Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Computación Cuántica I | 7138

Tarea 3 : | Dinámica Cuántica

Sosa Romo Juan Mario | 320051926

3/12/24

1. El operador de Pauli Y está definido por:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

(a) **Calcule los autovalores de Y.**
Comenzamos restando λI

$$Y - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante:

$$det(Y - \lambda I) = (-\lambda)(-\lambda) - (i)(-i) = \lambda^2 + i^2 = \lambda^2 - 1$$

Resolvemos:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 1 &= 0 \\ \lambda^2 &= 1 \\ \lambda &= \pm 1 \end{aligned}$$

Por tanto los autovalores son $-1, 1$

(b) **Encuentre los autovectores normalizados de Y.**

- **Autovector para** $\lambda_1 = 1$

  Formamos Y-$\lambda_1 I$:

  $$Y - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

  Resolver $(Y - I)v = 0$. Si $v = (x, y)^T$:

  $$\begin{cases} -x - yi = 0 \\ xi - y = 0 \end{cases}$$

  Tomando la segunda ecuación tenemos que $y = ix$ sustituyendo en la primera $-x-i(ix) = 0$ tenemos que $0 = 0$ por lo que las ecuaciones son dependientes.

  De la segunda ecuación podemos escribir cualquier vector solución como:

  $$v = \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Si v es autovector, cv tambien lo es para cualquier c diferente de 0, tomamos a $x = 1$.

Normalizamos el vector:

$$||v|| = \sqrt{|1|^2 + |i|^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Por tanto el vector normalizado es:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Verificamos que sea correcto:

$$Yv = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 1 * v = \lambda_1 * v$$

- **Autovector para** $\lambda_2 = -1$

  Formamos Y-$\lambda_2 I$:

$$Y - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

  Resolver $(Y + I)v = 0$. Si $v = (x, y)^T$:

$$\begin{cases} x - yi = 0 \\ xi + y = 0 \end{cases}$$

  Tomando la primera ecuación tenemos $x = yi$ sustituyendo en la segunda $(yi)i + y = 0$ tenemos entonces que $-y + y = 0$ y $0 = 0$ aplicamos lo mismo.

$$v = \begin{pmatrix} yi \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Si v es autovector, cv tambien lo es para cualquier c diferente de 0, tomamos a $y = 1$.

  Normalizamos el vector:

$$||v|| = \sqrt{|i|^2 + |1|^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

  Por tanto el vector normalizado es:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Verificamos que sea correcto:

$$Yv = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = -1 * v = \lambda_2 * v$$

(c) **Verifique que los autovectores forman una base ortonormal de** $\mathbb{C}^2$

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Normalización** Por construcción estan normalizados pero verificamos:

$$\langle u, u\rangle = \frac{1}{2}(|1|^2 + |i|^2) = \frac{1}{2}(1+1) = \frac{1}{2}2 = 1$$

$$\langle v, v\rangle = \frac{1}{2}(|i|^2 + |1|^2) = \frac{1}{2}(1+1) = \frac{1}{2}2 = 1$$

  Ambos están normalizados como esperábamos.

- **Ortogonalidad**

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}(\bar{1} * i + \bar{i} * 1) = \frac{1}{2}(i - i) = 0$$

  Como el producto interno es 0, los vectores son ortogonales.

- **Independencia**
  Como son ortogonales son independientes.

Por tanto los vectores u, v forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$

2. **Considere el estado puro de un solo qubit descrito por:**

$$|\psi(\theta,\phi)\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

Suponga que en un experimento de tomografía cuántica obtiene los siguientes valores esperados:

$$\langle X\rangle = \sin(\theta)\cos(\phi), \quad \langle Y\rangle = \sin(\theta)\sin(\phi), \quad \langle Z\rangle = \cos\theta$$

(a) **Exprese la matriz densidad** $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

$$\langle\psi| = \cos\frac{\theta}{2}\langle 0| + e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\langle 1|$$

Calculo ρ

$$\begin{aligned}\rho &= \left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\langle 0| + e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\langle 1|\right) \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2}|0\rangle\langle 0| + \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|0\rangle\langle 1| + \cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\langle 0| + sin^2\frac{\theta}{2}|1\rangle\langle 1|\end{aligned}$$

Cada entrada de la matriz tiene la siguiente definición:

$$\rho_{ij} = \langle i|\rho|j\rangle, \quad i,j \in \{0,1\}$$

Obtenemos entonces:

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} & sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

(b) **Use las relaciones anteriores para reconstruir ρ únicamente a partir de $\langle X\rangle, \langle Y\rangle, \langle Z\rangle$.**

Usamos las siguientes identidad trigonométricas:

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2},\quad \sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2},\quad 2cos\frac{\theta}{2}sin\frac{\theta}{2}=sin\theta$$

Sustituyendo

$$\rho=\begin{pmatrix}\frac{1+\cos\theta}{2} & \frac{1}{2}sin\theta\ e^{-i\phi}\\ \frac{1}{2}sin\theta\ e^{i\phi} & \frac{1-\cos\theta}{2}\end{pmatrix}$$

Como $\langle X\rangle = sin\theta cos\phi$, $\langle Y\rangle = sin\theta sin\phi$, $\langle Z\rangle = cos\theta$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\cos\theta & sin\theta\ e^{-i\phi}\\ sin\theta\ e^{i\phi} & 1-\cos\theta\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\langle Z\rangle & sin\theta\ e^{-i\phi}\\ sin\theta\ e^{i\phi} & 1-\langle Z\rangle\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\langle Z\rangle & sin\theta\ (cos\phi - isin\phi)\\ sin\theta\ (cos\phi + isin\phi) & 1-\langle Z\rangle\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\langle Z\rangle & sin(\theta)cos(\phi) - i\ sin(\theta)sin(\phi)\\ sin(\theta)cos(\phi) + i\ sin(\theta)sin(\phi) & 1-\langle Z\rangle\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\langle Z\rangle & \langle X\rangle - i\langle Y\rangle\\ \langle X\rangle + i\ \langle Y\rangle & 1-\langle Z\rangle\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(c) **Verifique que la matriz obtenida corresponde a un estado puro (pista: use $Tr(\rho^2)$).**

$$\rho=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\langle Z\rangle & \langle X\rangle - i\langle Y\rangle\\ \langle X\rangle + i\ \langle Y\rangle & 1-\langle Z\rangle\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}Tr(\rho^2) &= \frac{1}{4}((1+\langle Z\rangle)^2 + |\langle X\rangle + i\langle Y\rangle|^2 + |\langle X\rangle + i\langle Y\rangle|^2 + (1-\langle Z\rangle)^2)\\ &= \frac{1}{4}((1+\langle Z\rangle)^2 + (1-\langle Z\rangle)^2 + 2(\langle X\rangle^2 + \langle Y\rangle^2))\\ &= \frac{1}{4}(2+2\langle Z\rangle^2 + 2(\langle X\rangle^2 + \langle Y\rangle^2))\\ &= \frac{1}{2}(1+\langle X\rangle^2 + \langle Y\rangle^2 + \langle Z\rangle^2)\end{aligned}$$

Usando las identidades trigonométricas:

$$\langle X\rangle^2 + \langle Y\rangle^2 + \langle Z\rangle^2 = sin^2(\theta)cos^2(\phi) + sin^2(\theta)sin^2(\phi) + cos^2(\theta) = sin^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$$

Sustituyo en la original:

$$Tr(\rho^2) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

Por lo que ρ representa un estado puro

3. **Sea el Hamiltoniano de un qubit**

$$H = X$$

donde X es el operador de Pauli correspondiente.

(a) **Calcule explícitamente la matriz unitaria**

$$U(t) = e^{-iXt}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^2 = I$$

Usando la expansion de Taylor de la exponencial matricial:

$$e^{-iXt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n X^n}{n!}$$

Ahora separamos los términos pares e impares, aprovechamos la propiedad de la matriz de Pauli:

- $(n = 2k) : X^{2k} = I$
- $(n = 2k+1) : X^{2k+1} = X$

$$U(t) = I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} - iX \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Estas son las series de Taylor para seno y coseno:

$$U(t) = Icos(t) - iXsin(t)$$

Usando las definiciones matriciales:

$$\begin{aligned} U(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} cos(t) - i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} sin(t) \\ &= \begin{pmatrix} cos(t) & 0 \\ 0 & cos(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\ sin(t) \\ -i\ sin(t) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} cos(t) & -i\ sin(t) \\ -i\ sin(t) & cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) **Verifique que** $U(t) = R_X(2t)$

Tenemos que:

$$R_X(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}X}$$

Sustituyedo tenemos:

$$R_X(2t) = e^{-i\frac{2t}{2}X} = e^{-itX}$$

También podemos verificar con la forma matricial:

$$R_X(2t) = cos(t)I - isin(t)X$$

(c) **Aplique $U(t)$ al estado inicial $|0\rangle$ y obtenga el estado resultante.**

$$U(t)|0\rangle = (cos(t)\ I - i\ sin(t)\ X)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}cos(t)\\-i\ sin(t)\end{pmatrix}$$

4. **Sea un sistema de 2 qubits con un Hamiltoniano**

$$H = Z \otimes Z$$

(a) **Escriba la matriz completa de H.**

La matriz de Pauli Z:

$$Z = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

Calculamos el producto tensorial

$$H = Z \otimes Z = \begin{pmatrix}Z & 0\\0 & -Z\end{pmatrix}$$

Sustituyo Z:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(b) **Calcule la evolución exacta** $U(t) = e^{-iHt}$

Tenemos que :

$$Z^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = I$$

Entonces tenemos que:

$$H^2 = (Z \otimes Z)^2 = Z^2 \otimes Z^2 = I \otimes I = I_4$$

Como $H^{2k} = I_4$ y $H^{2k+1} = H$ entonces, usando igual la serie de la exponencial igual que arriba tenemos:

$$e^{iHt} = cos(t)I_4 - isin(t)H$$

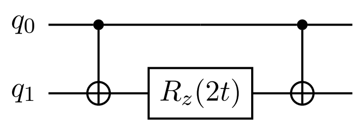
Por lo que tenemos:

$$U(t) = cos(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - isin(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) **Usando la descomposición mostrada en clase,**

$$e^{-itZ\otimes Z} = CNOT(I \otimes R_Z(2t))CNOT$$

represéntelo como circuito cuántico



5. **Considere 2 qubits inicialmente en el estado**

$$|\psi_0\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle$$

y su evolución bajo el Hamiltoniano $H = Z \otimes Z$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-itZ\otimes Z} |\psi_0\rangle$$

(a) **Calcule la matriz densidad** $\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle\psi(t)|$

Tenemos:

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\psi_0\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$$

Recordamos ademas que:

$$Z|0\rangle = 1|0\rangle, \quad Z|1\rangle = -1|1\rangle$$

De aqui sale que:

$$\begin{aligned} |00\rangle &= 1 * 1 = 1 \\ |01\rangle &= 1 * (-1) = -1 \\ |10\rangle &= (-1) * 1 = -1 \\ |00\rangle &= 1 * 1 = 1 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} U(t)|00\rangle &= e^{-it}|00\rangle, \\ U(t)|11\rangle &= e^{-it}|11\rangle, \\ U(t)|01\rangle &= e^{it}|01\rangle, \\ U(t)|10\rangle &= e^{it}|10\rangle \end{aligned}$$

El estado en el tiempo t:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}(e^{-it}|00\rangle + e^{it}|01\rangle + e^{it}|10\rangle + e^{-it}|11\rangle)$$

Ahora, tenemos que:

$$e^{\pm 2it} = cos(2t) \pm i\ sin(2t)$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & cos(2t) - i\ sin(2t) & cos(2t) - i\ sin(2t) & 1 \\ cos(2t) + i\ sin(2t) & 1 & 1 & cos(2t) + i\ sin(2t) \\ cos(2t) + i\ sin(2t) & 1 & 1 & cos(2t) + i\ sin(2t) \\ 1 & cos(2t) - i\ sin(2t) & cos(2t) - i\ sin(2t) & 1 \end{pmatrix}$$

(b) **Obtenga la traza principal sobre el segundo qubit:**

$$\rho_A(t) = Tr_B(\rho(t))$$

Tenemos entonces:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}(e^{-it}|00\rangle + e^{it}|01\rangle + e^{it}|10\rangle + e^{-it}|11\rangle)$$

Definimos los vectores asociados a $b = 0, 1$:

$$|\psi_0\rangle_A = (\mathbb{I} \otimes \langle 0|)\,|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}(e^{-it}|0\rangle + e^{it}|1\rangle)$$

Usando $\rho_A = \sum_b |\psi_b\rangle\langle\psi_b|$, calculamos:

$$|\phi_0\rangle\langle\phi_0| = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & e^{-2it} \\ e^{2it} & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\phi_1\rangle\langle\phi_1| = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & e^{2it} \\ e^{-2it} & 1 \end{pmatrix}$$

Sumando:

$$\rho_A = |\phi_0\rangle\langle\phi_0| + |\phi_1\rangle\langle\phi_1| = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & e^{2it} + e^{-2it} \\ e^{-2it} + e^{2it} & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & cos(2t) \\ cos(2t) & 1 \end{pmatrix}$$

(c) **Calcule la entropía de Von Neumann**

$$S(\rho_A) = -Tr(\rho_A\ log_2(\rho_A))$$

Empezamos calculando los eigenvalores de la matriz para poder usar el formulazo:

$$S(\rho_A) = -\sum_i \lambda_i log_2(\lambda_i)$$

Como la matriz es simétrica sus eigenvalores son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos(2t) = \frac{1 + cos(2t)}{2}$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos(2t) = \frac{1 - cos(2t)}{2}$$

Simplificando con identidades trigonometricas tenemos:

$$\lambda_1 = cos^2(t)$$
$$\lambda_2 = sin^2(t)$$

Sustituyendo en el formulazo:

$$\begin{aligned} S(\rho_A) &= -\left(\lambda_1 \; log_2(\lambda_1) + \lambda_2 \; log_2(\lambda_2)\right) \\ &= -\left(cos^2(t) \; log_2(cos^2(t)) + sin^2(t) \; log_2(sin^2(t))\right) \\ &= -cos^2(t) \; log_2(cos^2(t)) - sin^2(t) \; log_2(sin^2(t)) \end{aligned}$$

(d) **Grafique cómo varía el entrelazamiento en función de t**