3. Übung zur finiten Elemente Methode - stationäre Probleme
24. Oktober 2012

1. Sei $\Omega = (0, \pi)$ und $u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \sin(ix)$ die Zerlegung der Funktion u in ihre Fourierkoeffizienten. Wir definieren für $s \in [0, \frac{3}{2})$ die $\|\cdot\|_{H_0^s}$ Norm mittels

$$\|u\|_{H_0^s}^2 := \sum_{i=1}^{\infty} i^{2s} u_i^2.$$

Bem.: Damit gilt $\|u\|_{H_0^0} \cong \|u\|_{L_2}$ sowie $\|u\|_{H_0^1} \cong \|\nabla u\|_{L_2}$.

   a.) Sei $0 < a < \pi$. Für welche s liegt die Funktion u_1 mit

$$u_1(x) := \begin{cases} 1 & x > a \\ 0 & x \leq a \end{cases}$$

   in H_0^s? Der Raum H_0^s ist als Abschluss $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^s}}$ erklärt.

   b.) Für welche s liegt das Punktauswertungsfunktional $f : u \mapsto u(a)$ in $(H_0^s)^*$?

2. Sei $s \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ und $u \in H_0^s$. Dann ist u Hölderstetig mit Exponent $\alpha = s - \frac{1}{2}$, d.h. es gilt

$$|u(x) - u(y)| \leq c\,|x - y|^\alpha$$

3. Seien X, Y Hilberträume mit gemeinsamer VR-Struktur. Auf dem Summenraum $X + Y := \{z = x + y : x \in X\ y \in Y\}$ sei

$$\|z\|_{X+Y} := \inf_{\substack{z=x+y \\ x\in X,\ y\in Y}} \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2}.$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{X+Y}$ eine Hilbertraumnorm ist. Hinweis: Parallelogrammeigenschaft.

4. Führen Sie die FEM Rechnung zu Beispiel 6 des 2. Übungsblattes durch (Matlab, C++)! Zeigen Sie außerdem die Identität (J aus Ue 1, Bsp. 1)

$$J(u_h) - J(u) = \frac{1}{2}\|u - u_h\|_A^2.$$

Aus den „berechenbaren" Größen $J(u), J(u_h)$ lässt sich also der Fehler in der Energienorm berechnen. Implementieren Sie zusätzlich diesen Fehlerschätzer, den Wert von $J(u)$ ermitteln Sie hierfür mit einer sehr genauen Rechnung. Plotten Sie den Fehler $\|u - u_h\|_A$ über der Elementanzahl n.

5. Betrachten Sie nochmals Beispiel 6 des 2. Übungsblattes. Berechnen Sie nun anstatt mit finiten Elementen erster Ordnung die resultierende Systemmatrix A sowie den rechte Seite Vektor f unter Verwendung quadratischer finiter Elemente. Der diskrete Raum V_h ist dabei durch

$$V_h := \{v \in C(0,1) : v\big|_{(x_i,\,x_{i+1})} \in P^2((x_i, x_{i+1}))\}$$

gegeben. Wählen Sie eine Basis für V_h!