Computación cuántica I

Examen Final

Salvador E. Venegas-Andraca
Héctor Mejía-Díaz

1. Sea el operador
$$U(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
   (a) Demuestre que $U(\theta)$ es unitario.
   (b) Encuentre un operador hermitiano H tal que $U(\theta) = e^{-i\theta H}$. Recuerde: H es hermitiano, si $H = H^\dagger$.

2. Considere los qubits
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\,|0\rangle + i\,|1\rangle), \qquad |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle),$$
   y el operador
$$A = |\psi\rangle\,\langle\phi| + |\phi\rangle\,\langle\psi|\,.$$
   (a) Exprese A como matriz 2×2 en la base computacional.
   (b) Demuestre que A es hermitiano.
   (c) Obtenga $A|0\rangle$ y $A|1\rangle$.
   (d) Obtenga la descomposición espectral de A: eigenvalores y eigenvectores normalizados.
   (e) Calcule la probabilidad de obtener $|\phi\rangle$ al medir el estado $|\psi\rangle$ en la base $\{|\phi\rangle\,, |\phi^\perp\rangle\}$, donde
$$|\phi^\perp\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle).$$
   Verifique que las probabilidades suman 1.

3. Alice y Bob comparten el estado de Bell genérico
$$|\beta_{mn}\rangle = (I \otimes X^m Z^n)\,|\beta_{00}\rangle\,, \qquad m, n \in \{0, 1\},$$
   donde m y n indican qué operadores de Pauli se aplican al segundo qubit del par entrelazado:
$$m = 1 \Rightarrow X \text{ actúa}, \qquad n = 1 \Rightarrow Z \text{ actúa}.$$
   Alice desea teleportar el estado desconocido
$$|\chi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,.$$

(a) Escriba el estado total de los tres qubits (estado a teleportar más el par entrelazado) y obtenga la expresión después de aplicar la compuerta CNOT, usando como control el qubit del estado $|\chi\rangle$ y como objetivo el qubit de Alice del par compartido.

(b) Escriba el estado resultante después de aplicar una compuerta Hadamard al primer qubit (el qubit del estado $|\chi\rangle$).

(c) Alice mide sus dos qubits, obteniendo dos bits clásicos

$$a, b \in \{0, 1\}.$$

Aquí:

$$a = \text{resultado de medir primer qubit}, \qquad b = \text{resultado de medir segundo qubit}.$$

Dados los cuatro posibles resultados $ab \in \{00, 01, 10, 11\}$, determine qué operación debe aplicar Bob para reconstruir el estado original $|\chi\rangle$. Escriba la operación correctiva explícitamente en función de los parámetros m, n del estado de Bell inicial, y de los bits de medición a, b.

(d) Demuestre que, con la corrección obtenida, Bob siempre recupera exactamente $|\chi\rangle$, independientemente de los valores de m y n; es decir, la teleportación funciona para cualquier estado de Bell compartido.

4. Se define $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ por $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ (función balanceada).

(a) Escriba el estado inicial del algoritmo Deutsch–Jozsa con dos qubits de entrada y un ancilla y muestre la preparación previa a la aplicación del oráculo (aplicación de Hadamard iniciales).

(b) Explique por qué, con el ancilla preparado en $|-\rangle$, el oráculo U_f actúa como una operación de fase:

$$U_f |x\rangle |-\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle |-\rangle .$$

(c) Demuestre explícitamente la fórmula

$$H^{\otimes 2} |x\rangle = \frac{1}{2} \sum_{w \in \{0,1\}^2} (-1)^{w \cdot x} |w\rangle ,$$

y calcule $H^{\otimes 2} |x\rangle$ para $x = 00, 01, 10, 11$. ($w \cdot x$ es el producto escalar módulo 2: si $w = (w_1, w_2)$ y $x = (x_1, x_2)$, entonces $w \cdot x = w_1 x_1 \oplus w_2 x_2$.)

(d) Muestre la evolución tras aplicar el oráculo y los Hadamards finales; calcule la suma

$$S(w) = \sum_{x \in \{0,1\}^2} (-1)^{f(x)} (-1)^{w \cdot x}$$

para cada $w \in \{00, 01, 10, 11\}$ y deduzca el estado final del registro de entrada. Muestre que el registro de entrada termina en $|11\rangle$.

Hint: refiérase a la última ayudantía del semestre.

5. Se nos promete que exactamente una de cuatro cajas contiene un regalo. Las cajas están etiquetadas por $x \in \{00, 01, 10, 11\}$. Definimos la función oráculo

$$f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si la caja } x \text{ contiene el regalo,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Se nos dice que es posible averiguar en qué caja está el regalo con un solo llamado a la función f. Calcule el circuito de la Figura 1 y justifique por qué éste permite conocer la caja con el regalo con las mediciones mostradas.

Hints: (1) Justifique por qué

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{x\in\{0,1\}^2} |x\rangle(|f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{x\in\{0,1\}^2} (-1)^{f(x)} |x\rangle (|0\rangle - |1\rangle) \,.$$

(2) Considere cuándo $f(x) = 1$.

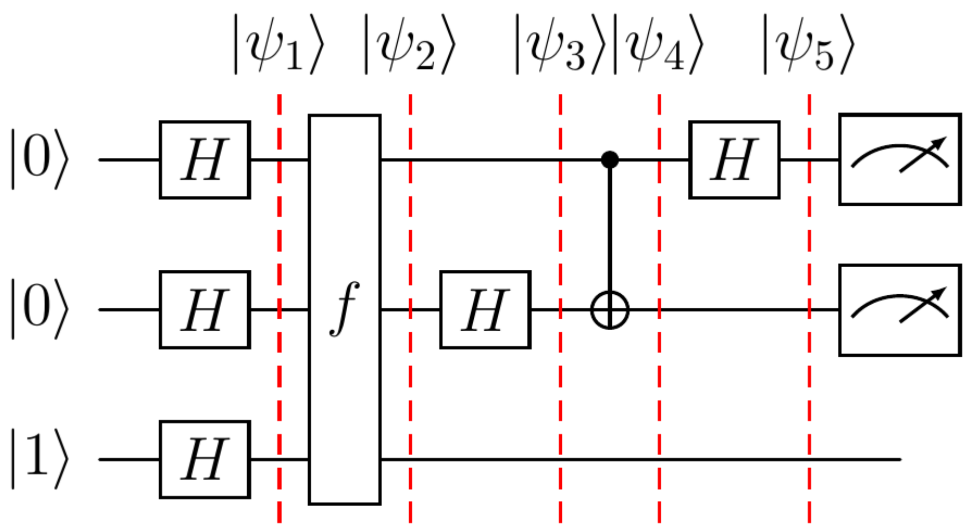

Figura 1: Usando este circuito es posible determinar exactamente cuál caja contiene el regalo prometido en el Ejercicio 5.