9. Übung zur finiten Elemente Methode - stationäre Probleme
12. Dezember 2012

1. Integrationsregeln:
   Sei T ein Dreieck, zeigen Sie ($\lambda_i \dots$ baryzentrische Koordinaten):

$$\int\limits_T \lambda_1^p \, \lambda_2^q \, \lambda_3^r \, dx = \frac{p! \, q! \, r!}{(p+q+r+2)!} 2\,|T|$$

2. Zeigen Sie, dass die folgenden Intetgrationsregeln exakt für P^1 bzw. P^2 sind:

   - $\int\limits_T q \, dx = \frac{|T|}{3} \sum\limits_{i=1}^{3} q(V_i) \qquad \forall\, q \in P^1(T)$
   - $\int\limits_T q \, dx = \frac{|T|}{3} \sum\limits_{i=1}^{3} q(E_{i,\alpha}) \qquad \forall\, q \in P^2(T)$,
     wobei $E_{i,\alpha}$ der Mittelpunkt der i-ten Kante ist.

3. (*) Wir betrachten nochmals die Operatoren aus Übung 8.4. Zeigen Sie

$$\|u - \Pi_h u\|_{L_2(T)} \leq ch \|\nabla u\|_{L_2(\omega_T)}$$

   (für die Operatoren aus a.), b.), c.) sowie d.))

$$|u - \Pi_h u|_{H^1(T)} \leq ch |u|_{H^2(\omega_T)}$$

   (für die Operatoren aus c.) und d.))
   Hinweise:

   - Bsp. 8.4 (erhalten von Konstanten resp. linearen Funktionen)
   - $|(I - \Pi_h)u|_{H^1(T)} \leq c|u|_{H^1(\omega_T)}$
   - es gilt $(u - \Pi_h u)\big|_T = \sum\limits_{\alpha=1}^{3} (u - \Psi_{V_\alpha}(u))\varphi_{V_\alpha}$
   - aus VL: $\|u - \bar{u}\|_{L_2(\omega_v)} \leq ch|u|_{H^1(\omega_v)}$

4. Seien P die aus 7.4 a), sowie $\tilde{P}$ die aus 7.4 b) bekannten $L_2(I)$ bzw. $H^1(I)$ Projektionen auf $P^p(I)$, mit $I = (-1, 1)$. In der VL wird $\|u - Pu\|_{L_2(I)} \leq \frac{c}{p}|u|_{H^1(I)}$ gezeigt.
   Zeigen Sie:

$$|u - \tilde{P}u|_{H^1(I)} \leq \frac{c}{p}|u|_{H^2(I)}$$

   Hinweis: Zeigen Sie $(\tilde{P}u)' = P(u')$ (=commuting diagramm property)

5. Zeigen Sie mit den Bezeichnungen aus dem vorherigen Beispiel, dass

$$||u - \tilde{P}u||_{L_2(I)} \leq \frac{c}{p^2}|u|_{H^2(I)}$$

   Hinweis: Aubin - Nitsche

6. Fehlerschätzer basierend auf Prager Synge:
   Wir betrachten das Problem $-u'' + u = 1, \quad u(0) = u(1) = 0$ mit $V_h = P^1$-FEM Raum. Das Residuum $r(\cdot) \in (H^1)^*$ ist durch

$$\begin{aligned} r(v) &= f(v) - A(u_h, v) \\ &= \sum_T \int_T r_T v + \sum_i r_{x_i} v(x_i) \\ r_T &= f + u_h\big|_T{}'' - u_h\big|_T \qquad \in P^1(T) \\ r_{x_i} &= [u_h'] = u_h'(x_i+) - u_h'(x_i-) \end{aligned}$$

   gegeben. Wir zerlegen nun $r(\cdot)$ in lokale Residuuen mittels $r_i(v) := r(\varphi_i v)$.
   Zeigen Sie, dass es ein $p_i^\Delta \in L_2(\Omega)$ mit $p_i^\Delta\big|_T \in P^3(T)$ mit supp $p_i^\Delta \subset \omega_{V_i}$ gibt, sodass

$$(p_i^\Delta)' = r_i \qquad \text{im distributionellen Sinne}$$

   Weiters definieren wir $p^\Delta := \sum p_i^\Delta$ sowie $p := u_h' - p^\Delta$.
   Zeigen Sie, dass $p' = f + u_h$ gilt.

   Erst bis zum 19. Dezember:

   Implementieren Sie den Fehlerschätzer $\|u_h' - p\|_{L_2}$ und vergleichen Sie den geschätzten Fehler mit $\sqrt{2(J(u) - J(u_h))}$.
   (Programm zählt 4 Kreuze am 19. Dezember)