6. Übung zur finiten Elemente Methode - stationäre Probleme
14. November 2012

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, sowie $u \in H^1(\Omega)$. Zeigen Sie:
$$\nabla_{\text{weak}} u = 0 \Rightarrow u = \text{const}$$
Können Sie mit „$C^1(\Omega)$ ist dicht in $H^1(\Omega)$“ argumentieren bzw. welches Problem tritt hierbei auf?

2. Wir definieren das Stetigkeitsmodul $w : (0,1) \times L_2(0,1) \to \mathbb{R}$ als
$w(t,u) = \left(\int\limits_0^{1-t} (u(x) - u(x+t))^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$.
Das K-Funktional sei durch $K(t,u)^2 = \inf\limits_{v \in H^1(0,1)} \|u - v\|^2_{L_2(0,1)} + t^2 \|v'\|^2_{L_2(0,1)}$ gegeben.
Zeigen Sie für $t \in (0, \frac{1}{2})$:
$$w(t,u) \leq K(t,u)$$
$$K(t,u)^2 \leq w(t,u)^2 + \int\limits_0^1 w(st,u)^2 \, ds$$

3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Sobolev Slobotetzky Norm ist definiert als
$$\|u\|^2_{H^s(I)} := \|u\|^2_{L_2} + \int\limits_I \int\limits_I \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{1+2s}}$$
Zeigen Sie für $s \in (0,1)$ die Äquivalenz der Normen
$$\|u\|_{H^s(I)} \approx \|u\|_{[L_2, H^1(I)]_s}$$

4. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ und $s \in (0,1)$ liegt $x^\alpha \in H^s(0,1)$?

5. Seien $I_1 = (-1,0),\ I_2 = (0,1),\ I = (-1,1)$ sowie $u \in L_2(I_1)$. Wir definieren
$$\tilde{u} := \begin{cases} u & x \in I_1 \\ 0 & x \in I_2 \end{cases}$$
Zeigen Sie:
$$\tilde{u} \in H^{\frac{1}{2}}(I) \Leftrightarrow u \in H^{\frac{1}{2}}(I_1) \wedge \int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{|x|} u^2 \, dx < \infty$$

6. Zeigen Sie mit den Bezeichnungen aus dem vorigen Beispiel:

$$u \in H^{\frac{1}{2}}(I) \Leftrightarrow u\big|_{I_j} \in H^{\frac{1}{2}}(I_j) \;\; j = 1,2 \;\; \wedge \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{|x|}(u(x) - u(-x))^2 \, dx < \infty$$

7. Programmieren Sie die p-Variante des letzten Übungsblattes und bestimmen Sie die Konditionszahl der Systemmatrix!

8. $p-$Version mit Orthogonalpolynomen. Dazu sei P_i das Legendre Polynom $i-$ter Ordnung. Es gilt (ohne Beweis)

$$\int\limits_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)\, dx = \frac{1}{2i+1}\delta_{ij}.$$

Des weiteren gilt die 3 Term Rekursion

$$P_i(x) = \frac{2i-1}{i} x P_{i-1}(x) - \frac{i-1}{i} P_{i-2}(x),$$

mit $P_0 = 1$ und $P_1 = x$. Des weiteren definieren wir die integrierten Legendre Polynome L_i als:

$$L_i(x) = \int\limits_{-1}^{x} P_{i-1}(s)\, ds \quad i \geq 2.$$

Auch hier gilt eine 3-Termrekursion

$$L_i(x) = \frac{2i-3}{i} x L_{i-1}(x) - \frac{i-3}{i} L_{i-2}(x),$$

wobei hier zusätzlich $L_0(x) := -1$ sowie $L_1(x) := x$. Die integrierten Legendrepolynome erfüllen (für $i \geq 2$) $L_i(-1) = L_i(1) = 0$. Einen Zussamenhang zwischen L_i und P_i erhalten wir wie folgt:

$$L_i(x) = \frac{1}{2i-1}(P_i(x) - P_{i-2}(x))$$

Verwenden Sie nun als Basisfunktionen auf $(0,1)$ die Funktionen

$$\phi_i(x) = L_{i+1}(2x-1) \qquad i = 1, \ldots, p-1$$

und berechnen Sie Systemmatrix und rechte Seite Vektor.