2. Übung zur finiten Elemente Methode - stationäre Probleme
17. Oktober 2012

1. Sei V ein Hilbertraum, f eine stetige Linearform und A eine stetige, symmetrische und elliptische Bilinearform. Sei u die Lösung des Variationsproblems

$$A(u, v) = f(v).$$

Zeigen Sie, dass für u

$$\sup_{v \neq 0} \frac{f(v)}{\|v\|_A} = \|u\|_A$$

gilt. Das Supremum wird für $v = u$ angenommen.

2. Sei V ein Hilbertraum und $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, elliptische (mit α_1) und stetige (mit α_2) Bilinearform. Des Weiteren sei $X = V \times V$, sowie

$$B : \begin{cases} X \times X \to \mathbb{R} \\ ((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \mapsto a(u_1, v_1) + a(u_1, v_2) + a(u_2, v_2) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass B elliptisch ist und geben Sie die Elliptizitätskonstante an! Sei $X_N \subset X$ ein linearer Teilraum. Lässt sich die Elliptizität von B auf X_N übertragen?

3. Wie Aufgabe 2. Sei $b : V \times V \to \mathbb{R}$ eine weitere stetige (mit β_2) Bilinearform. Jetzt sei

$$B : X \times X \to \mathbb{R} : \ ((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \mapsto a(u_1, v_1) + b(u_1, v_2) + a(u_2, v_2)$$

Zeigen Sie die $\inf - \sup$ Stabilität von B (Konstante = ?)! Worauf muss bei der Wahl eines Teilraumes $X_N \subset X$ geachtet werden um die $\inf - \sup$ Bedingung auch im diskreten zu erfüllen?

4. Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Raum.
Zeigen Sie: Falls $\|.\|$ die Parallelogrammeigenschaft

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad \forall\, x, y \in V$$

erfüllt, dann ist über

$$(x, y) := \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2$$

ein Skalarprodukt definiert.

5. Betrachten Sie die Konvektions - Diffusionsgleichung

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(-a\nabla u + bu) &= f & x &\in \Omega \\ u &= u_D & x &\in \Gamma_{\text{in}} \\ (a\nabla u - bu)n &= g & x &\in \Gamma_{\text{out}} \end{aligned}$$

wobei $a \in C^1(\bar{\Omega})$ mit $a(x) > \alpha_1 > 0$, $b \in C^1(\bar{\Omega})$, $\text{div}(b) \geq c > 0$.
Hierbei ist $\Gamma_{\text{in}} := \{x \in \partial\Omega : b \cdot n \leq 0\}$ der Einflussrand und $\Gamma_{\text{out}} := \partial\Omega \backslash \Gamma_{\text{in}}$ der Ausflussrand. Bestimmen Sie die Variationsformulierung (Bilinearform A, Linearform f) der Gleichung! Zeigen Sie, dass A auf $V_0 := \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ auf } \Gamma_{\text{in}}\}$ elliptisch ist.

6. Betrachten Sie das eindimensionale Problem auf $\Omega = (0, 1)$

$$
\begin{aligned}
-u'' + u &= 1, \\
u(0) = u(1) &= 0.
\end{aligned}
$$

Diskretisieren Sie die Gleichung auf dem gleichmäßigen Netz mit Knoten $x_i = ih$, $h = \frac{1}{n}$ mit linearen finiten Elementen (Hutfunktionen). Geben Sie die resultierende Systemmatrix A und den rechte-Seite Vektor f an.