3. Übung zur finiten Elemente Methode - stationäre Probleme
Nachtrag zu Beispiel 3

Wir wollen $\inf\limits_u \sup\limits_v \frac{B(u,v)}{\|u\|_X\,\|v\|_X}$ nach unten abschätzen. Wir wählen ein spezielles $v = (u_1, \lambda u_2)$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\sup_v \frac{B(u,v)}{\|u\|_X\,\|v\|_X} \geq & \frac{a(u_1,u_1)+b(u_1,\lambda u_2)+a(u_2,u_2)\lambda}{\|u\|_X\,\|v\|_X} \geq \\
& \frac{a(u_1,u_1)-\beta_2\|u_1\|_V\,\lambda\|u_2\|_V+a(u_2,u_2)\lambda}{\|u\|_X\,\|v\|_X} \overset{\text{Young}}{\geq} \\
& \frac{\alpha_1\|u_1\|_V^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_2^2\lambda^2}{\alpha_1}\|u_2\|_V^2+\alpha_1\|u_1\|_V^2\right)+\lambda\alpha\|u_2\|_V^2}{\|u\|_X\,\|v\|_X} = \\
& \frac{\frac{\alpha_1}{2}\|u_1\|_V^2+\|u_2\|_V^2\left(\lambda\alpha_1-\frac{\beta_2^2\lambda^2}{2\alpha_1}\right)}{\|u\|_X\,\|v\|_X} = \\
& \frac{\frac{\alpha_1}{2}\|u_1\|_V^2+\|u_2\|_V^2\lambda\alpha_1\left(1-\frac{\beta_2^2\lambda}{2\alpha_1^2}\right)}{\|u\|_X\,\|v\|_X}
\end{aligned}$$

Wählt man $\lambda = \frac{\alpha_1^2}{\beta^2}$ erhält man

$$\sup_v \frac{B(u,v)}{\|u\|_X\,\|v\|_X} \geq \frac{\alpha_1}{2}\frac{\|u_1\|_V^2+\|u_2\|_V^2\frac{\alpha_1^2}{\beta^2}}{\|u\|_X\,\|v\|_X}$$

Für $\alpha_1 < \beta_2$ ist $\|v\|_X^2 = \|u_1\|_V^2 + \frac{\alpha_1^4}{\beta_2^4}\|u_1\|_V^2 \leq \|u\|_X^2$. Ebenso ist in diesem Fall $\|u_1\|_V^2 + \frac{\alpha_1^2}{\beta_2^2}\|u_1\|_V^2 \geq \frac{\alpha_1^2}{\beta_2^2}\|u\|_X^2$ und man erhält:

$$\sup_v \frac{B(u,v)}{\|u\|_X\,\|v\|_X} \geq \frac{\alpha_1}{2}\frac{\alpha_1^2}{\beta_2^2}\frac{\|u_1\|_V^2+\|u_2\|_V^2}{\|u\|_X\,\|u\|_X} = \frac{\alpha_1}{2}\frac{\alpha_1^2}{\beta_2^2}$$

Für $\beta_2 < \alpha_1$ ist einerseits $\|u_1\|_V^2 + \frac{\alpha_1^2}{\beta_2^2}\|u_2\|_V^2 > \|u_1\|_V^2 + \|u_2\|_V^2$, sowie $\|u_1\|_V^2 + \frac{\alpha_1^4}{\beta_2^4}\|u_2\|_V^2 \leq \frac{\alpha_1^4}{\beta_2^4}\|u\|_X^2$, was letztendlich zu

$$\sup_v \frac{B(u,v)}{\|u\|_X\,\|v\|_X} \geq \frac{\alpha_1}{2}\frac{\beta_2^2}{\alpha_1^2}\frac{\|u_1\|_V^2+\|u_2\|_V^2}{\|u\|_X\,\|u\|_X} = \frac{\beta_2^2}{2\alpha_1}$$

$\inf$ anwenden liefert die $\inf - \sup$ Bedingung.

Im Fall $\beta_2 < \alpha_1$ kann man $\lambda = 1$ wählen und die $\inf\sup$ Konstante würde sich zu $\frac{\alpha_1}{2}$ errechnen. Im anderen Fall kann eine weitere Verbesserung erzielt werden indem man in den letzten Abschätzungen nicht Zähler und Nenner separat abschätzt sondern jeweils den ganzen Bruch betrachtet.