5. Übung zur finiten Elemente Methode - stationäre Probleme
7. November 2012

1. Zeigen Sie, dass folgende Funktionen in $H^1(\Omega)$ sind:

   a.) $\Omega = B(0, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}^2$, $f(x) = \log(\log(\frac{1}{|x|}))$

   b.) $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$ sowie $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, $f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$

2. Sei $I = (-1, 1)$ sowie T das Dreieck mit Eckpunkten $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Wir definieren den Fortsetzungsoperator $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} : \begin{cases} L_2(I) \to L_2(T) \\ u \mapsto \frac{1}{2y} \int\limits_{x-y}^{x+y} u(s)\, ds \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass für $y \in (0, 1)$

$$\int\limits_{-1+y}^{1-y} |\mathcal{E}u|^2 + |\nabla(\mathcal{E}u)|^2\, dx \le c \min\{\|u\|^2_{H^1(I)}, \frac{1}{y^2}\|u\|^2_{L_2(I)}\}$$

   gilt.

3. Zeigen Sie, dass für $u \in H^{\frac{1}{2}}(I)$

$$\|\mathcal{E}u\|_{H^1(T)} \le c\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(I)}$$

   gilt, wobei die H^s-Norm über die K-Funktionalmethode definiert ist ($\mathcal{E}$, T, I wie in Bsp. 2).

4. Zeigen Sie, dass der im Folgenden erklärte Fortsetzungsoperator $\mathcal{E}$ stetig von $H^2(-1, 0)$ nach $H^2(-1, 1)$ abbildet:

$$(\mathcal{E}u)(x) := \begin{cases} u(x) & x \in (-1, 0) \\ -3u(-x) + 4u(-x/2) & x \in (0, 1) \end{cases}$$

5. Seien $V_1 \subset V_0$ Hilberträume, $\|\cdot\|_s = \|\cdot\|_{[V_0,V_1]_s}$. Zeigen Sie, dass für $u \in V_1$ gilt:

$$\|u\|_s \le c\|u\|_0^{1-s}\|u\|_1^s$$

   Hinweis: $K(t, u) \le \|u\|_0,\ K(t, u) \le t\|u\|_1,\ \int_0^\infty \ldots = \int_0^\alpha \ldots + \int_\alpha^\infty \ldots$
   α optimieren!

6. Implementieren Sie die P^2-Methode vom 5. Beispiel des letzten Übungsblattes!

7. p-Methode: Wir betrachten wieder das eindimensionale Problem Ü 2, Bsp. 6. Für eine Diskretisierung setzen wir nun $V_p = \{u \in P^p :\ u(0) = u(1) = 0\}$.
   Als Basis für V_p wählen wir $\{\phi_j = (1-x)x^j \ j = 1 \ldots p-1\}$.
   Berechnen Sie die Systemmatrix sowie den rechte Seite Vektor.