Skript zur zweistündigen Vorlesung “Gewöhnliche Differentialgleichungen” im WS 2016/17

Julian Scheuer

6. Februar 2017

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **i**

1 Definitionen und elementare Methoden **1**
1.1 Definitionen 1
1.2 Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme 2
1.3 Separation der Variablen 4

2 Existenz und Eindeutigkeit **6**
2.1 Lokale Existenz- und Eindeutigkeitssätze 6
2.2 Globale Existenz 8
2.3 Geodäten auf Untermannigfaltigkeiten 12

3 Lineare Differentialgleichungen **15**
3.1 Lineare Differentialgleichungen 16
3.2 Konstante Koeffizienten 20
3.3 Gleichungen höherer Ordnung 24

4 Abhängigkeit von Parametern **29**
4.1 Stetigkeitssätze 30
4.2 Differenzierbarkeitssätze 33

5 Dynamische Systeme **38**
5.1 Gruppenwirkungen und dynamische Systeme 38
5.2 Vektorfelder und dynamische Systeme 44
5.3 Lineare Flüsse 47
5.4 Ljapunov-Stabilität 53

Literatur **58**

Einleitung

Freier Fall mit Luftwiderstand

Wir beginnen mit einer einfachen physikalischen Fragestellung:

> *Ein Körper der Masse m befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe $y_0 > 0$ Meter über dem Erdboden und wird nun fallengelassen. Bestimmen Sie den Zeitpunkt seines Auftreffens auf die Erdoberfläche (also jene Zeit t mit $y = 0$.)*

Unser elementares Naturvertrauen sagt uns, dass der Auftreffzeitpunkt in der Tat eintreten wird. Somit ist die Fragestellung erstmal sinnvoll. Welche Parameter bestimmen diesen? Ohne ein Maß für die "Erdanziehungskraft" wird es sicher nicht möglich sein, eine genaue Zeit anzugeben. Hier kann es bereits kniffIig werden, da die Erdanziehung von der Höhe abhängt. Noch ungenauer wird es, wenn man den Luftwiderstand beachten will, der von vielen verschiedenen Faktoren abhängt. Daher ist es ratsam, sich zunächst zu überlegen, wie genau man die Frage beantworten will.
Wir konstruieren also zunächst mal ein abstraktes Modell, indem wir die Problemstellung in die (x, y)-Ebene transferieren und als einfachsten Fall den betrachten, dass der Körper zur Zeit $t = 0$ in einem Punkt $(0, y_0)$ liegt und die einzige wirkende Kraft F_G, die Gewichtskraft, ihn nach unten zieht. Wie nähern diese Kraft erstmal durch ein sogenanntes *homogenes Vektorfeld*, also eine Abbildung

$$F_G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

In unserem ersten einfachen Spezialfall ist

$$F_G(x, y) = -\begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} \tag{2}$$

mit der Erdbeschleunigung $g > 0$. Nun kann man die *Newtonsche Bewegungsgleichung* verwenden, die besagt, dass die Beschleunigung eines Teilchens zu einer Zeit t gegeben ist durch den Quotienten von Kraft (die **an der Teilchenposition** wirkt) und Masse, d.h.

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{m} F(x(t), y(t)) = -\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Man kann nun einfach berechnen:

$$\dot{x}(t) = 0 + \int_0^t \ddot{x}(s)\ ds = 0 \quad \forall t \tag{4}$$

und somit

$$x(t) = 0 + \int_0^t \dot{x}(s)\ ds = 0 \quad \forall t. \tag{5}$$

Die x-Koordinate bleibt also 0. Für die y-Koordinate gilt

$$\dot{y}(t) = \dot{y}(0) + \int_0^t \ddot{y}(s)\ ds = 0 - gt \tag{6}$$

und somit

$$y(t) = y(0) + \int_0^t \dot{y}(s)\ ds = y_0 - \int_0^t gs\ ds = y_0 - \frac{g}{2}t^2. \tag{7}$$

Die erste positive Zeit t_0 mit $y(t_0) = 0$ ist dann

$$t_0 = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}. \tag{8}$$

Das wäre das einfachst denkbare Modell. Auf der Erde ist dies aber unrealistisch. Man betrachte z.B. den Absprung vom Rande der Erdatmosphäre (bitte nicht zu Hause ausprobieren!), https://www.youtube.com/watch?v=vvbN-cWe0A0. Wir beobachten in diesem Video das Konstantwerden der Geschwindigkeit des Space-Jumpers (ca. bei 4:30). Dies würde dem Modell ohne Luftwiderstand widersprechen, da nach (6) der Betrag der Geschwindigkeit linear wachsen müsste. Mit Luftwiderstand müssen wir also unseren Kraftvektor modifizieren, welcher offenbar auch von der Geschwindigkeit selbst abhängt. Es wirkt eine zusätzliche Kraft nach oben, je schneller das fallende Objekt (oder Subjekt) wird. Bei hohen Geschwindigkeiten ist quadratisches Wachstum des Luftwiderstandes experimentell nachgewiesen. Wir haben also eine Kraft der Form

$$F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = -\begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y}^2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Nun wird es bereits deutlich komplizierter, die entstehende Gleichung zu lösen. Wenn man noch beachtet, dass die Erdanziehung nicht konstant ist und F somit auch vom Ort abhängt, erhalten wir eine *gewöhnliche Differentialgleichung* der allgemeinen Form

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = f(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) \tag{10}$$

mit der *Anfangsbedingung*

$$(x(0), y(0)) = (0, y_0), \quad (\dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (0, 0). \tag{11}$$

Diese Anfangsbedingung kommt aus unserem Beispiel. Man kann natürlich auch andere Werte vorschreiben. In der Realität wird man eine solches *Anfangswertproblem* in der Regel nicht explizit lösen können. Man versucht daher in der Regel, anhand der Struktur der Gleichung qualitative Eigenschaften der Lösung mathematisch herzuleiten.

Wir interessieren uns in dieser Vorlesung u.A. für folgende mathematische Fragen bzgl. Gleichungen der Form (10) und noch allgemeineren Differentialgleichungen (Definition folgt in Kapitel 1):

• Unter welchen Bedingungen an f existiert eine Lösung und ist sie dann eindeutig?

• Wie hängen die Lösungen von externen Parametern ab? Sind die Lösungen z.B. nah beieinander, wenn die Anfangswerte nah beieinander sind?

• Wie verhalten sich Gleichungen einfacher Form, z.B. falls f linear ist? Welche Lösungsformeln gelten hier?

• Kann man das Verhalten linearer Differentialgleichungen verwenden, um auch nichtlineare f zu behandeln?

In weitergehenden Vorlesungen der Analysis werden Sie regelmäßig mit den ersten beiden Fragen konfrontiert, z.B. in der Differentialgeometrie, der Funktionalanalysis und partiellen Differentialgleichungen. Neben der Physik treten gewöhnliche Differentialgleichungen z.B. auch in biologischen und sozialwissenschaftlichen Anwendungen auf. Zunächst wollen wir einige Konventionen bzgl. der Notation festhalten und Dinge aus der Analysis II wiederholen, die wir in der folgenden Theorie benötigen.

Notation und Vorkenntnisse

Notation

- Für Mengen A, B vereinbaren wir
$$A \subset B :\Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)\,, \tag{12}$$
d.h. $A = B$ ist in dieser Definition mit eingeschlossen.

- Für Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ bedeutet
$$A \Subset B, \tag{13}$$
dass $\bar{A}$ kompakt und $\bar{A} \subset B$ ist.

- Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ verstehen wir immer als Spaltenvektoren, d.h.
$$x = (x^i)_{1\leq i\leq n} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \tag{14}$$

- Das Symbol $\mathbb{K}^n$ bezeichnet stets $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$.

Differenzierbare Funktionen

• Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Den Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ bezeichnen wir mit $C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

• Für vektorwertige Funktionen, die auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert sind, verwenden wir in der Regel die Notation

$$\begin{aligned} x\colon I &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto x(t) \end{aligned} \tag{15}$$

und bezeichnen ihre Ableitung mit einem Punkt, d.h.

$$\dot{x}(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \tag{16}$$

falls die Funktion x in t_0 differenzierbar ist. Falls x k-mal differenzierbar ist, schreiben wir $x^{(k)}$ für die k-te Ableitung.

Metrische und normierte Räume

Wir wiederholen kurz den Begriff des metrischen Raumes:

Definition. Ein Paar (M, d) mit einer Menge M und einer Abbildung

$$d\colon M \times M \to \mathbb{R}$$

heißt *metrischer Raum*, falls

(i) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in M$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in M$,

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in M$.

Die Begriffe Konvergenz, Cauchy-Folge, Vollständigkeit und Beschränktheit in metrischen Räumen sollten aufgrund Ihrer Kenntnisse über den $\mathbb{R}^n$ intuitiv einsichtig sein und werden als bekannt vorausgesetzt, vgl. z.B. das Skript Analysis II von Prof. Kuwert, [5].

Im wesentlichen Existenzresultat verwenden wir den Banachschen Fixpunktsatz, mit dem Sie sich in den Übungen vertiefend beschäftigen können.

Theorem (Banachscher Fixpunktsatz)**.** *Sei M ein vollständiger metrischer Raum und $T\colon M \to M$ eine Kontraktion, d.h. es existiert $K < 1$, sodass*

$$d(T(x), T(y)) \leq K d(x, y) \quad \forall x, y \in M, \tag{17}$$

dann hat T einen eindeutig bestimmten Fixpunkt.

Wir wiederholen die Definition eines normierten Vektorraumes:

Definition. Ein Paar $(E, \|\cdot\|)$ mit einem $\mathbb{K}$-Vektorraum E und einer Abbildung

$$\|\cdot\|\colon E \to [0, \infty) \tag{18}$$

heißt *normierter Vektorraum*, falls

(i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E$ and $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in E \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$.

Ein normierter Vektorraum heißt *Banachraum* wenn er als metrischer Raum (mit der von der Norm induzierten Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$) vollständig ist.

Wir verwenden auch folgenden Satz über den Raum stetiger Funktionen, dessen Beweis eine Übungsaufgabe ist.

Theorem. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei $M \subset \mathbb{R}^m$ kompakt. Dann ist der Vektorraum der stetigen Funktionen von M nach $\mathbb{R}^n$, $C^0(M, \mathbb{R}^n)$, mit der Supremumsnorm*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in M} |f(x)| \tag{19}$$

ein Banachraum.

Aus der linearen Algebra verwenden wir die Hauptraumzerlegung, die Darstellbarkeit eines reellen oder komplexen Matrix in *Jordanscher Normalform* sowie die *Cramersche Regel*, vgl. z.B. [2].

Theorem. [Hauptraumzerlegung] *Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und für jeden Eigenwert λ_i mit Vielfachheit r_i, $1 \leq i \leq k$, sei der i-te Hauptraum gegeben durch*

$$V_i = \ker \ (A - \lambda_i \operatorname{id})^{r_i} . \tag{20}$$

Dann gelten:

(i) Die V_i sind A-invariant, d.h. $A(V_i) \subset V_i$ für alle $1 \leq i \leq k$,

(ii) $\dim V_i = r_i$ *und*

(iii)

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i. \tag{21}$$

Theorem. [Jordansche Normalform] *Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann existiert eine invertierbare Matrix $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$, sodass die Matrix $B = C^{-1}AC$ Jordansche Normalform besitzt, also die Gestalt*

$$B = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}, \tag{22}$$

wobei der i-te Jordan-Kasten $J_i \in \mathbb{C}^{r_i \times r_i}$ die Form

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \tag{23}$$

hat und in B außerhalb der J_i nur Nullen stehen. Hierbei sind die λ_i und r_i gegeben durch das charakteristische Polynom von A,

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{r_i}. \tag{24}$$

Theorem. [Cramersche Regel] *Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar, $b \in \mathbb{K}^n$ und $x \in \mathbb{K}^n$ die Lösung von*

$$Ax = b, \tag{25}$$

so gilt

$$x^i = \frac{\det(A_1, \dots, A_{i-1}, b, A_{i+1}, \dots, A_n)}{\det A}, \tag{26}$$

wobei $x = (x^i)$ und A_i die i-te Spalte von A ist.

Kapitel 1

Definitionen und elementare Methoden

1.1 Definitionen

Unter einer *gewöhnlichen Differentialgleichung* (ODE) verstehen wir eine Gleichung, die eine algebraische Relation zwischen einer differenzierbaren Funktion und ihren Ableitungen herstellt. Z.B. kann man sich fragen, ob ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine differenzierbare Funktion

$$\begin{aligned} x \colon I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto x(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

existiert, sodass

$$\dot{x} + x^2 = 0. \tag{1.2}$$

Hier wäre eine Lösung gegeben durch

$$x_1(t) = \frac{1}{t}. \tag{1.3}$$

Eine weitere Lösung ist

$$x_2(t) = \frac{1}{t-1}. \tag{1.4}$$

Diese unterscheiden sich z.B. durch ihren Wert bei $t = 2$. Man sieht also hier bereits, dass die Lösung einer Differentialgleichung i.A. nicht eindeutig ist. Wir werden zeigen, dass eine Lösung unter geeigneten Voraussetzungen nach Vorgabe eines *Anfangswertes* eindeutig ist, z.B. in dem man obige Differentialgleichung zu einem sogenannten Anfangswertproblem (AWP) ergänzt, welches man in unserem Beispiel dann in der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^2 \\ x(2) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{1.5}$$

schreibt. Hier wäre dann x_1 die eindeutige Lösung, wie wir später beweisen werden. Ganz allgemein:

1.1.1 Definition. Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $F\colon J \times \Omega \times \mathbb{R}^{k\times n} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Eine Gleichung der Form

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(k)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I \subset J \tag{1.6}$$

heißt *gewöhnliche Differentialgleichung k-ter Ordnung in* $\mathbb{R}^n$, wobei eine Funktion ist und $x^{(k)}$ die k-te Ableitung von x bezeichnet.

Wir suchen dann ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $x \in C^k(I, \Omega)$, die (1.1.1) lößt. Wie gesagt muss man in der Regeln Anfangswerte (auch für höhere Ableitungen) vorschreiben, um eine Chance auf Eindeutigkeit der Lösung zu haben. Lässt sich (1.1.1) in der Form

$$x^{(k)}(t) = f(t, x(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)) \tag{1.7}$$

mit einer geeigneten Funktion f schreiben, so nennen wir die Differentialgleichung *explizit*. In dieser Vorlesung betrachten wir ausschließlich explizite Differentialgleichungen.

Wir werden auch folgende Begriffe verwenden.

1.1.2 Definition. (i) Sei $n \geq 1$, $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein *zeitabhängiges Vektorfeld* in Ω ist eine Abbildung $f\colon J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$. Hängt f nicht von der ersten Komponente ab, so nennen wir f einfach *Vektorfeld*.

(ii) Sei $f\colon J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und $x_0 \in \Omega$. Eine *Integralkurve* bzgl. des Tripels (f, t_0, x_0) ist eine Lösung $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \quad \forall t \in I \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1.8}$$

wobei $I \subset J$ ein offenes Intervall ist.

1.2 Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme

In obigem einführenden Beispiel haben wir nach einer reellwertigen Funktion gesucht. Ein Beispiel für eine vektorwertige ODE erster Ordnung ist

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x. \tag{1.9}$$

Schreibt man als Anfangswert

$$x(0) = (1, 0) \tag{1.10}$$

vor, so erhält man die Lösung

$$x(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Man kann (1.9) auch wie folgt lesen: Es gilt

$$\dot{x}^1(t) = -x^2(t) \tag{1.12}$$

und somit

$$\ddot{x}^1(t) = -\dot{x}^2(t) = -x^1(t) \tag{1.13}$$

mit den Anfangswerten

$$x^1(0) = 1, \quad \dot{x}^1(0) = -x^2(0) = 0. \tag{1.14}$$

Auch hier sehen wir $x^1(t) = \cos t$. (1.13) ist eine ODE zweiter Ordnung und wir sehen, dass wir diese auch lösen können indem wir zu dem System (1.9) übergehen. Im folgenden Satz, dessen Beweis unmittelbar einsichtig ist, sehen wir, dass dies ein allgemeines Prinzip ist, welches das Studium von Differentialgleichungen höherer Ordnung prinzipiell auf das Studium von Systemen erster Ordnung zurückführt.

1.2.1 Proposition. *Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f\colon J \times \Omega \times \mathbb{R}^{(k-1)\times n} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion.*

(i) Ist

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^k)^T \colon I \to \Omega \times \mathbb{R}^{(k-1)\times n} \tag{1.15}$$

eine Lösung von

$$\dot{x}^1 = x^2, \dot{x}^2 = x^3, \dots, \dot{x}^{k-1} = x^k, \dot{x}^k = f(\cdot, x), \tag{1.16}$$

mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$, so ist die Abbildung $y = x^1$ eine Lösung von

$$y^{(k)} = f(\cdot, y, \dot{y}, \dots, y^{(k-1)}) \tag{1.17}$$

zu den Anfangswerten

$$y(t_0) = x_0^1, \dot{y}(t_0) = x_0^2, \dots, y^{(k-1)}(t_0) = x_0^k \tag{1.18}$$

(ii) Ist umgekehrt y eine Lösung von (1.17) mit Anfangswerten (1.18), so ist der Vektor

$$x = (y, \dot{y}, \dots, y^{(k-1)})^T \tag{1.19}$$

eine Lösung von (1.16) mit Anfangswert x_0.

Somit können wir uns bei der Existenz- und Eindeutigkeitstheorie im Wesentlichen auf vektorwertige Differentialgleichungen erster Ordnung beschränken.

1.3 Separation der Variablen

Im Fall, dass ein reellwertiges Vektorfeld die einfache Struktur der *getrennten Variablen*,

$$f(t,x) = g(t)h(x), \tag{1.20}$$

hat, kann man eine Lösung *bis auf Integration* finden.

1.3.1 Proposition. *Seien $J \subset \mathbb{R}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und seien $g \in C^0(J,\mathbb{R})$ und $h \in C^0(\Omega,\mathbb{R})$. Seien $t_0 \in J$ und $x_0 \in \Omega$ mit $h(x_0) \neq 0$. Dann existiert ein offenes Intervall I um t_0, sodass das AWP*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= g(t)h(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1.21}$$

eine eindeutige Lösung $x \in C^1(I,\mathbb{R})$ besitzt. Diese ist dann gegeben durch

$$x(t) = H^{-1}(G(t)) \quad \forall t \in I, \tag{1.22}$$

wobei H und G Stammfunktionen zu $1/h$ bzw. g mit $H(x_0) = G(t_0) = 0$ sind.

Beweis. Wir zeigen die lokale Eindeutigkeit, indem wir eine explizite Formel für eine Lösung x herleiten. Ist x also eine Lösung in einer Umgebung I von t_0, in der oBdA $h(x(t)) \neq 0$ ist, erhält man

$$\frac{\dot{x}}{h(x(t))} = g(t) \quad \forall t \in I. \tag{1.23}$$

Seien H und G Stammfunktionen zu $1/h$ bzw. g mit $H(x_0) = G(t_0) = 0$. Integration ergibt

$$H(x(t)) - H(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}(s)}{h(x(s))}\, ds = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds = G(t) - G(t_0). \tag{1.24}$$

Da $1/h$ in I ein festes Vorzeichen hat, ist H in I strikt monoton, also invertierbar und es gilt

$$x(t) = H^{-1}(G(t)) \quad \forall t \in I. \tag{1.25}$$

Diese Formel gilt lokal um I für jede Lösung, woraus die Eindeutigkeit folgt. Um die Existenz zu beweisen, *definieren* wir x nun durch (1.22) und leiten ab:

$$\frac{d}{dt} H \circ x = \frac{d}{dt} G \tag{1.26}$$

impliziert

$$\frac{\dot{x}}{h \circ x} = g. \tag{1.27}$$

Außerdem gilt

$$x(t_0) = H^{-1}(0) = x_0. \tag{1.28}$$

□

Dies ist eine effektive Methode, die einem hin und wieder begegnen kann. Wir betrachten einige Beispiele.

1.3.2 Beispiel. (i)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax, \quad 0 \neq a \in \mathbb{R}, \\ x(0) &= 1. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Also ist $h(x) = x$, $g(t) = a$, $H(x) = \log x$, $G(t) = at$, und somit

$$x(t) = H^{-1}(G(t)) = e^{at}. \tag{1.30}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 + x^2 \\ x(0) &= 0. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Dann ist $g(t) = 1$, $h(x) = 1 + x^2$ und somit

$$H(x) = \arctan x. \tag{1.32}$$

Es folgt

$$x(t) = H^{-1}(t) = \tan t. \tag{1.33}$$

Weitere Beispiele wird es in den Übungen geben.

1.3.3 Bemerkung. In Proposition 1.3.1 haben wir $h(x_0) \neq 0$ vorausgesetzt. Ist $h(x_0) = 0$ so hat (1.21) natürlich die Lösung $x \equiv 0$. Allerdings gilt unter diesen allgemeinen Voraussetzungen die Eindeutigkeit nicht, wie folgendes Beispiel zeigt.

1.3.4 Beispiel. Betrachte

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\sqrt{|x|} \\ x(0) &= 0. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Hier ist $x \equiv 0$ sicherlich eine Lösung. Allerdings ist auch die Funktion

$$x(t) = \begin{cases} t^2, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \tag{1.35}$$

eine C^1-Lösung, da

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{cases} 2t, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \\ &= 2\sqrt{|x|}. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Wir sehen also, dass die Stetigkeit eines Vektorfeldes nicht zur Eindeutigkeit genügt. Wir werden im folgenden Kapitel zeigen, dass die Lipschitz-Stetigkeit genügt.

Kapitel 2

Existenz und Eindeutigkeit

2.1 Lokale Existenz- und Eindeutigkeitssätze

2.1.1 Proposition. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \Omega$. Dann existiert ein Interval $I = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, sodass eine eindeutige Integralkurve $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ bzgl. des Tripels (f, t_0, x_0) existiert.*

Beweis. Wegen der lokalen Lipschitz-Stetigkeit existiert $0 < r < 1$ und $K \geq 1$ mit

$$|f(x)| + \sup_{\substack{y,z \in \bar{B}_r(x_0) \\ z \neq y}} \frac{|f(z) - f(y)|}{|z - y|} \leq K \quad \forall x \in \bar{B}_r(x_0). \tag{2.1}$$

Sei

$$\epsilon \leq \frac{r}{K} \tag{2.2}$$

und setze $I = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. Sei

$$M := \{x \in C^0(\bar{I}, \mathbb{R}^n)\colon x(\bar{I}) \subset \bar{B}_r(x_0)\}. \tag{2.3}$$

Dann ist M abgeschlossen und somit vollständig. Definiere den Operator

$$T\colon M \to C^0(\bar{I}, \mathbb{R}^n) \tag{2.4}$$

durch

$$Tx = x_0 + \int_{t_0}^{\cdot} f(x(s))\ ds. \tag{2.5}$$

T hat folgende Eigenschaften:

(i) $T(M) \subset M$, da für $x \in M$ aufgrund des Hauptsatzes des Differential- und Integralrechnung Tx sicherlich stetig ist und es gilt

$$|Tx(t) - x_0| \leq |t - t_0|K \leq \epsilon K \leq r. \tag{2.6}$$

(ii) T ist eine Kontraktion, denn seien $x, y \in M$, so gilt

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(x(s)) - f(y(s))| \, ds \\ &\leq |t - t_0| K \sup_{\bar{I}} |x - y| \\ &\leq r\|x - y\|_\infty. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Supremumsbildung über t ergibt, dass T eine Kontraktion des vollständigen metrischen Raumes M ist und somit nach dem Banachschen Fixpunktsatz einen eindeutig bestimmten Fixpunkt besitzt. Dieser erfüllt also

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s)) \, ds \quad \forall t \in \bar{I}. \tag{2.8}$$

Ableiten nach t ergibt, dass x die gesuchte Integralkurve ist. Die Eindeutigkeit von x auf $\bar{I}$ folgt durch Integration des AWP und der Eindeutigkeit im Banachschen Fixpunktsatz. □

Mit Hilfe einer simplen Transformation lässt sich dieses Resultat auch auf Vektorfelder verallgemeinern, die selbst von der Zeit abhängen.

2.1.2 Theorem. [Lokale Existenz] *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f\colon J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, $t_0 \in J$ und $x_0 \in \Omega$. Dann existiert ein Intervall $I_{t_0,x_0} = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, sodass eine eindeutige Lösung des AWP*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

existiert.

Beweis. Definiere

$$\begin{aligned} g\colon J \times \Omega &\to \mathbb{R}^{n+1} \\ g(t, x) &= (1, f(t, x)). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Dann ist g lokal Lipschitz-stetig und nach Proposition 2.1.1 besitzt das AWP

$$\begin{aligned} \dot{y}(s) &= g(y(s)) \\ y(t_0) &= (t_0, x_0) \end{aligned} \tag{2.11}$$

eine auf einem kleinen Intervall $I = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ eindeutige Lösung y. Insbesondere erfüllt die erste Komponente y^1 das AWP $\dot{y}^1(s) = 1$, $y^1(t_0) = t_0$ und somit gilt

$$y^1(s) = s. \tag{2.12}$$

Für $2 \leq i \leq n+1$ gilt somit

$$\dot{y}^i(s) = g^i(y(s)) = f^i(s, (y^i(s))) \tag{2.13}$$

und

$$y^i(t_0) = x_0. \tag{2.14}$$

$x = (y^i)$ ist somit die gesuchte Lösung, die eindeutig ist, da y eindeutig ist. □

2.1.3 Bemerkung. Mit ein wenig mehr Aufwand kann in Theorem 2.1.2 die Regularitätsannahme an f dahingehend abgeschwächt werden, dass man die Lipschitz-Stetigkeit nur in der zweiten Variable fordern muss, sofern man die Lipschitzkonstante lokal gleichmässig in J fordert. Details finden sich in den Übungen.

2.2 Globale Existenz

An der Form des AWP (2.9) sieht man, dass das Definitionsintervall I_{t_0,x_0} der lokalen Lösung in J enthalten sein muss. Wir wollen nun die Frage erörtern, wann diese Intervalle übereinstimmen und was passiert, falls sie dies nicht tun. Wir werden dies für die allgemeinere Situation untersuchen, dass f in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definiert ist. Ein simples Beispiel illustriert die Problematik.

2.2.1 Beispiel. Sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (t,x) &\mapsto \frac{1}{2}x^3 \end{aligned} \tag{2.15}$$

und betrachte das AWP

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2}x^3 \\ x(0) &= 1. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Simples Ableiten ergibt, dass

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}, \quad -\infty < t < 1, \tag{2.17}$$

die Lösung sein muss. Somit ist das maximale Definitionsintervall $(-\infty, 1)$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir sehen auch, dass die Lösung x jede kompakte Teilmenge von $J \times \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ verlässt und nicht über $t = 1$ hinaus fortgesetzt werden kann. Wir beweisen in diesem Abschnitt, dass, falls f Lipschitz-stetig ist, ein solches maximales Definitionsintervall der Lösung immer existiert und die Lösung sich an dessen Grenzen immer wie oben beschrieben verhält.

Wir benötigen einige Hilfsresultate, die selbst von Interesse sind. Die erste Abschätzung zeigt die stetige Abhängigkeit einer Lösung von ihrem Anfangswert.

2.2.2 Lemma. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f\colon J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Seien x und y in $J_0 \Subset J$ definierte Lösungen von $\dot{x} = f(t, x(t))$. Dann gilt*

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t_0) - y(t_0)| e^{K|t-t_0|}, \tag{2.18}$$

wobei $K = K_{J_0}$ die Lipschitz-Konstante von f in der Menge $J_0 \times (x(J_0) \cup y(J_0))$ ist.

Beweis. Sei $t \geq t_0$. Die Funktion

$$\psi(t) = |x(t) - y(t)|^2 \tag{2.19}$$

erfüllt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi(t) = \frac{d}{dt}|x(t) - y(t)|^2 &= 2\left\langle \dot{x}(t) - \dot{y}(t), x(t) - y(t)\right\rangle \\ &= 2\left\langle f(t, x(t)) - f(t, y(t)), x(t) - y(t)\right\rangle \\ &\leq 2K|x(t) - y(t)|^2 \\ &= 2K\psi(t). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Somit ist

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-2K(t-t_0)}\psi(t)\right) \leq -2Ke^{-2K(t-t_0)}\psi(t) + 2Ke^{-2K(t-t_0)}\psi(t) = 0 \tag{2.21}$$

und es gilt

$$e^{-2K(t-t_0)}\psi(t) \leq \psi(t_0), \tag{2.22}$$

was nach Wurzelziehen die gesuchte Abschätzung ist. Um den Fall $t < t_0$ zu untersuchen, definiere für $t \in \tilde{J} = \{t > t_0 \colon 2t_0 - t \in J\}$:

$$\tilde{x}(t) = x(2t_0 - t), \quad \tilde{y}(t) = y(2t_0 - t). \tag{2.23}$$

Diese lösen

$$\dot{\tilde{x}}(t) = -f(2t_0 - t, \tilde{x}(t)) \tag{2.24}$$

und somit gilt nach dem ersten Teil

$$|\tilde{x}(t) - \tilde{y}(t)| \leq e^{K(t-t_0)}|\tilde{x}(t_0) - \tilde{y}(t_0)| \tag{2.25}$$

und demnach

$$|x(2t_0 - t) - y(2t_0 - t)| \leq e^{K|t-t_0|}|x(t_0) - y(t_0)| \quad \forall t \in \tilde{J}. \tag{2.26}$$

□

2.2.3 Lemma. [Verkleben lokaler Lösungen] *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f \colon J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Falls zwei Lösungen*

$$x_j \colon I_j \to \Omega, \quad j = 1, 2, \tag{2.27}$$

von

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \tag{2.28}$$

in einem Punkt $t_0 \in I_1 \cap I_2$ übereinstimmen, so stimmen sie in ganz $I_1 \cap I_2$ überein.

Beweis. Sei

$$C = \{t \in I_1 \cap I_2 \colon x_1(t) = x_2(t)\}. \tag{2.29}$$

Dann ist C nach Annahme nicht leer. Ferner ist C aufgrund der Stetigkeit der x_i abgeschlossen. Wir zeigen, dass C offen ist und damit dann ganz $I_1 \cap I_2$ sein muss. Sei also $\tau \in C$. Die x_i sind jeweils Lösungen von (2.9) mit Anfangswert

$$x_0 := x_1(\tau) = x_2(\tau). \tag{2.30}$$

Aufgrund der lokalen Eindeutigkeit stimmen sie in einer Umgebung überein und somit ist C offen. □

Wir beweisen nun die Existenz einer maximalen (also nicht fortsetzbaren) Lösung. Dieser ist der Hauptsatz dieses Kapitels.

2.2.4 Theorem. [Maximale Lösung] *(i) Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f \colon D \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, $(t_0, x_0) \in D$. Dann existiert ein maximales offenes Intervall I_{t_0,x_0}, in dem eine Lösung von*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

definiert ist.

(ii) Ist f Lipschitz-stetig, so existieren zu jeder kompakten Teilmenge $C \Subset D$ reelle Zahlen $\sigma, \tau \in I_{t_0,x_0}$, sodass

$$(t > \tau \text{ oder } t < \sigma) \Rightarrow (t, x(t)) \notin C. \tag{2.32}$$

2.2.5 Bemerkung. Letztere Eigenschaft von I_{t_0,x_0} kann man auch ausdrücken, dass $(t, x(t))$ jede kompakte Teilmenge $C \Subset D$ verlässt, sofern man sich den Grenzen von I_{t_0,x_0} nähert.

Beweis. Sei $(x_i, I^i_{t_0,x_0})_{i \in I}$ die Familie aller Lösungen und definiere

$$I_{t_0,x_0} = \bigcup_{i \in I} I^i_{t_0,x_0} \tag{2.33}$$

sowie

$$x(t) = x_i(t), \quad \text{falls } t \in I^i_{t_0,x_0}. \tag{2.34}$$

Dann ist I_{t_0,x_0} ein offenes Intervall und x wohldefiniert nach Lemma 2.2.3. Offenbar ist I_{t_0,x_0} maximal. Um die zweite Behauptung zu beweisen, sei $C \subset D$ kompakt und nehme an, dass für alle Paare $\sigma, \tau \in I_{t_0,x_0}$ ein $t \in I_{t_0,x_0}$ existiert mit $(t > \tau$ oder $t < \sigma)$ und $(t, x(t)) \in C$. Indem man

$$\sigma \to \inf I_{t_0,x_0} \tag{2.35}$$

und

$$\tau \to \sup I_{t_0,x_0} \tag{2.36}$$

laufen lässt, findet man eine oBdA eine Folge t_n mit

$$t_n \to \sup I_{t_0,x_0} \text{ und } (t_n, x(t_n)) \in C. \tag{2.37}$$

Wegen der Kompaktheit konvergiert eine Teilfolge, die wir nicht umindizieren:

$$(t_n, x(t_n)) \to (t_\infty, x_\infty) \in C \Subset D. \tag{2.38}$$

Löse das AWP

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t, y(t)) \\ y(t_\infty) &= x_\infty \end{aligned} \tag{2.39}$$

in einer kleinen Umgebung $I_{t_\infty, x_\infty} = (t_\infty - \epsilon, t_\infty + \epsilon)$, sodass

$$(t_\infty - \epsilon, t_\infty) \subset I_{t_0, x_0}. \tag{2.40}$$

Nach Lemma 2.2.2 gilt

$$|x(t) - y(t)| \leq e^{K|t-t_n|}|x(t_n) - y(t_n)| \quad \forall t_n, t \in (t_\infty - \epsilon, t_\infty). \tag{2.41}$$

In dem bei festgehaltenem t nun t_n nach t_∞ laufen lässt, sieht man

$$x(t) = y(t) \quad \forall t \in (t_\infty - \epsilon, t_\infty). \tag{2.42}$$

Somit bildet y eine Fortsetzung von x, im Widerspruch zur Maximalität von x. □

Mit Hilfe von Proposition 1.2.1 erhalten wir folgendes Resultat für Differentialgleichungen höherer Ordnung.

2.2.6 Korollar. *Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k \times n}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und*

$$\left(t_0, y_0, y_0^1, \ldots, y_0^{k-1}\right) \in D. \tag{2.43}$$

Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y^{(k)}(t) &= f(t, y(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(k-1)}(t)) \\ (y(t_0), \dot{y}(t_0), \ldots y^{(k-1)}(t_0)) &= \left(y_0, y_0^1, \ldots, y_0^{k-1}\right) \end{aligned} \tag{2.44}$$

eine auf einem maximalen Intervall I eindeutige Lösung y. Ist f zudem global Lipschitz-stetig, so verlässt die Kurve $t \mapsto (t, y(t), \dot{y}(t), \ldots y^{(k-1)}(t))$ jede kompakte Teilmenge von D, wenn man sich den Grenzen von I nähert.

Wir diskutieren nun ein Kriterium, unter dem das maximale Definitionsintervall mit der Zeitkomponente des Vektorfeldes übereinstimmt.

2.2.7 Korollar. *Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $t_0 \in J$. Sei $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und lokal in J von höchstens linearem Wachstum in x, d.h.*

$$\forall I \Subset J \; \exists c > 0 \; \forall t \in I \; \forall x \in \mathbb{R}^n : \quad |f(t, x)| \leq c(1 + |x|). \tag{2.45}$$

Dann ist jede maximal definierte Lösung von $\dot{x} = f(t, x(t))$ in ganz J definiert.

Beweis. Nehme an, x wäre maximal in $I \subsetneq J$ definiert und oBdA sei

$$t_0 := \sup I \in J. \tag{2.46}$$

Sei $\epsilon > 0$ so klein, dass

$$I' = (t_0 - \epsilon, t_0) \Subset J. \tag{2.47}$$

Dann gilt nach Voraussetzung

$$\frac{d}{dt}(1 + |x|^2) = 2\,\langle \dot{x}, x\rangle \leq 2|f(t,x)||x| \leq c|x| + c|x|^2 \leq c(1 + |x|^2), \tag{2.48}$$

nach der binomischen Formel und neuen mit neuer Konstante c. Mit einer analogen Rechnung wie in Lemma 2.2.2 wächst $1 + |x|^2$ in I' höchstens exponentiell und bleibt in endlicher Zeit insbesondere beschränkt. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass x für $t \to t_0$ jedes Kompaktum von $\Omega = \mathbb{R}^n$ verlässt. □

Wir haben in Lemma 2.2.2 bereits gesehen, dass Lösungen eines AWP mit Lipschitz-stetigem Vektorfeld in gewisser Weise stetig von Anfangswerten abhängen. Es bietet sich daher an, den Anfangswert und dessen Zeitpunkt nun als Variable mit in die Lösung aufzunehmen. Zu deutlicheren Unterscheidung verwenden wir dann die Notation τ und ξ.

2.2.8 Definition. [Globaler Fluss] Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet, E eine offene Teilmenge eines metrischen Raumes und $f \colon D \times E \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein lokal Lipschitz-stetiges, parameter- und zeitabhängiges Vektorfeld. Die Abbildung

$$x \colon \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}^n \tag{2.49}$$

heißt *globaler Fluss von* f, falls

$$\mathcal{D}(f) = \{(t, \tau, \xi, \lambda) \in \mathbb{R} \times D \times E \colon t \in (t_-(\tau, \xi, \lambda), t_+(\tau, \xi, \lambda))\} \tag{2.50}$$

und x das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, \tau, \xi, \lambda) &= f(t, x(t, \tau, \xi, \lambda)) \\ x(\tau, \tau, \xi, \lambda) &= \xi \end{aligned} \tag{2.51}$$

im maximalen Existenzintervall $(t_-(\tau, \xi, \lambda), t_+(\tau, \xi, \lambda)))$ lößt.

Später geht es dann um Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften von x in $\mathcal{D}(f)$. Zunächst wollen wir das Kapitel allerdings mit einer geometrischen Anwendung abschließen.

2.3 Geodäten auf Untermannigfaltigkeiten

Auf Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n+k}$ wollen wir die Existenz sogenannter *Geodäten* beweisen, also grob gesagt Kurven *ohne intrinsiche Beschleunigung*. Wir wiederholen kurz die notwendigen Begriffe über Mannigfaltigkeiten, vgl. [5]. Eine gut verständliche Einführung in die “Geometrie” von Untermannigflatigkeiten liefert [6].

2.3.1 Definition. [Untermannigfaltigkeit] (i) Seien $n, m, k \in \mathbb{N}$. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ heißt *C^k-Untermannigfaltigkeit der Dimension n*, falls zu jedem Punkt $x \in M$ eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^{n+m}$, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine Abbildung $\varphi \in C^k(U, V)$ existiert, sodass φ ein Homöomorphismus auf ihr Bild

$$\varphi(U) = V \cap M \tag{2.52}$$

ist und $D\varphi$ in U Rang n hat. φ heißt dann *lokale Parametrisierung* von M um x.

(ii) Der Tangentialraum an $x \in M$ ist dann definiert durch

$$T_xM = D\varphi(\varphi^{-1}(x))\mathbb{R}^n. \tag{2.53}$$

2.3.2 Beispiel. [Die Sphäre] Wir betrachten die Menge

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon |x| = 1\}. \tag{2.54}$$

Per Definition besitzt jeder Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ eine nichtveschwindende Komponente. Wir betrachten den Fall $x^{n+1} > 0$. Dann gilt mit

$$x^{n+1} = \sqrt{1 - |\hat{x}|^2} =: \psi(\hat{x}), \tag{2.55}$$

wobei $\hat{x} = x - x^{n+1}e_{n+1}$, dass

$$\varphi(\hat{x}) = (\hat{x}, \psi(\hat{x})) \tag{2.56}$$

eine lokale Parametrisierung von $\mathbb{S}^n$ um jeden Punkt mit $x^{n+1} > 0$ ist. Zu einem solchen Punkt x ist der Tangentialraum dann gegeben durch

$$T_x\mathbb{S}^n = D\varphi(\varphi^{-1}(x))\mathbb{R}^n = D\varphi(\hat{x})\mathbb{R}^n = \operatorname{span}\left(e_i + \frac{\partial\psi}{\partial\hat{x}^i}\right)_{1\leq i\leq n}. \tag{2.57}$$

2.3.3 Definition. [Geodäten] Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1. Eine Kurve $\gamma \in C^2(I, \mathbb{R}^{n+m})$ heißt *Geodäte* in M, falls

$$\gamma(t) \in M \quad \forall t \in I \quad \text{und} \quad \ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}M \quad \forall t \in I. \tag{2.58}$$

2.3.4 Theorem. [Lokale Existenz von Geodäten] *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^3, $x_0 \in M$ und $v_0 \in T_{x_0}M$. Dann gelten:*

(i) Es existiert ein Interval $I = (-\epsilon, \epsilon)$, sodass genau eine Geodäte $\gamma \colon I \to M$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\dot{\gamma}(0) = v_0$ existiert.

(ii) Ist M geschlossen, d.h. kompakt und ohne Rand, so ist die maximale Geodäte auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Beweis. (i) Sei $\varphi \colon U \to M$ eine lokale C^3-Parametrisierung von M um x_0 mit $\varphi(0) = x_0$ und für $\delta > 0$ sei $\mu \colon (-\delta, \delta) \to U$ zunächst eine allgemeine Kurve mit $\mu(0) = 0$. Setze $\gamma = \varphi \circ \mu$ und differenziere:

$$\dot{g}(t) = D\varphi(\mu(t))\dot{\mu}(t) \tag{2.59}$$

und
$$\ddot{\gamma}(t) = D^2\varphi(\mu(t))(\dot{\mu}(t), \dot{\mu}(t)) + D\varphi(\mu(t))\ddot{\mu}(t). \tag{2.60}$$
Dann gilt
$$\ddot{\gamma} \perp T_{\gamma(t)}M \tag{2.61}$$
genau dann wenn
$$0 = \left\langle D^2\varphi(\mu(t))(\dot{\mu}(t), \dot{\mu}(t)) + D\varphi(\mu(t))\ddot{\mu}(t), D\varphi(\mu(t))w \right\rangle \quad \forall w \in \mathbb{R}^n \tag{2.62}$$
und somit
$$(D\varphi)^* \, D^2\varphi(\dot{\mu}, \dot{\mu}) + \left((D\varphi)^* \circ D\varphi\right) \ddot{\mu} = 0 \tag{2.63}$$
Da $D\varphi$ vollen Rang hat, ist $(D\varphi)^* \circ D\varphi$ invertierbar, wir können nach $\ddot{\mu}$ auflösen und erhalten mit Korollar 2.2.6 eine lokale Lösung μ von (2.63). Wir sehen, dass $\gamma = \varphi \circ \mu$ dann die gesuchte Geodäte ist.

(ii) ist Übungsaufgabe. □

2.3.5 Bemerkung. Bis auf geringe Modifikationen gelten die Resultate aus diesem Kapitel auch in allgemeinen Banachräumen. Auch hier ist ein Vektorfeld eine Abbildung
$$f\colon J \times \Omega \to E, \tag{2.64}$$
wobei E nun ein Banachraum und $\Omega \subset E$ eine offene Menge ist. An den Beweisen ändert sich in der Regel nichts, man muss nur hin und wieder aufpassen, dass abgeschlossene und beschränkte Teilmengen nun nicht mehr kompakt sein müssen, falls man das irgendwo verwendet hat. Bücher, die solche Differentialgleichungen in diesem allgemeinen Rahmen behandeln sind [1] und [3, Kap. 9].

Kapitel 3

Lineare Differentialgleichungen

Nun wenden wir uns einer einfachen Klasse von Differentialgleichungen zu, die recht explizite Lösungen erlauben. Eine besonders einfache Differentialgleichung für eine reelle (oder komplexe) Funktion ist

$$\dot{x} = ax \tag{3.1}$$

mit einer reellen (oder komplexen) Zahl a. Dies ist ein Spezialfall einer linearen Differentialgleichung, da die rechte Seite eine lineare Abbildung in x ist. Wir kennen die Lösung bereits:

$$x(t) = x_0 e^{at}, \tag{3.2}$$

wobei $x_0 \in \mathbb{K}$ ein beliebiger Anfangswert ist. Wir werden sehen, dass eine analoge Formel auch in höheren Dimensionen gilt, nämlich dass die Gleichung

$$\dot{x} = Ax, \tag{3.3}$$

wobei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ nun eine reelle oder komplexe Matrix ist, die vektorwertigen Lösungen

$$x(t) = e^{tA} x_0 \tag{3.4}$$

besitzt, wobei e^{tA} die Exponentialfunktion für Matrizen ist, d.h.

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \tag{3.5}$$

Die Konvergenz dieser Reihe und elementare Eigenschaften wurden bereits in [4] und [5] gezeigt, wir werden die wichtigsten Dinge aber in den Übungen wiederholen. Nun wenden wir uns der allgemeinen Theorie linearer Differentialgleichungen zu. Eine gut verständliche Einführung findet sich auch in [8].

3.1 Lineare Differentialgleichungen

3.1.1 Definition. [Lineare Differentialgleichung] Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{3.6}$$

mit Funktionen $A\colon J \to \mathbb{K}^{n\times n}$ und $b\colon J \to \mathbb{K}^n$ heißt *inhomogen linear* und nur *linear*, falls $b = 0$ ist.

Der Übergang zu komplexwertigen Lösungen bereitet , was Existenz und Eindeutigkeit betrifft, keine weiteren Einschränkungen. Es gilt nämlich:

3.1.2 Proposition. [Komplexe Systeme] *Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A\colon J \to \mathbb{C}^{n\times n}$ sowie $b\colon J \to \mathbb{C}^n$ seien Funktionen. Sei $t_0 \in J$ und $z_0 \in \mathbb{C}^n$. Dann ist die Lösbarkeit des AWP*

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A(t)z(t) + b(t) \\ z(t_0) &= z_0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

äquivalent zur Lösbarkeit des linearen Systems von $2n$ reellen Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C(t) & -D(t) \\ D(t) & C(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(t) \\ d(t) \end{pmatrix} \\ (x(t_0), y(t_0))^t &= (x_0, y_0)^t, \end{aligned} \tag{3.8}$$

wobei $z = x + iy$, $A = C + iD$ und $b = c + id$ mit reellwertigen x, y, C, D, c, d ist.

Beweis. Sei also z eine Lösung zu (3.7), dann gilt

$$\dot{x} + i\dot{y} = (C + iD)(x + iy) + c + id = Cx - Dy + c + i(Cy + Dx + d). \tag{3.9}$$

Aufteilen nach Real- und Imaginärteil ergibt, dass $(x, y)^t$ eine Lösung von (3.8) sein muss. Die Rückrichtung geht ganz analog durch zusammensetzen von x und y in eine komplexwertige Funktion. $\square$

Wir erhalten folgenden Satz, dessen Beweis eine Übungsaufgabe ist.

3.1.3 Proposition. [Existenz für lineare Systeme] *(i) Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $t_0 \in J$ und*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{3.10}$$

eine inhomogen lineare Differentialgleichung mit $A \in C^0(J, \mathbb{K}^{n\times n})$ und $b \in C^0(J, \mathbb{K}^n)$. Dann existiert zu jedem $\xi \in \mathbb{K}^n$ eine eindeutige Lösung $x\colon J \to \mathbb{K}^n$ von (3.10) mit $x(t_0) = \xi$.

(ii) Ist $b = 0$ und sind x_i, $1 \le i \le k$, Lösungen von (3.10) zu den Anfangswerten ξ_i, so gilt

$$\{\xi_i\} \text{ linear unabhängig} \quad \Leftrightarrow \quad \{x_i(t)\} \text{ linear unabhängig } \forall t \in J. \tag{3.11}$$

(iii) Die Menge der Lösungen $x \in C^1(J, \mathbb{K}^n)$ von (3.10) mit $b = 0$ bildet einen n-dimensionalen Untervektorraum von $C^1(J, \mathbb{K}^n)$ und für jedes $t_0 \in J$ ist

$$\xi \mapsto x(\cdot, t_0, \xi) \tag{3.12}$$

ein Isomorphismus auf den Lösungsraum.

Aufgrund von Proposition 3.1.3 ist folgende Definition gerechtfertigt.

3.1.4 Definition. [Fundamentalmatrix] Eine linear unabhängige Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ von Lösungen einer linearen Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{3.13}$$

heißt *Fundamentalsystem* und die Matrix

$$X = [x_1, \ldots, x_n] \tag{3.14}$$

heißt *Fundamentalmatrix*. Gilt außerdem

$$X(t_0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}, \tag{3.15}$$

so heißt X *Hauptfundamentalmatrix bei* t_0.

Um eine Darstellungsformel für Lösungen von (3.10) zu erhalten, benötigen wir eine weitere Definition.

3.1.5 Definition. [Evolutionsoperator] Sei X die Hauptfundamentalmatrix bei t_0 zu (3.13). Dann heißt die Matrix

$$\Lambda(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau), \quad t, \tau \in J, \tag{3.16}$$

der zu A gehörige *Evolutionsoperator*.

Der Evolutionsoperator hat einige nützliche Eigenschaften:

3.1.6 Lemma. *Sei Λ der zu (3.13) gehörige Evolutionsoperator. Dann ist $\varphi = \Lambda(\cdot, \tau)$ eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= A\varphi \\ \varphi(\tau) &= \mathrm{id}\,. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Ferner gelten für alle $s, t, \tau \in J$

$$\Lambda(t, s) \circ \Lambda(s, \tau) = \Lambda(t, \tau) \tag{3.18}$$

und

$$\Lambda(t, \tau)^{-1} = \Lambda(\tau, t). \tag{3.19}$$

Beweis.

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{X}(t)X^{-1}(\tau) = A(t)X(t)X^{-1}(\tau) = A(t)\Lambda(t, \tau) = A(t)\varphi(t). \tag{3.20}$$

$$\varphi(\tau) = \Lambda(\tau, \tau) = \mathrm{id}\,. \tag{3.21}$$

$$\Lambda(t, s) \circ \Lambda(s, \tau) = X(t) \circ X^{-1}(s) \circ X(s) \circ X^{-1}(\tau) = \Lambda(t, \tau). \tag{3.22}$$

$$\Lambda(t, \tau)^{-1} = \big(X(t) \circ X^{-1}(\tau)\big) = X(\tau) \circ X^{-1}(t) = \Lambda(\tau, t). \tag{3.23}$$

□

Mit Hilfe des Evolutionsoperators können wir eine zunächst abstrakte Formel für die Lösung einer inhomogen linearen Gleichung angeben, die sich zur expliziten Berechnung von Lösungen verwenden lassen wird.Folgende kleine Rechnung, die sogenannte *Variation der Konstanten*, motiviert das darauffolgende Theorem:

Nach Lemma 3.1.6 lößt für $\xi \in \mathbb{K}^n$ die Funktion

$$\psi(t) = \Lambda(t, \tau)\xi \tag{3.24}$$

die Gleichung

$$\dot{\psi}(t) = A(t)\psi(t) \tag{3.25}$$

mit Anfangswert $\psi(\tau) = \xi$. In dem wir in (3.24) nun die Konstante variieren, d.h. die Funktion

$$\psi(t) = \Lambda(t, \tau)\chi(t) \tag{3.26}$$

betrachten, wobei χ noch zu bestimmen sein wird, sodass $\chi(\tau) = \xi$ gilt, erhalten wir

$$\dot{\psi}(t) = A(t)\psi(t) + \Lambda(t, \tau)\dot{\chi}(t). \tag{3.27}$$

Nun wollen wir das inhomogene Problem lösen, d.h. wir müssen χ so bestimmen, dass

$$\Lambda(t, \tau)\dot{\chi}(t) = b(t) \tag{3.28}$$

gilt. Nach invertieren von Λ und Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erhalten wir notwendigerweise

$$\chi(t) = \xi + \int_\tau^t \Lambda(\tau, s)b(s)\ ds. \tag{3.29}$$

Einsetzen in (3.24) motiviert die Gültigkeit des folgenden Theorems.

3.1.7 Theorem. *Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und seien $A\colon J \to \mathbb{K}^{n\times n}$ und $b\colon J \to \mathbb{K}^n$ stetig, sowie $\xi \in \mathbb{K}^n$. Dann ist der globale Fluss des Vektorfeldes*

$$f(t, x) = A(t)x + b(t) \tag{3.30}$$

durch die Formel

$$x(t, \tau, \xi) = \Lambda(t, \tau)\xi + \int_\tau^t \Lambda(t, s)b(s)\ ds \tag{3.31}$$

gegeben, wobei Λ der zu A gehörige Evolutionsoperator ist.

Beweis. Es gilt mit Hilfe von Lemma 3.1.6 und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\dot{x}(t,\tau,\xi) = A(t)\Lambda(t,\tau)\xi + b(t) + \int_\tau^t A(t)\Lambda(t,s)b(s) = A(t)x(t,\tau,\xi) + b(t), \tag{3.32}$$

sowie

$$x(\tau,\tau,\xi) = \xi. \tag{3.33}$$

□

Die Wronski-Determinante

3.1.8 Definition. Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A \in C^0(J, \mathbb{K}^{n\times n})$. Seien x_i, $1 \le i \le n$, Lösungen des linearen Systems

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \tag{3.34}$$

Dann heißt die durch

$$w = \det(x_1, \dots, x_n) \tag{3.35}$$

gegebene Funktion $w\colon J \to \mathbb{K}$ die *Wronski-Determinante* des Lösungssystems $(x_1, \dots, x_n)$.

Die Wronski-Determinante lößt selbst eine lineare Differentialgleichung:

3.1.9 Theorem. *Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A \in C^0(J, \mathbb{K}^{n\times n})$. Seien x_i, $1 \le i \le n$, Lösungen des linearen Systems*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \tag{3.36}$$

Dann lößt die Wronski-Determinante die Gleichung

$$\dot{w}(t) = (\operatorname{tr} A(t))\, w(t). \tag{3.37}$$

Insbesondere verschwindet sie genau dann an einer Stelle, wenn sie überall verschwindet.

Beweis. Sei $Y = (y_1, \dots, y_n)$ zunächst eine Hauptsfundamentalmatrix bei $t \in J$ und $w_Y = \det Y$. Aus der Multilinearität der Determinante in den Spalten erhält man

$$\begin{aligned} \dot{w}_Y &= \sum_{i=1}^n \det(y_1, \dots, \dot{y}_i, \dots, y_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \det(y_1, \dots, Ay_i, \dots, y_n) \end{aligned} \tag{3.38}$$

und somit

$$\dot{w}_Y(t) = \sum_{i=1}^n \det(e_1, \dots A_i, \dots, e_n) = \operatorname{tr}(A(t))w_Y(t). \tag{3.39}$$

Allgemein gilt für $\tau \in J$ aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit des AWP

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) \tag{3.40}$$

bei vorgegebenem $X(\tau)$, dass

$$X(t) = Y(t)X(\tau). \tag{3.41}$$

Somit gilt

$$\det(X(t)) = \det(Y(t)) \det(X(\tau)) \tag{3.42}$$

und

$$\dot{w}(t) = \dot{w}_Y(t)w(\tau) = \operatorname{tr}(A(t)) \det(Y(t)) \det(X(\tau)) = \operatorname{tr}(A(t))w(t). \tag{3.43}$$

□

3.2 Konstante Koeffizienten

3.2.1 Beispiel. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ konstant, dann ist der Evolutionsoperator gegeben durch

$$\Lambda(t,\tau) = e^{(t-\tau)A}, \tag{3.44}$$

wobei

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \tag{3.45}$$

ist. Es ergibt sich für die Lösung von (3.13) mit Anfangswert ξ

$$x(t) = e^{(t-\tau)A}\xi + \int_\tau^t e^{(t-s)A} b(s)\ ds. \tag{3.46}$$

Hierbei muss die Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion für Matrizen gerechtfertigt werden.

3.2.2 Proposition. [Exponentialfunktion für Matrizen] *Für jedes $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ konvergiert die Reihe (3.45) lokal gleichmäßig in $\mathbb{R}$, ist bzgl. t differenzierbar und es gilt*

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}. \tag{3.47}$$

Ferner gilt für alle $s,t \in \mathbb{R}$

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}. \tag{3.48}$$

Beweis. OBdA verwenden wir auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ die Norm

$$\|A\| = \max_{|\xi|=1} |A\xi|. \tag{3.49}$$

Dann gilt

$$|A\xi| \leq \|A\||\xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{K}^n \tag{3.50}$$

und somit

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k. \tag{3.51}$$

Daher folgt für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{|t|^k \|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{m} \frac{|t|^k \|A\|^k}{k!}, \tag{3.52}$$

womit wir eine lokal in $\mathbb{R}$ gleichmäßige Majorante haben. Die Differenzierbarkeit folgt aus dem Differenzierbarkeitssatz für gleichmäßig konvergente Folgen, vgl. [4, Satz 13.4]. Daher kann man unter der Reihe differenzieren und die erste Formel folgt. Um die zweite zu beweisen, setze zu festem $s \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = e^{(t+s)A}, \quad \psi(t)e^{tA}e^{sA}. \tag{3.53}$$

Dann gelten

$$\varphi(0) = \psi(0) = e^{sA} \tag{3.54}$$

und

$$\dot{\varphi} = A\phi, \quad \dot{\psi} = A\psi. \tag{3.55}$$

Somit folgt die Gleichheit nach dem Eindeutigkeitssatz. □

Wir benötigen weitere Eigenschaften.

3.2.3 Proposition. *Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$.*

(i) Gilt $AB = BA$, so folgen

$$Ae^B = e^B A \quad \textit{und} \quad e^{A+B} = e^A e^B. \tag{3.56}$$

(ii) Ist B invertierbar, so gilt

$$e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}. \tag{3.57}$$

Beweis. (i) Sei

$$X(t) = Ae^{tB}, \quad Y(t) = e^{tB}A. \tag{3.58}$$

Dann gelten $X(0) = Y(0) = A$ und

$$\dot{X}(t) = ABe^{tB} = BX(t), \quad \dot{Y}(t) = Be^{tB}A = BY(t). \tag{3.59}$$

Daher gilt $X = Y$ und insbesondere $X(1) = Y(1)$. Analog seien

$$U(t) = e^{t(A+B)}, \quad V(t) = e^{tA}e^{tB}. \tag{3.60}$$

Dann gelten $U(0) = V(0) = \mathrm{id}$ und

$$\dot{U}(t) = (A+B)U(t), \quad \dot{V}(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A+B)V(t). \tag{3.61}$$

Somit folgt $U = V$ und insbesondere $U(1) = V(1)$.

(ii) funktioniert ähnlich und ist Übungsaufgabe. □

Wir wissen nun also, dass

$$\Lambda(t-\tau) = e^{(t-\tau)A} \tag{3.62}$$

der zu A gehörige Evolutionsoperator ist. Da wir hier nur konstante A betrachten, können wir annehmen, dass $\tau = 0$ ist. Wie berechnen wir also e^{tA}, um eine Basis des Lösungsraumes zu erhalten? Mit Hilfe der Jordanschen Normalform erhalten wir eine Basiswechselmatrix C, sodass

$$B = C^{-1}AC \tag{3.63}$$

in Jordanscher Normalform ist. Dann gilt nach Proposition 3.2.3, dass

$$e^{tA} = e^{tCBC^{-1}} = Ce^{tB}C^{-1}. \tag{3.64}$$

Da Multiplikation einer Matrix nur Linearkombinationen der Spalten nimmt, ist

$$e^{tA}C = Ce^{tB} \equiv C\,(S_1\ S_2\ \dots\ S_n) = (C(S_1)\ C(S_2)\ \dots C(S_n)) \tag{3.65}$$

eine Fundamentalmatrix, d.h. die Spalten $C(S_i)$ sind n linear unabhängige Lösungen. Man muss also im Wesentlichen noch die Spalten der Matrix e^{tB} berechnen. Hierzu genügt des offenbar, beliebige Potenzen eines Jordanblocks der Größe l,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \equiv \lambda\,\mathrm{id}_l + N \tag{3.66}$$

berechnen zu können. Es gilt

$$\begin{aligned} e^{t\lambda\,\mathrm{id} + tN} &= e^{\lambda t}e^{tN} = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{l-1}\frac{(tN)^k}{k!} \\ &= e^{\lambda t}\left((\delta^i_j) + t(\delta^{i+1}_j) + \dots + \frac{1}{(l-1)!}t^{l-1}(\delta^{i+l-1}_j)\right) \\ &= e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{l-1}\frac{t^k}{k!}\left(\delta^{i+k}_j\right). \end{aligned} \tag{3.67}$$

Mit anderen Worten, die m-te Spalte von e^{tJ} hat die Form

$$\left(e^{tJ}\right)_m = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.68}$$

Die gesamte Matrix e^{tB} hat die Gestalt

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & & \\ & e^{tJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tJ_k} \end{pmatrix}. \tag{3.69}$$

Da wir bereits wissen, dass Ce^{tB} eine Fundamentalmatrix ist bei $t = 0$ ist, erhalten wir:

3.2.4 Theorem. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zu einer k-fachen Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms von A gibt es k linear unabhängige Lösungen von*

$$\dot{x} = Ax. \tag{3.70}$$

Diese haben die Form

$$x_{i,\lambda}(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{i} b_j^i t^j, \quad 0 \le i \le k-1, \tag{3.71}$$

für geeignete Vektoren $b_j^i \in \mathbb{C}^n$. Hierbei ist der höchste Koeffizient mit $b_j^i \neq 0$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so erhält man ein reelles Fundamentalsystem, indem man aus den komplexen n unabhängige Lösungen aus den Real- und Imaginärteilen auswählt.

Beweis. Folgt aus obiger Rechnung. Die Behauptung über das reelle Fundamentalsystem ist eine Übungsaufgabe. □

Dieser Satz erlaubt, das explizite Berechnen der Jordanschen Normalform zu vermeiden. Stattdessen kennt man ja die Struktur der Lösungen (3.71), kann diese so ansetzen und die a_j sukzessive bestimmen.

3.2.5 Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}. \tag{3.72}$$

Das charakteristische Polynom ist

$$P_A(\lambda) = -(1-\lambda)(3+\lambda) + 4 = (\lambda+1)^2. \tag{3.73}$$

Der Eigenraum zu $\lambda = -1$ ist

$$\mathrm{Eig}_A(\lambda) = \mathrm{Ker}(A + \lambda\,\mathrm{id}) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}. \tag{3.74}$$

Somit ist $v = (1,2)^t$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ und die erste Lösung ergibt sich durch

$$x_{0,\lambda}(t) = ve^{-t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}. \tag{3.75}$$

Nun wissen wir, dass die zweite Lösung die Form

$$x_{1,\lambda} = we^{-t} + vte^{\lambda t} \tag{3.76}$$

haben muss. Ableiten ergibt

$$\dot{x}_{1,\lambda}(t) = -we^{-t} + ve^{-t} - vte^{-t} \overset{!}{=} Ax_{1,\lambda}(t) = e^{-t}Aw - te^{-t}v. \tag{3.77}$$

Somit gilt dann notwendigerweise

$$Aw = v - w, \tag{3.78}$$

also

$$\begin{aligned} w^1 - w^2 &= 1 - w^1 \\ 4w^1 - 3w^2 &= 2 - w^2 \end{aligned} \tag{3.79}$$

und somit z.B.

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{3.80}$$

Die zweite Lösung ist dann

$$x_{1,\lambda}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t-1 \end{pmatrix} e^{-t}. \tag{3.81}$$

3.2.6 Bemerkung. Der Satz über die Differenzierbarkeit von Potenzreichen, vgl. [5], ergibt dass die Exponentialabbildung von Matrizen

$$\Psi \colon B \mapsto e^B \tag{3.82}$$

unendlich of stetig differenzierbar ist. Die Ableitung ist

$$D\Psi(B)A = Ae^B, \tag{3.83}$$

falls $AB = BA$. Somit ist dann für

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{3.84}$$

die Abbildung

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t A(s)\ ds} x_0 \tag{3.85}$$

eine Lösung, falls

$$A(t) \int_{t_0}^t A(s)\ ds = \int_{t_0}^t A(s)\ ds\ A(t) \quad \forall t \in J. \tag{3.86}$$

3.3 Gleichungen höherer Ordnung

Wir wenden die bisherigen Resultate dieses Kapitels nun auf skalare Differentialgleichungen n-ter Ordnung an und erhalten:

3.3.1 Theorem. [Lineare Gleichungen höherer Ordnung] *Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a_i \in C^0(J, \mathbb{K}), b \in C^0(J, \mathbb{K})$. Sei $\xi \in \mathbb{K}^n$ und $\tau \in J$. Dann existiert eine auf J eindeutige Lösung $y \in C^n(J, \mathbb{K})$ von*

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y &= b \\ \left(y(\tau), \dot{y}(\tau), \ldots, y^{(n-1)}(\tau)\right) &= \xi. \end{aligned} \tag{3.87}$$

Sie ist gegeben durch

$$y(t) = \big(X(t)X^{-1}(\tau)\xi\big)^1 + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}y_i(t)\int_\tau^t \frac{\det(\tilde{X}_i(s))}{\det X(s)}b(s)\ ds, \tag{3.88}$$

wobei X eine Fundamentalmatrix zu

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.89}$$

ist, $\tilde{X}_i$ der Minor von mit fehlender n-ter Zeile und i-ter Spalte ist und y_i der i-te Eintrag der ersten Zeile von X ist.

Beweis. Nach Proposition 1.2.1 ist das äquivalente inhomogen lineare System gegeben durch

$$\dot{x} = A(t)x + \tilde{b}, \tag{3.90}$$

wobei A wie oben definiert ist und

$$\tilde{b} = (0, \dots, 0, b)^t. \tag{3.91}$$

Gemäß Proposition 3.1.3 erhalten wir eine Haupfundamentalmatrix X bei $t_0 \in J$, deren erste Zeile n Lösungen $y_1, \dots, y_n$ von (3.87) enthält. Mit Hilfe des Evolutionsoperators

$$\Lambda(t,\tau) = X(t)X^{-1}(\tau) \tag{3.92}$$

erhalten wir mit Theorem 3.1.7 die allgemeine Lösung

$$x(t) = \Lambda(t,\tau)\xi + X(t)\int_\tau^t X^{-1}(s)\tilde{b}(s)\ ds \tag{3.93}$$

mit Anfangswert $x(\tau) = \xi$. Nach der Cramerschen Regel ist nun

$$\left(X^{-1}\tilde{b}\right)^i = \frac{1}{\det X}\det\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_{i-1}^{(n-1)} & b & y_{i+1}^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Diese Determinante kann nach der i-ten Spalte entwickelt werden und somit folgt

$$(X^{-1}b)^i = \frac{b}{\det X}(-1)^{n+i}\det(\tilde{X}_i). \tag{3.94}$$

Wir sind nur an der ersten Zeile von (3.93) interessiert. Diese ist

$$x^1(t) = \big(X(t)X^{-1}(\tau)\xi\big)^1 + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}y_i(t)\int_\tau^t \frac{\det(\tilde{X}_i(s))}{\det X(s)}b(s)\ ds. \tag{3.95}$$

□

Im Falle konstanter Koeffizienten erhalten wir (Beweis ist Übungsaufgabe):

3.3.2 Theorem. *Sei*

$$A(D) = \sum_{j=0}^{n} a_j D^j, \quad a_n = 1, a_j \in \mathbb{K}, \tag{3.96}$$

ein linearer Differentialoperator mit Konstanten Koeffizienten, d.h.

$$A(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y. \tag{3.97}$$

Sei λ *Nullstelle des Polynoms*

$$A(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j \tag{3.98}$$

mit Vielfachheiten $m(\lambda)$*. Dann bilden die Funktionen*

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{(m(\lambda_1)-1)}e^{\lambda_1 t} \tag{3.99}$$

eine Basis des Lösungsraumes der Gleichung $A(D)y = 0$*, wobei* λ *alle Nullstellen von* $A(\lambda)$ *durchläuft. Sind alle* $a_i \in \mathbb{R}$*, so bilden die Funktionen*

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{(m(\lambda)-1)}e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3.100}$$

$$t^q e^{\mu t}\cos(\nu t), t^q e^{\mu t}\sin(\nu t), \quad \lambda = \mu + i\nu, \nu > 0, 0 \le q \le m(\lambda) - 1, \tag{3.101}$$

eine reelle Basis des Lösungsraumes von $A(D)y = 0$*.*

3.3.3 Beispiel. [Eulersche Differentialgleichung] Unter der Eulerschen Differentialgleichung versteht man eine Gleichung der Form

$$\sum_{i=0}^{n} a_i t^i x^{(i)}(t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.102}$$

welche eine ODE höherer Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten ist. Wir können sie allerdings auf eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten transformieren. Setze

$$s = \log t, \quad u(s) = x(e^s), \tag{3.103}$$

so gilt

$$\frac{du}{ds} = e^s \dot{x}(e^s) = t\dot{x}(t), \quad \frac{d^2u}{ds^2} = t\dot{x}(t) + t^2\ddot{x}(t), \ldots \tag{3.104}$$

und analog für höhere Ableitungen. Somit kann man rückwärts Koeffizienten b_i bestimmen, sodass

$$\sum_{i=0}^{n} b_i u^{(i)} = 0. \tag{3.105}$$

Dies ist nun eine ODE höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir betrachten ein konkretes Beispiel: Sei

$$t^2\ddot{x}(t) - 3t\dot{x}(t) + 7x(t) = 0. \tag{3.106}$$

Dann folgt

$$u''(s) = t^2\ddot{x} + t\dot{x}(t) = 4t\dot{x}(t) - 7x(t) = 4u'(s) - 7u(s) \tag{3.107}$$

und somit

$$u'' - 4u' + 7u = 0. \tag{3.108}$$

Nach Theorem 3.3.2 muss man nun das Polynom

$$A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 7 \tag{3.109}$$

betrachten, dessen Nullstellen gegeben sind durch

$$\lambda = 2 \pm i\sqrt{3}, \tag{3.110}$$

jeweils mit Vielfachheit 1. Nach Theorem 3.3.2 haben wir dann zwei Lösungen

$$u_1(s) = e^{2s}\sin\left(\sqrt{3}s\right), \quad u_2(s) = e^{2s}\cos\left(\sqrt{3}s\right). \tag{3.111}$$

Rücktransformation ergibt

$$x_1(t) = u_1(\log t) = t^2\sin\left(\sqrt{3}\log t\right), \quad x_2(t) = t^2\cos\left(\sqrt{3}\log t\right). \tag{3.112}$$

Wir wollen noch ein Beispiel einer inhomogenen Gleichung höherer Ordnung betrachten.

3.3.4 Beispiel. Sei

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 4x(t) &= e^t \\ \dot{x}(0) = x(0) &= 0. \end{aligned} \tag{3.113}$$

Das charakteristische Polynome

$$A(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 \tag{3.114}$$

hat die reelle Nullstelle $\lambda = -2$ und daher folgt mit Theorem 3.3.2, dass

$$y_1(t) = e^{-2t}, \quad y_2(t) = te^{-2t} \tag{3.115}$$

eine Fundamentalmatrix

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -2e^{-2t} & e^{-2t} - 2te^{-2t} \end{pmatrix} \tag{3.116}$$

zum zugehörigen homogenen System liefert. Dann gilt

$$\det Y(t) = e^{-4t} \tag{3.117}$$

und somit

$$Y^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} - 2te^{2t} & -te^{2t} \\ 2e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}. \tag{3.118}$$

Nach Theorem 3.1.7 gilt mit den gegebenen Anfangswerten, dass unsere Lösung x die erste Komponente von

$$z(t) = Y(t)\int_0^t Y^{-1}(s)\tilde{b}(s)\;ds \tag{3.119}$$

ist, wobei nun $\tilde{b}(s) = (0, e^s)^t$. Es gilt $Y^{-1}(s)\tilde{b}(s) = \left(-se^{3s}, e^{3s}\right)^t$ und somit

$$\int_0^t Y^{-1}(s)\tilde{b}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}te^{3t} + \frac{1}{9}e^{3t} - \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \tag{3.120}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{3}te^t + \frac{1}{9}e^t - \frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{1}{3}te^t - \frac{1}{3}te^{-2t} \\ &= \frac{1}{9}e^t - \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{1}{3}te^{-2t}. \end{aligned} \tag{3.121}$$

Kapitel 4

Abhängigkeit von Parametern

Insbesondere in Anwendungen, z.B. in Modellen zur Beschreibung realer Phänomene (u.A. freier Fall), treten in der Regel Parameter auf, deren Größe nur experimentell näherungsweise bestimmt wurde oder aufgrund der Komplexität eines Systems ohnehin nur schwer zugänglich ist. Zum Beispiel gehen beim freien Fall mit Luftreibung derart viele Unbekannte ein (u. A. Luftdichte, exakte Ausdehnung des fallenden Körpers), dass eine genaue Kenntnis der beschreibenden Differentialgleichung nur selten möglich ist.

Man versucht sich dann damit zu begnügen, dass die Parameter annähernd bekannt sind. Um dann aber trotzdem noch eine die Realität näherungsweise beschreibende Lösung zu erhalten, muss man irgendwoher wissen, dass die **Lösungen zu naher beieinander liegenden Parametern auch nahe beieinander liegen**. Unter welchen Bedingungen und in welchem Sinne dies dann gegeben ist, untersuchen wir in diesem Kapitel.

Wir untersuchen zunächst die stetige Abhängigkeit von Parametern, d.h. dass man den Abstand von Lösungen zumindest auf kompakten Zeiträumen durch den Abstand der Parameter kontrollieren kann.

Um diese Frage zu formalisieren, nehmen wir nun an, dass Vektorfeld hänge noch von einer weiteren Variablen ab, nämlich sei (E', d) ein metrischer Raum, $E \subset E'$ eine offene Teilmenge und

$$f(t, x, \lambda) = f \in C^0(D \times E, \mathbb{R}^{n+1}) \tag{4.1}$$

sei Lipschitz-stetig bezüglich der x-Variable.

Wir wissen dann bereits aus Kapitel 2, dass zu festem $\lambda \in E$ und gegebenen Anfangswerten eine auf einem maximalen Intervall I_λ eindeutige Lösung $x(\cdot, \lambda)$

von

$$\dot{x}(t,\lambda) = f(t, x(t,\lambda), \lambda) \tag{4.2}$$

existiert. Wir zeigen im ersten Abschnitt, dass x stetig von λ abhängt und im zweiten Abschnitt, dass x auch differenzierbar von λ abhängt, wenn das Vektorfeld stetig differenzierbar ist.

Wir beginnen allerdings mit einem Beispiel.

4.0.1 Beispiel. Betrachte die Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda(1+x^2), \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ x(0) &= 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

I_λ bezeichne das maximale Existenzintervall der Lösung $x(\cdot,\lambda)$ von (4.3) zu festem $\lambda \in \mathbb{R}$. Z.B. gilt

$$\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x(\cdot, 0) = 0, \quad I_0 = \mathbb{R}, \tag{4.4}$$

$$\lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad x(t,1) = \tan t, \quad I_1 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \tag{4.5}$$

und allgemein

$$x(t,\lambda) = \tan(\lambda t), \quad I_\lambda = \left(-\frac{\pi}{2|\lambda|}, \frac{\pi}{2|\lambda|}\right). \tag{4.6}$$

Wir sehen insbesondere, dass die Existenzintervalle "stetig" von λ abhängen und x auch differenzierbar von λ abhängt. Indem man (4.3) nach λ ableitet, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)(t,\lambda) &= 1 + x^2(t,\lambda) + 2\lambda x(t,\lambda)\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t,\lambda) \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda}(0,\lambda) &= 0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

da die Anfangswerte nicht von λ abhängen. Wir sehen also, dass $\partial x/\partial\lambda$ ebenfalls ein AWP., wodurch man auch in komplizierteren Situation möglicherweise Informationen über die λ-Abhängigkeit erhalten kann. In diesem Kapitel geht es darum zu zeigen, dass diese Dinge für eine allgemeinere Klasse von Gleichungen gelten.

4.1 Stetigkeitssätze

4.1.1 Theorem. [Stetige Abhängigkeit von Parametern] *Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet, E eine offene Teilmenge eines lokal kompakten metrischen Raumes und $f \in C^0(D \times E, \mathbb{R}^n)$, $f = f(t,x,\lambda)$ lokal Lipschitz-stetig bzgl. x, sowie $(t_0,x_0) \in D$. $x(\cdot,\lambda)$ bezeichne die maximale Lösung von*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(\cdot, x, \lambda) \\ x(t_0,\lambda) &= x_0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

auf dem Intervall I_λ. Setze

$$\Delta(x) = \{(t, \lambda) \in \mathbb{R} \times E \colon t \in I_\lambda\}. \tag{4.9}$$

Dann gelten:

(i) $\Delta(x)$ ist offen und insbesondere gilt

$$[a, b] \subset I_{\lambda_0} \quad \Rightarrow \quad \exists \delta > 0 \ \forall d(\lambda, \lambda_0) < \delta \colon [a, b] \subset I_\lambda, \tag{4.10}$$

(ii) $x \in C^0(\Delta(x), \mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$[a, b] \subset I_{\lambda_0} \quad \Rightarrow \quad |x(\cdot, \lambda) - x(\cdot, \lambda_0)|_{C^1([a,b])} \to 0, \quad \lambda \to \lambda_0. \tag{4.11}$$

Beweis. (i) Für λ_0 ist die Menge

$$M = \{(t, x(t, \lambda_0)) \in D \colon t \in [a, b]\} \tag{4.12}$$

kompakt, und somit existiert eine offene Umgebung U mit $M \subset U \subset \bar{U} \subset D$ und ein $\epsilon_0 > 0$ mit

$$\operatorname{dist}(M, \partial U) \geq \epsilon_0 > 0. \tag{4.13}$$

Ferner existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta_\epsilon > 0$, sodass

$$d(\lambda, \lambda_0) < \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \forall (t, x) \in \bar{U} \colon |f(t, x, \lambda) - f(t, x, \lambda_0)| < \epsilon. \tag{4.14}$$

Per Definition ist $t_0 \in I_\lambda$ für jedes $\lambda \in E$. Sei J_λ das maximale Intervall, sodass $x([a, b] \cap \bar{J}_\lambda, \lambda) \subset \bar{U}$ ist. Setze auf $[a, b] \cap \bar{J}_\lambda$

$$u(t) = \frac{1}{2}|x(t, \lambda_0) - x(t, \lambda)|^2, \tag{4.15}$$

dann gilt für $d(\lambda, \lambda_0) < \delta_\epsilon$:

$$\begin{aligned}
\dot{u}(t) &= \langle x(t, \lambda_0) - x(t, \lambda), f(t, x(t, \lambda_0), \lambda_0) - f(t, x(t, \lambda), \lambda)\rangle \\
&\leq |x(t, \lambda_0) - x(t, \lambda)||f(t, x(t, \lambda_0), \lambda_0) - f(t, x(t, \lambda), \lambda_0)| \\
&\quad + |x(t, \lambda_0) - x(t, \lambda)||f(t, x(t, \lambda), \lambda_0) - f(t, x(t, \lambda), \lambda)| \\
&\leq 2K_{\bar{U}, \lambda_0} u(t) + \sqrt{2}\epsilon\sqrt{u(t)} \\
&\leq \left(2K_{\bar{U}, \lambda_0} + \sqrt{2}\epsilon\right) u(t) + \sqrt{2}\epsilon,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

wobei $K_{\bar{U}, \lambda_0}$ die Lipschitzkonstante von f bei festem λ_0 in $\bar{U}$ ist. Daher ist für kleine ϵ:

$$u(t) \leq \frac{\sqrt{2}\epsilon}{3K_{\bar{U}, \lambda_0}} e^{3K_{\bar{U}, \lambda_0}|t - t_0|} \equiv C(\bar{U}, \lambda_0, a, b)\epsilon, \tag{4.17}$$

(vgl. Übungsaufgaben). Wir sehen, dass für hinreichend kleine ϵ die Kurve $t \mapsto x(t, \lambda)$ in der offenen Menge U bleibt, sofern t in $[a, b] \cap \bar{J}_\lambda$ rangiert. Wäre nun $\sup J_0 < b$, so erhielten wir einen Widerspruch zur Maximalität von J_0. Nach Theorem 2.2.4 muss also $[a, b] \subset I_\lambda$ gelten, falls $d(\lambda, \lambda_0)$ klein genug ist.

(ii) x ist stetig: Sei $(t, \lambda) \in \Delta(x)$ und gelte $(t', \lambda') \to (t, \lambda)$. Dann existiert ein Interval $[a, b]$ mit $t \in [a, b] \subset I_\lambda$ und ein δ, sodass

$$|t - t'|, d(\lambda, \lambda') < \delta \quad \Rightarrow \quad t' \in [a, b] \subset I_{\lambda'}. \tag{4.18}$$

Dann folgt mit der Rechnung in Teil (i) und der Stetigkeit von $x(\cdot, \lambda)$, dass

$$|x(t', \lambda') - x(t, \lambda)| \leq |x(t', \lambda') - x(t', \lambda)| + |x(t', \lambda) - x(t, \lambda)| \to 0. \tag{4.19}$$

Konvergenz in der C^1-Norm: Aus (4.17) folgt, dass

$$x(\cdot, \lambda) \to x(\cdot, \lambda_0), \quad \lambda \to \lambda_0 \tag{4.20}$$

gleichmäßig auf $[a, b]$. Außerdem existiert zu gegebenem ϵ wie oben ein $\delta > 0$, sodass für $d(\lambda, \lambda_0) < \delta$ gilt:

$$\begin{aligned} |\dot{x}(t, \lambda) - \dot{x}(t, \lambda_0)| &= |f(t, x(t, \lambda), \lambda) - f(t, x(t, \lambda_0), \lambda_0)| \\ &\leq K_{\lambda_0} |x(t, \lambda_0) - x(t, \lambda)| + \epsilon, \end{aligned} \tag{4.21}$$

Supremumsbildung über $[a, b]$ und Verwendung der bereits bewiesenen gleichmäßigen Konvergenz ergibt die C^1-Konvergenz. □

Theorem 4.1.1 erlaubt es noch nicht, die Anfangswerte mitzuvariieren. Wir zeigen in folgendem Lemma aber, dass man variable Anfangswert als Parameter interpretieren kann, sodass Theorem 4.1.1 dann auch diesen scheinbar allgemeineren Fall enthält.

Wir erinnern noch einmal an die Definition des globalen Flusses eines Vektorfeldes, Definition 2.2.8. Der nächste Satz sagt, dass der Definitionsbereich $\mathcal{D}(f)$ offen und x stetig auf $\mathcal{D}(f)$ ist.

4.1.2 Theorem. [Stetige Abhängigkeit von Anfangswerten] *Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet, E eine offene Teilmenge eines lokal kompakten metrischen Raumes und $f \in C^0(D \times E, \mathbb{R}^n)$, $f = f(t, x, \lambda)$ lokal Lipschitz-stetig bzgl. x. Für $(\tau, \xi, \lambda) \in D \times E$ bezeichne $x(\cdot, \tau, \xi, \lambda)$ die maximale Lösung von*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(\cdot, x, \lambda) \\ x(\tau, \tau, \xi, \lambda) &= \xi \end{aligned} \tag{4.22}$$

auf dem Intervall $I_{\tau,\xi,\lambda}$. Setze

$$\mathcal{D}(f) = \{(t, \tau, \xi, \lambda) \in (\mathbb{R} \times D \times E) \colon t \in I_{\tau,\xi,\lambda}\}. \tag{4.23}$$

Dann gelten:

(i) $\mathcal{D}(f)$ ist offen und insbesondere gilt

$$\begin{aligned} &[a, b] \subset I_{\tau_0,\xi_0,\lambda_0} \\ \Rightarrow \quad &\exists \delta > 0 \ \forall d(\lambda, \lambda_0), |\tau - \tau_0|, |\xi - \xi_0| < \delta \colon [a, b] \subset I_{\tau,\xi,\lambda}, \end{aligned} \tag{4.24}$$

(ii) $x \in C^0(\mathcal{D}(f), \mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$[a, b] \subset I_{\tau_0,\xi_0,\lambda_0} \quad \Rightarrow \quad |x(\cdot, \tau, \xi, \lambda) - x(\cdot, \tau_0, \xi_0, \lambda_0)|_{C^1([a,b])} \to 0, \tag{4.25}$$

falls $(\tau, \xi, \lambda) \to (\tau_0, \xi_0, \lambda_0)$.

Beweis. Wie angekündigt führen wir Parameter ein, die die Störung der Anfangswerte beschreiben und führen das Resultat auf Theorem 4.1.1 zurück. Sei also $(\tau_0, \xi_0, \lambda_0) \in D \times E$, dann existiert wegen der Offenheit von $D \times E$ eine Umgebung $U_\epsilon = (\tau_0 - \epsilon, \tau_0 + \epsilon) \times B_\epsilon(\xi_0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und eine Umgebung $\lambda_0 \in V \subset E$ sodass

$$(\tau, \xi, \lambda) \in D \times V \quad \forall (\tau, \xi, \lambda) \in U_\epsilon \times V. \tag{4.26}$$

Von nun an unterdrücken wir der besseren Lesbarkeit halber den Parameter λ und definieren für jedes $\lambda \in V$:

$$y(t, (\tau, \xi)) := x(t + \tau - \tau_0, \tau, \xi) + \xi_0 - \xi \tag{4.27}$$

für alle $(\tau, \xi) \in U_\epsilon$ und $t \in I_{\tau,\xi}$, sowie

$$g(t, y, (\tau, \xi)) := f(t + \tau - \tau_0, y + \xi - \xi_0). \tag{4.28}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{y}(t, (\tau, \xi)) = f(t + \tau - \tau_0, x(t + \tau - \tau_0, \tau, \xi)) = g(t, y(t, (\tau, \xi)), (\tau, \xi)) \\ y(\tau_0, (\tau, \xi)) = \xi_0. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Berücksichtigen wir nun auch λ wieder, so haben wie gezeigt, dass y nun das reine parameterabhängige Problem

$$\begin{aligned} \dot{y}(\cdot, (\tau, \xi), \lambda) &= g(\cdot, y, (\tau, \xi), \lambda) \\ y(\tau_0, (\tau, \xi), \lambda) &= \xi_0 \end{aligned} \tag{4.30}$$

mit dem Parameterbereich $U_\epsilon \times V$ auf den Intervallen $I_{\tau,\xi,\lambda}$ lößt. Da y aber nur aus Translationen von x in Raum und Zeit besteht, folgt der Satz nun sofort aus Theorem 4.1.1. □

4.2 Differenzierbarkeitssätze

Wir wollen nun auch zeigen, dass der globale Fluss differenzierbar von den Parametern und Anfangswerten abhängt, falls das Vektorfeld dies tut. Hierfür müssen wir natürlich annehmen, dass der Parameterbereich E eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ ist. Das differenzierbare Analog von Theorem 4.1.1 ist folgender Satz.

4.2.1 Theorem. [Differenzierbare Abhängigkeit von Parametern] *Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet, $E \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C^k(D \times E, \mathbb{R}^n)$, sowie $(t_0, x_0) \in D$. Mit den Bezeichnungen von (4.8) und (4.9) ist dann x k-mal stetig differenzierbar in $\Delta(x)$ bzgl. λ.*

Beweis. Die Idee ist, zu zeigen, dass der Differenzenquotient von x bzgl. λ eine parameterabhängige gewöhnliche Differentialgleichung löst und Theorem 4.1.1 anzuwenden. Wir betrachten zunächst $k = 1$. Sei $\lambda_0 \in E$ und $I_0 \subset I_{\lambda_0}$ kompakt. Dann existiert nach Theorem 4.1.1 ein $\delta > 0$ mit

$$I_0 \subset I_\lambda \quad \forall |\lambda - \lambda_0| < \delta. \tag{4.31}$$

Für jedes $v \in \mathbb{R}^m$ mit $|v| = 1$ ist also

$$y(t,h) = x(t,\lambda_0 + hv) - x(t,\lambda_0), \quad h < \delta, \tag{4.32}$$

wohldefiniert. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\dot{y}(t,h)\\
&= f(t, x(t,\lambda_0 + hv), \lambda_0 + hv) - f(t, x(t,\lambda_0), \lambda_0)\\
&= \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(f(t, x(t,\lambda_0) + s(x(t,\lambda_0 + hv) - x(t,\lambda_0)), \lambda_0 + shv)\right) ds\\
&= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (x(t,\lambda_0 + hv) - x(t,\lambda_0)) + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \cdot hv \; ds\\
&= A(t,h)y(t,h) + b(t,h) \cdot hv,
\end{aligned} \tag{4.33}$$

wobei

$$A(t,h) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t,\lambda_0) + s(x(t,\lambda_0 + hv) - x(t,\lambda_0)), \lambda_0 + shv) ds \tag{4.34}$$

und

$$b(t,h) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x(t,\lambda_0) + s(x(t,\lambda_0 + hv) - x(t,\lambda_0)), \lambda_0 + shv) ds. \tag{4.35}$$

Nach Theorem 4.1.1 ist x stetig in λ und somit sind A und b stetig in h. Der Differenzenquotient

$$w(t,h) = \frac{y(t,h)}{h} \tag{4.36}$$

erfüllt also die Gleichung

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= A(t,h)w + b(t,h) \cdot v\\
w(t_0) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Setze also

$$f(t,w,h) = A(t,h)w + b(t,h) \cdot v, \tag{4.38}$$

so sehen wir, dass f die Voraussetzungen von Theorem 4.1.1 erfüllt (auch für $h = 0$). Somit ist w stetig und

$$w(t,0) = \lim_{h \to 0} w(t,h) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t,\lambda_0 + hv) - x(t,\lambda_0)}{h} = \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t,\lambda_0) \cdot v \tag{4.39}$$

existiert. Da außerdem $w(\cdot,h) \to w(\cdot,0)$ in C^1, gilt auch

$$\begin{aligned}
\dot{w}(t,0) &= A(t,0)w(t,0) + b(t,0) \cdot v\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t,\lambda_0), \lambda_0) w(t,0) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x(t,\lambda_0), \lambda_0) \cdot v.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Wir sehen, dass $\partial x / \partial \lambda$ selbst Lösung eines parameterabhängigen AWP ist, womit die Stetigkeit in $\Delta(x)$ folgt.

Sei nun $k \geq 2$ und gelte die Behauptung für $k-1$. Für $v = e_i$, $1 \leq i \leq m$, in (4.40) gilt zunächst

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda^i}\right)(t,\lambda_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t,\lambda_0),\lambda_0)\frac{\partial x}{\partial \lambda^i}(t,\lambda_0) + \frac{\partial f}{\partial \lambda^i}(t,x(t,\lambda_0),\lambda_0) \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda^i}(t_0,\lambda_0) &= 0. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Somit löst $\partial x/\partial \lambda^i$ ein parameterabhängiges AWP mit Vektorfeld

$$\Phi(t,z,\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t,\lambda),\lambda)z + \frac{\partial f}{\partial \lambda^i}(t,x(t,\lambda),\lambda). \tag{4.42}$$

Nun ist aber nach Induktionsannahme $\Phi \in C^{k-1}$ und somit folgt die Behauptung. $\square$

4.2.2 Bemerkung. Wir haben in obigem Beweis gesehen, dass für ein C^1-Vektorfeld f eine Gleichung für die partiellen Ableitungen der Lösung nach dem Parameter durch simples *formales Differenzieren* der Gleichung

$$\dot{x}(t,\lambda) = f(t,x(t,\lambda),\lambda) \tag{4.43}$$

berechnet werden kann. Nach der Kettenregel und dem Satz von Schwarz gilt dann nämlich für alle $\lambda \in E$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda^j}\right)(t,\lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda^j}\dot{x}(t,\lambda) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(t,x(t,\lambda),\lambda)\frac{\partial x^i}{\partial \lambda^j}(t,\lambda) + \frac{\partial f}{\partial \lambda^j}(t,x(t,\lambda),\lambda). \end{aligned} \tag{4.44}$$

Ferner sind die Anfangswerte gegeben durch

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda^j}(t_0,\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in E. \tag{4.45}$$

Wie bei der stetigen Abhängigkeit betrachten wir nun auch die differenzierbare Abhängigkeit bzgl. der Anfangswerte.

4.2.3 Theorem. [Differenzierbare Abhängigkeit von Anfangswerten] *Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet, $E \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^k(D \times E, \mathbb{R}^n)$ sowie $(\tau,\xi) \in D$. Mit den Bezeichnungen von (4.22) und (4.23) ist*

$$x \in C^k(\mathcal{D}(f), \mathbb{R}^n) \tag{4.46}$$

und die Ableitungen ergeben sich durch formales Differenzieren:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)(t,\tau,\xi,\lambda) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t,\tau,\xi,\lambda))\frac{\partial x}{\partial \tau}(t,\tau,\xi,\lambda) \\ \frac{\partial x}{\partial \tau}(\tau,\tau,\xi,\lambda) &= -\dot{x}(\tau,\tau,\xi) \end{aligned} \tag{4.47}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)(t,\tau,\xi,\lambda) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t,\tau,\xi,\lambda))\frac{\partial x}{\partial \xi}(t,\tau,\xi,\lambda) \\ \frac{\partial x}{\partial \xi}(\tau,\tau,\xi,\lambda) &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Beweis. Wir beweisen den Fall $k = 1$. Der Fall $k \geq 2$ erfolgt wie im Beweis von Theorem 4.2.1 per Induktion und ist Übungsaufgabe. Wie im Beweis zu Theorem 4.1.2 verwandeln wir die Abhängigkeit von Anfangswerten in eine Parameterabhängigkeit und betrachten in einer Umgebung $U_\epsilon \times V$ von $(\tau_0, \xi_0, \lambda_0)$ die Abbildung

$$y(t, (\tau, \xi)) = x(t + \tau - \tau_0, \tau, \xi) + \xi_0 - \xi \tag{4.49}$$

und das Vektorfeld

$$g(t, y, (\tau, \xi)) = f(t + \tau - \tau_0, y + \xi - \xi_0), \tag{4.50}$$

wobei wir wieder die Abhängigkeit von λ unterdrücken. Wieder gilt

$$\begin{aligned} \dot{y}(t, (\tau, \xi)) = f(t + \tau - \tau_0, x(t + \tau - \tau_0, \tau, \xi)) &= g(t, y(t, (\tau, \xi)), (\tau, \xi)) \\ y(\tau_0, (\tau, \xi)) &= \xi_0. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Nach Theorem 4.2.1 ist y bzgl. τ und ξ stetig partiell differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial(\tau, \xi)}\right)(t, \tau, \xi) &= \frac{\partial g}{\partial y}(t, y(t, (\tau, \xi)), (\tau, \xi))\frac{\partial y}{\partial(\tau, \xi)}(t, (\tau, \xi)) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial(\tau, \xi)}(t, y(t, (\tau, \xi)), (\tau, \xi)) \\ \frac{\partial y}{\partial(\tau, \xi)}(\tau_0, \tau, \xi) &= 0. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Dies muss man nun lediglich in eine entsprechende Gleichung für x transformieren. Es gilt

$$x(t, \tau, \xi) = y(t + \tau_0 - \tau, (\tau, \xi)) + \xi - \xi_0 \tag{4.53}$$

und somit wegen (4.51) und (4.52):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)(t, \tau, \xi) &= -\ddot{y}(t + \tau_0 - \tau, (\tau, \xi)) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial y}(t + \tau_0 - \tau, y(t + \tau_0 - \tau, (\tau, \xi)), (\tau, \xi))\frac{\partial y}{\partial \tau}(t + \tau_0 - \tau, (\tau, \xi)) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial \tau}(t + \tau_0 - \tau, y(t + \tau_0 - \tau, (\tau, \xi)), (\tau, \xi)) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial t}(t, x(t, \tau, \xi)) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, \tau, \xi))\dot{x}(t, \tau, \xi) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, \tau, \xi))\frac{\partial x}{\partial \tau}(t, \tau, \xi) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, \tau, \xi))\dot{y}(t + \tau_0 - \tau, (\tau, \xi)) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial t}(t, x(t, \tau, \xi)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, \tau, \xi))\frac{\partial x}{\partial \tau}(t, \tau, \xi). \end{aligned} \tag{4.54}$$

Für den Anfangswert gilt wegen (4.52)

$$\frac{\partial x}{\partial \tau}(\tau, \tau, \xi) = -\dot{y}(\tau_0, (\tau, \xi)) + \frac{\partial y}{\partial \tau}(\tau_0, (\tau, \xi)) = -\dot{x}(\tau, \tau, \xi) \tag{4.55}$$

Außerdem gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)(t,\tau,\xi) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)(t+\tau_0-\tau,(\tau,\xi)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t,\tau,\xi))\frac{\partial x}{\partial \xi}(t,\tau,\xi) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t,\tau,\xi))\cdot \mathrm{id} \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t,\tau,\xi)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t,\tau,\xi))\frac{\partial x}{\partial \xi}(t,\tau,\xi).
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

Für den Anfangswert gilt

$$
\frac{\partial x}{\partial \xi}(\tau,\tau,\xi) = \frac{\partial y}{\partial \xi}(\tau_0,(\tau,\xi)) + \mathrm{id} = \mathrm{id}\,. \tag{4.57}
$$

□

Kapitel 5

Dynamische Systeme

In diesem Kapitel geht es um zeitunabhängige Vektorfelder und deren zugehörige globale Flüsse. Wir werden sehen, dass diese Flüsse eine einfache algebraische Struktur erfüllen, nämlich die einer sogenannten *Gruppenwirkung*. Daher werden wir diesen Begriff zunächst abstrakt untersuchen und aus diesen Resultaten Konsequenzen für Flüsse erhalten. Eine kurze und gute Einführung in Gruppenwirkungen findet sich in [7]. Ein ausführliches Buch über dynamische Systeme ist [9].

5.1 Gruppenwirkungen und dynamische Systeme

5.1.1 Definition. [Gruppenwirkung] Sei M eine Menge und $(G,+)$ eine Gruppe. Eine *linksseitige Gruppenwirkung* ist eine Abbildung

$$\cdot : G \times M \to M, \tag{5.1}$$

sodass

(i) $e \cdot \xi = \xi \quad \forall \xi \in M$

(ii) $g \cdot (h \cdot \xi) = (g+h) \cdot \xi \quad \forall g,h \in G \; \forall \xi \in M$.

5.1.2 Bemerkung. (i) Manchmal ist es nützlich der Gruppenwirkung eine andere Bezeichnung zu geben, wie z.B.

$$\theta \colon G \times M \to M. \tag{5.2}$$

Die Axiome sind dann

$$\theta_e \equiv \theta(e,\cdot) = \mathrm{id}_M \tag{5.3}$$

und

$$\theta_{g+h} = \theta_g \circ \theta_h. \tag{5.4}$$

(ii) Wegen (5.3) ist $\theta_g : M \to M$ für jedes $g \in G$ invertierbar mit inverser

$$\theta_g^{-1} = \theta_{-g}. \tag{5.5}$$

5.1.3 Beispiel. [Globale Flüsse] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Nehme an, der globale Fluss eines autonomen C^1-Vektorfeldes $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sei auf

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega \tag{5.6}$$

definiert. Halte nun die mittlere Komponente bei $t = 0$ fest. Betrachte

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R} \times \Omega &\to \Omega \\ (t, \xi) &\mapsto x(t, \xi), \end{aligned} \tag{5.7}$$

also die Einschränkung des globalen Flusses von f auf die Menge $\mathbb{R} \times \{0\} \times \Omega$ ist, d.h.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, \xi) &= f(x(t, \xi)) \\ x(0, \xi) &= \xi. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Dann wird durch $t \cdot \xi := x(t, \xi)$ eine linksseitige Gruppenwirkung der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ auf Ω definiert. Der einfache Beweis ist eine Übungsaufgabe.

Dieses Beispiel sollte für uns genügend Motivation sein, insbesondere differenzierbare Gruppenwirkungen genauer zu untersuchen. Wir bleiben zunächst auf dem abstrakten Level, ohne dass die Gruppenwirkung von einem Fluss herrührt. Wir sehen allerdings bereits, dass der Begriff der Gruppenwirkung nicht ganz ausreicht, um allgemeine globale Flüsse zu behandeln, da man nicht immer ganz $\mathbb{R}$ als Definitionsbereich der Lösungen hat. Man muss also ein wenig verallgemeinern.

5.1.4 Definition. [Dynamisches System] Sei M ein metrischer Raum und für jedes $\xi \in M$ sei ein offenes Intervall $I_\xi \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I_\xi$ gegeben. Setze

$$\mathcal{D}_0 = \bigcup_{\xi \in M} I_\xi \times \{\xi\}. \tag{5.9}$$

Eine Abbildung

$$x : \mathcal{D}_0 \to M \tag{5.10}$$

heißt *dynamisches System auf* M, falls $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R} \times M$ offen und x stetig ist,

$$x(0, \cdot) = \mathrm{id}_M \tag{5.11}$$

und

$$\forall \xi \in M \ \forall t \in I_\xi \ \forall s \in I_{x(t,\xi)} : t + s \in I_\xi \ \wedge \ x(t + s, \xi) = x(s, x(t, \xi)). \tag{5.12}$$

Die Menge

$$\mathcal{O}_\xi = \{x(t, \xi) : t \in I_\xi\} \tag{5.13}$$

heißt *Orbit* von ξ. Für jedes $\xi \in M$ heißt

$$\omega_+(\xi) = \sup I_\xi \quad (\omega_-(\xi) = \inf I_\xi) \tag{5.14}$$

positive (negative) Fluchtzeit von ξ. M heißt auch der *Phasenraum* des Flusses.

Um allgemeine dynamische Systeme zu untersuchen, zum Beispiel kritische oder auch periodische Punkte (Definition folgt), benötigen wir einige Lemmata. Die erste Eigenschaft ist uns bereits bei globalen Flüssen begegnet und gilt auch für dynamische Systeme.

5.1.5 Lemma. [Verlassen kompakter Mengen] *Sei M ein metrischer Raum und $x \in C^0(\mathcal{D}_0, M)$ ein dynamisches System. Sei $\xi \in M$ und nehme an, $\omega_+(\xi) < \infty$. Dann existiert zu jeder kompakten Menge $K \subset M$ ein $t_k \in I_\xi$ mit*

$$x(t,\xi) \notin K \quad \forall t > t_k. \tag{5.15}$$

Ein analoges Resultat gilt auch bei der negativen Fluchtzeit.

Beweis. Wir beweisen die Aussage nur für ω_+. Gäbe es eine Folge, $t_j \to \omega_+(\xi)$ mit

$$x(t_j,\xi) \in K \quad \forall j \in \mathbb{N}, \tag{5.16}$$

sodass dann oBdA

$$x(t_j,\xi) \to y \in K, \tag{5.17}$$

so hätte man aufgrund der Offenheit von $\mathcal{D}_0$ ein $\delta > 0$ und eine Umgebung U von y, sodass

$$\omega_+(z) > \delta \quad \forall z \in U. \tag{5.18}$$

Wegen (5.12) folgt

$$\omega_+(\xi) \geq \omega_+(x(t_j,\xi)) + t_j \geq \delta + t_j \to \delta + \omega_+(\xi), \tag{5.19}$$

ein Widerspruch. □

5.1.6 Lemma. *Sei M ein metrischer Raum und $x \in C^0(\mathcal{D}_0, M)$ ein dynamisches System mit positiven und negativen Fluchtzeiten $\omega_\pm$. Dann gelten:*

(i) ω_+ ist unterhalbstetig, d.h.

$$\liminf_{\xi \to \xi_0} \omega_+(\xi) \geq \omega_+(\xi_0) \tag{5.20}$$

und ω_- ist oberhalbstetig, d.h.

$$\limsup_{\xi \to \xi_0} \omega_-(\xi) \leq \omega_-(\xi_0). \tag{5.21}$$

(ii) Für alle $(t,\xi) \in \mathcal{D}_0$ gilt

$$I_{x(t,\xi)} = I_\xi - t. \tag{5.22}$$

Beweis. (i) Sei $(t,\xi_0) \in \mathcal{D}_0$, so existiert $\epsilon > 0$ und eine Umgebung von $\xi_0 \in U$ mit

$$(t-\epsilon, t+\epsilon) \times U \subset \mathcal{D}_0, \tag{5.23}$$

also insbesondere

$$\omega_-(\xi) \leq t - \epsilon < t < t + \epsilon \leq \omega_+(\xi) \quad \forall \xi \in U. \tag{5.24}$$

Wäre also für eine Folge $\xi_n \to \xi_0$

$$\omega_+(\xi_n) \to t < \omega_+(\xi_0), \tag{5.25}$$

so erhält man einen Widerspruch. Ein analoges Argument gilt fü die Oberhalbstetigkeit von ω_-.

(ii) Wegen der Eigenschaft

$$s \in I_{x(t,\xi)} \quad \Rightarrow \quad t + s \in I_\xi \tag{5.26}$$

folgt

$$\omega_+(x(t,\xi)) \leq \omega_+(\xi) - t. \tag{5.27}$$

Nehme an, $\omega_+(x(t,\xi)) < \omega_+(\xi) - t$. Sei t_j eine Folge mit

$$t_j \to \omega_+(x(t,\xi)), \tag{5.28}$$

so verlässt $(x(t_j, x(t,\xi)))$ jede kompakte Menge. Jedoch gilt

$$x(t_j, x(t,\xi)) = x(t_j + t, \xi) \in x([0, \omega_+(x(t,\xi)) + t], x), \tag{5.29}$$

was eine kompakte Menge ist, Widerspruch. □

Wir untersuchen nun kritische und periodische Punkte.

5.1.7 Definition. [Kritische und periodische Punkte] Sei M ein metrischer Raum und $x \in C^0(\mathcal{D}_0, M)$ ein dynamisches System. $\xi \in M$ heißt *kritischer Punkt*, wenn $\mathcal{O}_\xi = \{\xi\}$. Ein Punkt $\xi \in M$ heißt *periodischer Punkt*, wenn $I_\xi = \mathbb{R}$ und falls

$$\exists T \neq 0 \; \forall t \in I_\xi \colon x(t+T, \xi) = x(t, \xi). \tag{5.30}$$

Jedes solche T heißt *Periode* von ξ.

5.1.8 Definition. [Phasenportrait] Sei M ein metrischer Raum und $x \in C^0(\mathcal{D}_0, M)$ ein dynamisches System. Die Menge der Orbits

$$\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_\xi \colon \xi \in M\} \tag{5.31}$$

heißt *Phasenportrait* des Systems..

5.1.9 Beispiel. Betrachte das lineare System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x. \tag{5.32}$$

Eine Hauptfundamentalmatrix bei $t = 0$ ist gegeben durch

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \tag{5.33}$$

Damit erhalten wir ein dynamisches System (sogar eine Gruppenwirkung) auf $\mathbb{R}^2$, nämlich

$$x(t,\xi) = \begin{pmatrix} \cos t \; \xi^1 + \sin t \; \xi^2 \\ -\sin t \; \xi^1 + \cos t \; \xi^2 \end{pmatrix}. \tag{5.34}$$

Die Orbits sind konzentrische Kreise vom Radius $|\xi|$ und jeder Punkt auf diesen Orbits ist ein periodischer Punkt, falls $|\xi| > 0$. $\xi = 0$ ist ein kritischer Punkt (wie bei jedem linearen System).

Wir untersuchen nun kritische und periodische Punkte genauer.

5.1.10 Proposition. [Eigenschaften kritischer Punkte] *Sei x ein dynamisches System auf einem metrischen Raum M. Dann sind äquivalent:*

(i) *ξ is kritischer Punkt.*

(ii) $\exists a < b \; \forall t \in [a,b] \colon x(t,\xi) = \xi$.

(iii) $\exists (t_j)_{j\in\mathbb{N}} \colon 0 < t_j \to 0 \;\wedge\; \forall j \in \mathbb{N} \colon x(t_j,\xi) = \xi$.

Beweis. Wir zeigen zunächst:

$$\exists t \neq 0 \colon x(t,\xi) = \xi \quad \Rightarrow \quad x(nt,\xi) = \xi \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{5.35}$$

gilt. Denn zunächst gilt nach Lemma 5.1.6

$$I_\xi = I_{x(t,\xi)} = I_\xi - t, \tag{5.36}$$

was nur für $I_\xi = \mathbb{R}$ möglich ist. Somit ist auch $x(-t,\xi)$ definiert und es gilt

$$x(-t,\xi) = x(-t,x(t,\xi)) = x(0,\xi) = \xi \tag{5.37}$$

und daher

$$x(2t,\xi) = x(2t,x(-t,\xi)) = x(t,\xi) = \xi. \tag{5.38}$$

(5.35) folgt dann per Induktion. Aus (i) folgt klarerweise (ii). Gelte (ii) und sei $\tau \in [0, b-a]$. Dann gilt

$$x(\tau,\xi) = x(\tau,x(a,\xi)) = x(\tau + a,\xi) = \xi, \tag{5.39}$$

da $t = \tau + a \in [a,b]$ ist. Somit folgt

$$x(t,\xi) = \xi \quad \forall t \in [0, b-a] \tag{5.40}$$

und (iii). Gelte nun (iii) und sei $t \in \mathbb{R}$. Es existiert zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein n_j mit

$$n_j t_j \leq t < (n_j + 1) t_j. \tag{5.41}$$

Somit konvergiert $n_j t_j \to t$ und

$$\xi = x(t_j n_j,\xi) \to x(t,\xi). \tag{5.42}$$

□

5.1.11 Proposition. [Eigenschaften periodischer Punkte] *Sei x ein dynamisches System auf einem metrischen Raum M. Dann gelten:*

(i)

$$\xi \text{ ist periodisch} \quad \Leftrightarrow \quad \exists T \neq 0 \colon x(T,\xi) = \xi. \tag{5.43}$$

(ii) Falls ξ periodisch und nicht kritisch ist, existiert eine minimale positive Periode. Alle anderen Perioden sind ganzzahlige Vielfache dieser minimalen Periode.

Beweis. (i) "$\Rightarrow$" folgt per Definition. Für die andere Richtung sei $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt
$$x(t, \xi) = x(t, x(T, \xi)) = x(t + T, \xi). \tag{5.44}$$

(ii) Gäbe es keine kleinste positive Periode, so wäre
$$x(t_j, \xi) = \xi \tag{5.45}$$
für eine Nullfolge t_j und somit ξ nach Proposition 5.1.10 schon kritisch. Sei also $T > 0$ die minimale positive Periode. Nach (5.35) sind alle ganzzahligen Vielfache von T ebenfalls Perioden. Gäbe es darüberhinaus noch eine weitere Periode $\tau > 0$, so existierte $n \in \mathbb{N}$ mit
$$nT < \tau < (n + 1)T. \tag{5.46}$$
Dann wäre aber $0 < \tau - nT < T$ eine echt kleinere Periode, denn
$$x(\tau - nT, \xi) = x(\tau, x(-nT, \xi)) = x(\tau, \xi) = \xi. \tag{5.47}$$
□

5.1.12 Definition. Falls ein periodischer Punkt nicht kritisch ist, heißt die nach Proposition 5.1.11 existente minimale positive Periode die *Fundamentalperiode*.

Wir können nun alle möglichen Arten von Orbits bestimmen.

5.1.13 Proposition. [Klassifikation von Orbits] *Sei M ein metrischer Raum und $x \in C^0(\mathcal{D}_0, M)$ ein dynamisches System. Für jedes $\xi \in M$ gilt eine der folgenden Aussagen:*

(i) $x(\cdot, \xi)$ ist konstant,

(ii) $x(\cdot, \xi)$ ist periodisch und nicht konstant,

(iii) $x(\cdot, \xi)$ ist eine offene Jordankurve, d.h. $x(\cdot, \xi)$ ist injektiv.

Beweis. Ist $x(\cdot, \xi)$ nicht injektiv, so existieren t_1, t_2 mit
$$x(t_1, \xi) = x(t_2, \xi). \tag{5.48}$$
Dann ist aber
$$\xi = x(0, \xi) = x(-t_2, x(t_2, \xi)) = x(-t_2, x(t_1, \xi)) = x(t_1 - t_2, \xi) \tag{5.49}$$
und somit $T = t_1 - t_2$ nach Proposition 5.1.11 eine Periode. Somit ist $x(\cdot, \xi)$ entweder konstant oder echt periodisch. □

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch ein Analogon der Aussage für Gruppenwirkungen θ beweisen, dass θ_g eine bijektive Selbstabbildung von M ist. Da für einen festen Zeitpunkt t die Abbildung $x(t, \cdot)$ allerdings nicht auf ganz M definiert sein muss, müssen wir diese Mengen zunächst geeignet beschreiben.

5.1.14 Proposition. [Dynamische Systeme erzeugen Homöomorphismen] *Sei M ein metrischer Raum und $x \in C^0(\mathcal{D}_0, M)$ ein dynamisches System. Auf der Menge*

$$M_t = \{\xi \in M \colon t \in I_\xi\} \tag{5.50}$$

definiere die Abbildung

$$x_t = x(t, \cdot) \colon M_t \to M. \tag{5.51}$$

Dann ist M_t offen,

$$x_t(M_t) = M_{-t} \tag{5.52}$$

und x_t ist ein Homöomorphismus auf ihr Bild.

Beweis. Sei $\xi_0 \in M_t$, so gilt

$$\omega_-(\xi_0) < t < \omega_+(\xi_0) \tag{5.53}$$

und nach Lemma 5.1.6 gilt dies auch in einer Umgebung von ξ_0. Ferner gilt für $\xi \in M_t$, ebenfalls nach Lemma 5.1.6,

$$I_{x(t,\xi)} = I_\xi - t \tag{5.54}$$

und somit

$$-t \in I_{x(t,\xi)}. \tag{5.55}$$

Daher gilt $x(t, \xi) \in M_{-t}$. Nun gilt aber

$$x_t \circ x_{-t}(\xi) = x(t, x(-t, \xi)) = x(0, \xi) = \xi, \tag{5.56}$$

und, indem man die Rollen von t und $-t$ vertauscht,

$$x_{-t} \circ x_t = \mathrm{id}_{M_t}. \tag{5.57}$$

□

5.2 Vektorfelder und dynamische Systeme

In diesem Abschnitt zeigen wir, auf welche Weise Vektorfelder und dynamische Systeme gewissermaßen äquivalent sind. Wir beginnen mit der einfachen Aussage, dass C^1-Vektorfelder dynamische Systeme erzeugen. Der Beweis ist Übungsaufgabe.

5.2.1 Proposition. [Vektorfelder erzeugen dynamische Systeme] *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Sei*

$$\mathcal{D}_0(f) = \{(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \Omega \colon (t, 0, \xi) \in \mathcal{D}(f)\} \tag{5.58}$$

und sei $\tilde{x}$ der globale Fluss von f. Dann ist die durch

$$x(t, \xi) = \tilde{x}(t, 0, \xi) \tag{5.59}$$

definierte Abbildung ein dynamisches System der Klasse C^k.

Die Umkehrung dieses Satzes gilt in folgender Weise:

5.2.2 Proposition. [Glatte dynamische Systeme werden von Vektorfeldern erzeugt] *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x \in C^1(\mathcal{D}_0, \Omega)$ ein dynamisches System mit der Eigenschaft, dass $\dot{x}(0, \cdot)$ lokal Lipschitz-stetig in Ω ist. Dann ist $x(t,\xi) = \tilde{x}(t,0,\xi)$, wobei $\tilde{x}$ der globale Fluss des Vektorfeldes*

$$f = \dot{x}(0, \cdot) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n \tag{5.60}$$

ist.

Beweis. Sei $(t,\xi) \in \mathcal{D}_0$.

$$\frac{1}{h}\left(x(t+h,\xi) - x(t,\xi)\right) = \frac{1}{h}\left(x(h, x(t,\xi)) - x(0, x(t,\xi))\right). \tag{5.61}$$

$h \to 0$ ergibt

$$\dot{x}(t,\xi) = \dot{x}(0, x(t,\xi)) = f(x(t,\xi)) \tag{5.62}$$

und per Definition von x gilt $x(0,\xi) = \xi$. Wegen der Eindeutigkeit gilt also

$$x(t,\xi) = \tilde{x}(t,0,\xi) \quad \forall (t,\xi) \in \mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_0(f). \tag{5.63}$$

Bezeichne nun mit J_ξ das zu ξ gehörige maximale Existenzintervall, auf dem $\tilde{x}(\cdot, 0, \xi)$ definiert ist. Wir müssen noch $I_\xi = J_\xi$ zeigen, damit dann auch $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0(f)$ gilt. Da x die ODE löst, gilt sicher

$$I_\xi \subset J_\xi. \tag{5.64}$$

Wäre $\sup I_\xi < \sup J_\xi$, so wäre für kleines $\epsilon > 0$

$$x([\sup I_\xi - \epsilon, \sup I_\xi), \xi) \subset \tilde{x}([\sup I_\xi - \epsilon, \sup I_\xi], 0, \xi), \tag{5.65}$$

wobei letztere Menge kompakt ist. Wegen Lemma 5.1.5 ist das nicht möglich. Ein analoges Argument gilt an der unteren Grenze. □

Falls nun das dynamische System durch ein Vektorfeld erzeugt wird, kann man die kritischen Punkte weiter charakterisieren.

5.2.3 Proposition. *Das dynamische System $x \colon \mathcal{D}_0(f) \to \Omega$ werde gemäß Proposition 5.2.1 durch das C^1-Vektorfeld f erzeugt. Dann sind die kritischen Punkte von x genau die Nullstellen von f.*

Beweis. Ist ξ kritisch, so ist

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{x(h,\xi) - x(0,\xi)}{h} = f(x). \tag{5.66}$$

Ist $f(\xi) = 0$, so ist $x(\cdot, \xi) \equiv \xi$ die eindeutige Lösung. □

Wir wollen noch zwei wichtige dynamische System zumindest erwähnen.

5.2.4 Bemerkung. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi \in C^2(\Omega)$ eine Funktion. Setze

$$f = \pm \operatorname{grad} \varphi, \tag{5.67}$$

so heißt das von $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ erzeugte dynamische System x das *positive (negative) Gradientensystem* zu φ. Es gilt also

$$\dot{x} = \pm \operatorname{grad} \varphi(x). \tag{5.68}$$

Die kritischen Punkte von φ sind demnach genau die kritischen Punkte von x. Da an regulären Punkten von φ der Gradient senkrecht auf den Niveaumengen steht, fließt der Fluss also immer senkrecht zu den Niveaumengen von φ und "sucht" daher kritische Punkte, bzw. bewegt sich in Richtung des steilsten Anstiegs (Abstiegs):

$$\frac{d}{dt}\varphi(x) = \langle \operatorname{grad} \varphi, \dot{x} \rangle = \pm |\operatorname{grad} \varphi|^2, \tag{5.69}$$

d.h. φ wächst (fällt) entlang der Orbits, falls $\operatorname{grad} \varphi \neq 0$.

5.2.5 Bemerkung. Ein weitere wichtige Klasse dynamischer Systeme sind die *Hamiltonschen Systeme*. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{2m}$ und $H \in C^2(\Omega)$. Wir definieren den *Hamiltonschen Gradient* als

$$f_H(y, z) = \left(\operatorname{grad}_z H, -\operatorname{grad}_y H\right). \tag{5.70}$$

Der zugehörige Fluss mit

$$\dot{x} = f_H(x) \tag{5.71}$$

heißt dann Hamiltonsches System. Entgegen dem Verhalten der Gradientensysteme ist H hier entlang der erzeugten Orbits konstant:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x) &= \langle \operatorname{grad} H, f_H \rangle \\ &= \left\langle \operatorname{grad}_y H, \operatorname{grad}_z H \right\rangle - \left\langle \operatorname{grad}_z H, \operatorname{grad}_y H \right\rangle = 0. \end{aligned} \tag{5.72}$$

Wir beenden den Abschnitt mit einem Satz von Liouville über die Änderung des Volumens von Gebieten unter von Vektorfeldern erzeugten dynamischen Systemen.

5.2.6 Theorem. [Liouville] *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $K \subset \Omega$ kompakt und $x \colon \mathcal{D}_0 \to \Omega$ das von f erzeugte dynamische System. Sei ferner*

$$\omega_+(K) = \min_{\xi \in K} \omega_+(\xi), \quad \omega_-(K) = \max_{\xi \in K} \omega_-(\xi). \tag{5.73}$$

Für $t \in (\omega_-(K), \omega_+(K))$ definiere

$$V(t) = \mathcal{L}^n(x(t, K)). \tag{5.74}$$

Dann gilt

$$\dot{V}(t) = \int_{x(t,K)} \operatorname{div} f \; d\mathcal{L}^n. \tag{5.75}$$

Beweis. Es gilt $x(t,\cdot) \in \mathrm{Diff}^1(\Omega_t, \Omega_{-t})$, wobei Ω_t wie in Proposition 5.1.14 definiert ist. Setze

$$g(t,\xi) = \det\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}(t,\xi)\right). \tag{5.76}$$

In Theorem 4.2.3 haben wir gezeigt, dass $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ eine Lösung des linearen AWP

$$\begin{aligned} \dot{y}(t,\xi) &= Df(t, x(t,\xi))y(t,\xi) \\ y(0,\xi) &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \end{aligned} \tag{5.77}$$

ist. Somit ist g die Wronski-Determinante, vgl. Definition 3.1.8, und nach Theorem 3.1.9 gilt

$$\dot{g}(t,\xi) = \mathrm{tr}\left(Df(x(t,\xi))\right) g(t,\xi). \tag{5.78}$$

Nach dem Transformationssatz für das Lebesgue-Integral gilt

$$V(t) = \int_{x(t,K)} 1 \; d\mathcal{L}^n = \int_K g(t,\xi) \; d\mathcal{L}^n \tag{5.79}$$

und somit

$$\dot{V}(t) = \int_K \mathrm{div}\, f(x(t,\xi))g(t,\xi) \; d\mathcal{L}^n = \int_{x(t,K)} \mathrm{div}\, f \; d\mathcal{L}^n. \tag{5.80}$$

□

5.2.7 Korollar. *Unter den Voraussetzungen von Theorem 5.2.6 sei* $\mathrm{div}\, f = 0$ *in* Ω. *Dann ist das von* f *erzeugte dynamische System volumenerhaltend, d.h. für alle kompakten (und daher auch für alle Borel-messbaren)* $K \subset \Omega$ *gilt*

$$\mathcal{L}^n(x(t,K)) = \mathcal{L}^n(K). \tag{5.81}$$

5.2.8 Bemerkung. [Interpretation der Divergenz] Der Satz von Liouville liefert nebenbei eine schöne anschauliche Interpretation des Begriffs der Divergenz eines Vektorfeldes. Er sagt qualitativ nämlich aus, dass diese ein Maß dafür ist, wie sehr das zugehörige dynamische System Mengen "auseinander divergieren lässt" oder "zusammenzieht".

5.3 Lineare Flüsse

In den folgenden Abschnitten wollen wir die Fixpunkte eines von einem Vektorfeld erzeugten dynamischen Systems besser verstehen, insbesondere die *Stabilität* untersuchen, d.h. ob Lösungen, die nahe bei einem kritischen Punkt starten, für alle Zeiten nahe bei diesem bleiben oder sogar dorthin konvergieren. Wir werden sehen, dass dies in gewisser Weise nur von der Jacobi-Matrix des Vektorfeldes abhängt, weshalb es angebracht ist, zunächst nur lineare Gleichungen zu untersuchen.

Wir betrachten also wieder Gleichungen der Form

$$\dot{x} = Ax, \tag{5.82}$$

wobei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist. Das erzeugte dynamische System auf $\mathbb{K}^n$ ist dann

$$x(t,\xi) = e^{tA}\xi. \tag{5.83}$$

Die kritischen Punkte sind genau die Elemente des Kerns von A.

5.3.1 Lemma. [Stabilität] *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt*

$$\lim_{t\to\infty} e^{tA} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}\lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A), \tag{5.84}$$

wobei $\sigma(A)$ das Spektrum (die Menge der Eigenwerte) von A bezeichnet.

Beweis. $\Rightarrow$: Angenommen, es existiert ein Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$. Sei $\xi = \mu + i\nu$ ein zugehöriger Eigenvektor, dann gilt

$$|e^{tA}\xi| = |e^{\lambda t}\xi| \geq |\xi|, \tag{5.85}$$

und somit konvergiert $e^{tA}\mu$ oder $e^{tA}\nu$ nicht nach 0.

$\Leftarrow$: In Beispiel 3.2.1 haben wir gesehen, dass alle Koeffizienten von e^{tA} Linearkombinationen (i.A. komplexe) von Funktionen der Form $t^k e^{\lambda t}$ sind, wobei $\lambda \in \sigma(A)$ ist. Für $\operatorname{Re}\lambda < 0$ konvergieren diese aber alle nach 0. $\square$

Hieraus erhalten wir das asymptotische Verhalten der Lösungen. Der Beweis ist Übungsaufgabe.

5.3.2 Korollar. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gelten für alle Lösungen $\dot{x} = Ax$:*

(i)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A) \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to-\infty} |x(t)| = \infty \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0 \end{aligned} \tag{5.86}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\lambda > 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A) \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to-\infty} |x(t)| = 0. \end{aligned} \tag{5.87}$$

5.3.3 Lemma. [Beschränktheitskriterium] *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Es bleibt jede Lösung x von $\dot{x} = Ax$ für $t \to \infty$ genau dann beschränkt, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

(i) $\operatorname{Re}\lambda \leq 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$,

(ii) Jedes $\lambda \in \sigma(A)$ is halb einfach, d.h. es gibt nur minimale Jordankästen.

Beweis. Wieder gilt, dass alle Lösungen Linearkombinationen von Funktionen der Form $t^k e^{\lambda t}$ sind, wobei aus der Rechnung in Beispiel 3.2.1 folgt, dass zu jedem halbeinfachen Eigenwert nur Lösungen der Form $e^{\lambda t}$ auftreten. Somit folgt die Behauptung sofort. $\square$

Außerdem erhalten wir mit derselben Begründung:

5.3.4 Bemerkung. Gilt für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, dass $\operatorname{Re} \lambda \le 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$, so wachsen die Lösungen höchstens polynomial und zwar gibt es genau dann eine Lösung mit polynomialem Wachstum, wenn A einen nicht halb einfachen, imaginären Eigenwert besitzt.

Ebene lineare Flüsse

Wir wollen nun alle linearen Flüsse in der Ebene klassifizieren, zumindest bis auf Basiswechsel. Sei also $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und es gelte

$$\dot{x} = Ax, \tag{5.88}$$

also

$$x(t,\xi) = e^{tA}\xi. \tag{5.89}$$

Es gibt nun einige Fälle zu unterscheiden.

Fall 1: $\operatorname{rg}(A) = 0$**.**

Dann ist $A = 0$ und $x(\cdot,\xi) = \xi$.

Fall 2: $\operatorname{rg}(A) = 1$**.** Dann ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert und es gibt weitere Teilfälle:

(i) $\lambda = 0$ hat Vielfachheit 2 im charakteristischen Polynom. Dann ist die Jordansche Normalform

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.90}$$

und

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.91}$$

(ii) $\lambda = 0$ hat Vielfachheit 1 im charakteristischen Polynom, d.h. es gibt noch einen weiteren Eigenwert $\mu \neq 0$. Dann ist

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{5.92}$$

und

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}. \tag{5.93}$$

In beiden Fällen gibt es also eine Fixgerade.

Fall 3: $\operatorname{rg}(A) = 2$. Auch hier gibt es einige Teilfälle.

(i) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Es folgt

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}. \tag{5.94}$$

In einem solchen Fall heißt der Nullpunkt *Sattelpunkt*.

(ii) Re $\lambda_i < 0$, $i = 1, 2$.

a) Eigenwerte reell mit $\lambda_1 \le \lambda_2 < 0$.

(1) Zwei halbeinfache reelle Eigenwerte mit $\lambda_1 \le \lambda_2 < 0$, d.h.

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \tag{5.95}$$

und alle Orbits konvergieren zum Nullpunkt.

(2) Ein nicht halbeinfacher reeller Eigenwert $\lambda < 0$.

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad e^{tB} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.96}$$

In den Fällen (1) und (2) heißt der Nullpunkt *stabiler Knoten*.

b) $\sigma(A) = \{\lambda, \bar{\lambda}\}$, $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha < 0$, $\beta > 0$.

Man verwendet hier die *reelle Jordansche Normalform*

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad e^{tB} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \tag{5.97}$$

Der Nullpunkt heißt hier *stabiler Strudel*.

(iii) Re $\lambda_i > 0$. In allen Fällen von (ii) dreht sich lediglich die Flussrichtung um.

(iv) $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, $\lambda \notin \mathbb{R}$.

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}. \tag{5.98}$$

Hier liegen periodische Orbits mit Periode $T = 2\pi/\beta$ vor.

Hyperbolische lineare Flüsse

Hyperbolische lineare Flüsse zu einer Matrix A sind solche, sodass das Spektrum von A keine Eigenwerte mit verschwindendem Realteil enthält. Wir wollen nun zeigen, dass man den $\mathbb{K}^n$ dann in stabile und instabile Teilräume zerlegen kann. Wir brauchen hierfür einige weitere Begriffe.

5.3.5 Definition. [Quellen und Senken] Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Der kritische Punkt $0 \in \mathbb{K}^n$ von $x(t,\xi) = e^{tA}\xi$ heißt *Senke (Quelle)*, falls Re $\lambda < 0$ (Re $\lambda > 0$) für alle $\lambda \in \sigma(A)$. Der Fluss x wird dann als *Kontraktion (Expansion)* bezeichnet.

Senken und Quellen können wie folgt charakterisiert werden:

5.3.6 Lemma. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann ist 0 genau dann eine Senke, wenn*

$$\exists \alpha, \beta > 0 \ \forall \xi \in \mathbb{K}^n \ \forall t \geq 0\colon |e^{tA}\xi| \leq \beta e^{-\alpha t}|\xi|. \tag{5.99}$$

0 ist genau dann eine Quelle, wenn

$$\exists \alpha, \beta > 0 \ \forall \xi \in \mathbb{K}^n \ \forall t \geq 0\colon |e^{tA}\xi| \geq \beta e^{\alpha t}|\xi|. \tag{5.100}$$

Beweis. Sei 0 eine Senke, dann exstieren $\alpha, \epsilon > 0$ mit

$$\forall \lambda \in \sigma(A)\colon \mathrm{Re}\ \lambda < -\alpha - \epsilon. \tag{5.101}$$

Die Einträge von e^{tA} sind Linearkombinationen von

$$t^n e^{(\mathrm{Re}\ \lambda)t} \sin\left((\mathrm{Im}\ \lambda)\, t\right), \quad t^n e^{(\mathrm{Re}\ \lambda)t} \cos\left((\mathrm{Im}\ \lambda)\, t\right) \tag{5.102}$$

und es gilt

$$|e^{(\mathrm{Re}\ \lambda)t} t^n| \leq e^{-\alpha t} e^{-\epsilon t} t^n \leq \tilde{\beta} e^{-\alpha t}. \tag{5.103}$$

Somit folgt (5.99). Die Rückrichtung folgt aus Lemma 5.3.1.

Sei nun 0 eine Quelle, dann gilt

$$|\xi| = |e^{-tA} e^{tA}\xi| \leq |e^{-tA}||e^{tA}\xi| \leq \beta e^{-\alpha t}|e^{tA}\xi|, \tag{5.104}$$

wobei wir den ersten Teil des Lemmas verwendet haben. Die Rückrichtung folgt aus Korollar 5.3.2. □

5.3.7 Definition. [Hyperbolischer Fluss] Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $\sigma(A)$ das Spektrum von A. Wir definieren das *stabile Spektrum* von A durch

$$\sigma_s(A) := \{\lambda \in \sigma(A)\colon \mathrm{Re}\ \lambda < 0\}, \tag{5.105}$$

das *neutrale Spektrum* durch

$$\sigma_n(A) := \{\lambda \in \sigma(A)\colon \mathrm{Re}\ \lambda = 0\} \tag{5.106}$$

und das instabile Spektrum durch

$$\sigma_u := \{\lambda \in \sigma(A)\colon \mathrm{Re}\ \lambda > 0\}. \tag{5.107}$$

Der von A erzeugte Fluss auf $\mathbb{K}^n$ heißt hyperbolisch, wenn $\sigma_n(A) = \emptyset$ ist.

Wir beweisen nun die angekündigte Zerlegung.

5.3.8 Theorem. [Zerlegung hyperbolischer Flüsse] *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und e^{tA} ein hyperbolischer Fluss auf $\mathbb{K}^n$. Dann gibt es Zerlegungen*

$$\mathbb{K}^n = E_s \oplus E_u \tag{5.108}$$

und

$$A = A_s \oplus A_u, \quad e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u}, \tag{5.109}$$

mit

$$A_s(E_s) \subset E_s, \quad A_u(E_u) \subset E_u, \tag{5.110}$$

sodass e^{tA_s} auf E_s eine Kontraktion und e^{tA_u} auf E_u eine Expansion ist. Die Zerlegung ist eindeutig und es gilt

$$\dim(E_s) = \sum_{\lambda \in \sigma_s(A)} m(\lambda), \tag{5.111}$$

wobei $m(\lambda)$ die Vielfachheit von λ im charakteristischen Polynom ist.

Beweis. Setze

$$P_s(A) = \prod_{\lambda \in \sigma_s(A)} (A - \lambda\,\mathrm{id})^{m(\lambda)}, \quad P_u(A) = \prod_{\lambda \in \sigma_u(A)} (A - \lambda\,\mathrm{id})^{m(\lambda)} \tag{5.112}$$

und

$$E_s = \ker\, P_s(A), \quad E_u = \ker\, P_u(A). \tag{5.113}$$

Da A sowohl mit $P_s(A)$ als auch mit $P_u(A)$ kommutiert, sind E_s und E_u A-invariant. Bezeichne mit V_i die Haupträume zu einem Eigenwert mit negativem Realteil und mit W_j die zu einem Eigenwert mit positivem Realteil. Es gilt

$$\bigoplus_i V_i = E_s, \tag{5.114}$$

denn aus der Definition von E_s folgt sofort die Inklusion $\subset$. Gälte die strikte Inklusion, so gäbe es ein $v \in E_s$ und nach der Hauptraumzerlegung eine Darstellung

$$v = \sum_i v_i + w. \tag{5.115}$$

Mit dieser folgt

$$0 = P_s(A)v = \gamma w, \quad \gamma \neq 0 \tag{5.116}$$

und somit $w = 0$. Analog gilt auch

$$\bigoplus W_j = E_u \tag{5.117}$$

und somit

$$\mathbb{K}^n = E_s \oplus E_u. \tag{5.118}$$

Man definiert nun für $v \in E_s$ und $w \in E_u$,

$$A_s v := Av, \quad A_u w = Au, \tag{5.119}$$

dann ist

$$\sigma(A_s) = \sigma_s(A), \quad \sigma(A_u) = \sigma_u(A) \tag{5.120}$$

und alle geforderten Eigenschaften folgen.

Zur Eindeutigkeit: Sei

$$\mathbb{K}^n = E_1 \oplus E_2 \tag{5.121}$$

eine weitere Zerlegung, sodass der Fluss auf E_1 eine Kontraktion ist. Sei $\xi \in E_1$ und bezeichne mit pr_s und pr_u die Projektionen auf die bereits definierten Unterräume. Da E_1 der stabile Unterraum ist, folgt

$$0 \leftarrow |e^{tA}\xi| = |e^{tA}\,\mathrm{pr}_u\,\xi + e^{tA}\,\mathrm{pr}_s\,\xi| \geq |e^{tA}\,\mathrm{pr}_u\,\xi| - |e^{tA}\,\mathrm{pr}_s\,\xi| \to \infty, \tag{5.122}$$

falls $\mathrm{pr}_u\,\xi \neq 0$. Also folgt $\mathrm{pr}_u(\xi) = 0$ und

$$E_1 \subset E_s. \tag{5.123}$$

Alle anderen Inklusionen folgen mit derselben Argumentation. □

5.4 Ljapunov-Stabilität

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, unter welchen Bedingungen ein kritischer Punkt eines linearen Systems stabil ist und wollen dies nun so weit wie möglich auf beliebige Vektorfelder übertragen. Wir müssen zunächst den Begriff der Stabilität definieren.

5.4.1 Definition. [Ljapunov-Stabilität] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Sei x das von f erzeugte dynamische System auf Ω und $\xi_0 \in \Omega$ ein kritischer Punkt. Dann heißt ξ_0

(i) *Ljapunov-stabil* oder einfach *stabil*, falls

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall |\xi - \xi_0| < \delta\colon \omega_+(\xi) = \infty \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \wedge\ \forall t \in [0,\infty)\colon\ |x(t,\xi) - \xi_0| < \epsilon, \end{aligned} \tag{5.124}$$

(ii) *asymptotisch stabil*, wenn sie stabil ist und

$$\exists \delta_1 > 0\ \forall |\xi - \xi_0| < \delta_1\colon x(t,\xi) \to \xi_0 \tag{5.125}$$

und

(iii) *instabil*, wenn sie nicht stabil ist.

5.4.2 Bemerkung. Für ein lineares System $\dot{x} = Ax$ können wir die in Abschnitt 5.3 bewiesenen Aussagen nun wie folgt formulieren: Sei

$$\alpha = \max\{\operatorname{Re} \lambda\colon \lambda \in \sigma(A)\}, \tag{5.126}$$

dann gelten

(i) $\alpha < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi_0 = 0$ ist asymptotisch stabil, vgl. Lemma 5.3.6,

(ii) $\alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_0 = 0$ ist instabil,

Um den Stabilitätssatz beweisen, benötigen wir noch ein Lemma, das auch sonst von Interesse ist.

5.4.3 Lemma. [Lemma von Gronwall] *Nehme an, die nichtnegative Funktion $\varphi \in C^0([t_0,T])$ genüge für jedes $t \in [t_0,T]$ der Abschätzung*

$$\varphi(t) \le a + \int_{t_0}^t m\varphi, \tag{5.127}$$

mit Konstanten $a, m \ge 0$. Dann gilt

$$\forall t \in [t_0,T]\colon \varphi(t) \le a e^{m(t-t_0)}. \tag{5.128}$$

Beweis. Wir können annehmen, dass $m > 0$ ist, da wir dann einfach $m \to 0$ schicken können. Setze

$$\psi(t) = \frac{a}{m} + \int_{t_0}^t \varphi(s)\ ds, \tag{5.129}$$

so gilt

$$\dot{\psi}(t) = \varphi(t) \le a + \int_{t_0}^{t} m\varphi(s)\, ds = m\psi(t). \tag{5.130}$$

Somit folgt für alle $t_0 \le t \le T$:

$$\psi(t) \le \psi(t_0) e^{m(t-t_0)} \tag{5.131}$$

und

$$\varphi(t) \le m\psi(t) \le a e^{m(t-t_0)} \tag{5.132}$$

□

Nun können wir das *Prinzip der linearisierten Stabilität* beweisen, das im Wesentlichen besagt, dass falls die Ableitung eines Vektorfeldes an einem kritischen Punkt eine Kontraktion erzeugt, der kritische Punkt asymptotisch stabil ist.

5.4.4 Theorem. [Prinzip der linearisierten Stabilität] *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Sei $\xi_0 \in \Omega$ und $f(\xi_0) = 0$. Falls*

$$\forall \lambda \in \sigma(Df(\xi_0)) \colon \mathrm{Re}\ \lambda < 0 \tag{5.133}$$

gilt, so ist der kritische Punkt ξ_0 des von f erzeugten dynamisches Systems asymptotisch stabil.

Beweis. Das von f erzeugte dynamische System $x \in C^1(\mathcal{D}_0, \Omega)$ erfüllt

$$\dot{x}(t,\xi) = f(x(t,\xi)) = Df(\xi_0)(x(t,\xi) - \xi_0) + g(x(t,\xi)) \tag{5.134}$$

mit der C^1-Funktion

$$g(x) = f(x) - Df(\xi_0)(x - \xi_0). \tag{5.135}$$

Setze

$$A = Df(\xi_0), \tag{5.136}$$

so folgt mit Theorem 3.1.7 die Darstellung

$$x(t,\xi) - \xi_0 = e^{tA}(\xi - \xi_0) + \int_0^t e^{(t-s)A} g(x(s,\xi))\, ds \tag{5.137}$$

und somit mittels Lemma 5.3.6 und geeigneten $\alpha, \beta > 0$:

$$|x(t,\xi) - \xi_0| \le \beta e^{-\alpha t} |\xi - \xi_0| + \int_0^t \beta e^{-(t-s)\alpha} |g(x(s,\xi))|\, ds \tag{5.138}$$

und nach Multiplikation mit $e^{\alpha t}$:

$$e^{\alpha t} |x(t,\xi) - \xi_0| \le \beta |\xi - \xi_0| + \int_0^t \beta e^{s\alpha} |g(x(s,\xi))|\, ds. \tag{5.139}$$

Wegen der Differenzierbarkeit von f bei ξ_0 existiert ein $0 < \delta < \beta^{-1}$ mit

$$\forall |\xi - \xi_0| < \delta \colon \quad g(\xi) \le \frac{\alpha}{2\beta} |\xi - \xi_0|. \tag{5.140}$$

Für $|\xi - \xi_0| < \frac{\delta}{2\beta}$ sei

$$T_\xi = \sup\{t > 0\colon |x(t,\xi) - \xi_0| < \delta\}. \tag{5.141}$$

Nach dem Gronwallschen Lemma gilt dann für alle $0 < t < T_\xi$, dass

$$e^{\alpha t}|x(t,\xi) - \xi_0| \leq \beta|\xi - \xi_0| e^{\frac{\alpha t}{2}} \tag{5.142}$$

und daher

$$\forall 0 < t < T_\xi\colon \quad |x(t,\xi) - \xi_0| \leq \frac{\delta}{2} e^{-\frac{\alpha t}{2}}. \tag{5.143}$$

Somit ist $T_\xi = \infty$ und (5.143) gilt für alle $0 < t < \infty$. Damit folgt dann die Behauptung. □

Wir wollen auch einen analogen Instabilitätssatz beweisen. Hierzu benötigen wir noch ein weiteres Lemma.

5.4.5 Lemma. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und gelte*

$$\forall \lambda \in \sigma(A)\colon \alpha < \mathrm{Re}\ \lambda < \beta, \tag{5.144}$$

dann existiert ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $\mathbb{K}^n$, sodass

$$\forall x \in \mathbb{C}^n\colon \alpha|x|^2 \leq \mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle \leq \beta|x|^2, \tag{5.145}$$

wobei $|\cdot|$ die induzierte Norm ist.

Beweis. Sei zuerst $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die Jordansche Normalform liefert eine Basis

$$\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n), \tag{5.146}$$

sodass A die Darstellung $D + N$ hat, mit

$$Nb_j = b_{j-1} \quad \text{oder} \quad Nb_j = 0. \tag{5.147}$$

Betrachte die Basis

$$a_j = \delta^j b_j \tag{5.148}$$

für $\delta > 0$, so folgt

$$Na_j = \delta a_{j-1}. \tag{5.149}$$

Wähle das Skalarprodukt nun so, dass die a_j eine ONB sind, so folgt

$$\|N\| = \sup_{|x|\leq 1} |Nx| \leq \delta. \tag{5.150}$$

Wähle nun

$$\delta \leq \min\{\beta - \max\left(\mathrm{Re}(\sigma(A))\right), \min\left(\mathrm{Re}(\sigma(A)) - \alpha\right)\}, \tag{5.151}$$

so folgt die Behauptung wegen

$$\langle Ax, x\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x^i|^2 + \langle Nx, x\rangle\,. \tag{5.152}$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, wende den ersten Fall auf die Komplexifizierung $A_\mathbb{C}$ an und erhalte eine Norm $|\cdot|_\mathbb{C}$, deren Restriktion auf $\mathbb{R}$ die geforderten Eigenschaften erfüllt. □

5.4.6 Theorem. [Linearisierte Instabilität] *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$*. Sei* $\xi_0 \in \Omega$ *und* $f(\xi_0) = 0$*. Falls*

$$\exists \lambda \in \sigma(Df(\xi_0)) \colon \operatorname{Re} \lambda > 0, \tag{5.153}$$

so ist der kritische Punkt des von f *erzeugten dynamischen Systems instabil.*

Beweis. Wie im Beweis von Theorem 5.4.4 setze

$$A = Df(\xi_0), \quad g(x) = f(x) - A(x - \xi_0). \tag{5.154}$$

Sei λ der kleinste positive Eigenwert von A und $0 < \gamma < \lambda$. Dann ist

$$A_\gamma = A - \gamma \operatorname{id} \tag{5.155}$$

hyperbolisch und nach Theorem 5.3.8 werden der $\mathbb{R}^n$ und A_γ zerlegt. Somit wird auch A zerlegt,

$$\mathbb{R}^n = E_- \oplus E_u, \quad A = A_- \oplus A_u, \tag{5.156}$$

mit Spektren

$$\sigma(A_-) = \sigma_s(A) \cup \sigma_n(A), \quad \sigma(A_u) = \sigma_u(A). \tag{5.157}$$

Mit geeigeneten $0 < \beta < \alpha$ existieren nach Lemma 5.4.5 Normen $|\cdot|_u$ und $|\cdot|_-$ auf E_u und E_- mit

$$\operatorname{Re} \langle A_- x_-, x_- \rangle_- \leq \beta |x_-|_-^2 \tag{5.158}$$

und

$$\operatorname{Re} \langle A_+ x_+, x_+ \rangle_+ \geq \alpha |x_+|_+^2. \tag{5.159}$$

Durch

$$\langle x_- + x_+, y_- + y_+ \rangle = \langle x_-, y_- \rangle_- + \langle x_+, y_+ \rangle \tag{5.160}$$

wird ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definiert mit

$$|x|^2 = |x_-|_-^2 + |x_+|_+^2. \tag{5.161}$$

Seien P_- und P_u die zugehörigen Projektionen auf diese Teilräume und setze auf $\mathbb{R}^n$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \left(|P_u(x(t,\xi) - \xi_0)|^2 - |P_-(x(t,\xi) - \xi_0)|^2 \right). \tag{5.162}$$

Nehme nun an, ξ_0 sei asymptotisch stabil. Wähle daher ξ, sodass $\xi - \xi_0 \in E_u \backslash \{0\}$ und so, dass

$$|x(t,\xi) - \xi_0| \leq \delta_0, \tag{5.163}$$

wobei $\delta_0 > 0$ die Implikation

$$|x(t,\xi) - \xi_0| \leq \delta_0 \quad \Rightarrow \quad g(x(t,\xi))| \leq \delta |x(t,\xi) - \xi_0| \tag{5.164}$$

mit einem später zu wählenden $\delta > 0$ erfüllt. Insbesodere ist also $\varphi(0) > 0$. Zur besseren Lesbarkeit definiere

$$y(t) = x(t,\xi) - \xi_0. \tag{5.165}$$

Wenden wir Lemma 5.4.5 auf A_+ und A_- an, so ist für geeignete $0 < \beta < \alpha$ und für alle t mit $\varphi(t) > 0$:

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}(t) &= \langle P_u(y(t)), P_u(\dot{y}(t))\rangle - \langle P_-(y(t)), P_-(\dot{y}(t))\rangle \\
&= \langle P_u(y(t)), A_u(P_u(y(t)))\rangle + \langle P_u(y(t)), P_u(g(y(t)+\xi_0))\rangle \\
&\quad - \langle P_-(y(t)), A_-(P_-(y(t)))\rangle - \langle P_-(y(t)), P_-(g(y(t)+\xi_0))\rangle \\
&\geq \alpha|P_u(y(t))|^2 - \beta|P_-(y(t))|^2 - \delta|P_u(y(t))||y(t)| \\
&\quad - \delta|P_-(y(t))||y(t)| \\
&\geq c\varphi(t),
\end{aligned} \tag{5.166}$$

mit einer Konstanten $c > 0$, falls $\delta > 0$ hinreichend klein ist. Insbesondere bleibt $\varphi > 0$, womit diese Rechung für alle $t > 0$ gerechtfertigt ist. Wir sehen nun aber, dass $\varphi(t) \to \infty$, was nur für $y(t) \to \infty$ möglich ist, ein Widerspruch. □

5.4.7 Bemerkung. Die Prinzipien der linearisierten Stabilität/Instabilität machen keine Aussagen, falls

$$\sigma_u(Df(\xi_0)) = \emptyset, \quad \sigma_n(Df(\xi_0)) \neq \emptyset. \tag{5.167}$$

Die Stabilität hängt hier von den Termen höherer Ordnung ab. Betrachte z.B. Systeme auf $\mathbb{R}^2$:

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{pmatrix}, \tag{5.168}$$

und

$$f_2(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{pmatrix}. \tag{5.169}$$

In beiden Fällen ist die Linearisierung $Df_i(0)$ eine Drehung, also stabil. Schreibe nun

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \tag{5.170}$$

so gilt

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = x^4 \pm y^4 \tag{5.171}$$

und somit

$$\dot{r} = \pm\frac{x^4 + y^4}{r}, \tag{5.172}$$

je nachdem ob wir im ersten oder zweiten Fall sind. Im ersten Fall liegt also Instabilität, im zweiten Stabilität vor.

Literaturverzeichnis

[1] Herbert Amann, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 2. ed., De Gruyter, Berlin, New York, 1995.

[2] Gerd Fischer, *Lineare Algebra*, 14. ed., Grundkurs Mathematik, Vieweg, Wiesbaden, 2003.

[3] Claus Gerhardt, *Analysis II*, International Series in Analysis, International Press of Boston Inc., 2006.

[4] Ernst Kuwert, *Analysis I*, Lecture notes, 2016.

[5] ———, *Analysis II*, Lecture notes, 2016.

[6] John Lee, *Riemannian manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, no. 176, Springer New York, 1997.

[7] ———, *Introduction to smooth manifolds*, 2. ed., Graduate Texts in Mathematics, no. 218, Springer New York, 2012.

[8] Wolfgang Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen - Eine Einführung*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1972.

[9] Stephen Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, 2. ed., Texts in applied matmematics, vol. 2, Springer, New York, 2003.