Beispiel 2 der 6. Übung

Wir beginnen mit der ersten Abschätzung aus dem zweiten Beispiel: $w(t,u) \leq \tilde{K}(t,u)$, wobei $\tilde{K}(t,u)^2 = \inf_{v \in H^1} \|u-v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}$ Dazu wählen wir eine beliebige H^1 Funktion auf $(0,1)$ und berechnen:

$$
\begin{aligned}
w(t,u)^2 &= \int_0^{1-t} (u(x+t) + v(t+x) - v(t+x) + v(x) - v(x) - u(x))^2 \, dx \\
&\leq C \int_0^{1-t} (u(x+t) - v(x+t))^2 + (u(x) - v(x))^2 + (v(t+x) - v(x))^2 \, dx \\
&\leq C \left(2\|u-v\|_{L^2}^2 + \int_0^{1-t} (\underbrace{v(x+t) - v(x)}_{= \int_x^{x+t} v'(s)\, ds})^2 \, dx \right) \\
&\overset{\text{C.S.}}{\leq} C \left(2\|u-v\|_{L^2}^2 + \int_0^{1-t} \int_x^{x+t} v'(s)^2 \, ds \int_x^{x+t} 1^2 \, ds \, dx \right) \\
&= C \left(2\|u-v\|_{L^2}^2 + t \int_0^{1-t} \int_x^{x+t} v'(s)^2 \, ds \, dx \right) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} C \left(2\|u-v\|_{L^2}^2 + t \int_0^{1} \int_{s-t}^{s} v'(s)^2 \, dx \, ds \right) \\
&= C \left(2\|u-v\|_{L^2}^2 + t^2 \int_0^{1} v'(s)^2 \, ds \right)
\end{aligned}
$$

Da v beliebig bleibt die Abschätzung auch für das Infimum gültig und wir haben $w(t,u) \leq \tilde{K}(t,u)$ gezeigt. Für die andere Abschätzung wählen wir ein geeignetes $v \in H^1(0,1)$:

$$
v(x) = \begin{cases} \frac{1}{t} \int_x^{x+t} u(s)\, ds & x \in (0, \frac{1-t}{2}) \\ \frac{1}{t} \int_{\frac{1-t}{2}}^{\frac{1+t}{2}} u(s)\, ds & x \in (\frac{1-t}{2}, \frac{1+t}{2}) \\ \frac{1}{t} \int_{x-t}^{x} u(s)\, ds & x \in (\frac{1+t}{2}, 1) \end{cases}
$$

Wir berechnen nun:

$$\int_0^1 (u-v)^2\,dx$$

$$\int_0^{\frac{1-t}{2}} \left(\frac{1}{t}\int_x^{x+t} u(x)-u(s)\,ds\right)^2 dx + \int_{\frac{1+t}{2}}^1 \left(\frac{1}{t}\int_{x-t}^{x} u(x)-u(s)\,ds\right)^2 dx + \int_{\frac{1-t}{2}}^{\frac{1+t}{2}} \left(\frac{1}{t}\int_{\frac{1-t}{2}}^{\frac{1+t}{2}} u(x)-u(s)\,ds\right)^2 dx$$

$$\overset{\text{C.S.}}{\leq} \frac{1}{t}\int_0^{\frac{1-t}{2}} \int_x^{x+t} (u(x)-u(s))^2\,ds\,dx + \frac{1}{t}\int_{\frac{1+t}{2}}^1 \frac{1}{t}\int_{x-t}^{x} (u(x)-u(s))^2\,ds\,dx + \int_{\frac{1-t}{2}}^{\frac{1+t}{2}} \frac{1}{t}\int_{\frac{1-t}{2}}^{\frac{1+t}{2}} (u(x)-u(s))^2\,ds\,dx$$

Wir führen im ersten Term die Subsititution $s = x + rt$ durch und erhalten damit:

$$\frac{1}{t}\int_0^{\frac{1-t}{2}} \int_x^{x+t} (u(x)-u(s))^2\,ds\,dx$$

$$\int_0^{\frac{1-t}{2}} \int_0^1 (u(x)-u(x+rt))^2\,dr\,dx =$$

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{1-t}{2}} (u(x)-u(x+rt))^2\,dx\,dr =$$

Da nun $\frac{1-t}{2}$ stets $\leq \frac{1}{2}$ ist, $1-tr$ aber stets $\geq \frac{1}{2}$ gilt, ist sicher $\frac{1-t}{2} \leq 1-tr$ und damit im Integral:

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{1-t}{2}} (u(x)-u(x+rt))^2\,dx\,dr \leq \int_0^1 \int_0^{1-rt} (u(x)-u(x+rt))^2\,dx\,dr = \int_0^1 w(rt,u)^2\,dr$$

Ähnliche Überlegungen führen uns (mittels der Subsitution $s = x - rt$ auf eine analoge Abschätzung für den zweiten Term. Ähnlich kann man auch im dritten Term vorgehen.

Den $t^2 \int_0^1 v'(x)^2\,dx$ Term behandeln wir folgendermaßen:

$$\int_0^1 v'(x)^2\,dx = \int_0^{\frac{1-t}{2}} v'(x)^2\,dx + \int_{\frac{1+t}{2}}^1 v'(x)^2\,dx + \underbrace{\int_{\frac{1-t}{2}}^{\frac{1+t}{2}} v'(x)^2\,dx}_{=0}$$

$$= t^2 \int_0^{\frac{1-t}{2}} \frac{1}{t^2}(u(x+t)) - u(x))^2\,dx + t^2 \int_{\frac{1+t}{2}}^1 \frac{1}{t^2}(u(x-t)) - u(x))^2\,dx$$

Da die Integralgrenze $\frac{1-t}{2} \leq 1-t$ ist, haben wir sofort $\int_0^{\frac{1-t}{2}} (u(x+t)-u(x))^2\,dx$ $\leq \int_0^{1-t} (u(x+t))-u(x))^2\,dx$, im zweiten Integral kann man ähnlich argumentieren. Zusammenfassend bemerken wir also, dass $t^2 \int_0^1 v'(x)^2\,dx \leq w^2(t,u)$ sowie $\int_0^1 (u-v)^2\,dx \leq \int_0^1 w^2(rt,u)\,dr$ gilt.