, \quad n \neq m, \\
D_n = C_n = 0,
\end{cases}
$$

որտեղից

$$
A_0 = \frac{R^2 \ln R_0 - R_0^2 \ln R}{\ln R - \ln R_0}, \qquad B_0 = \frac{R_0^2 - R^2}{\ln R - \ln R_0},
$$

$$
A_m = \frac{R_0^{-m}}{(R/R_0)^m - (R_0/R)^m}, \qquad B_m = \frac{-R_0^m}{(R/R_0)^m - (R_0/R)^m},
$$

$$
A_n = B_n = 0 \quad n \neq m, \qquad D_n = C_n = 0 :
$$

Տեղադրելով (5.16) -ի մեջ՝ կստանանք (5.15) խնդրի լուծումը՝

$$
\begin{aligned}
v(r,\varphi) = \frac{R^2 \ln R_0 - R_0^2 \ln R}{\ln R - \ln R_0} + \frac{R_0^2 - R^2}{\ln R - \ln R_0} \ln r + \\
+ \left(\frac{R_0^{-m}}{(R/R_0)^m - (R_0/R)^m} r^m - \frac{-R_0^m}{(R/R_0)^m - (R_0/R)^m} r^{-m} \right) \cos m\varphi,
\end{aligned}
$$

իսկ $u(r,\varphi) = v(r,\varphi) + w(r,\varphi) = v(r,\varphi) + r^2$ ։

Պատասխան՝ $$u(r,\varphi) = \frac{R^2 \ln R_0 - R_0^2 \ln R}{\ln R - \ln R_0} + \frac{R_0^2 - R^2}{\ln R - \ln R_0} \ln r +$$
$$+ \left(\frac{R_0^{-m}}{(R/R_0)^m - (R_0/R)^m} r^m - \frac{- R_0^m}{(R/R_0)^m - (R_0/R)^m} r^{-m} \right) \cos m\varphi + r^2 \; ։$$

Խնդիրներ

Լուծել $\begin{cases} \Delta u = 0, & r < R, \\ u = f(\varphi), & r = R \end{cases}$ խնդիրը.

415. $f(\varphi) = \cos^2\varphi, \quad R = 1$:

416. $f(\varphi) = 2\cos 2\varphi \cos 3\varphi$:

417. $f(\varphi) = \cos^4\varphi, \quad R = 1$:

418. $f(\varphi) = \sin^3\varphi, \quad R = 1$:

419. $f(\varphi) = \sin^2\varphi$:

420. $f(\varphi) = \sin 4\varphi \cos^2\varphi, \quad R = 2$:

421. $f(\varphi) = \sin 4\varphi \sin 8\varphi, \quad R = 2$:

422. $f(\varphi) = 10\cos 3\varphi \cos 2\varphi, \quad R = 1$:

423. $f(\varphi) = \varphi(2\pi - \varphi)$:

Լուծել $\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < R^2, \\ u = g(x,y), & x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$ խնդիրը.

424. $g(x,y) = x + xy$:

425. $g(x,y) = 2(x^2 + y), \quad R = 2$:

426. $g(x,y) = 4y^3, \quad R = 4$:

427. $g(x,y) = x^2 - 2y^2, \quad R = 1$:

428. $g(x,y) = y^2/5 + 5xy, \quad R = 5$:

429. $g(x,y) = 2x^2 - x - y, \quad R = 6$:

Լուծել $\begin{cases} \Delta u = h(x,y), & x^2 + y^2 < R^2, \\ u = g(x,y), & x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$ խնդիրը:

430. $h(x,y) = 1, \quad g(x,y) = 0, \quad R = 1$:

431. $h(x,y) = x, \quad g(x,y) = 0, \quad R = 2$:

432. $h(x,y) = -1, \quad g(x,y) = y^2/2, \quad R = 3$:

433. $h(x,y) = 4, \quad g(x,y) = 1, \quad R = 4$:

Լուծել $\begin{cases} \Delta u = h(x,y), & x^2 + y^2 + 2x < 1, \\ u = g(x,y), & x^2 + y^2 + 2x = 1 \end{cases}$ խնդիրը.

434. $h(x,y) = 0, \quad g(x,y) = 4x^3 + 6x - 1$:

435. $h(x,y)=0, \quad g(x,y)=x^2+2y$:

436. $h(x,y)=0, \quad g(x,y)=2y^2-x$:

437. $h(x,y)=4, \quad g(x,y)=2xy+1$:

438. $h(x,y)=24y, \quad g(x,y)=y$:

Գտնել $\begin{cases} \Delta u=0, & x^2+y^2>R^2, \\ u=g(x,y), & x^2+y^2=R^2 \end{cases}$ խնդրի սահմանափակ լուծումը.

439. $g(x,y)=ax+by+c$:

440. $g(x,y)=x^2-y^2, \quad R=2$:

441. $g(x,y)=x^2+1, \quad R=2$:

442. $g(x,y)=y^2-xy, \quad R=2$:

443. $g(x,y)=y^2+x+y, \quad R=1$:

444. $g(x,y)=2x^2-x+y, \quad R=2$:

Գտնել $R_0<r<R$ օղակում հարմոնիկ $u(r,\varphi)$ ֆունկցիա, որը բավարարում է նշված եզրային պայմաններին.

445. $u(R_0,\varphi)=0, \quad u(R,\varphi)=A\cos\varphi$:

446. $u(R_0,\varphi)=A, \quad u(R,\varphi)=B\sin 2\varphi$:

447. $u_r(R_0,\varphi)=q\cos\varphi, \quad u(R,\varphi)=Q+T\sin 2\varphi$:

448. $u(R_0,\varphi)=T+U\cos\varphi, \quad u_r(R,\varphi)-hu(R,\varphi)=0$:

Պարզել, թե ո՞ր պայմանի դեպքում է Նեյմանի խնդիրը դրված ճիշտ: Օգտվելով (5.5) ներկայացումից՝ գտնել ճիշտ դրված խնդիրի լուծումը (A-ն և B-ն հաստատուններ են).

449. $\begin{cases} \Delta u=0, & r<R, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}=A, & r=R: \end{cases}$

450. $\begin{cases} \Delta u=0, & r<R, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}=2x^2+A, & r=R: \end{cases}$

451. $\begin{cases} \Delta u=0, & r<R, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}=2xy, & r=R: \end{cases}$

452. $\begin{cases} \Delta u=0, & r<R, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}=Ay^2-B, & r=R: \end{cases}$

453. $\begin{cases} \Delta u=0, & r<R, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}=Ax^2-By^2+y, & r=R: \end{cases}$

454. $\begin{cases} \Delta u = 0, & r > R, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} = y^2 - A, & r = R, \\ |u(x,y)| < \infty : \end{cases}$

456. $\begin{cases} \Delta u = 0, & r > R, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} = 2xy - Ax^2 + B, & r = R, \\ |u(x,y)| < \infty : \end{cases}$

455. $\begin{cases} \Delta u = 0, & r > R, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} = x^2 + Ay - B, & r = R, \\ |u(x,y)| < \infty : \end{cases}$

457. $\begin{cases} \Delta u = 0, & r > R, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} = x^2 - Ay^2 + B, & r = R, \\ |u(x,y)| < \infty : \end{cases}$

3.4 Եզրային խնդիրներ ուղղանկյուն տիրույթում: Փոփոխականների անջատման եղանակով կարելի է լուծել Լապլասի հավասարման համար եզրային խնդիրներ ուղղանկյուն տիրույթում: Որպես օրինակ, լուծենք հետևյալ խնդիրը: Պահանջվում է գտնել $0 < x < a$, $0 < y < b$ ուղղանկյուն տիրույթում հարմոնիկ ֆունկցիա, որը ուղղանկյան $x = 0,\ x = a$ կողմերի վրա հավասար է զրոյի, իսկ $y = 0,\ y = b$ կողմերի վրա համապատասխանաբար $f_1(x)$ և $f_2(x)$ ֆունկցիաներին`

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a,\ 0 < x < b, & (5.17) \\ u(0,y) = u(a,y) = 0, & (5.18) \\ u(x,0) = f_1(x), \quad u(x,b) = f_2(x) : & (5.19) \end{cases}$$

Նախ գտնենք (5.17) հավասարմանը բավարարող $u(x,y) = X(x)Y(y)$ տեսքի նույնաբար զրոյից տարբերվող լուծում, որը կբավարարի (5.18) եզրային պայմաններին: Տեղադրելով (5.17) հավասարման մեջ և անջատելով փոփոխականները` կստանանք

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} : \tag{5.20}$$

Որպեսզի (5.20)-ը լինի նույնություն, անհրաժեշտ է, որ աջ և ձախ մասերը հավասար լինեն նույն հաստատունին: Նշանակենք այդ հաստատունը λ^2-ով`

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda^2, \qquad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 :$$

Այստեղից, $Y(x)$ ֆունկցիայի որոշման համար կստանանք

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0 \tag{5.21}$$

հավասարումը, իսկ $X(x)$ ֆունկցիայի որոշման համար`

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

հավասարումը: Որպեսզի $u(x,y)$ ֆունկցիան բավարարի (5.18) եզրային պայմաններին, $X(x)$ ֆունկցիան պետք է բավարարի $X(0) = X(a) = 0$ պայմաններին: Այսպիսով, ստացվեց

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրը, որի սեփական արժեքներն ու սեփական ֆունկցիաներն են՝

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{a}, \qquad X_k(x) = \sin\frac{\pi k}{a}x, \qquad k = 1, 2, \dots :$$

Երբ $\lambda = \lambda_k = \pi k/a$, ապա (5.21) հավասարման ընդհանուր լուծումն է՝

$$Y_k(y) = A_k \operatorname{ch}\frac{\pi k}{a}y + B_k \operatorname{sh}\frac{\pi k}{a}y,$$

որտեղ A_k-ը և B_k-ը ցանկացած թվեր են: Ստացանք (5.17) հավասարմանը և (5.18) եզրային պայմաններին բավարարող հաշվելի քանակով լուծումներ՝

$$u_k(x,y) = X_k(x)Y_k(y) = (A_k \operatorname{ch}\frac{\pi k}{a}y + B_k \operatorname{sh}\frac{\pi k}{a}y)\sin\frac{\pi k}{a}x, \qquad k = 1, 2. \dots :$$

Ակնհայտ է, որ (5.17) հավասարմանը և (5.18) եզրային պայմաններին կբավարարի նաև

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \operatorname{ch}\frac{\pi k}{a}y + B_k \operatorname{sh}\frac{\pi k}{a}y)\sin\frac{\pi k}{a}x \tag{5.22}$$

ֆունկցիան, պայմանով, որ այդ շարքը և այն շարքերը որոնք ստացվում են երկու անգամ անդամ առ անդամ ածանցելիս, հավասարաչափ զուգամետ են:

Ընտրենք A_k և B_k գործակիցներն այնպես, որ (5.22)-ով որոշվող $u(x,y)$ ֆունկցիան բավարարի նաև (5.19) եզրային պայմաններին, ըստ որի

$$f_1(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k + B_k)\sin\frac{\pi k}{a}x,$$

$$f_1(x) = u(x,b) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \operatorname{ch}\frac{\pi k}{a}b + B_k \operatorname{sh}\frac{\pi k}{a}b)\sin\frac{\pi k}{a}x,$$

որտեղից՝

$$\begin{cases} A_k + B_k = \frac{2}{a}\int\limits_0^a f_1(x)\sin\dfrac{\pi k}{a}x\,dx, \\ A_k\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi k}{a}\,b + B_k\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi k}{a}\,b = \frac{2}{a}\int\limits_0^a f_2(x)\sin\dfrac{\pi k}{a}x\,dx : \end{cases}$$

Գտնելով այստեղից A_k և B_k գործակիցները և տեղադրելով (5.22) շարքի մեջ, կստանանք խնդրի լուծումը:

Օրինակ 5.6: Լուծել խնդիրը.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u(0,y) = U, \qquad\qquad u_x(a,y) = 0, \\ u_y(x,0) = T\sin\dfrac{\pi x}{2a}, \quad u(x,b) = 0 : \end{cases}$$

Լուծում: Փնտրելով $u(x,y) = v(x,y) + U$ տեսքով՝ $v(x,y)$ ֆունկցիայի նկատմամբ կստանանք

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, v & (5.23) \\ v(0,y) = 0, \qquad\qquad v_x(a,y) = 0, & (5.24) \\ v_y(x,0) = T\sin\dfrac{\pi x}{2a}, \quad v(x,b) = -U & (5.25) \end{cases}$$

խնդիրը:

Գտնենք $v(x,y) = X(x)Y(y) \not\equiv 0$ տեսքի ֆունկցիա, որը կբավարարի (5.23) հավասարմանը և (5.24) եզրային պայմաններին: Տեղադրելով (5.23) հավասարման մեջ և անջատելով փոփոխականները, $Y(y)$ ֆունկցիայի նկատմամբ կստանանք

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0 \tag{5.26}$$

հավասարումը: Հաշվի առնելով (5.24) եզրային պայմանները, $X(x)$ ֆունկցիայի որոշման համար կստանանք

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = X'(a) = 0 \end{cases}$$

Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրը, որի սեփական արժեքներն ու սեփական ֆունկցիաներն են՝

$$\lambda_k = \frac{\pi(2k+1)}{2a}, \qquad X_k(x) = \sin\frac{\pi(2k+1)}{2a}x, \qquad k = 0,1,2,\ldots :$$

Երբ $\lambda = \lambda_k$, ապա (5.26) հավասարման ընդհանուր լուծումն է՝

$$Y_k(y) = A_k \operatorname{ch}\frac{\pi(2k+1)}{2a}y + B_k \operatorname{sh}\frac{\pi(2k+1)}{2a}y,$$

որտեղ A_k-ն և B_k-ն ցանկացած թվեր են: Ստացանք հաշվելի քանակով

$$v_k(x,y) = X_k(x)Y_k(y) = \left(A_k \operatorname{ch}\frac{\pi(2k+1)}{2a}\,y + B_k \operatorname{sh}\frac{\pi(2k+1)}{2a}\,y\right)\sin\frac{\pi(2k+1)}{2a}\,x$$

ֆունկցիաներ: Դիցուք $v(x,y)$ ֆունկցիան $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k(x,y)$ շարքի գումարն է՝

$$v(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k \operatorname{ch}\frac{\pi(2k+1)}{2a}\,y + B_k \operatorname{sh}\frac{\pi(2k+1)}{2a}\,y\right)\sin\frac{\pi(2k+1)}{2a}\,x : \qquad (5.27)$$

Այն նույնպես կբավարարի (5.23) հավասարմանը և (5.24) եզրային պայմաններին: A_k և B_k գործակիցներն ընտրենք այնպես, որ այն բավարարի նաև (5.25) եզրային պայմաններին: Ունենք

$$v_y(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi(2k+1)}{2a}\left(A_k \operatorname{sh}\frac{\pi(2k+1)}{2a}\,y + B_k \operatorname{ch}\frac{\pi(2k+1)}{2a}\,y\right)\sin\frac{\pi(2k+1)}{2a}\,x :$$

(5.25)-ի առաջին պայմանից՝

$$v_y(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi(2k+1)}{2a}\,B_k \sin\frac{\pi(2k+1)}{2a}\,x = T\sin\frac{\pi}{2a}\,x,$$

որտեղից՝

$$B_0 = \frac{2aT}{\pi}, \qquad B_1 = B_2 = \ldots = 0 :$$

Տեղադրենք ստացված B_k գործակիցները (5.27)-ի մեջ՝ կստանանք

$$v(x,y) = \left(A_0 \operatorname{ch}\frac{\pi}{2a}\,y + \frac{2aT}{\pi}\operatorname{sh}\frac{\pi}{2a}\,y\right)\sin\frac{\pi}{2a}\,x + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{ch}\frac{\pi(2k+1)}{2a}\,y \sin\frac{\pi(2k+1)}{2a}\,x : \quad (5.28)$$

(5.25)-ի երկրորդ պայմանից՝

$$v(x,b) = \left(A_0 \operatorname{ch}\frac{\pi b}{2a} + \frac{2aT}{\pi}\operatorname{sh}\frac{\pi b}{2a}\right)\sin\frac{\pi}{2a}\,x + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{ch}\frac{\pi(2k+1)b}{2a}\sin\frac{\pi(2k+1)}{2a}\,x = -U,$$

որտեղից՝ հաշվի առնելով, որ

$$\|X_k\|^2 = \|\sin\frac{\pi(2k+1)}{2a}x\|^2 = \int\limits_0^a \sin^2\frac{\pi(2k+1)}{2a}xdx = \frac{a}{2}, \quad k=0,1,2,\ldots,$$

կունենանք

$$A_0 \operatorname{ch}\frac{\pi b}{2a} + \frac{2aT}{\pi}\operatorname{sh}\frac{\pi b}{2a} = \frac{2}{a}\int\limits_0^a \big(-U\big)\sin\frac{\pi}{2a}xdx = -\frac{4U}{\pi},$$

$$A_k \operatorname{ch}\frac{\pi(2k+1)b}{2a} = \frac{2}{a}\int\limits_0^a \big(-U\big)\sin\frac{\pi(2k+1)}{2a}xdx = -\frac{4U}{\pi(2k+1)}, \quad k=1,2,\ldots :$$

Այստեղից՝

$$A_0 = -\frac{2}{\pi}\cdot\left(2U + aT\operatorname{sh}\frac{\pi b}{2a}\right)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi b}{2a}\right)^{-1},$$

$$A_k = -\frac{4U}{\pi(2k+1)}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(2k+1)b}{2a}\right)^{-1}, \quad k=1,2,\ldots :$$

Տեղադրելով (5.28)-ի մեջ՝ կստանանք

$$v(x,y) = \left(-\frac{2}{\pi}\cdot\left(2U + aT\operatorname{sh}\frac{\pi b}{2a}\right)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi b}{2a}\right)^{-1}\operatorname{ch}\frac{\pi}{2a}y + \frac{2aT}{\pi}\operatorname{sh}\frac{\pi}{2a}y\right)\sin\frac{\pi}{2a}x -$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4U}{\pi(2k+1)}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(2k+1)b}{2a}\right)^{-1}\operatorname{ch}\frac{\pi(2k+1)}{2a}y\sin\frac{\pi(2k+1)}{2a}x :$$

Պատասխան՝

$$u(x,y) = U + \frac{2}{\pi}\left(\frac{2aT}{\pi}\operatorname{sh}\frac{\pi}{2a}y - \left(2U + aT\operatorname{sh}\frac{\pi b}{2a}\right)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi b}{2a}\right)^{-1}\operatorname{ch}\frac{\pi}{2a}y\right)\sin\frac{\pi}{2a}x -$$
$$-\frac{4U}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(2k+1)b}{2a}\right)^{-1}\operatorname{ch}\frac{\pi(2k+1)}{2a}y\sin\frac{\pi(2k+1)}{2a}x :$$

Խնդիրներ

Գտնել $0<x<a, \quad 0<y<b$ ուղղանկյունում $\Delta u = 0$ հավասարման այն $u(x,y)$ լուծումը, որը բավարարում է նշված եզրային պայմաններին.

458. $\begin{cases} u(0,y)=U, \quad u(a,y)=0, \\ u(x,0)=0, \quad u(x,b)=0 : \end{cases}$

459. $\begin{cases} u_x(0,y)=0, \quad u_x(a,y)=0, \\ u(x,0)=A, \quad u(x,b)=Bx : \end{cases}$

460. $\begin{cases} u_x(0,y)=0, \quad u_x(a,y)=0, \\ u(x,0)=0, \quad u_y(x,b)=Bx : \end{cases}$

461. $\begin{cases} u(0,y)=U, \qquad\qquad u_x(a,y)=0, \\ u_y(x,0)=T\sin\dfrac{\pi x}{2a}, \quad u(x,b)=0 : \end{cases}$

462. $\begin{cases} u(0,y)=0, \quad u_x(a,y)=A, \\ u(x,0)=0, \quad u(x,b)=U : \end{cases}$

463. $\begin{cases} u(0,y)=0, \quad u(a,y)=Ty, \\ u(x,0)=0, \quad u(x,b)=\dfrac{Tb}{a}x : \end{cases}$

464. $\begin{cases} u(0,y)=Ay(b-y), \quad u(a,y)=0, \\ u(x,0)=B\sin\dfrac{\pi x}{a}, \quad u(x,b)=0 : \end{cases}$

Լուծել խնդիրը.

465. $\begin{cases} \Delta u=0, \qquad 0<x<2, \quad 0<y<1, \\ u(0,y)=0, \quad u(2,y)=0, \quad 0\leqslant y\leqslant 1, \\ u(x,0)=0, \quad u_y(x,1)=\sin\dfrac{5\pi x}{2}, \quad 0\leqslant x\leqslant 2 : \end{cases}$

466. $\begin{cases} \Delta u=0, \qquad 0<x<2, \quad 0<y<2, \\ u(0,y)=0, \quad u(2,y)=0, \quad 0\leqslant y\leqslant 2, \\ u_y(x,0)=0, \quad u_y(x,2)=x, \quad 0\leqslant x\leqslant 2 : \end{cases}$

467. $\begin{cases} \Delta u=0, \qquad 0<x<1, \quad 0<y<2, \\ u(0,y)=0, \quad u_x(1,y)=A, \quad 0\leqslant y\leqslant 2, \\ u(x,0)=0, \quad u(x,2)=B, \quad 0\leqslant x\leqslant 1 : \end{cases}$

468. $$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ u(0,y) = 0, & u_x(1,y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ u_y(x,0) = \sin\dfrac{\pi x}{2}, & u(x,1) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1: \end{cases}$$

469. $$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \\ u_x(0,y) = 0, & u(1,y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2, \\ u(x,0) = 0, & u_y(x,2) = Bx, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1: \end{cases}$$

Պատասխաններ

1. Ոչ:

2. Ոչ:

3. Այո, I կարգ:

4. Այո, II կարգ:

5. Այո, I կարգ:

6. Այո, II կարգ:

7. Այո, I կարգ:

8. Ոչ:

9. Ոչ:

10. Ոչ գծային:

11. Քվազիգծային:

12. Գծային, անհամասեռ:

13. Գծային, համասեռ:

14. Գծային, անհամասեռ:

15. Ոչ գծային:

16. Գծային,
անհամասեռ, երբ $h(x,y) \not\equiv 0$:

17. Քվազիգծային:

18. Քվազիգծային:

19. Քվազիգծային:

20. Գծային, համասեռ:

21. $u_{\xi\eta} - \dfrac{1}{2\xi} u_\eta = 0$:

22. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$:

23. $\left(\xi - \dfrac{1}{2\eta}\right) u_{\xi\xi} - \dfrac{1}{\xi} u_{\xi\eta} - \dfrac{\eta}{\xi}\left(\eta - \dfrac{1}{2\xi}\right) u_{\eta\eta} + u_\xi + \dfrac{\eta}{\xi} u_\eta = 0$:

24. $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$:

25. $\dfrac{\partial z}{\partial r} = 0$:

26. $u_{rr} + \dfrac{1}{r} u_r + \dfrac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0$:

34. $u(x,y) = f(x) + g(y)$:

35. $u(x,y) = x f(y) + g(y)$:

36. $u(x,y) = \dfrac{x^2 y}{2} + \dfrac{x y^2}{2} + f(x) + g(y)$:

37. $u(x,y) = \frac{x^4}{12} + \frac{xy^2}{2} + xf(x) + g(y)$ **:**

38. $u(x,y) = e^{x+y} + yf(x) + g(x)$ **:**

39. $u(x,y) = f(x) + g(y)e^{5x}$ **:**

40. $u(x,y) = f(x)e^{y^2} + g(y)$ **:**

41. $u(x,y) = f(x) + \frac{1}{x}g(y)$ **:**

42. $u(x,y) = x^2 + xf(y) + g(y)$ **:**

43. $u(x,y) = x^2y + f(x) + g(y)$ **:**

44. $u(x,y) = f(x)e^y + g(x)$ **:**

45. $u(x,y) = \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{6} + yf(x) + g(x)$ **:**

46. $u(x,y) = x^3 + xf(y) + g(y)$ **:**

47. $u(x,y) = f_1(x)y + f_2(x) + g_1(y)x + g_2(y)$ **:**

48. $u(x,y,z) = f(x,y) + g(x.z) + h(y,z)$ **:**

49. $u(x,y) = \frac{1}{2}xy(x+y) + x + y^2$ **:**

50. $u(x,y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{4}x^2y^2 + f(x) - f(0) + y^2$ **:**

51. $z(x,y) = -2x^4 + x^2y + y^2 + 1$ **:**

52. $z = f\left(\frac{y}{x^2 - y^2}\right)$:

53. $u = f(e^{-2x}(y+z), (3y+2z)e^{-x})$:

54. $F(e^{-2x}(z\sin x + y\cos x), e^{-2x}(y\sin x - z\cos x)) = 0$:

55. $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$:

56. $\operatorname{tg}\frac{z}{2} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\, f\left(\operatorname{tg}\frac{y}{2} \Big/ \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$:

57. $z^2 = x^2 + f(y^2 - x^2)$:

58. $F\left(y, ze^{-\frac{x}{y}}\right) = 0$ կամ $z = e^{\frac{x}{y}}f(y)$:

59. $F(z-\sqrt{x}, \sqrt{x}-\sqrt{y})=0$ կամ $z=\sqrt{x}+f(\sqrt{x}-\sqrt{y})$:

60. $u=f\left(y, \dfrac{x^y}{z}\right), \quad u=\dfrac{x^y}{z}$:

61. $u=f(y^2-z^2, 2x+(z-y)^2), \quad u=2(y(y-z)+x)$:

62. $z=f\left(\dfrac{y^2}{1+x^2}\right), \quad z=\dfrac{y^2}{1+x^2}$:

63. $u=F\left(y, \ln z-\dfrac{x}{y}\right), \quad u=\ln z-\dfrac{x}{y}$:

64. $F(z, x^2-y^2z)=0, \quad z=\dfrac{x^2}{y^2}$:

65. $F\left(y, \dfrac{z}{x}\right)=0$ կամ $z=xf(y), \quad z=xy$:

66. $F\left(xy, \dfrac{z}{x}, \dfrac{u}{x}\right)=0$ կամ $u=xf\left(xy, \dfrac{z}{x}\right), \quad u=x^2y+z$:

67. $F\left(z, xe^{-\frac{y}{z}}\right)=0$ կամ $z=\dfrac{y}{\ln x-1}$:

68. $F\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x^2}\right)=0$ կամ $z=x^2f\left(\dfrac{y}{x}\right), \quad z=xy$:

69. Հիպերբոլական:

70. Էլիպտական:

71. Պարաբոլական:

72. Հիպերբոլական, եթե $x>0,\ y<0$ կամ $x<0,\ y>0$:
Էլիպտական, եթե $x>0,\ y>0$ կամ $x<0,\ y<0$:
Պարաբոլական, եթե $x=0,\ y\neq 0$ կամ $x\neq 0,\ y=0$:

73. Էլիպտական:

74. Պարաբոլական:

75. Հիպերբոլական:

76. Հիպերբոլական, եթե $y<0$:
Պարաբոլական, եթե $y=0$:
Էլիպտական, եթե $y>0$:

77. Հիպերբոլական, եթե $x < 0$:
Պարաբոլական, եթե $x = 0$:
Էլիպտական, եթե $x > 0$:

78. Հիպերբոլական, եթե $x^2 + y^2 < 25$:
Պարաբոլական, եթե $x^2 + y^2 = 25$:
Էլիպտական եթե $x^2 + y^2 > 25$:

79. Հիպերբոլական, եթե $x - y^2 > 0$:
Պարաբոլական, եթե $x - y^2 = 0$:
Էլիպտական, եթե $x - y^2 < 0$:

80. Հիպերբոլական, եթե $x^2 + 4y^2 < 49$:
Պարաբոլական, եթե $x^2 + 4y^2 = 49$:
Էլիպտական, եթե $x^2 + 4y^2 > 49$:

81. Հիպերբոլական, եթե $x^2 + y^2 < 36$:
Պարաբոլական, եթե $x^2 + y^2 = 36$:
Էլիպտական եթե $x^2 + y^2 > 36$:

82. Հիպերբոլական, եթե $x^2 - y > 0$:
Պարաբոլական, եթե կետը պատկանում է $x^2 - y = 0$ պարաբոլին:
Էլիպտական, եթե $x^2 - y < 0$:

83. Հիպերբոլական, եթե $x^2 + 49y^2 < 64$:
Պարաբոլական, եթե $x^2 + 49y^2 = 64$:
Էլիպտական, եթե $x^2 + 49y^2 > 64$:

84. Հիպերբոլական, եթե $x^2 + y^2 < 36$:
Պարաբոլական, եթե $x^2 + y^2 = 36$:
Էլիպտական եթե $x^2 + y^2 > 36$:

85. Հիպերբոլական, եթե $x^2 + y^2 > 9$:
Պարաբոլական, եթե $x^2 + y^2 = 9$:
Էլիպտական եթե $x^2 + y^2 < 9$:

86. Էլիպտական, $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 8u = 0, \quad \xi = y - x,\ \eta = 2x$:

87. Պարաբոլական, $u_{\eta\eta} + 18u_\xi + 9u_\eta - 9u = 0, \qquad \xi = x + y,\ \eta = x$:

88. Հիպերբոլական, $u_{\xi\eta} + u_\xi - 2u_\eta + \xi + \eta = 0, \qquad \xi = 2x - y,\ \eta = x + y$:

89. Էլիպտական, $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_\xi = 0, \qquad \xi = x,\ \eta = 3x + y$:

90. Էլիպտական, $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 15u_\xi - 4\sqrt{6}\, u_\eta + \dfrac{1}{3}\xi + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\eta = 0, \ \ \xi = y - 2x,\ \eta = \sqrt{6}\, x$:

91. Էլիպտական, $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-2u_\xi+u_\eta-u+\eta-\xi=0, \qquad \xi=2x-y,\ \eta=3x$:

92. Հիպերբոլական, $u_{\xi\eta}+\dfrac{1}{2}u_\xi=0, \qquad \xi=x+y,\ \eta=3x-y$:

93. Էլիպտական, $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_\eta=0, \qquad \xi=2x-y,\ \eta=x$:

94. Պարաբոլական, $u_{\eta\eta}+(\alpha+\beta)u_\xi+\beta u_\eta+cu=0, \qquad \xi=x+y,\ \eta=y$:

95. Էլիպտական, $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0, \qquad \xi=y,\ \eta=\operatorname{arctg} x$:

96. Պարաբոլական բոլոր կետերում, բացի (0,0) կետից,

$u_{\eta\eta}-\dfrac{\xi}{2\eta(\xi+\eta)}u_\xi+\dfrac{1}{2\eta}u_\eta=0, \qquad \xi=y^2-x^2,\ \eta=x^2$:

97. Հիպերբոլական, $u_{\xi\eta}=0, \qquad \xi=x+\operatorname{arctg} y,\ \eta=x-\operatorname{arctg} y$:

98. Պարաբոլական բոլոր կետերում, բացի (0,0) կետից,

$u_{\eta\eta}+\dfrac{2\xi^2}{\eta^2}u_\xi+\dfrac{1}{\eta}e^\xi=0, \quad \xi=\dfrac{y}{x},\ \eta=y$:

99. Պարաբոլական, երբ $x\neq 0$,

$u_{\eta\eta}+\dfrac{2\eta^2}{\xi-\eta^2}u_\xi-\dfrac{1}{\eta}u_\eta=0, \qquad \xi=x^2+y^2,\ \eta=x$:

100. Պարաբոլական, երբ $x=0,\ y\neq 0$, կանոնական տեսքը՝ $u_{xx}+\dfrac{1}{y}u_y=0$:
Պարաբոլական, երբ $x\neq 0,\ \ y=0$, կանոնական տեսքը՝ $u_{yy}=0$:
Էլիպտական, երբ $x\neq 0,\ \ y\neq 0$, կանոնական տեսքը՝

$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\dfrac{1}{\xi-\eta}u_\xi+\dfrac{1}{2\eta}u_\eta=0, \qquad \xi=x^2-y^2,\ \eta=x^2$:

101. Պարաբոլական, երբ $x=0,\ \ y\neq 0$, կանոնական տեսքը՝ $u_{yy}-\dfrac{4}{3y}u_y=0$:
Պարաբոլական, երբ $x\neq 0, y=0$, կանոնական տեսքը՝

$u_{xx}-\dfrac{2}{x}u_x+16x^2u=0$:

Հիպերբոլական, երբ $x\neq 0,\ \ y\neq 0$, կանոնական տեսքը՝

$u_{\xi\eta}+\dfrac{1}{4\eta}u_\xi-\dfrac{1}{\xi}u_\eta+u=0, \qquad \xi=xy,\ \eta=\dfrac{x^3}{y}$:

102. Հիպերբոլական, $u_{\xi\eta}=0, \qquad \xi=x+y-\cos x,\ \eta=-x+y-\cos x$:

103. Պարաբոլական, $u_{\eta\eta}-\dfrac{\xi}{1+\xi e^\eta}u_\xi-\eta e^{-2\eta}u=0, \qquad \xi=e^{-y}-e^{-x},\ \eta=x$:

104. Պարաբոլական, երբ $y=0$, կանոնական տեսքը՝ $u_{yy}=0$:
Հիպերբոլական, երբ $y\neq 0$, կանոնական տեսքը՝

$u_{\xi\eta}-\dfrac{1}{2(\xi-\eta)}(u_\xi-u_\eta)+\dfrac{1}{4(\xi+\eta)}(u_\xi+u_\eta)=0, \qquad \xi=y^2+e^x,\ \eta=y^2-e^x$:

105. Պարաբոլական, երբ $x=0$, կանոնական տեսքը՝ $u_{xx}=0$:
Հիպերբոլական, երբ $x\neq 0$, կանոնական տեսքը՝
$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{2(\xi-\eta)}\,u_\xi=0, \qquad \xi=x^2+y,\ \eta=y:$$

106. Պարաբոլական, երբ $x=0$, կանոնական տեսքը՝ $u_{yy}=0$:
Հիպերբոլական, երբ $x>0$, կանոնական տեսքը՝
$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{2(\xi-\eta)}(u_\xi-u_\eta)=0, \qquad \xi=y-x+2\sqrt{x},\ \eta=y-x-2\sqrt{x}:$$
Էլիպտական, երբ $x<0$, կանոնական տեսքը՝
$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\frac{1}{\eta}\,u_\eta=0, \qquad \xi=y-x,\ \eta=2\sqrt{-x}:$$

107. Պարաբոլական, երբ $y=0$, կանոնական տեսքը՝ $u_{yy}=0$:
Հիպերբոլական, երբ $y<0$, կանոնական տեսքը՝
$$u_{\xi\eta}+\frac{1}{6(\xi+\eta)}\,(u_\xi+u_\eta)=0, \qquad \xi=\frac{2}{3}(-y)^{3/2}+x,\ \eta=\frac{2}{3}(-y)^{3/2}-x:$$
Էլիպտական, երբ $y>0$, կանոնական տեսքը՝
$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3\xi}\,u_\xi=0, \qquad \xi=\frac{2}{3}y^{3/2},\ \eta=x:$$

108. Պարաբոլական, երբ $x=0$, կանոնական տեսքը՝ $u_{xx}=0$:
Հիպերբոլական, երբ $x>0$, կանոնական տեսքը՝
$$u_{\xi\eta}+\frac{1}{6(\xi+\eta)}\,(u_\xi+u_\eta)=0, \qquad \xi=\frac{2}{3}x^{3/2}+y,\ \eta=\frac{2}{3}x^{3/2}-y:$$
Էլիպտական, երբ $x<0$, կանոնական տեսքը՝
$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\frac{1}{3\xi}\,u_\xi=0, \qquad \xi=\frac{2}{3}(-x)^{3/2}, \quad \eta=y:$$

109. Պարաբոլական, երբ $x=0,\ y\neq 0$, կանոնական տեսքը՝ $u_{yy}=0$, և երբ $x\neq 0,\ y=0$, կանոնական տեսքը՝ $u_{xx}=0$:
Հիպերբոլական I,III քառորդներում (երբ $xy>0$), կանոնական տեսքը՝
$$u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}-\frac{1}{\xi}(u_\xi-u_\eta)=0,$$
I քառորդում՝ $\xi=\sqrt{x},\ \eta=\sqrt{y}$, III քառորդում՝ $\xi=\sqrt{-x},\ \eta=\sqrt{-y}$:
Էլիպտական II,IV քառորդներում (երբ $xy<0$), կանոնական տեսքը՝
$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\frac{1}{\xi}(u_\xi+u\eta)=0,$$

II քառորդում՝ $\xi = \sqrt{-x},\ \eta = \sqrt{y}$, IV քառորդում՝ $\xi = \sqrt{x},\ \eta = \sqrt{-y}$:

110. Պարաբոլական, երբ $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

Հիպերբոլական, երբ $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, կանոնական տեսքը՝

$$u_{\xi\eta} + \frac{\xi - \eta}{2(4 - (\xi - \eta)^2)}(u_\xi - u_\eta) = 0, \quad \xi = y + \cos x + \sin x,\ \eta = y + \cos x - \sin x :$$

111. Պարաբոլական, երբ $x = 0$ կամ $y = 0$, կանոնական տեսքը՝ $u_{xx} = 0$:
Հիպերբոլական, երբ $x > 0,\ y < 0$, և երբ $x < 0,\ y > 0$, կանոնական տեսքը՝

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{3(\xi^2 - \eta^2)}((2\xi - \eta)u_\xi - (2\eta - \xi)u_\eta) = 0,$$

$$\xi = -2(-y)^{1/2} + \frac{2}{3}x^{3/2},\ \ \eta = -2(-y)^{1/2} - \frac{2}{3}x^{3/2},\ \text{երբ}\ x > 0,\ y < 0,$$

$$\xi = 2y^{1/2} + \frac{2}{3}(-x)^{3/2},\ \eta = 2y^{1/2} - \frac{2}{3}(-x)^{3/2},\ \text{երբ}\ x < 0,\ y > 0 :$$

Էլիպտական, երբ $x > 0,\ y > 0$ և երբ $x < 0,\ y < 0$, կանոնական տեսքը՝

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\xi}u_\xi + \frac{1}{3\eta}u_\eta = 0,$$

$$\xi = 2y^{1/2},\ \ \eta = \frac{2}{3}x^{3/2},\ \text{երբ}\ x > 0,\ y > 0 : \xi = 2(-y)^{1/2},\ \eta = \frac{2}{3}(-x)^{3/2},\ \text{երբ}\ x < 0,\ y < 0 :$$

112. Պարաբոլական, երբ $x = 0,\ y \neq 0$, կանոնական տեսքը՝ $u_{xx} = 0$, և երբ $x \neq 0,\ y = 0$, կանոնական տեսքը՝ $u_{yy} = 0$:
Էլիպտական, երբ $x \neq 0,\ y \neq 0$, կանոնական տեսքը՝

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{2\xi}u_\xi + \frac{1}{2\eta}u_\eta = 0, \quad \xi = y^2,\ \eta = x^2 :$$

113. Պարաբոլական, երբ $x = 0,\ y \neq 0$, կանոնական տեսքը՝ $u_{xx} = 0$, և երբ $x \neq 0,\ y = 0$, կանոնական տեսքը՝ $u_{yy} = 0$:
Հիպերբոլական, երբ $x \neq 0,\ y \neq 0$, կանոնական տեսքը՝

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{4(\xi^2 - \eta^2)}(\eta u_\xi + \xi u_\eta) = 0, \quad \xi = y^2 - x^2,\ \eta = y^2 + x^2 :$$

114. Հիպերբոլական բոլոր կետերում, կանոնական տեսքը՝

$$u_{\xi\eta}+\frac{\eta-\xi}{32}(u_\xi-u_\eta)=0,\quad \xi=2x+\sin x+y,\ \eta=2x-\sin x-y:$$

115. Էլիպտական, $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\cos\xi\, u_\eta=0,\quad \xi=x,\ \eta=y-\cos x$:

116. Պարաբոլական բոլոր կետերում, բացի (0,0) կետից,

$$u_{\eta\eta}-\frac{2\xi}{\eta^2}\,u_\xi=0,\quad \xi=y\sin x,\ \eta=y:$$

117. Հիպերբոլական, $u_{\xi\eta}+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\eta+\xi}{2}\,u_\eta=0,\ \ \xi=x+y+\cos x,\ \eta=x-y-\cos x$:

118. Պարաբոլական բոլոր կետերում, բացի (0,0) կետից, կանոնական տեսքը՝
$u_{\eta\eta}-\dfrac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\,u_\xi=0,\quad \xi=y\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2},\ \eta=y$:

119. Պարաբոլական, երբ $x\neq 0$, կանոնական տեսքը՝
$u_{\eta\eta}+\dfrac{1}{1+\eta^2}(\xi u_\xi+\eta u_\eta)=0,\quad \xi=y\,\mathrm{ch}\,x,\ \eta=\mathrm{sh}\,x$:

120. Պարաբոլական, եթե $x^2+y^2=1$:
Հիպերբոլական, եթե $x^2+y^2>1$, կանոնական տեսքը՝

$$u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}=0,\quad \xi=\frac{y}{x-1},\ \eta=\frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{x-1}:$$

Էլիպտական եթե $x^2+y^2<1$, կանոնական տեսքը՝

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0,\quad \xi=\frac{y}{x-1},\ \eta=\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x-1}:$$

Ցուցում: Բնութագրիչ $(xy\pm\sqrt{x^2+y^2-1})\,dx+(1-x^2)\,dy=0$ հավասարումը ինտեգրելու համար ներմուծել նոր՝ (z,t) փոփոխականներ՝ $t^2=1-x^2$, $y=\ zt$ բանաձևերով:

121. Պարաբոլական, եթե $x^2-y^2=1$
Հիպերբոլական, եթե $x^2-y^2<1$, կանոնական տեսքը՝

$$u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}=0,\quad \xi=\frac{y}{x+1},\ \eta=\frac{\sqrt{1-x^2+y^2}}{x+1}:$$

Էլիպտական եթե $x^2 - y^2 > 1$, կանոնական տեսքը՝

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0, \quad \xi = \frac{y}{x+1}, \ \eta = \frac{\sqrt{x^2 - y^2 - 1}}{x+1} :$$

Ցուցում: Տես **120** խնդիրը:

122. $w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} - \dfrac{15}{2} w = 0, \quad \xi = 2x + y, \ \ \eta = x, \ \ u(\xi, \eta) = e^{(5\xi + 3\eta/2} w(\xi, \eta) :$

123. $w_{\eta\eta} - w_{\xi} = 0, \quad \xi = 3x + y, \ \ \eta = x, \ \ u(\xi, \eta) = e^{(2\eta - \xi)/4} w(\xi, \eta) :$

124. $w_{\xi\eta} + \dfrac{1}{2} w + \dfrac{\eta}{2} e^{\xi/2} = 0, \quad \xi = 2x + y, \ \ \eta = x, \ \ u(\xi, \eta) = e^{-\xi/2} w(\xi, \eta) :$

125. $w_{\xi\eta} - 7w = 0, \quad \xi = 2x - y, \ \ \eta = x, \ \ u(\xi, \eta) = e^{-\xi - 6\eta} w(\xi, \eta) :$

126. $w_{\eta\eta} - 2w_{\xi} = 0, \quad \xi = y - x, \ \ \eta = y + x, \ \ u(\xi, \eta) = e^{\frac{15\xi + 8\eta}{32}} w(\xi, \eta) :$

127. $w_{\xi\eta} - w = 0, \quad \xi = x - y, \ \ \eta = x + y, \ \ u(\xi, \eta) = e^{-\xi/2} w(\xi, \eta) :$

128. $w_{\xi\eta} - w + \xi e^{\eta} = 0, \quad \xi = y, \ \ \eta = x - 3y, \ \ u(\xi, \eta) = e^{-\eta} w(\xi, \eta) :$

129. $w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} - w = 0, \quad \xi = 2x - y, \ \ \eta = x, \ \ u(\xi, \eta) = e^{\xi + \eta} w(\xi, \eta) :$

130. $w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + \dfrac{2}{5} w = 0, \quad \xi = 5y - 8x, \ \ \eta = 4x, \ \ u(\xi, \eta) = e^{(\xi - 3\eta)/5} w(\xi, \eta) :$

131. $u_{\xi\eta} = 0, \quad \xi = y - 2x, \ \eta = y, \ u(x, y) = f(y - 2x) + g(y) :$

132. $u_{\xi\eta} = 0, \quad \xi = x + y, \ \eta = 3x + 2y, \ u(x, y) = f(x + y) + g(3x + 2y) :$

133. $u(x, y) = f(x - y) + g(3x + y) :$

134. $u(x, y) = e^{3x + y} f(x + y) + g(3x + y) :$

135. $u(x, y) = e^{(3y - x)/7} f(2x + y) + g(x - 3y) + x - y :$

136. $u(x, y) = e^{(x - y)/2} f(y - 2x) + g(y - x) :$

137. $u(x, y) = \left(f(y - 3x) + g(3y - x) - \dfrac{1}{8} x (y - 3x)(3y - x) \right) e^{-(x+y)/16} :$

138. $u(x, y) = 2e^{x} + e^{(x + 2y)/2} f(x) + g(x + 2y) :$

139. $u(x, y) = e^{-3x/2} f(y - 2x) + g(y - 2x) :$

140. $u(x, y) = x f(x + y) + g(x + y) :$

141. $u(x, y) = e^{y} f(x + y) + e^{-10y} g(x + y) :$

142. $u(x,y) = f(y-ax) + g(y-ax)e^{-x}$:

143. $u(x,y) = e^{x+y/2}\big((2x+y)e^{4x+y} + f(2x+y) + g(4x+y)\big)$:

144. $u(x,y) = f(y+2x+\sin x) + e^{-(y+2x+\sin x)/4}g(y-2x+\sin x)$:

145. $u(x,y) = f(x+y-\cos x) + g(x+\cos x - y)$:

146. $u(x,y) = f(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + g(\sqrt{x}-\sqrt{y})$:

147. $u(x,y) = f(x+y) + (x-y)\,g(x^2-y^2),\ x<-y$ կամ $x>-y$:

148. $u(x,y) = f(xy) + \sqrt{|xy|}\;g\left(\dfrac{x}{y}\right),\ xy\neq 0$:

149. $u(x,y) = f(xy) + |xy|^{3/4}\;g\left(\dfrac{x^3}{y}\right),\ xy\neq 0$:

150. $u(x,y) = f\left(\dfrac{x}{y}\right) + x\,g\left(\dfrac{x}{y}\right),\ x^2+y^2\neq 0$:

151. $u(x,y) = 2y\,g(x) + \dfrac{1}{x}g'(x) + \int\limits_0^y (y-\xi)f(\xi)e^{-x^2\xi}d\xi$:

Ցուցում: Նշանակելով $u_y = v$, կստանանք $u = \dfrac{1}{2x}v_x + yv,\ v_{xy} + 2xy\,v_y = 0$:

152. $u(x,y) = e^{-y}\left(yf(x) + f'(x) + \int\limits_0^y (y-\eta)g(\eta)e^{-x\eta}d\eta\right)$:

Ցուցում: Նշանակելով $u_y + u = v$, կստանանք
$u = v_x + yv,\ v_{xy} + v_x + yv_y + yv = 0$:

153. $u(x,y) = f(y) + g(x)\,e^{-ay}$:

154. $u(x,y) = (f(x)+g(y))\,e^{-bx-ay}$:

155. $u(x,y) = (f(x)+g(y))\,e^{3x+2y} + e^{x+y}$:

156. $u(x,y) = xf(y) - f'(y) + \int\limits_0^x (x-\xi)g(\xi)e^{\xi y}d\xi$:

Ցուցում: Նշանակելով $u_x = v$, կստանանք
$u = xv - v_y,\ v_{xy} - xv_x = 0$:

157. $u(x,y) = yf(x) + f'(x) + \int\limits_0^y (y-\eta)g(\eta)e^{-x\eta}d\eta$:

Ցուցում: Նշանակելով $u_y = v$, կստանանք $v_{xy} + yv_y = 0$:

158. $u(x,y) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\left(yf(x) + f'(x) + \int\limits_0^y (y-\eta)g(\eta)e^{-x\eta}d\eta\right)$:

159. $u(x,y) = 1 + y - xy + e^{-x}\left(f(y) + \int\limits_0^x g(\xi)e^{\xi(1-y)}d\xi\right)$:

160. $u(x,y) = e^{-(x^2+y^2)/2}(f(x) + g(y))$:

161. $u(x,y) = yf(ay - x) + g(ay - x)$:

162. $u(x,y) = \dfrac{f(x-y) + g(x+y)}{x}$: *Ցուցում:* Նշանակել $v = xu$:

163. $u(x,y) = \dfrac{f(x) + g(y)}{x - y}$: *Ցուցում:* Նշանակել $v = (x-y)u$:

164. Հիպերբոլական:

165. Էլիպտական:

166. Հիպերբոլական:

167. Էլիպտական:

168. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0, \quad \xi = x,\ \eta = -x + y,\ \zeta = x - \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}z$:

169. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0, \quad \xi = x,\ \eta = -x + y,\ \zeta = 2x - y + z$:

170. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_\eta = 0, \quad \xi = \dfrac{1}{2}x,\ \eta = \dfrac{1}{2}x + y,\ \zeta = -\dfrac{1}{2}x - y + z$:

171. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + 2u_\xi = 0, \quad \xi = x + y,\ \eta = -x + y,\ \zeta = y + z$:

172. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} = 0, \quad \xi = x,\ \eta = -x + y,\ \zeta = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}z$:

173. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} + 3u_\xi + \dfrac{3}{2}u_\eta - \dfrac{9}{2}u_\zeta = 0, \quad \xi = x,\ \eta = \dfrac{1}{2}(x + y + z),\ \zeta = -\dfrac{1}{2}(3x + y - z)$:

174. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} + 2u_\eta = 0, \quad \xi = x + y,\ \eta = -x + y,\ \zeta = -x - y + z$:

175. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u = 0, \quad \xi = y + z,\ \eta = -y + z,\ \zeta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}x - \dfrac{2}{\sqrt{6}}y + \dfrac{\sqrt{6}}{2}z$:

176. $u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} - 8u = 0, \quad \xi = x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}z,\ \eta = -\dfrac{1}{2}(y + z),\ \zeta = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(y - z)$:

177. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + 2u_\xi - \sqrt{2}\,u_\eta + \sqrt{2}\,u_\zeta + 4u = 0,$

$\xi = x,\ \eta = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(3x - y),\ \zeta = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(x + y - 4z)$:

178. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 3u + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) - 2\zeta = 0, \quad \xi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x,\ \eta = \dfrac{3}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}\,y,\ \zeta = x + z$:

179. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + 4u = 0, \quad \xi = y + z,\ \eta = -y - 2z,\ \zeta = x - z:$

180. $u_{\xi\xi} + 2u = 0, \quad \xi = x,\ \eta = -2x + y,\ \zeta = -x + z:$

181. $u_{\xi\xi} - 2u_{\xi} = 0, \quad \xi = x,\ \eta = -2x + y,\ \zeta = -3x + z:$

182. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + 2u_{\eta} + 2u_{\zeta} - 3u = 0, \quad \xi = x + y,\ \eta = x - y,\ \zeta = x - y + z:$

183. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} = 0, \quad \xi = x + y,\ \eta = -x + y,\ \zeta = x + y + z:$

184. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + \frac{3}{2}u_{\xi} - \frac{1}{2}u_{\eta} = 0, \quad \xi = x + y,\ \eta = -x + y,\ \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + 2y + z):$

185. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} - 2u_{\eta} = 0, \quad \xi = x + y,\ \eta = -x + y,\ \zeta = z:$

186. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_{\tau\tau} = 0, \quad \xi = x + y,\ \eta = -x + y,\ \zeta = z,\ \tau = y + z + t:$

187. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0, \quad \xi = x,\ \ \eta = -x + y,\ \ \zeta = 2x - y + z,\ \ \tau = x + z + t:$

188. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0, \quad \xi = x,\ \ \eta = y,\ \ \zeta = -x - y + z,\ \ \tau = x - y + t:$

189. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + 2u_{\eta} + 2u_{\zeta} + u = 0, \quad \xi = x + y,\ \eta = -x + y,\ \zeta = y + z,$
$u(\xi, \eta, \zeta) = w(\xi, \eta, \zeta)e^{\eta - \zeta},\ \ w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + 2w_{\zeta} = 0:$

190. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + 6u_{\xi} - 8u_{\eta} - u = 0, \quad \xi = x + z,\ \eta = -3x + 2y + z,$
$u(\xi, \eta, \zeta) = w(\xi, \eta, \zeta)e^{-(3\xi + 4\eta)},\ \ w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + 6w = 0:$

191. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_{\xi} + u_{\eta} + u_{\zeta} + u = 0, \quad \xi = x,\ \eta = -x + 2y,\ \zeta = z,$
$u(\xi, \eta, \zeta) = w(\xi, \eta, \zeta)e^{-0{,}5(\xi - \eta + \zeta)},\ \ w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + w_{\zeta\zeta} + \frac{3}{4}w = 0:$

192. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_{\xi} + 2u_{\eta} + u_{\zeta} + u = 0, \quad \xi = y,\ \eta = x + y,\ \zeta = z,$
$u(\xi, \eta, \zeta) = w(\xi, \eta, \zeta)e^{-0{,}5(\xi - 2\eta + \zeta)},\ \ w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + w_{\zeta\zeta} + \frac{3}{2}w = 0:$

193. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\xi} + 2u_{\eta} + u_{\zeta} + u = 0, \quad \xi = x,\ \eta = x + y,\ \zeta = -y + z,$
$u(\xi, \eta, \zeta) = w(\xi, \eta, \zeta)e^{-0{,}25(\xi - 4\eta + 7\zeta)},\ \ w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + w_{\zeta} = 0:$

194. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} + u_{\xi} + 2u_{\eta} + u_{\zeta} + u = 0, \quad \xi = x,\ \eta = x + y,\ \zeta = z,$
$u(\xi, \eta, \zeta) = w(\xi, \eta, \zeta)e^{-0{,}5(\xi - 2\eta - \zeta)},\ \ w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} - w_{\zeta\zeta} + 2w = 0:$

195. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_{\xi} + u_{\eta} + u_{\zeta} + 4u = 0, \quad \xi = x - y,\ \eta = y,\ \zeta = z,$
$u(\xi, \eta, \zeta) = w(\xi, \eta, \zeta)e^{0{,}5(\xi - \eta + \zeta)},\ \ w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} - w_{\zeta\zeta} - \frac{3}{4}w = 0:$

196. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_{\xi} + u_{\eta} + u_{\zeta} + u = 0, \quad \xi = x + y,\ \eta = -y,\ \zeta = z,$
$u(\xi, \eta, \zeta) = w(\xi, \eta, \zeta)e^{-0{,}5(\xi + \eta + \zeta)},\ \ w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + w_{\zeta\zeta} + \frac{1}{4}w = 0:$

197. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + 2u_\xi - 2u_\eta + 2u_\zeta = 0, \quad \xi = x + y - z,\ \eta = -y,\ \zeta = z,$
$u(\xi, \eta, \zeta) = w(\xi, \eta, \zeta)e^{-\xi+\eta-\zeta}, \ \ w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + w_{\zeta\zeta} - 3w = 0:$

198. $u_{\xi\xi} + 2u_\xi + 2u_\eta - 3u_\zeta + u = 0, \quad \xi = x,\ \eta = x + y,\ \zeta = -x + z,$
$u(\xi, \eta, \zeta) = w(\xi, \eta, \zeta)e^{-\xi+3\eta+2\zeta}, \ \ w_{\xi\xi} + 2w_\eta - 3w_\zeta = 0:$

199. $u(x, y) = 3x^2 + y^2:$

200. $u(x, y) = \varphi(x + y) + \dfrac{5}{6}e^{-\frac{x+y}{6}}\left(\int\limits_{x+y}^{x-\frac{y}{5}} e^{\frac{\xi}{6}}\varphi'(\xi)d\xi - \int\limits_{x+y}^{x-\frac{y}{5}} e^{\frac{\eta}{6}}\psi(\eta)d\eta\right):$

201. $u(x, y) = \varphi\left(x - \dfrac{2}{3}y^3\right) + \dfrac{1}{2}\int\limits_{x-\frac{2}{3}y^3}^{x+2y} \psi(\eta)d\eta:$

202. $u(x, y) = -\dfrac{x^2}{2} + \cos(x - 1 + e^y) - \cos x:$

203. $u(x, y) = e^x \operatorname{sh}\dfrac{y - \cos x}{2} + \sin x \cos\dfrac{y - \cos x}{2}:$

204. $u(x, y) = 2e^{-(2x-y+\cos x)/4}\cos x \sin\dfrac{y - \cos x}{2}:$

205. $u(x, y) = \dfrac{5}{2}\sin\dfrac{x + y}{2} - \dfrac{3}{2}\sin\dfrac{5x + y}{6}:$

206. $u(x, y) = 1 - \sin(y - x + \cos x) + e^{y+\cos x}\sin(x + y + \cos x):$

207. $u(x, y) = \cos(y - x - \sin x):$

208. $u(x, y) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{3y-5x}{2}}\left(2y + (x + y + 3/4)e^{-(x+y)^2} + (x - y - 3/4)e^{-(x-y)^2}\right):$

209. $u(x, t) = \dfrac{1}{a}\cos x \sin at:$

210. $u(x, t) = x^2 + a^2t^2 + t:$

211. $u(x, t) = x(1 - t):$

212. $u(x, t) = \dfrac{x}{a} + \dfrac{t}{x^2 - a^2t^2}:$

213. $u(x, t) = x + \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{4a}\sin 2at \cos 2x:$

214. $u(x, t) = \dfrac{1}{a}\cos(x + at) + \dfrac{x}{a}\sin at \cos x + t \sin x \cos at:$

215. $u(x, t) = \sin(a - 2(x - at)):$

216. $u(x,t) = \frac{1}{8}\cos 4(x+at) + \frac{1}{12}\sin 6x \sin 6at$:

217. $u(x,t) = \cos 5x \cos 5at + \frac{1}{3a}e^{-3x}\,\mathrm{sh}\, 3at$:

218. $u(x,t) = \sin \pi x \cos 9\pi t + \sin 3\pi x \sin 27\pi t$:

219. $u(x,t) = (x+2t)^2$:

220. $u(x,t) = at + \frac{1}{2}\,bx^2t^2 + \frac{1}{12}bt^4 + e^{-x}\,\mathrm{ch}\, t$:

221. $u(x,t) = x^2 + xt + 4t^2 + \frac{1}{6}xt^3$:

222. $u(x,t) = x + \frac{axt^3}{6} + \sin x \sin t$:

223. $u(x,t) = at + a(e^{-t} - 1) + b\sin x \cos t + c\cos x \sin t$:

224. $u(x,t) = \sin x$:

225. $u(x,t) = xt + \sin(x+t) - (1 - \mathrm{ch}\, t)e^x$:

226. $u(x,t) = 1 + t + \frac{1}{9}(1 - \cos 3t)\sin x$:

227. $u(x,t) = \frac{1}{a^2\omega^2}(1 - \cos a\omega t)\sin \omega x$:

228. $u(x,t) = \frac{t}{\omega} - \frac{1}{\omega^2}\sin \omega t$:

229. $u(x,t) = x(t - \sin t) + \sin(x+t)$:

230. $u(x,t) = \frac{at}{b} - \frac{a}{b^2}\sin bt + \cos(x-t)$:

233. $u(x,y,t) = 2x^2 - y^2 + (2x^2 + y^2)t + 2t^2 + 2t^3$:

234. $u(x,y,t) = (x^2+y^2)^2(1+t) + 8a^2t^2(x^2+y^2)\left(1 + \frac{1}{3}\,t\right) + \frac{8}{3}\,a^4t^4\left(1 + \frac{1}{5}\,t\right)$:

235. $u(x,y,t) = \cos(bx+cy)\cos(at\sqrt{b^2+c^2}) + \frac{1}{a\sqrt{b^2+c^2}}\sin(bx+cy)\sin(at\sqrt{b^2+c^2})$:

236. $u(x,y,t) = x + ty + t^2$:

237. $u(x,y,t) = xyt(1+t^2) + x^2 - y^2$:

238. $u(x,y,t)=\frac{1}{2}\,t^2(x^3-3xy^2)+e^x\cos y+te^y\sin x:$

239. $u(x,y,t)=x^2+t^2+t\sin y:$

240. $u(x,y,t)=x^2+ty^2+\frac{1}{2}\,t^2(6+x^3+y^3)+t^3+\frac{3}{4}\,t^4(x+y):$

241. $u(x,y,t)=e^{3x+4y}\left(\frac{26}{25}\operatorname{ch}5t-\frac{1}{25}+\frac{1}{5}\operatorname{sh}5t\right):$

242. $u(x,y,t)=(x^2+y^2+4a^2)(e^t-1-t)-2a^2t^2\left(1+\frac{1}{3}\,t\right):$

243. $u(x,y,t)=xyt-\frac{1}{6}\,xyt^3:$

244. $u(x,y,z,t)=xyz+x^2y^2z^2t+\frac{1}{3}(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)t^3+\frac{1}{15}(x^2+y^2+z^2)t^5+\frac{1}{105}t^7:$

245. $u(x,y,z,t)=x^2+y^2+z^2+3t^2+xyt:$

246. $u(x,y,z,t)=e^x\cos y+t(x^2-y^2):$

247. $u(x,y,z,t)=x^2+y^2+t+2t^2:$

248. $u(x,y,z,t)=e^x\operatorname{ch}t+e^{-x}\operatorname{sh}t:$

249. $u(x,y,z,t)=xyz+t(xy+z)+\frac{axt^2}{2}+\frac{bt^3}{6}:$

250. $u(x,y,z,t)=xe^y\operatorname{ch}t+ye^z\operatorname{sh}t+ayz\left(\frac{t^3}{6}+t-\frac{t}{2}\ln(1+t^2)-\operatorname{arctg}t\right):$

251. $u(x,y,z,t)=x^2+y^2-2z^2+t+t^2xyz:$

252. $u(x,y,z,t)=y^2+tz^2+8t^2+\frac{8}{3}\,t^3+\frac{1}{12}\,t^4x^2+\frac{2}{45}\,t^6:$

253. $u(x,y,z,t)=x^2y^2z^2+txyz+3t^2(x^2+y^2+z^2+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)+$
$$+3\,t^4(x^2+y^2+z^2)+\frac{9}{2}\,t^4+\frac{9}{5}\,t^6:$$

254. $u(x,y,z,t)=(1+t)(x^2+y^2+z^2)^2+10a^2t^2\left(1+\frac{1}{3}\,t\right)(x^2+y^2+z^2)+a^4t^4(5+t):$

255. $u(x,y,z,t)=(x^2+y^2+z^2+6a^2)(e^t-1-t)-a^2t^2(3+t):$

256. $u(x,t)=\begin{cases}0, & x>0,\ 0<t\leqslant \dfrac{x}{a},\\ -a\displaystyle\int\limits_0^{t-x/a}\nu(s)ds, & x>0,\ t>\dfrac{x}{a}:\end{cases}$

Ցուցում: Լուծումը փնտրել $u(x,t)=g(x-at)$ տեսքով:

257. $u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(z,\tau)dzd\tau, & x>0,\ 0<t\leqslant \dfrac{x}{a},\\ \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_0^{t-x/a}\left(\int\limits_0^{a(t-\tau)-x}+\int\limits_0^{x+a(t-\tau)}\right)f(z,\tau)dzd\tau+ & \\ \qquad+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{t-x/a}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(z,\tau)dzd\tau, & x>0,\ t>\dfrac{x}{a}:\end{cases}$

258. $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$, որտեղ $v(x,t)$-ն

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & 0<x<+\infty, \quad t>0,\\ u(0,t)=0, & t\geqslant 0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & u_t(x,0)=\psi(x), \quad 0\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

խնդրի լուծումն է՝

$$v(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi & 0\leqslant t<\dfrac{x}{a},\\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi & t\geqslant \dfrac{x}{a},\end{cases}$$

իսկ $w(x,t)$-ն՝ **Օրինակ 3.14**-ում լուծված խնդրի:

259. $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$, որտեղ $v(x,t)$-ն

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & 0<x<+\infty, \quad t>0,\\ u_x(0,t)=0, & t\geqslant 0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & u_t(x,0)=\psi(x), \quad 0\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

խնդրի լուծումն է՝

$$v(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi & 0\leqslant t<\dfrac{x}{a},\\[2ex] \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+ & \\[2ex] \quad+\dfrac{1}{2a}\left(\displaystyle\int\limits_{0}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\int\limits_{0}^{at-x}\psi(\xi)d\xi\right) & t\geqslant\dfrac{x}{a},\end{cases}$$

իսկ $w(x,t)$-ն՝ **257** խնդրի:

260. $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$, որտեղ $v(x,t)$-ն

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & 0<x<+\infty, \quad t>0,\\ u(0,t)=\mu(t), & t\geqslant 0,\\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, & 0\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

խնդրի լուծումն է՝

$$v(x,t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<\dfrac{x}{a},\\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & t\geqslant\dfrac{x}{a},\end{cases}$$

իսկ $w(x,t)$-ն՝ **258** խնդրի:

261. $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$, որտեղ $v(x,t)$-ն **256** խնդրի լուծումն է, իսկ $w(x,t)$-ն՝ **259** խնդրի:

262. $u(x,t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<\dfrac{x}{a},\\ -a\,e^{h(x-at)}\displaystyle\int\limits_{0}^{t-x/a}e^{ahs}\chi(s)ds, & t\geqslant\dfrac{x}{a}:\end{cases}$

Ցուցում: Լուծումը փնտրել $u(x,t)=g(x-at)$ տեսքով:

263. $u(x,t)=\sin\dfrac{\pi}{\ell}x\cos\dfrac{a\pi}{\ell}t:$

264. $u(x,t)=\dfrac{\Phi(x-at)+\Phi(x+at)}{2}, \quad 0\leqslant x\leqslant\ell, \ \ t>0,$ որտեղ

$$\Phi(z)=\begin{cases} Az, & -\ell \leqslant z \leqslant \ell, \\ A(2\ell - z), & \ell < z \leqslant 3\ell, \end{cases} \qquad \Phi(z+4\ell)=\Phi(z):$$

Ցուցում: Սկզբնական՝ Ax ֆունկցիան շարունակել $x = 0$ կետի նկատմամբ կենտ, իսկ $x=\ell$ կետի նկատմամբ՝ զույգ ձևով:

265. $u(x,t)=\cos\frac{\pi}{\ell}x\cos\frac{a\pi}{\ell}t:$

266. $u(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\sin\frac{2\pi a}{\ell}t\sin\frac{2\pi}{\ell}x:$

267. $u(x,t)=\frac{2\ell}{a\pi}\sin\frac{a\pi}{2\ell}t\sin\frac{\pi}{2\ell}x+\cos\frac{5a\pi}{2\ell}t\sin\frac{5\pi}{2\ell}x:$

268. $u(x,t)=\frac{2\ell}{a\pi}\sin\frac{a\pi}{2\ell}t\sin\frac{\pi}{2\ell}x+\frac{2\ell}{3a\pi}\sin\frac{3a\pi}{2\ell}t\sin\frac{3\pi}{2\ell}x+$

$$+\frac{8\ell}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{a\pi(2k+1)}{2\ell}t\sin\frac{\pi(2k+1)}{2\ell}x:$$

269. $u(x,t)=\cos\frac{a\pi}{\ell}t\cos\frac{\pi}{\ell}x+\frac{\ell}{5a\pi}\sin\frac{5a\pi}{\ell}t\cos\frac{5\pi}{\ell}x:$

270. $u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{a\pi(2k+1)}{2\ell}t+b_k\sin\frac{a\pi(2k+1)}{2\ell}t\right)\cos\frac{\pi(2k+1)}{2\ell}x,$

$$a_k=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\cos\frac{\pi(2k+1)}{2\ell}x\,dx, \quad b_k=\frac{4}{a\pi(2k+1)}\int_0^{\ell}\psi(x)\cos\frac{\pi(2k+1)}{2\ell}x\,dx:$$

271. $u(x,t)=a_0+b_0t+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{a\pi k}{\ell}t+b_k\sin\frac{a\pi k}{\ell}t\right)\cos\frac{\pi k}{\ell}x,$

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)dx, \quad b_0=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(x)dx,$$

$$a_k=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\cos\frac{\pi k}{\ell}x\,dx, \quad b_k=\frac{2}{a\pi k}\int_0^{\ell}\psi(x)\cos\frac{\pi k}{\ell}x\,dx:$$

272. $u(x,t)=\frac{8h\ell^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\cos\frac{a\pi(2k-1)}{\ell}t\sin\frac{\pi(2k-1)}{\ell}x:$

273. $u(x,t)=\frac{8h\ell^3}{a\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}\sin\frac{a\pi(2k-1)}{\ell}t\sin\frac{\pi(2k-1)}{\ell}x:$

274. $u(x,t)=\frac{8A\ell}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{a\pi(2k+1)}{2\ell}t\sin\frac{\pi(2k+1)}{2\ell}x:$

275. $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos a\lambda_k t+b_k\sin a\lambda_k t)\sin\lambda_k x,$

$$a_k=\frac{1}{\|\sin\lambda_k x\|^2}\int\limits_0^\ell\varphi(x)\sin\lambda_k x dx,\qquad b_k=\frac{1}{a\lambda_k\|\sin\lambda_k x\|^2}\int\limits_0^\ell\varphi(x)\sin\lambda_k x dx,$$

$$\|\sin\lambda_k x\|^2=\int\limits_0^\ell\sin^2\lambda_k x dx=\frac{\ell(h^2+\lambda_k^2)+h}{2(h^2+\lambda_k^2)},$$

λ_k թվերը $h\,\mathrm{tg}\,\lambda\ell=-\lambda$ հավասարման դրական արմատներն են:

276. $u(x,t)=-\dfrac{2}{a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda_k+\ell h)\dfrac{\sqrt{h^2+\lambda_k^2}}{\lambda_k^2}\sin a\lambda_k t\sin\lambda_k x,$
λ_k թվերը $h\,\mathrm{tg}\,\lambda\ell=-\lambda$ հավասարման դրական արմատներն են:

277. $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos a\lambda_k t+b_k\sin a\lambda_k t)\cos\lambda_k x,$

$$a_k=\frac{1}{\|\cos\lambda_k x\|^2}\int\limits_0^\ell\varphi(x)\cos\lambda_k x dx,\qquad b_k=\frac{1}{a\lambda_k\|\cos\lambda_k x\|^2}\int\limits_0^\ell\varphi(x)\cos\lambda_k x dx,$$

$$\|\cos\lambda_k x\|^2=\int\limits_0^\ell\cos^2\lambda_k x dx=\frac{\ell}{2}\left(1+\frac{h}{\ell(h^2+\lambda_k^2)}\right),$$

λ_k թվերը $\lambda\,\mathrm{tg}\,\lambda\ell=h$ հավասարման դրական արմատներն են:

278. $u(x,t)=\dfrac{2h}{a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}\sqrt{h^2+\lambda_k^2}}{\lambda_k^2\big(\ell(h^2+\lambda_k^2)+h\big)}\sin a\lambda_k t\cos\lambda_k x,$
λ_k թվերը $\lambda\,\mathrm{tg}\,\lambda\ell=h$ հավասարման դրական արմատներն են:

279. $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos a\lambda_k t+b_k\sin a\lambda_k t)(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x),$

$$a_k=\frac{1}{\|\Phi_k(x)\|^2}\int\limits_0^\ell(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x)\varphi(x)dx,$$

$$b_k=\frac{1}{a\lambda_k\|\Phi_k(x)\|^2}\int\limits_0^\ell(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x)\psi(x)dx,$$

$$\|\Phi_k(x)\|^2=\int\limits_0^\ell(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x)^2dx=\frac{\ell(h^2+\lambda_k^2)+2h}{2},$$

λ_k թվերը $\mathrm{ctg}\,\lambda\ell=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\lambda}{h}-\dfrac{h}{\lambda}\right)$ հավասարման դրական արմատներն են:

280. $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{4h}{\lambda_k\ell(h^2+\lambda_k^2)+2h\lambda_k}\cos a\lambda_k t(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x),$

λ_k թվերը $\quad \operatorname{ctg}\lambda\ell = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\lambda}{h} - \dfrac{h}{\lambda}\Big)$ հավասարման դրական արմատներն են:

281. $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos a\lambda_k t + b_k \sin a\lambda_k t)(\lambda_k\cos\lambda_k x + h_1\sin\lambda_k x),$

$$a_k = \frac{1}{\|\Phi_k(x)\|^2}\int\limits_0^{\ell}(\lambda_k\cos\lambda_k x + h_1\sin\lambda_k x)\varphi(x)dx,$$

$$b_k = \frac{1}{a\lambda_k\|\Phi_k(x)\|^2}\int\limits_0^{\ell}(\lambda_k\cos\lambda_k x + h_1\sin\lambda_k x)\psi(x)dx,$$

$$\|\Phi_k(x)\|^2 = \int\limits_0^{\ell}(\lambda_k\cos\lambda_k x + h_1\sin\lambda_k x)^2dx = \frac{1}{2}\bigg(\ell + \frac{(\lambda_k^2+h_1h_2)(h_1+h_2)}{(\lambda_k^2+h_1^2)(\lambda_k^2+h_2^2)}\bigg),$$

λ_k թվերը $\quad \operatorname{ctg}\lambda\ell = \dfrac{\lambda^2 - h_1h_2}{\lambda(h_1+h_2)}$ հավասարման դրական արմատներն են:

282. $u(x,t) = A\cos\dfrac{a\pi n}{\ell}t\sin\dfrac{\pi n}{\ell}x:$

283. $u(x,t) = \dfrac{2h\ell^2}{\pi^2 c(\ell-c)}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\sin\dfrac{c\pi k}{\ell}\cos\dfrac{a\pi k}{\ell}t\sin\dfrac{\pi k}{\ell}x,$

$u(x,t) = \dfrac{8h}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\dfrac{a\pi(2k+1)}{\ell}t\sin\dfrac{\pi(2k+1)}{\ell}x,$ երբ $c = \dfrac{\ell}{2}:$

284. $u(x,t) = \dfrac{4\ell v_0}{a\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}\sin\dfrac{a\pi(2k+1)}{\ell}t\sin\dfrac{\pi(2k+1)}{\ell}x:$

285. $u(x,t) = \dfrac{2\ell v_0}{a\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\Big(\cos\dfrac{\alpha\pi k}{\ell} - \cos\dfrac{\beta\pi k}{\ell}\Big)\sin\dfrac{a\pi k}{\ell}t\sin\dfrac{\pi k}{\ell}x:$

286. $u(x,t) = \dfrac{8A\alpha}{a\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{\alpha\pi k}{\ell}\sin\dfrac{\pi k x_0}{\ell}}{k\Big(1-\dfrac{(2\alpha k)^2}{\ell^2}\Big)}\sin\dfrac{a\pi k}{\ell}t\sin\dfrac{\pi k}{\ell}x:$

287. $u(x,t) = bx(\ell - x) + \dfrac{4\ell^2 b}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}\cos\dfrac{\pi k}{\ell}t\sin\dfrac{\pi k}{\ell}x:$

288. $u(x,t) = \dfrac{A}{1+\Big(\dfrac{a\pi}{\ell}\Big)^2}\Big(e^{-t} - \cos\dfrac{a\pi}{\ell}t + \dfrac{\ell}{a\pi}\sin\dfrac{a\pi}{\ell}t\Big)\sin\dfrac{\pi}{\ell}x:$

289. $u(x,t)=\dfrac{4A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)\left(\left(\dfrac{a\pi(2k+1)}{2\ell}\right)^2-1\right)}\times$

$$\times\left(\sin t-\frac{2\ell}{a\pi(2k+1)}\sin\frac{a\pi(2k+1)}{2\ell}t\right)\sin\frac{\pi(2k+1)}{2\ell}x:$$

290. $u(x,t)=\dfrac{2\ell}{a\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{2k+1}\left(\int\limits_0^t f_k(\xi)\sin\dfrac{a\pi(2k+1)}{2\ell}(t-\xi)d\xi\right)\sin\dfrac{\pi(2k+1)}{2\ell}x,$

$f_k(t)=\dfrac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x,t))\sin\dfrac{\pi(2k+1)}{2\ell}xdx,\quad k=0,1,\ldots:$

291. $u(x,t)=\dfrac{A}{1+\left(\dfrac{a\pi}{2\ell}\right)^2}\left(e^{-t}-\cos\dfrac{a\pi}{2\ell}t+\dfrac{2\ell}{a\pi}\sin\dfrac{a\pi}{2\ell}t\right)\cos\dfrac{\pi}{2\ell}x:$

292. $u(x,t)=\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^{\tau} f_0(\xi)d\xi\right)d\tau+\dfrac{\ell}{a\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{k}\int\limits_0^t f_k(\xi)\sin\dfrac{a\pi k}{\ell}(t-\xi)d\xi\right)\cos\dfrac{\pi k}{\ell}x,$

$f_0(\xi)=\dfrac{1}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x,\xi)\,dx,\quad f_k(\xi)=\dfrac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x,\xi)\cos\dfrac{\pi k}{\ell}xdx,\quad k=1,2,\ldots:$

293. $u(x,t)=\dfrac{2}{\pi}t\sin t\sin x+\sum_{k=2}^{\infty}\dfrac{4}{\pi k(1-k^2)}(\cos t-\cos kt)\sin kx:$

294. $u(x,t)=\dfrac{b}{a^2}\left(\dfrac{x}{\ell}\operatorname{sh}\ell-\operatorname{sh}x\right)+\dfrac{2b\operatorname{sh}\ell}{a^2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}\cos\dfrac{a\pi k}{\ell}t\sin\dfrac{\pi k}{\ell}x-$

$$-\frac{2b\pi\operatorname{sh}\ell}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{k^2\pi^2+\ell^2}\cos\frac{a\pi k}{\ell}t\sin\frac{\pi k}{\ell}x:$$

295. $u(x,t)=-\dfrac{bx}{12}(x^3-2\ell x^2+\ell^3)+\dfrac{8\ell^4}{\pi^5}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^5}\cos\dfrac{\pi(2k+1)}{\ell}t\sin\dfrac{\pi(2k+1)}{\ell}x:$

296. $u(x,t)=\dfrac{\beta-\alpha}{2\ell}x^2+\alpha x+\Phi_0+\psi_0t+\dfrac{F_0}{2}t^2+$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{\ell}{a\pi k}\right)^2F_k+\left(\Phi_k-\left(\frac{\ell}{a\pi k}\right)^2F_k\right)\cos\frac{a\pi k}{\ell}t+\frac{\ell\psi_k}{a\pi k}\sin\frac{a\pi k}{\ell}t\right)\cos\frac{\pi k}{\ell}x,$$

$F_0=\dfrac{1}{\ell}\int\limits_0^{\ell}\left(f(x)+\dfrac{(\beta-\alpha)a^2}{\ell}\right)dx,\quad F_k=\dfrac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}\left(f(x)+\dfrac{(\beta-\alpha)a^2}{\ell}\right)\cos\dfrac{\pi k}{\ell}x\,dx,$

$\Phi_0=\dfrac{1}{\ell}\int\limits_0^{\ell}\left(\varphi(x)-\dfrac{(\beta-\alpha)x^2}{2\ell}-\alpha x\right)dx,\quad \Phi_k=\dfrac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}\left(\varphi(x)-\dfrac{(\beta-\alpha)x^2}{2\ell}-\alpha x\right)\cos\dfrac{\pi k}{\ell}x\,dx,$

$\psi_0=\dfrac{1}{\ell}\int\limits_0^{\ell}\psi(x)dx,\quad \psi_k=\dfrac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}\psi(x)\cos\dfrac{\pi k}{\ell}x\,dx,\qquad k=1,2,\ldots:$

297. $u(x,t) = w(x) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k \cos a\lambda_k\, t + b_k \sin a\lambda_k\, t)(\lambda_k \cos \lambda_k\, x + h \sin \lambda_k\, x),$

$$w(x) = -\frac{1}{a^2}\int\limits_0^x \left(\int\limits_0^y f(\xi)\, d\xi\right) dy + \left(\beta - \alpha\ell + \frac{1}{a^2}\int\limits_0^\ell \left(\int\limits_0^y f(\xi)\, d\xi\right) dy\right)\frac{1+hx}{1+h\ell} + \alpha x,$$

$$a_k = \frac{2}{h + \ell(h^2+\lambda_k^2)}\int\limits_0^\ell (\varphi(x) - w(x))(\lambda_k \cos\lambda_k\, x + h\sin\lambda_k\, x)\, dx,$$

$$b_k = \frac{2}{a\lambda_k(h + \ell(h^2+\lambda_k^2))}\int\limits_0^\ell \psi(x)(\lambda_k \cos\lambda_k\, x + h\sin\lambda_k\, x)\, dx,$$

λ_k թվերը $h \operatorname{tg} \lambda\ell = -\lambda$ հավասարման դրական արմատներն են:

298. $u(x,t) = w(x) - 2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{h^2+\lambda_k^2}{h+\ell(h^2+\lambda_k^2)}\int\limits_0^\ell w(\xi)\cos\lambda_k\xi\, d\xi\right)\cos a\lambda_k t \cos\lambda_k x,$

$$w(x) = -\frac{1}{a^2}\int\limits_0^x \left(\int\limits_0^y f(\xi)\, d\xi\right) dy + \frac{\beta-\alpha}{h} - \alpha(\ell - x) + \frac{1}{a^2}\int\limits_0^\ell \left(\int\limits_0^y f(\xi)\, d\xi\right) dy + \frac{1}{a^2 h}\int\limits_0^\ell f(\xi) d\xi,$$

որտեղ λ_k թվերը $\lambda \operatorname{tg}\lambda\ell = h$ հավասարման դրական արմատներն են:

299. $u(x,t) = \dfrac{x(1-x)}{2} - \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-t/2}\left(\cos\mu_k t + \dfrac{1}{2\mu_k}\sin\mu_k t\right)\sin(2k+1)\pi x,$

$\mu_k = \sqrt{(2k+1)^2\pi^2 - \frac{1}{4}}$:

300. $u(x,t) = \sin 2x \cos 2t + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k \dfrac{2}{k^3}\,(1 - \cos kt)\sin kx$:

301. $u(x,t) = \left(1 - \dfrac{x}{\pi}\right)t^2 + \dfrac{x}{\pi}t^3 + \cos t \sin x +$

$$+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left((-1)^k 3t - 1 + \cos kt - \frac{(-1)^k 3}{k}\sin kt\right)\sin kx :$$

302. $u(x,t) = x + t + \cos\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{x}{2} - \dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\dfrac{2k+1}{2}\,t \sin\dfrac{2k+1}{2}\,x$:

303. $u(x,t) = \dfrac{Aa}{\operatorname{sh}\dfrac{\ell}{a}}\, e^{-t}\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$:

Ցուցում: Լուծումը փնտրել $u(x,t) = v(x,t) + w(x)e^{-t}$ տեսքով:

304. $u(x,t) = \dfrac{t}{2} - \left(\dfrac{1}{4} + \cos\dfrac{2}{a}\,x\right)\sin 2t$:

Ցուցում: Լուծումը փնտրել $u(x,t) = v(x,t) + w(x)\sin 2t$ տեսքով:

305. $u(x,t) = \dfrac{xt}{\ell} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k 2\ell}{(k\pi)^2}\sin\dfrac{\pi k}{\ell}\, t\, \sin\dfrac{\pi k}{\ell}\, x$:

306. $u(x,t) = t + 1 + x(t^3 - t + 1) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{(k\pi)^2}\left(\dfrac{6(-1)^{k+1}}{(k\pi)^2} - 1\right)\sin\pi kt + \dfrac{(-1)^k 12t}{(k\pi)^3}\right)\sin\pi kx$:

307. $u(x,t) = -\dfrac{8}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^3}\cos(\sqrt{(2k+1)^2\pi^2+4}\; t)\sin(2k+1)\pi x$:

308. $u(x,t) = \dfrac{8e^{-t}}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^3}\Big(\cos(2k+1)t + \dfrac{1}{2k+1}\sin(2k+1)t\Big)\sin(2k+1)x$:

309. $u(x,t) = 8e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}\Big((-1)^k - \dfrac{2}{\pi(2k+1)}\Big)\sin\dfrac{2k+1}{2}t\cos\dfrac{2k+1}{2}x$:

310. $u(x,t) = t(1-x) + \sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(k\pi)^3}\Big(2e^{-\frac{t}{2}}\cos\lambda_k t + \dfrac{1}{\lambda_k}e^{-\frac{t}{2}}\sin\lambda_k t - 2\Big)\sin\pi k x, \quad \lambda_k = \sqrt{(\pi k)^2 - \dfrac{1}{4}}$:

311. $u(x,t) = (2-x)t + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{4t}{\pi k\lambda_k^2} - \dfrac{\pi k}{\lambda_k^3}\sin\lambda_k t\right)\sin\dfrac{\pi k}{2}x, \quad \lambda_k = \sqrt{\left(\dfrac{\pi k}{2}\right)^2 - 1}$:

312. $u(x,t) = \dfrac{xt}{\ell} + \sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^{k+1}}{\pi k\lambda_k^2}\left(t - \dfrac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k t\right)\sin\dfrac{\pi k}{\ell}x, \quad \lambda_k = \sqrt{\left(\dfrac{\pi k}{\ell}\right)^2 - 1}$:

313. $u(x,t) = 2xt + (2e^t - e^{-t} - 3te^{-t})\cos x$:

314. $u(x,t) = 3 + x(t+t^2) + (5te^t - 8e^t + 4t + 8)\sin x$:

315. $u(x,t) = x(t+1) + \left(\dfrac{1}{5}e^{2{,}5t} - e^{0{,}5t} + \dfrac{4}{5}\right)\cos\dfrac{3}{2}x$:

316. $u(x,t) = xt + \left(\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{6}e^{2t} + \dfrac{1}{15}e^{5t}\right)e^{-x}\sin 3x$:

317. $u(x,t) = xt + (1 - e^{-t} - te^{-t})\cos 3x$:

318. $u(x,t) = \dfrac{1}{4}\operatorname{ch}2t - \dfrac{1}{4} - \dfrac{t^2}{2}\cos 2x$:

319. $u(x,t) = \dfrac{1}{9}\sin x(\operatorname{ch}3t - 1) + \sin 3x\,(\operatorname{ch}t - 1)$:

320. $u(x,t) = xt + (2e^t - e^{2t})\,e^{-x}\sin x$:

321. $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\Phi\left(\dfrac{x}{\sqrt{4a^2t}}\right) - \dfrac{1}{2}\Phi\left(\dfrac{x-\ell}{\sqrt{4a^2t}}\right)$, որտեղ $\Phi(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\eta^2}d\eta = \operatorname{erf} z$:

322. $u(x,t) = \dfrac{u_0}{2}\left(\Phi\left(\dfrac{x-x_1}{\sqrt{4a^2t}}\right) - \Phi\left(\dfrac{x-x_2}{\sqrt{4a^2t}}\right)\right)$:

323. $u(x,t) = \dfrac{1}{2\ell}\,\Phi\!\left(\dfrac{x+\ell}{\sqrt{4a^2t}}\right) + \dfrac{\ell-1}{2\ell}\,\Phi\!\left(\dfrac{x}{\sqrt{4a^2t}}\right) - \dfrac{1}{2}\,\Phi\!\left(\dfrac{x-\ell}{\sqrt{4a^2t}}\right):$

324. $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\, e^{\frac{2x-x^2+t}{1+t}}:$

325. $u(x,t) = x(1+4t)^{-3/2}\, e^{-\frac{x^2}{1+4t}}:$

326. $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\, \sin\dfrac{x}{1+t}\, e^{-\frac{4x^2+t}{4(1+t)}}:$

327. $u(x,t) = 1 + e^t + \dfrac{1}{2}t^2:$

328. $u(x,t) = t^3 + e^{-t}\sin x:$

329. $u(x,t) = (1+t)e^{-t}\cos x:$

330. $u(x,t) = \operatorname{ch} t \sin x:$

331. $u(x,t) = 1 - \cos t + \dfrac{1}{\sqrt{1+4t}}\, e^{-\frac{x^2}{1+4t}}:$

332. $u(x,t) = te^t + \cos x:$

333. $u(x,t) = e^{2t} - e^t + e^{-2t}\cos x:$

334. $u(x,t) = e^t + \dfrac{1}{2}t^2\sin x:$

335. $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4a^2t}}\exp\left(ct - \dfrac{(x+bt)^2}{1+4a^2t}\right):$

336. $u(x,y,t) = 2t(x+y) + xy(1+x+y):$

337. $u(x,y,t) = 240t^2(x+y) + 40t(x+y)^3 + (x+y)^5:$

338. $u(x,y,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cos\dfrac{xy}{1+t^2}\, e^{-\frac{t(x^2+y^2)}{2(1+t^2)}}:$

339. $u(x,y,t) = e^t - 1 - e^{-2t}\cos x\sin y:$

340. $u(x,y,t) = 1 + \dfrac{1}{5}\sin x\sin y\,(2\sin t - \cos t + e^{-2t}):$

341. $u(x,y,t) = \sin t + \dfrac{xy}{(1+4t)^3}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{1+4t}}:$

342. $u(x,y,t) = \dfrac{t}{8} + \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{1+t}}:$

343. $u(x,y,z,t) = 60t^2 + 20t(x^2+y^2+z^2) + (x^2+y^2+z^2)^2:$

344. $u(x,y,z,t) = (2t+x^2)(2t+y^2)(2t+z^2)$:

345. $u(x,y,z,t) = xyz(6t+x^2)(6t+y^2)(6t+z^2)$:

346. $u(x,y,z,t) = 12t^2 + y^2z^2 + x^2(y^2+z^2) + 4t(x^2+y^2+z^2)$:

347. $u(x,y,z,t) = x^3+y^3+z^3+6t(x+y+z)$:

348. $u(x,y,z,t) = \dfrac{\sin z}{\sqrt{1+4t^2}} \cos \dfrac{xy}{1+4t^2} \, \exp\left(-t - \dfrac{t(x^2+y^2)}{1+4t^2}\right)$:

349. $u(x,y,z,t) = \dfrac{1}{4}\cos x(e^{-2t} - 1 + 2t) + \cos y \cos z \, e^{-4t}$:

350. $u(x,y,z,t) = e^t - 1 + \sin(x-y-z)\, e^{-9t}$:

351. $u(x,y,z,t) = \dfrac{1}{4}(1-e^{-t}) + \dfrac{\cos 2y}{\sqrt{1+t}} \, \exp\left(-t - \frac{x^2}{1+t}\right)$:

352. $u(x,y,z,t) = \dfrac{1}{3}\cos(x-y+z)(1-e^{-3t}) + \dfrac{1}{\sqrt{1+12t}}\, e^{-\frac{(x+y-z)^2}{1+12t}}$:

353. $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)\varphi(\xi)d\xi$:

354. $u(x,t) = \dfrac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)\varphi(\xi)d\xi$:

Ցուցում: Լուծումը փնտրել $u(x,t) = e^{-ht}v(x,t)$ տեսքով:

355. $u(x,t) = \dfrac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)\varphi(\xi)d\xi$:

356. $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^t \int_0^\infty \dfrac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right) f(\xi,\tau)d\xi d\tau$:

357. $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^t \int_0^\infty \dfrac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right) f(\xi,\tau)d\xi d\tau$:

358. $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^t \int_0^\infty \dfrac{e^{-h(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right) f(\xi,\tau)d\xi d\tau$:

Ցուցում: Լուծումը փնտրելով $u(x,t) = e^{-ht}v(x,t)$ տեսքով՝ խնդիրը կբերվի **349** խնդրին:

359. $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^t \int_0^\infty \dfrac{e^{-h(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right) f(\xi,\tau)d\xi d\tau$:

360. $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$, որտեղ $v(x,t)$-ն **347** խնդրի լուծումն է, իսկ $w(x,t)$-ն՝ **351** խնդրի:

361. $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$, որտեղ $v(x,t)$-ն **348** խնդրի լուծումն է, իսկ $w(x,t)$-ն՝ **352** խնդրի:

362. $u(x,y,t)=\dfrac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\int\limits_{0}^{\infty}\left(e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right)\varphi(\xi,\eta)d\eta d\xi$:

363.

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}\int\limits_{0}^{\infty}\left(e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}}\right)\varphi(\xi,\eta,\zeta)d\zeta d\eta d\xi:$$

364.

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\int\limits_{0}^{\infty}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}}\times$$
$$\times\int\limits_{0}^{\infty}\left(e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}}\right)\varphi(\xi,\eta,\zeta)d\zeta d\eta d\xi:$$

365. $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{\ell^2}}\sin\dfrac{\pi nx}{\ell},\quad a_n=\dfrac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}\varphi(x)\sin\dfrac{\pi nx}{\ell}dx$:

366. $u(x,t)=\dfrac{4u_0}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{2k+1}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2t}{\ell^2}}\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{\ell}$:

367. $u(x,t)=\dfrac{2\ell A}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}e^{-\frac{k^2\pi^2a^2t}{\ell^2}}\sin\dfrac{k\pi x}{\ell}$:

368. $u(x,t)=\dfrac{16\ell^2}{\pi^3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^3}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2t}{\ell^2}}\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{\ell}$:

369. $u(x,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_ke^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2t}{4\ell^2}}\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{2\ell}\quad a_k=\dfrac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}\varphi(x)\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{2\ell}dx$:

370. $u(x,t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{\ell^2}}\cos\dfrac{\pi nx}{\ell},\quad a_n=\dfrac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}\varphi(x)\cos\dfrac{\pi nx}{\ell}dx$:

371. $u(x,t)=U$:

372. $u(x,t)=2U\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{h-(-1)^k\sqrt{h^2+\lambda_k^2}}{\lambda_k(\ell(h^2+\lambda_k^2)+h)}e^{-a^2\lambda_k^2t}(\lambda_k\cos\lambda_kx+h\sin\lambda_kx)$,
λ_k թվերը $h\,\mathrm{tg}\,\lambda\ell=-\lambda$ հավասարման դրական արմատներն են:

373. $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k e^{-a^2\lambda_k^2 t}(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x)$,

որտեղ $a_k=\dfrac{2U}{\ell(h^2+\lambda_k^2)+2h}\left(\dfrac{h}{\lambda_k}+\dfrac{h^2+\lambda_k^2}{2\lambda_k^2}\sin\lambda_k\ell\right)$,

λ_k թվերը $\operatorname{ctg}\lambda\ell=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\lambda}{h}-\dfrac{h}{\lambda}\right)$ հավասարման դրական արմատներն են:

374. $u(x,t)=\dfrac{4\ell}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2t}{\ell^2}}\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{\ell}$:

375. $u(x,t)=\dfrac{32}{\pi^3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^3}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2t}{4}}\cos\dfrac{(2k+1)\pi x}{2}$:

376. $u(x,t)=e^{-\left(\frac{a^2\pi^2}{4\ell^2}+\beta\right)t}\sin\dfrac{\pi}{2\ell}x$:

377. $u(x,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k e^{-\left(\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2+\beta\right)t}\cos\dfrac{k\pi}{\ell}x$,

$a_0=\dfrac{1}{\ell}\int\limits_0^{\ell}\varphi(x)dx,\quad a_k=\dfrac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}\varphi(x)\cos\dfrac{k\pi}{\ell}xdx,\quad k=1,2,\ldots$:

378. $u(x,t)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{2k+1}e^{-\left(\frac{(2k+1)^2\pi^2}{\ell^2}+1\right)t}\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{\ell}$:

379. $u(x,t)=2hU\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_k(\ell(h^2+\lambda_k^2)+h)}\,e^{-(a^2\lambda_k^2+\beta)t}\,(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x)$,

λ_k թվերը $h\operatorname{ctg}\lambda\ell=\lambda$ հավասարման դրական արմատներն են:

380. $u(x,t)=\dfrac{(U-T)x}{\ell}+T+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}((-1)^kU-T)e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t}\sin\dfrac{k\pi}{\ell}x$:

381. $u(x,t)=w(x)+\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2t}{4\ell^2}}\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{2\ell}$,

$w(x)=-\dfrac{1}{a^2}\int\limits_0^x\int\limits_0^y f(\xi)d\xi\,dy+\dfrac{x}{a^2}\int\limits_0^{\ell}f(\xi)d\xi+qx$,

$a_k=\dfrac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}(\varphi(x)-w(x))\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{2\ell}dx$:

382. $u(x,t)=qx+\dfrac{(A-q)\ell}{2}-\dfrac{4\ell(A-q)}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2t}{\ell^2}}\cos\dfrac{(2k+1)\pi x}{\ell}$:

383. $u(x,t) = \dfrac{1}{\beta + \left(\dfrac{a\pi}{\ell}\right)^2}\left(1 - e^{-\left(\beta+(\frac{a\pi}{\ell})^2\right)t}\right)\sin\dfrac{\pi x}{\ell}$:

384. $u(x,t) = \dfrac{aA}{\cos \ell/a}\, e^{-t}\sin\dfrac{x}{a} + \dfrac{2}{\ell}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{T}{\omega_k} + \dfrac{(-1)^k Aa^2}{1-a^2\omega_k^2}\right)e^{-a^2\omega_k^2 t}\sin\omega_k x,$

$\omega_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2\ell},\ \omega_k \neq \dfrac{1}{a},\ k = 0, 1, \dots$:

Ցուցում: Լուծումը փնտրել $u(x,t) = f(x)e^{-t} + v(x,t)$ տեսքով:

385. $u(x,t) = -\dfrac{a^2A}{2\ell}\, t^2 - \left(\dfrac{A}{2\ell}\, x^2 - Ax + \dfrac{A\ell}{3} - \dfrac{a^2T}{\ell}\right)t + \dfrac{T}{2\ell}\, x^2 - \dfrac{\ell T}{6} +$

$+\dfrac{2\ell}{a^2\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^4}\left(A\ell^2 - (A\ell^2 + (-1)^k Ta^2k^2\pi^2)e^{-\frac{a^2k^2\pi^2}{\ell^2}t}\right)\cos\dfrac{k\pi x}{\ell}$:

386. $\Delta u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$:

387. $\Delta u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$:

388. $\Delta u = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$:

389. $k = -3$:

390. $k = -2$:

391. $k = \pm 2i,$ այդ դեպքում $\operatorname{ch} kx_2 = \cos 2x_2$:

392. $k = \pm 3$:

393. $u = xy^3 - x^3y + c_1x + c_2$:

394. $u = \dfrac{x^3}{3} - xy^2 - 2xy + c_1y + c_2$:

395. $u = (c_1\cos x + c_2\sin x)\, e^y$:

396. $u = (c_1\cos 2y + c_2\sin 2y)\, e^{2x}$:

397. Հարմոնիկ է:

398. Հարմոնիկ է:

399. Հարմոնիկ է:

400. Հարմոնիկ է:

401. Հարմոնիկ չէ:

402. Հարմոնիկ է:

403. Հարմոնիկ չէ:

404. Հարմոնիկ է:

405. Հարմոնիկ է:

406. Հարմոնիկ չէ:

407. Մաքսիմումի կետերն են՝ $\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$, $\left(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$, $u_{max} = 1/2$:

Մինիմումի կետերն են՝ $\left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$, $\left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$, $u_{min} = -1/2$:

408. Մաքսիմումի կետերն են՝ $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $u_{max} = 4$:
Մինիմումի կետերն են՝ $(0, -3)$, $(0, 3)$, $u_{min} = -9$:

409. Գումարը զրո է:

410. 0

411. $\dfrac{\pi - 4}{16}$

412. Երկրորդը:

413. Ոչ:

415. $u(r,\varphi) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{r^2}{2}\cos 2\varphi$:

416. $u(r,\varphi) = \dfrac{r}{R}\cos\varphi + \left(\dfrac{r}{R}\right)^5 \cos 5\varphi$:

417. $u(r,\varphi) = \dfrac{3}{8} + \dfrac{r}{2}\cos 2\varphi + \dfrac{r^4}{8}\cos 4\varphi$:

418. $u(r,\varphi) = \dfrac{3r}{4}\sin\varphi - \dfrac{r^3}{4}\sin 3\varphi$:

419. $u(r,\varphi) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{r^2}{2R^2}\cos 2\varphi$:

420. $u(r,\varphi) = \dfrac{r^2}{16}\sin 2\varphi + \dfrac{r^4}{32}\sin 4\varphi + \dfrac{r^6}{256}\sin 6\varphi$:

421. $u(r,\varphi) = \dfrac{r^4}{32}\cos 4\varphi - \dfrac{r^{12}}{8192}\cos 12\varphi$:

422. $u(r,\varphi) = 5r(\cos\varphi + r^4 \cos 5\varphi)$:

423. $u(r,\varphi)=\dfrac{2\pi^2}{3}-4\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\left(\dfrac{r}{R}\right)^k\cos k\varphi$:

424. $u(x,y)=x+xy$:

425. $u(x,y)=x^2-y^2+2y+4$:

426. $u(x,y)=y^3-3x^2y+48$:

427. $u(x,y)=\dfrac{3}{2}(x^2-y^2)-\dfrac{1}{2}$:

428. $u(x,y)=\dfrac{1}{10}(y^2-x^2)+5xy+\dfrac{5}{2}$:

429. $u(x,y)=x^2-y^2-x-y+36$:

430. $u(x,y)=\dfrac{x^2+y^2-1}{4}$:

431. $u(x,y)=\dfrac{1}{8}(x^3+xy^2-4x)$:

432. $u(x,y)=\dfrac{1}{2}(9-x^2)$:

433. $u(x,y)=x^2+y^2-15$:

434. $u(x,y)=x^3-3x^2-3xy^2+3y^2+12x-1$:

435. $u(x,y)=\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)-x+2y$:

436. $u(x,y)=y^2-x^2-3x$:

437. $u(x,y)=(x+y)^2+2x+1$:

438. $u(x,y)=3y(x+1)^2+3y^3-2y$:

439. $u(x,y)=\dfrac{R^2(ax+by)}{x^2+y^2}+c$:

440. $u(x,y)=\dfrac{16(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$:

441. $u(x,y)=\dfrac{8(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}+3$:

442. $u(x,y)=-\dfrac{8(x^2-y^2+2xy)}{(x^2+y^2)^2}+2$:

443. $u(x,y) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2} + \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$:

444. $u(x,y) = \dfrac{16(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} - \dfrac{4(x-y)}{x^2+y^2} + 4$:

445. $u(r,\varphi) = \dfrac{R}{R^2-R_0^2}\left(r - \dfrac{R_0^2}{r}\right)\cos\varphi$:

446. $u(r,\varphi) = A\dfrac{\ln\dfrac{r}{R}}{\ln\dfrac{R_0}{R}} + \dfrac{BR^2}{R^4-R_0^4}\left(r^2 - \dfrac{R_0^4}{r^2}\right)\sin 2\varphi$:

447. $u(r,\varphi) = Q + \dfrac{qR_0^2}{R_0^2+R^2}\left(r - \dfrac{R^2}{r}\right)\cos\varphi + \dfrac{TR^2}{R_0^4+R^4}\left(r^2 + \dfrac{R_0^4}{r^2}\right)\sin 2\varphi$:

448. $u(r,\varphi) = T\dfrac{1+hR\ln\dfrac{R}{r}}{1+hR\ln\dfrac{R}{R_0}} + R_0RU\dfrac{(1-hR)\dfrac{r}{R}+(1+hR)\dfrac{R}{r}}{R^2+R_0^2+hR(R^2-R_0^2)}\cos\varphi$:

449. $u(x,y) = \text{const}$, երբ $A=0$: Երբ $A\neq 0$, խնդիրը ճիշտ չէ դրված:

450. $u(x,y) = \dfrac{R}{2}(x^2-y^2)+\text{const}$, երբ $A=\dfrac{R}{2}$: Երբ $A\neq\dfrac{R}{2}$, խնդիրը ճիշտ չէ դրված:

451. $u(x,y) = Rxy + \text{const}$

452. $u(x,y) = -\dfrac{AR}{4}(x^2-y^2)+\text{const}$, երբ $B=\dfrac{AR^2}{2}$: Երբ $B\neq\dfrac{AR^2}{2}$, խնդիրը ճիշտ չէ դրված:

453. $u(x,y) = \dfrac{AR}{2}(x^2-y^2)+Ry+\text{const}$, երբ $B=A$: Երբ $B\neq A$, խնդիրը ճիշտ չէ դրված:

454. $u(x,y) = \dfrac{R^5}{4r^4}(x^2-y^2)+\text{const}$, երբ $A=\dfrac{R^2}{2}$: Երբ $A\neq\dfrac{R^2}{2}$, խնդիրը ճիշտ չէ դրված:

455. $u(x,y) = \dfrac{R^5}{4r^4}(y^2-x^2) - \dfrac{AR^3}{r^2}y + \text{const}$, երբ $B=\dfrac{R^2}{2}$: Երբ $B\neq\dfrac{R^2}{2}$, խնդիրը ճիշտ չէ դրված:

456. $u(x,y) = \dfrac{AR^5}{4r^4}(x^2-y^2) - \dfrac{R^5}{r^4}xy + \text{const}$, երբ $B=\dfrac{AR^2}{2}$: Երբ $B\neq\dfrac{AR^2}{2}$, խնդիրը ճիշտ չէ դրված:

457. $u(x,y) = \dfrac{(1+A)R^5}{4r^4}(y^2 - x^2) + \text{const}$, երբ $B = (A-1)\dfrac{R^2}{2}$: Երբ $B \neq (A-1)\dfrac{R^2}{2}$, խնդիրը ճիշտ չէ դրված:

458. $$u(x,y) = \frac{4U}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left((2k+1)\,\text{sh}\,\frac{\pi(2k+1)a}{b}\right)^{-1}\text{sh}\,\frac{\pi(2k+1)(a-x)}{b}\cdot\sin\frac{\pi(2k+1)y}{b}:$$

459. $$u(x,y) = \frac{(aB-2A)y}{2b} + A - \frac{4aB}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left((2k+1)^2\,\text{sh}\,\frac{\pi(2k+1)b}{a}\right)^{-1}\cos\frac{\pi(2k+1)x}{a}\,\text{sh}\,\frac{\pi(2k+1)y}{a}:$$

460. $$u(x,y) = \frac{8Ba^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\pi^2(2k+1)^2-2}{(2k+1)^3\,\text{ch}\,\dfrac{(2k+1)\pi b}{2a}}\,\text{sh}\,\frac{(2k+1)\pi y}{2a}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2a}:$$

461. $$u(x,y) = U + \frac{2a}{\pi}\left(T\,\text{sh}\,\frac{\pi y}{2a} - \left(\text{ch}\,\frac{\pi b}{2a}\right)^{-1}\left(\frac{2U}{a} + T\,\text{sh}\,\frac{\pi b}{2a}\right)\text{ch}\,\frac{\pi y}{2a}\right)\sin\frac{\pi x}{2a} - \frac{4U}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left((2k+1)\,\text{ch}\,\frac{\pi(2k+1)b}{2a}\right)^{-1}\text{ch}\,\frac{\pi(2k+1)y}{2a}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{2a}:$$

462. $$u(x,y) = \frac{4Ab}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left((2k+1)^2\cos\frac{\pi(2k+1)a}{b}\right)^{-1}\text{sh}\,\frac{\pi(2k+1)x}{b}\sin\frac{\pi(2k+1)y}{b} + \frac{4U}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left((2k+1)\,\text{sh}\,\frac{\pi(2k+1)b}{2a}\right)^{-1}\text{sh}\,\frac{\pi(2k+1)y}{2a}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{2a}:$$

463. $$u(x,y) = \frac{2bT}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{1}{\text{sh}\,\dfrac{k\pi b}{a}}\,\text{sh}\,\frac{k\pi y}{a}\sin\frac{k\pi x}{a} + \frac{1}{\text{sh}\,\dfrac{k\pi a}{b}}\,\text{sh}\,\frac{k\pi x}{b}\sin\frac{k\pi y}{b}\right):$$

464. $$u(x,y) = \frac{8Ab^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left((2k+1)^3\,\text{sh}\,\frac{(2k+1)\pi a}{b}\right)^{-1}\text{sh}\,\frac{(2k+1)\pi(a-x)}{b}\sin\frac{(2k+1)\pi y}{b} + B\left(\text{sh}\,\frac{\pi b}{a}\right)^{-1}\text{sh}\,\frac{\pi(b-y)}{a}\sin\frac{\pi x}{a}:$$

465. $$u(x,y) = \frac{2}{5\pi\,\text{ch}\,5\pi/2}\,\text{sh}\,\frac{5\pi y}{2}\sin\frac{5\pi x}{2}:$$

466. $$u(x,y) = -\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2\,\text{sh}\,\pi k}\,\text{ch}\,\frac{\pi k y}{2}\sin\frac{\pi k x}{2}:$$

467. $u(x,y) = Ax + \dfrac{4B}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)\,\mathrm{sh}\,\pi(2k-1)}\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\pi(2k-1)y}{2}\,\sin\dfrac{\pi(2k-1)x}{2} +$

$+\dfrac{8A}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k-1)^2}\left(\mathrm{ch}\,\dfrac{\pi(2k-1)y}{2} + \dfrac{1-\mathrm{ch}\,\pi(2k-1)}{\mathrm{sh}\,\pi(2k-1)}\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\pi(2k-1)y}{2}\right)\sin\dfrac{\pi(2k-1)x}{2}$:

468. $u(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\left(\mathrm{sh}\,\dfrac{\pi y}{2} - \mathrm{th}\,\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{ch}\,\dfrac{\pi y}{2}\right)\sin\dfrac{\pi x}{2}$:

469. $u(x,y) = -\dfrac{8B}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k\pi(2k-1)+2}{(2k-1)^3\,\mathrm{ch}\,\pi(2k-1)}\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\pi(2k-1)y}{2}\cos\dfrac{\pi(2k-1)x}{2}$:

Օգտագործված գրականության ցանկ

1. Արարքցյան Բ.Գ., Հովհաննիսյան Ա.Հ., Ծաhրաղյան Ռ. Լ. *Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումներ*, ԵՊՀ, 1988.
2. Աֆյան Ս.Ղ. *Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումներ*, ԵՊՀ, 2007.
3. Դումանյան Վ. Ժ. *Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումներ*, ԵՊՀ, 2017.
4. Бицадзе А.В., Калинченко Д.Ф. *Сборник задач по уравнениям математической физики*, М.: Наука, 1985.
5. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. *Сборник задач по математической физике*, М.: Наука, 1972.
6. Владимиров В.С., Михайлов В. П. и др. *Сборник задач по уравнениям математической физики*, М.: Наука, 1981.
7. Смирнов М.М. *Задачи по уравнениям математической физики*, М.: Наука, 1975.
8. Матвеев Н. М., *Дифференциальные уравнения*, Минск: Вышэйшая школа, 1968.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*, М.: Наука, 1977.
10. Фарлоу С. *Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров*, М.: Мир, 1985.