Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Computación Cuántica I | 7138

Examen Final

Sosa Romo Juan Mario | 320051926

11/12/24

1. **Sea el operador**

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   (a) **Demuestre que $U(\theta)$ es unitario.**

   (b) **Encuentre un operador hermitiano $\boldsymbol{H}$ tal que** $U(\theta) = e^{-i\theta H}$

2. **Considere los qubits:**

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\,|0\rangle + i\,|1\rangle), \qquad |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

   y el operador:

$$A = |\psi\rangle\langle\phi| + |\phi\rangle\langle\psi|$$

   (a) **Expresse A como matriz $2x2$ en la base computacional:**

   (b) **Demuestre que A es hermitiano**

   (c) **Obtenga $A\,|0\rangle$ y $A\,|1\rangle$**

   (d) **Obtenga la descomposición espectral de A: eigenvalores y eigenvectores normalizados**

(e) **Calcule la probabilidad de obtener $|\phi\rangle$ al medir el estado $|\psi\rangle$ en la base $\{|\phi\rangle, |\phi^{\perp}\rangle\}$, donde:**

$$|\phi^{\perp}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

Verifique que las probabilidades sumen 1.

3. **Alice y Bob comparten el estado de Bell genérico**

$$|\beta_{mn}\rangle = (I \otimes X^m Z^n)\,|\beta_{00}\rangle\,, \qquad\qquad m, n \in \{0, 1\}$$

donde m y n indican qué operadores de Pauli se aplican al segundo qubit del par entrelazado:

$$m = 1 \Rightarrow X \text{ actúa}, \qquad\qquad n = 1 \Rightarrow Z \text{ actúa}$$

Alice desea teletransportar el estado desconocido:

$$|\chi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$$

(a) **Escriba el estado total de los 3 qubits y obtenga la expresión después de aplicar la compuerta *CNOT*, usando como control el qubit del estado $|\chi\rangle$ y como objetivo el qubit de Alice del par compartido.**

(b) **Escriba el estado resultante después de aplicar una compuerta Hadamard al primer qubit (el qubit del estado $|\chi\rangle$)**

(c) **Alice mide sus 2 qubits, obteniendo 2 bits clásicos**

$$a, b \in \{0, 1\}$$

Aquí:

$$a = \text{ resultado de medir el primer qubit}, \qquad b = \text{ resultado de medir el segundo qubit.}$$

Dados los cuatros posibles resultados, determine qué operación debe aplicar Bob para reconstruir el estado original $|\chi\rangle$. Escriba la operación correctiva explícitamente en función de los parámetros m, n del estado de Bell inicial, y de los bits de medición a, b.

(d) **Demuestre que, con la corrección obtenida, Bob siempre recupera exactamente $|\chi\rangle$, independientemente de los valores de m y n; es decir, la teletransportación funciona para cualquier estado de Bell compartido**

4. **Se define $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ por $f(x_1, x_2) = x_1 \otimes x_2$ (función balanceada)**

(a) **Escriba el estado inicial del algoritmo Deutsh-Joza con 2 qubits de entrada y una ancilla y muestre preparación previa a la aplicación del oráculo (aplicación de Hadamards iniciales)**

(b) **Explique por qué, con la ancilla preparada en $|-\rangle$, el oráculo U_f actúa como una operación de fase**

$$U_f |x\rangle |-\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle |-\rangle$$

(c) **Demuestre explícitamente la formula:**

$$H^{\otimes 2} |x\rangle = \frac{1}{2} \sum_{w \in \{0,1\}^2} (-1)^{w \cdot x} |w\rangle$$

Y calcule $H^{\otimes |x\rangle}$ para cada valor posible de x, recordar que $w \cdot x = w_1 x_1 \otimes w_2 x_2$

(d) **Muestre la evolución tras aplicar el oráculo y los Hadamards finales; calcule la suma:**

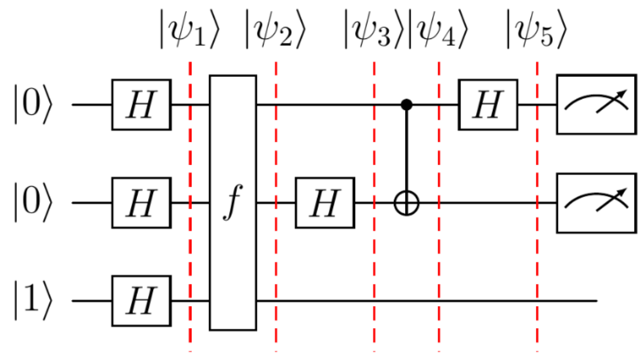
$$S(w) = \sum_{xin\{0,1\}^2} (-1)^{f(x)} (-1)^{w \cdot x}$$

para cada w, deduzca el estado final del registro de entra. Muestre que el registro de entrada termina en $|11\rangle$.

5. **Se nos promete que exatcamente una de cuatro cajas contiene un regalo. Las cajas están etiquetadas por $x \in \{0,1\}^2$. Definamos la función oráculo.**

$$f : \{0,1\}^2 \Rightarrow \{0,1\}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si la caja x contiene el regalo} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se nos dice que es posible averiguar en qué caja está el regalo con un solo llamado de la función f. Calcule el circuito de la figura y justifique por qué éste permite conocer la caja con el regalo con las mediciones mostradas.


$|\psi_1\rangle$
$|\psi_2\rangle$
$|\psi_3\rangle$
$|\psi_4\rangle$
$|\psi_5\rangle$
$|0\rangle$
$|0\rangle$
$|1\rangle$
H
H
H
f
H
H