7. Übung zur finiten Elemente Methode - stationäre Probleme
21. November 2012

1. Berechnen Sie die nodale Basis für folgende Elemente:
   - Hermite Segment: $T = [a, b]$, $V_T = P^3[T]$, $\psi_T = \{v(a), v(b), v'(a), v'(b)\}$
   - P^3- Dreieck: $T = [a, b, c]$, $V_T = P^3(T)$, $\psi_T = \{v(a + \frac{i}{3}(b-a) + \frac{j}{3}(c-a)) : \ i + j \leq 3\}$

2. Zeigen Sie: Die Familie von Hermite Segmenten ist interpolations-äquivalent!

3. Raviart Thomas Dreieck: Bestimmen Sie eine Basis für $\hat{T} = [(0,0), (1,0), (0,1)]$ Sind die Raviart Thomas Elemente auf T mit T beliebiges Dreieck äquivalent zum Raviart Thomas Dreieck auf $\hat{T}$? Sind sie interpolations-äquivalent?

4. Segment p-ter Ordnung:

   a.) Sei T=[-1,1], $V_T = P^p(T), \psi_T = \{u \mapsto \int\limits_{-1}^{1} uP_i \, dx, \ \ i = 0 \ldots p\}$, P_i ist das Legendre Polynom i-ter Ordnung. Bestimmen Sie die nodale Basis $\{\varphi_i\}$ und interpretieren Sie den Interpolationsoperator.

   b.) wie a.) nur mit $\psi_T = \{u(-1), u(1), \int\limits_{-1}^{1} u'(x)P_i(x) \, dx, \ \ i = 1 \ldots p-1\}$

5. Sei P die L_2-orthogonale Projektion $L_2(0,1) \to P^p(0,1)$ Zeigen Sie mit Hilfe des Bramble Hilbert Lemmas:
$$\|u - Pu\|_{L_2(0,1)} \leq c|u|_{H^m} \qquad \forall \, u \in H^m(0,1), m \leq p+1$$
   Zeigen Sie weiters für $\tilde{P} : L_2(a,b) \to P^p(a,b)$
$$\|u - \tilde{P}u\|_{L_2} \leq c(b-a)^m |u|_{H^m} \qquad \forall \, u \in H^m(a,b), m \leq p+1$$
   Hinweis: Transformation $F : \ (0,1) \to (a,b)$

6. Timoshenko-Balken: Ges.: $(w, \beta) \in V_0 \subset V := [H^1(0,1)]^2$
$$A((w,\beta),(v,\delta)) = \int\limits_0^1 fv \qquad \forall (v,\delta) \in V_0$$
   mit $t \in \mathbb{R}^+$ die Balkendicke und
$$A((w,\beta),(v,\delta)) = \int\limits_0^1 \beta'\delta' + \frac{1}{t^2}\int\limits_0^1 (w' - \beta)(v' - \delta)$$
   Sei
$$\text{a.) } V_0 = \{(\omega,\beta) \in V : w(0) = w(1) = 0\}$$
$$\text{b.) } V_0 = \{(\omega,\beta) \in V : w(0) = \beta(0) = 0\}$$
$$\text{c.) } V_0 = \{(\omega,\beta) \in V : \beta(0) = \beta(1) = 0\}$$
   Wie sieht der Kern von A aus? Auf welchen Teilräumen ist $A(.,.)$ elliptisch?

7. Implementieren Sie die p- Variante von Ue 6 mit den integrierten Legendrepolynomen!