8. Übung zur finiten Elemente Methode - stationäre Probleme
5. Dezember 2012

1. Nicht konformes P^1-Dreieck:
   $V_T = P^1(T)$, $\psi_i(v) = \int\limits_{E_i} v\,dx,\quad i = 1\ldots 3$. E_i ist die i-te Kante des Dreiecks T. Zeigen Sie:
   $$\|u - I_T u\|_{H^k(T)} \leq ch^{m-k}\|u\|_{H^m(T)} \quad k \in \{0,1\},\ m \in \{1,2\}$$
   Hinweis: Transformation auf $\hat{T}$ + Bramble Hilbert.

2. Auf $\omega \subset \mathbb{R}^d$, beliebiges Gebiet gelte $\|u - \overline{u}^\omega\|_{L_2(\omega)} \leq C_p\|\nabla u\|_{L_2(\omega)} \quad \forall\, u \in H^1$. Zeigen Sie, dass dann auch
   $$\inf_{q\in P^1}\|u - q\|_{L_2(\omega)} \leq C_p^2\|\nabla^2 u\|_{L_2(\omega)}, \qquad \forall\, u \in H^2(\omega)$$
   Hinweis: Wähle q so, dass $\int_\omega q = \int_\omega u$ und $\int_\omega \nabla q = \int_\omega \nabla u$.

3. (*) Mit den Voraussetzungen aus Beispiel 2.) zeigen Sie, dass
   $$\inf_{q\in P^k}\|u - q\| \leq C_p^{k+1}|u|_{H^{k+1}(\omega)}, \qquad \forall\, u \in H^{k+1}(\omega),$$
   wobei jetzt für $|.|_{H^k}$ gemischte Ableitungen mehrfach gezählt werden, d.h. $|u|^2_{H^k} := \sum\limits_{i=1}^{d}|\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2_{H^{k-1}}$
   Hinweis: Definiere $\Pi_k : H^k \to P^p$ so, dass für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq k$ gilt: $\int_\omega \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\Pi_k u = \int_\omega \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}u$. Daraus folgert man, dass $\frac{\partial}{\partial x_i}(\Pi_k u) = \Pi_{k-1}(\frac{\partial}{\partial x_i}u)$ gilt.

4. Sei V_h der Finite Elemente Teilraum 1. Ordnung von $H^1(\Omega)$. Wir betrachten die folgenden Clement-artigen Quasi-Interpolationsoperatoren: ($\omega_V \ldots$ Vertex Patch)
   $$\Pi_h u = \sum_{\substack{V \\ \text{Vertices}}} \tilde{\Psi}_V(u)\varphi_V$$
   a.) $\tilde{\Psi}_V(u) = \frac{1}{|\omega_V|}\int_{\omega_V} u$
   b.) $\tilde{\Psi}_V(u) = \frac{1}{\int_{\omega_V}\varphi_V}\int_{\omega_V}\varphi_V u$
   c.) $\tilde{\Psi}_V(u) = (Pu)(V)$, wobei P die $L_2(\omega_V)$- orthogonale Projektion von $L_2(\omega_V) \to P^1(\omega_V)$
   d.) $\tilde{\Psi}_V(u) = (Pu)(V)$, wobei P die $L_2(\omega_V)$- orthogonale Projektion von $L_2(\omega_V) \to V_h\big|_{\omega_V}$

   Zeigen Sie, dass $\|\Pi_h u\|_{L_2(T)} \leq c\|u\|_{L_2(\omega_V)}$ gilt, mit c nur von der Form der Dreiecke abhängig. Zeigen Sie außerdem, dass $\Pi_h u = u \ \ \forall\, u \in P^0(\omega_V)$ für die Operatoren aus a.) bzw. b.). Analog dazu zeigen Sie für die Operatoren aus c.) und d.), dass $\Pi_h u = u \ \ \forall\, u \in P^1(\omega_V)$.

5. Zeigen Sie, dass Π_h aus dem vorigen Beispiel b.) selbstadjungiert ist, sowie dass Π_h aus Aufgabe d.) Projektor auf V_h ist.

6. Sei $u \in H_0^1(0,1)$ Lsg von $\int\limits_0^1 u'v' + uv = \int\limits_0^1 fv \,\forall v \in H_0^1$ und u_h die entsprechende FEM-Lsg.
Weiters sei p so, dass $p' = u_h - f$.
Zeigen Sie, dass
$$\|u' - u_h'\|_{L_2}^2 + \|u - u_h\|_{L_2}^2 \leq 1\|u_h' - p\|_{L_2}^2$$
gilt. (vgl - Prager-Synge Theorem aus VL).