Computación cuántica I
Tarea 03

Salvador E. Venegas-Andraca
Héctor Mejía-Díaz

1. El operador de Pauli Y está definido por

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcule los autovalores de Y.
   (b) Encuentre los autovectores normalizados de Y.
   (c) Verifique que los autovectores forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$.

2. Considere un estado puro de un solo qubit descrito por

$$|\psi(\theta, \phi)\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle .$$

   Suponga que en un experimento de tomografía cuántica obtiene los siguientes valores esperados:

$$\langle X\rangle = \sin\theta\cos\phi, \qquad \langle Y\rangle = \sin\theta\sin\phi, \qquad \langle Z\rangle = \cos\theta.$$

   (a) Exprese la matriz densidad $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.
   (b) Use las relaciones anteriores para reconstruir ρ únicamente a partir de $\langle X\rangle, \langle Y\rangle, \langle Z\rangle$.
   (c) Verifique que la matriz obtenida corresponde a un estado puro (pista: use $\mathrm{Tr}(\rho^2)$).

3. Sea el Hamiltoniano de un qubit

$$H = X,$$

   donde X es el operador de Pauli correspondiente.

   (a) Calcule explícitamente la matriz unitaria

$$U(t) = e^{-iXt}.$$

   (b) Verifique que $U(t) = R_X(2t)$.
   (c) Aplique $U(t)$ al estado inicial $|0\rangle$ y obtenga el estado resultante.

4. Sea un sistema de dos qubits con Hamiltoniano

$$H = Z \otimes Z.$$

(a) Escriba la matriz completa de H.

(b) Calcule la evolución exacta $U(t) = e^{-iHt}$.

(c) Usando la descomposición mostrada en clase,

$$e^{-itZ\otimes Z} = \mathrm{CNOT}\,(I \otimes R_Z(2t))\,\mathrm{CNOT},$$

represéntelo como circuito cuántico.

5. Considere dos qubits inicialmente en el estado

$$|\psi_0\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle\,,$$

y su evolución bajo el Hamiltoniano $H = Z \otimes Z$:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-itZ\otimes Z}\,|\psi_0\rangle\,.$$

(a) Calcule la matriz densidad $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\,\langle\psi(t)|$.

(b) Obtenga la traza parcial sobre el segundo qubit:

$$\rho_A(t) = \mathrm{Tr}_B(\rho(t)).$$

(c) Calcule la *entropía de von Neumann*:

$$S(\rho_A) = -\mathrm{Tr}\big(\rho_A \log_2 \rho_A\big).$$

(d) Grafique cómo varía el entrelazamiento en función de t.