## Universidad Nacional Autónoma de México

**Facultad de Ciencias**

**Computación Cuántica I | 7138**

Tarea 2 : | Teletransportación cuántica

Sosa Romo Juan Mario | 320051926

7/09/24

1. **Basado en las notas del curso, por favor calcula el protocolo de teletransportación cuántica usando el estado de Bell $|\beta\rangle_{02}$**

$$|\beta_{02}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

**Y el estado $|psi\rangle$ a ser teletransportado definido como:**

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$$

**Puedes basarte de la fig1 para seguir visualmente el protocolo.**

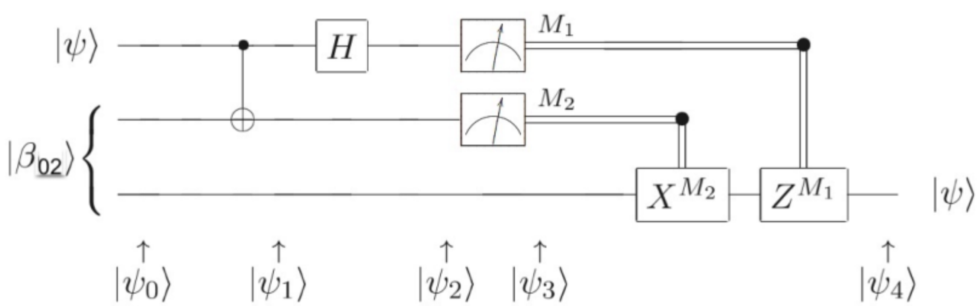


Figure 1.13. Quantum circuit for teleporting a qubit. The two top lines represent Alice's system, while the bottom line is Bob's system. The meters represent measurement, and the double lines coming out of them carry classical bits (recall that single lines denote qubits).

(a) **Por favor deriva con procedimiento los siguientes estados cuánticos: $|\psi\rangle_0\,, |\psi\rangle_1$, $|\psi\rangle_2\, |\psi\rangle_3$ y $|\psi\rangle_4$.**

Siguiendo las notas del curso

- $|\psi_{\mathbf{0}}\rangle$

  Calculamos el estado de los 3 qubits antes de operar:

$$\begin{aligned}
|\psi_0\rangle &= |\psi\rangle \otimes |\beta_{02}\rangle \\
&= (\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle) \otimes \left(\frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\alpha\,|001\rangle + \alpha\,|010\rangle + \beta\,|101\rangle + \beta\,|110\rangle)}
\end{aligned}$$

- $|\boldsymbol{\psi_1}\rangle$

  Aplicamos $C_{NOT}$ a los primeros 2 qubits e $\mathbb{I}$ al tercero:

$$\begin{aligned}
|\psi_1\rangle &= \hat{C}_{NOT} \otimes \hat{\mathbb{I}} \, |\psi_0\rangle \\
&= (\hat{C}_{NOT} \otimes \hat{\mathbb{I}}) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha \, |00\rangle \, |1\rangle + \alpha \, |01\rangle \, |0\rangle + \beta \, |10\rangle \, |1\rangle + \beta \, |11\rangle \, |0\rangle \right) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha \, |00\rangle \, |1\rangle + \alpha \, |01\rangle \, |0\rangle + \beta \, |11\rangle \, |1\rangle + \beta \, |10\rangle \, |0\rangle \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha \, |001\rangle + \alpha \, |010\rangle + \beta \, |111\rangle + \beta \, |100\rangle \right)
\end{aligned}$$

- $|\boldsymbol{\psi_2}\rangle$

  Aplicamos la compuerta $\hat{H}$ al primer qubit y las compuertas $\hat{\mathbb{I}}$ al 2ndo y 3ero:

$$\begin{aligned}
|\psi_2\rangle &= (\hat{H} \otimes \hat{\mathbb{I}} \otimes \hat{\mathbb{I}}) \, |\psi_1\rangle \\
&= (\hat{H} \otimes \hat{\mathbb{I}} \otimes \hat{\mathbb{I}}) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha \, |0\rangle \, |01\rangle + \alpha \, |0\rangle \, |10\rangle + \beta \, |1\rangle \, |11\rangle + \beta \, |1\rangle \, |00\rangle \right) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \alpha \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) |01\rangle + \alpha \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) |10\rangle + \beta \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) |11\rangle + \beta \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) |00\rangle \right) \\
&= \frac{1}{2} (\alpha \, |001\rangle + \alpha \, |101\rangle + \alpha \, |010\rangle + \alpha \, |110\rangle + \beta \, |011\rangle - \beta \, |111\rangle + \beta \, |000\rangle - \beta \, |100\rangle) \\
&= \frac{1}{2} (|00\rangle \, (\alpha \, |1\rangle + \beta \, |0\rangle) + |01\rangle \, (\alpha \, |0\rangle + \beta \, |1\rangle) + |10\rangle \, (\alpha \, |1\rangle - \beta \, |0\rangle) + |11\rangle \, (\alpha \, |0\rangle - \beta \, |1\rangle))
\end{aligned}$$

  Notemos que la factorización que hicimos fue porque Alice tiene los primeros 2 bits por lo que al medirlos en el siguiente paso determinara que tendrá que hacer Bob para obtener el mismo qubit inicial de Alice.

- $|\boldsymbol{\psi_3}\rangle$

  Para este paso utilizaremos las compuertas de medición puestas en la nota y se definen como sigue:

$$\begin{aligned}
\hat{P}_{a_0}^{|\psi\rangle} &= |0\rangle \langle 0| \\
\hat{P}_{a_1}^{|\psi\rangle} &= |1\rangle \langle 1| \\
\hat{P}_{b_0}^{\beta_{02}} &= |0\rangle \langle 0| \\
\hat{P}_{b_1}^{\beta_{02}} &= |1\rangle \langle 1|
\end{aligned}$$

  Como vamos a medir 2 qubits utilizamos los operadores de medición:

$$
\begin{aligned}
\hat{P}_{00} &= |00\rangle\langle 00| \\
\hat{P}_{01} &= |01\rangle\langle 01| \\
\hat{P}_{10} &= |10\rangle\langle 10| \\
\hat{P}_{11} &= |11\rangle\langle 11|
\end{aligned}
$$

Vamos a calcular la probabilidad para cada una de estas 4 posibilidades:

1. $p(00) = \langle\psi_2|\hat{P}_{00}|\psi_2\rangle$

   Comenzamos calculando la parte derecha $\hat{P}_{00}|\psi_2\rangle$:

$$
|00\rangle\langle 00|\left[\frac{1}{2}(|00\rangle(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)+|01\rangle(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)+|10\rangle(\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle)+|11\rangle(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle))\right]
$$

$$
=\frac{1}{2}|00\rangle(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)
$$

   Este resultado parece sacado por magia pero es solo por ortonormalidad entre todos los pares $\langle 0000\rangle = 1, \langle 0001\rangle = 0, \langle 0010\rangle = 0, \langle 0011\rangle = 0$. De manera que solo sobrevive un pedacito, vamos a aplicar un argumento similar para todas las otras $p(ij)$. Ahora, calculamos el total $\langle\psi_2|\hat{P}_{00}|\psi_2\rangle$:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[(\langle 00|(\alpha^*\langle 1|+\beta^*\langle 0|)+\langle 01|(\alpha^*\langle 0|+\beta^*\langle 1|)+\langle 10|(\alpha^*\langle 1|-\beta^*\langle 0|)+\langle 11|(\alpha^*\langle 0|-\beta^*\langle 1|))\right] \\
&\quad \left[\frac{1}{2}|00\rangle(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[(\alpha^*\langle 1|+\beta^*\langle 0|)(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\alpha^*\alpha\langle 11\rangle+\alpha^*\beta\langle 10\rangle+\alpha\beta^*\langle 01\rangle+\beta^*\beta\langle 00\rangle\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\alpha^*\alpha+\beta^*\beta\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[||a||^2+||b||^2\right] \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

   Esta es la probabilidad del resultado 00 en los qubits de Alice, y el estado post medida se define como:

$$
|\psi\rangle_{00}^{pm} = \frac{\hat{P}_{00}|\psi_2\rangle}{\sqrt{\langle\psi_2|\hat{P}_{00}|\psi_2\rangle}} = \frac{\frac{1}{2}|00\rangle(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = |00\rangle(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)
$$

   Lo que estamos viendo es que estamos proyectando una parte del estado con una probabilidad de $\frac{1}{4}$ y nos esta dando el estado post medición igual al qubit que esta al lado de este. Vamos a omitir gran parte del calculo para las otras $P_{ij}$ pero se mantiene la idea:

2. $p(01) = \langle\psi_2|\,\hat{P}_{01}\,|\psi_2\rangle$

   Por lo mencionado anteriormente tenemos que:

$$p(01) = \langle\psi_2|\left(\frac{1}{2}\,|01\rangle\,(\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle)\right) = \frac{1}{4}$$

   De nuevo, la parte de en medio es por ortonormalidad entre el de medición y el estado, mientras que el segundo paso es primero por ortonormalidad y después producto tensorial para finalmente aplicar ortonormalidad una tercera vez y por la propiedad de unitario de $|\psi\rangle$. Ahora el estado post medición es:

$$|\psi\rangle_{01}^{pm} = \frac{\hat{P}_{01}\,|\psi_2\rangle}{\sqrt{\langle\psi_2|\,\hat{P}_{01}\,|\psi_2\rangle}} = \frac{\frac{1}{2}\,|01\rangle\,(\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle)}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = |01\rangle\,(\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle)$$

3. $p(10) = \langle\psi_2|\,\hat{P}_{10}\,|\psi_2\rangle$

   Por lo mencionado anteriormente tenemos que:

$$p(10) = \langle\psi_2|\left(\frac{1}{2}\,|10\rangle\,(\alpha\,|1\rangle - \beta\,|0\rangle)\right) = \frac{1}{4}$$

$$|\psi\rangle_{10}^{pm} = \frac{\hat{P}_{10}\,|\psi_2\rangle}{\sqrt{\langle\psi_2|\,\hat{P}_{10}\,|\psi_2\rangle}} = \frac{\frac{1}{2}\,|10\rangle\,(\alpha\,|1\rangle - \beta\,|0\rangle)}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = |10\rangle\,(\alpha\,|1\rangle - \beta\,|0\rangle)$$

4. $p(11) = \langle\psi_2|\,\hat{P}_{11}\,|\psi_2\rangle$

   Por lo mencionado anteriormente tenemos que:

$$p(11) = \langle\psi_2|\left(\frac{1}{2}\,|11\rangle\,(\alpha\,|0\rangle - \beta\,|1\rangle)\right) = \frac{1}{4}$$

$$|\psi\rangle_{11}^{pm} = \frac{\hat{P}_{11}\,|\psi_2\rangle}{\sqrt{\langle\psi_2|\,\hat{P}_{11}\,|\psi_2\rangle}} = \frac{\frac{1}{2}\,|11\rangle\,(\alpha\,|0\rangle - \beta\,|1\rangle)}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = |11\rangle\,(\alpha\,|0\rangle - \beta\,|1\rangle)$$

- $|\boldsymbol{\psi_4}\rangle$

  Entones nos quedan 4 casos, equiprobables:

  1. **Caso 1: 00** Sabemos que el estado post medida esta en la forma:

$$|\psi\rangle_{00}^{pm} = |00\rangle\,(\alpha\,|1\rangle + \beta\,|0\rangle)$$

     Por tanto Bob debe aplicar la puerta X, para regresar al qubit que quiso mandar, esto porque la compuerta X hace "inversión de bits". (notemos que los operadores de Pauli son idempotentes por lo que para regresar un X podemos aplicar un X por ejemplo)

$$|\psi_4\rangle = \mathbb{I}\otimes\mathbb{I}\otimes(\hat{\sigma}_x)\,[|00\rangle\,(\alpha\,|1\rangle + \beta\,|0\rangle)]$$

2. **Caso 2: 01** Sabemos que el estado post medida esta en la forma:

$$|\psi\rangle_{01}^{pm} = |01\rangle\,(\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle)$$

Por tanto Bob debe aplicar la puerta $\mathbb{I}$ lo que es no hacer nada, para regresar al qubit que quiso mandar. (pues ya es el qubit)

$$|\psi_4\rangle = \mathbb{I}\otimes\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}\,[|01\rangle\,(\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle)]$$

3. **Caso 3: 10** Sabemos que el estado post medida esta en la forma:

$$|\psi\rangle_{10}^{pm} = |10\rangle\,(\alpha\,|1\rangle - \beta\,|0\rangle)$$

Por tanto Bob debe aplicar la puerta X para "inversion de bits" y luego la compuerta Z para "cambio de fase" (cambiar el signo de la $\beta$), para regresar al qubit que quiso mandar.

$$|\psi_4\rangle = \mathbb{I}\otimes\mathbb{I}\otimes(\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x)\,[|10\rangle\,(\alpha\,|1\rangle - \beta\,|0\rangle)]$$

4. **Caso 4: 11** Sabemos que el estado post medida esta en la forma:

$$|\psi\rangle_{11}^{pm} = |11\rangle\,(\alpha\,|0\rangle - \beta\,|1\rangle)$$

Por tanto Bob debe aplicar la puerta la compuerta Z para "cambio de fase", para regresar al qubit que quiso mandar.

$$|\psi_4\rangle = \mathbb{I}\otimes\mathbb{I}\otimes(\hat{\sigma}_z)\,[|11\rangle\,(\alpha\,|0\rangle - \beta\,|1\rangle)]$$

(b) **Adicionalmente, explica de manera detallada la estrategia que debe seguir Bob para transformar su qubit al estado $|\psi\rangle$.**

Propiedades

Para esta parte voy a mostrar las propiedades que utilice de los operadores de Pauli:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_x\,|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0*\alpha + 1*\beta \\ 1*\alpha + 0*\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Vemos que evidentemente la $\hat{\sigma}_x$ no hace mas que la inversion. Y ahora para la $\hat{\sigma}_z$ vamos a probar que invierte la fase:

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_z\,|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1*\alpha + 0*\beta \\ 0*\alpha - 1*\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

Por tanto los pasos que describimos para recuperar el qubit original dependiendo del caso son validos.