1. Übung zur finiten Elemente Methode - stationäre Probleme
10. Oktober 2012

1. Sei V ein Hilbertraum,
$$A : V \times V \to \mathbb{R}$$
eine stetige, elliptische und symmetrische Bilinearform,
$$f : V \to \mathbb{R}$$
eine stetige Linearform auf V sowie $J(v) := \frac{1}{2}A(v,v) - f(v)$. Weiters sei $V_0 \subset V$ ein linearer Teilraum, $g \in V$ und $V_g = g + V_0$.
Zeigen Sie: J nimmt sein Minimum über V_g genau dann bei $u \in V_g$ an, wenn für $u \in V_g$ $A(u,v) = f(v) \quad \forall v \in V_0$ gilt. Muss dazu V_0 abgeschlossen sein?

2. Sei V ein Hilbertraum sowie $A : V \to V$ ein linearer, beschränkter sowie selbstadjungierter Operator.
Zeigen Sie ohne allgemeine Spektraltheorie zu verwenden:
$$\|A\| := \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{|(Av,v)|}{\|v\|^2}$$

3. Betrachten Sie die normierten Räume $V = (C^1[0,1], \|\frac{d}{dx} \cdot\|_\infty + \|\cdot\|_\infty)$ und $W = (C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ sowie den Operator
$$T : \begin{cases} V \to W \\ v \mapsto v' \end{cases}$$
   (a) Zeigen Sie, dass T ein beschränkter linearer Operator ist und berechnen Sie die Operatornorm.
   (b) Bestimmen Sie den Kern von T.

4. Sei $T_\sigma : l_2 \to l_2$ ein linearer Operator mit $(T_\sigma x)_n = \sigma_n x_n$, wobei $\sigma \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ mit $\sigma_n \to 0$.
Zeigen Sie, dass T kompakt ist.

5. Sei $\Omega = (0,1)$. Betrachten Sie das Randwertproblem: Gesucht ist $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ mit
$$\begin{aligned} -(a(x)u'(x))' + c(x)u(x) &= f(x) \qquad && x \in \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$
wobei $a \in C^2(\bar{\Omega}),\ a(x) \geq \alpha > 0$ und $f, c \in C(\bar{\Omega}),\ c(x) \geq \gamma > 0$.
Bestimmen Sie die Variationsformulierung (Bilinearform A, Linearform f, Räume!). Bestimmen Sie weiters Konstanten $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ mit
$$\begin{aligned} A(u,u) &\geq \alpha_1 \|u\|_{H^1}^2 && \text{(d.h. } A \text{ ist elliptisch)} \\ A(u,v) &\leq \alpha_2 \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} && \text{(d.h. } A \text{ ist stetig)} \\ f(v) &\leq c\|v\|_{H^1} && \text{(d.h. } f \text{ ist stetig)} \end{aligned}$$