Prof. Dr. Julian Scheuer
Goethe Universität
Institut für Mathematik
Robert-Mayer-Str. 10
60325 Frankfurt am Main
scheuer@math.uni-frankfurt.de

WiSe 2022/23

Seminarankündigung
"Das Maximumprinzip"

Zeit: Do, 16-18 Uhr
Ort: Robert-Mayer-Str. 10, RM10 - 110
Vorbesprechung: 1. Vorlesungswoche

Kurzzusammenfassung. Eine partielle Differentialgleichung (engl. "Partial Differential Equation" (PDE)) ist eine Relation, die zwischen den Ableitungen einer Funktion vorgeschrieben ist. Eines der wichtigsten Beispiele ist die Laplace-Gleichung, die ein Gleichgewicht der Wärmeverteilung im Raum modelliert. Sie lautet

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^i} = 0$$

für eine Funktion u, die auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ definiert ist. Oft sind die Gleichungen so kompliziert, dass man keine explizite Lösung angeben kann. Dann versucht man, qualitative Eigenschaften von Lösungen herzuleiten, um Aussagen über das z.B. physikalische Modell treffen zu können, das durch die PDE beschrieben wird.
Für solche Untersuchungen ist das Maximumprinzip eines der wichtigsten Werkzeuge. Man begegnet ihm in seiner einfachsten Form zum ersten Mal in der Schule. Nimmt eine zweimal differenzierbare Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ an einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ein lokales Maximum an, so erfüllt die zweite Ableitung

$$f''(x_0) \leq 0.$$

Dies impliziert, dass die Funktion f ihr Maximum am Rand $\partial(a,b) = \{a,b\}$ des Intervals annehmen muss, falls man aus irgendeinem Grunde weiß, dass $f'' > 0$ in ganz (a,b) gilt. Diese Schlussfolgerung nennt man in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen das *schwache Maximumprinzip*. Eine ähnliche Aussage gilt auch für Lösungen der Ungleichung $\Delta u > 0$, wobei $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit einer offenen und beschränkten Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist.
Ziel dieses Seminars ist u.A., diese Aussagen in größerer Allgemeinheit zu beweisen und zu vertiefen.

Zielgruppe. Das schöne am Maximumprinzip ist, dass man nur die Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, sowie etwas lineare Algebra benötigt. Normalerweise wird eine Vorlesung zu diesem Thema erst ab dem 5. Semester gehört, da man für eine rigorose Lösungstheorie effizienterweise etwas Funktionalanalysis benötigt. Besonders an diesem Seminar ist, dass man bereits **ab dem dritten Semester** teilnehmen kann, da wir nur Analysis I-II, sowie Lineare Algebra I voraussetzen. Besonders allen Studierenden, die sich im Bereich Analysis vertiefen möchten, ist daher dieses Seminar zu empfehlen. Es wird der späteren Einstieg in die Theorie der PDE deutlich erleichtern.

Voraussetzungen.

- Analysis I-II
- Lineare Algebra I

Literatur. Von allen Studierenden wird ein ausgewählter Teil aus einem der beiden Bücher [1, 2] vorgetragen.

Literatur

1. David Gilbarg and Neil Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, reprint of the 1998 edition ed., Classics in Mathematics, Springer, 2001.
2. Murray Protter and Hans Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Springer, New York, 1984.