Computación cuántica I
Tarea 01

Sosa Romo Juan Mario - 320051926

1. Sea el número complejo $z = 1 + i\sqrt{3}$.

   a) Escriba z en su forma polar $z = re^{i\theta}$.

      1) Calculamos la magnitud:

      $$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

      2) Calculamos el angulo:

      $$\theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$$

      Como $x > 0$ no agregamos nada por lo que:

      $$\theta = \frac{\pi}{3}$$

      3) Escribimos en forma polar exponencial:

      $$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

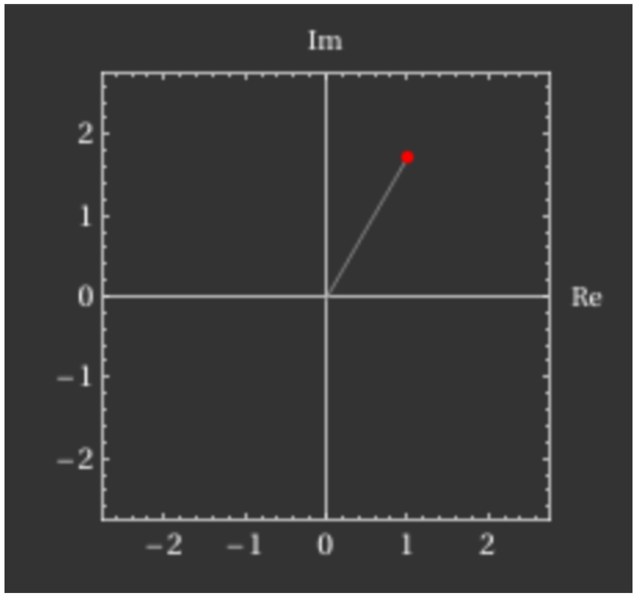
   b) Calcule z^3 usando su forma exponencial.

      Aplicando la formula de De Moivre y formula de Euler tenemos que:

      $$z^n = r^n e^{in\theta} \Rightarrow 2^3 e^{i3\frac{\pi}{3}} = 8e^{i\pi} = -8$$

   c) Represente gráficamente z en el plano complejo.

      Sabemos que z tiene coordenada 1 en los Re y 1.732 en los Im por lo que se ve asi:



2. Sean los números complejos $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ y $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

   a) Escriba z_1 y z_2 en forma rectangular. Comienzo por z_1:

$$\begin{aligned} z_1 =& 2\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ =& 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ =& \sqrt{2} + i\sqrt{2} \end{aligned}$$

   Ahora hago a z_2:

$$\begin{aligned} z_2 &= 3e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ &= 3\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2} \end{aligned}$$

   b) Calcule $z_1 \cdot z_2$ en forma exponencial y luego conviértalo a forma rectangular.

   Calculamos el producto:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (2 \cdot 3)e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} \\ &= 6e^{i\frac{\pi}{12}} \end{aligned}$$

Convertimos a forma rectangular:

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= 6\left(cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) \\
&= 6\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \\
&= \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2} + i\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \\
&= \boxed{\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{4}}
\end{aligned}
$$

c) Verifique que el módulo del producto sea igual al producto de los módulos.

Por demostrar: $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ en general, cuando $z = a + bi$ y $w = c = di$ entonces:

$$
\begin{aligned}
|z \cdot w| &= \sqrt{(ac-bd)^2(ad+bc)^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2 \boxed{-2abcd} + b^2d^2 + a^2d^2 \boxed{+2abcd} + b^2c^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + b^2c^2} \\
&= \sqrt{a^2(c^2+d^2) + b^2(d^2+c^2)} \\
&= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
&= \sqrt{(a^2+b^2)}\sqrt{(c^2+d^2)} = |z| \cdot |w|
\end{aligned}
$$

Y en forma exponencial es trivial.

3. Sean los vectores $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ y $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, en la base canónica de $\mathbb{C}^2$.

a) Calcule $\langle\psi|\phi\rangle$.
Comenzamos calculando el $\langle\psi| = \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix}$, ahora calculamos:

$$
\begin{aligned}
\langle\psi|\phi\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= 1 \cdot i - i \cdot 1 = i - i = \boxed{0}
\end{aligned}
$$

b) Verifique si los vectores están normalizados.

Calculamos módulos, comenzamos con $|| \, |\psi\rangle \, ||$

$$
\begin{aligned}
||\,|\psi\rangle\,|| &= \sqrt{\langle\psi|\,|\psi\rangle} \\
&= \sqrt{\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}} = \\
&= \sqrt{(1)(1)+(-i)(i)} = \sqrt{1-i^2} = \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Vemos que no esta normalizado. Calculamos para el otro:

$$
\begin{aligned}
||\,|\phi\rangle\,|| &= \sqrt{\langle\phi|\phi\rangle} \\
&= \sqrt{\begin{pmatrix}-i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}} \\
&= \sqrt{(-i)(i)+(1)(1)} = \sqrt{1-i^2} = \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Tampoco esta normalizado

c) ¿Son ortogonales? Justifique su respuesta.

Como vimos en la pregunta *a*) el producto interno nos dio 0 entonces por definición son ortogonales $\perp$

4. Considere los vectores $|u\rangle = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ y $|v\rangle = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

a) Calcule el producto externo $|u\rangle\langle v|$.

Primero encontramos el $\langle v| = (|v\rangle)^\dagger = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$

Calculamos producto externo:

$$
\begin{aligned}
|u\rangle\langle v| &= \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix}(1)(0) & (1)(1)\\ (0)(0) & (0)(1)\end{pmatrix} \\
&= \boxed{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}
\end{aligned}
$$

b) Interprete el resultado como una matriz. ¿Qué efecto tendría este operador sobre un vector arbitrario $|\chi\rangle = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$?

Si aplicamos el operador sobre el vector tendremos el vector resultante

$$M|\chi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

También se puede entender como que el operador proyecta el componente del vector que esta en la dirección de $|v\rangle$ sobre la dirección de $|u\rangle$

5. Sea el operador $\hat{A} = |0\rangle\langle 1|$, donde

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle .$$

a) Exprese $|\psi\rangle$ como un vector columna.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Calcule $\hat{A}|\psi\rangle$.

Utilizamos el operador que ya habiamos calculado:

$$\hat{A}|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Interprete el resultado físicamente: ¿qué parte del estado $|\psi\rangle$ "sobrevive"después de aplicar $\hat{A}$?

Podríamos decir que la parte que sobrevive es $\beta|0\rangle$, esto porque el operador apaga la componente original de $|0\rangle$ y redirige la componente $|1\rangle$, es esta parte que sobrevive pero ahora esta proyectada o girada.