

# Memoria provisional

November 1, 2022

## 1 Introducción

### 1.1 Curvas de Bézier

Qué son, breve resumen de su historia y para qué son utilizadas.

### 1.2 Motivación y objetivos

Qué son las curvas fraccionarias generalizadas, ventajas, mencionar posibles usos. Objetivo: Aplicarlas al Data Fitting en Superficies de Riemann. Plan de trabajo.

## 2 Curvas de Bézier fraccionarias generalizadas

### 2.1 Parámetros de forma

Sea la curva de Bézier original definida por los  $n + 1$  puntos de control  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^m$ :

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \mathbf{P}_i$$

donde

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, \quad t \in [0, 1]$$

Definimos la **Base de funciones Bernstein de grado n con n parámetros de forma** como:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{i,n}(t) &= B_{i,n}(t) \left( 1 + \frac{a_i}{n-i+1} (1-t) - \frac{a_{i+1}}{i+1} t \right), \quad t \in [0, 1] \\ a_0 &= a_{n+1} = 0 \quad - (n-i+1) < a_i < i, \quad i = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

donde  $a_1, \dots, a_n$  son los *parámetros de forma*.

La base de funciones  $\hat{B}_{i,n}(t)$  tiene las siguientes propiedades:

1.  $\hat{B}_{i,n}(t) \geq 0, \quad t \in [0, 1]$

2.  $\hat{B}_{i,n}(t) = \hat{B}_{n-i,n}(1-t)$ , cuando  $a_i = -a_{n-i+1}$
3.  $\hat{B}_{i,n}(t) = B_{i,n}(t)$  cuando  $a_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
4.  $\sum_{i=0}^n \hat{B}_{i,n}(t) = 1$

**NOTA: ¿LO DEMUESTRO O MENCIONO EL ARTÍCULO DONDE SE DEMUESTRA? LA DEMOSTRACIÓN ES MECÁNICA**

Definimos la **Curva de Bézier de grado n con n parámetros de forma** como

$$\hat{\alpha}(t) = \sum_{i=0}^n \hat{B}_{i,n}(t) P_i, \quad t \in [0, 1] \quad (1)$$

Por las propiedades de la base de funciones  $\hat{B}_{i,n}$  se sigue que la nueva curva de Bézier cumple la propiedad del casco convexo.

Veamos el efecto que tiene en las curvas al variar los valores de los parámetros de forma. El desarrollo de una curva de grado n con n parámetros de forma, con  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n \in \mathbb{R}^m$  puntos de control es:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(t) = & B_{0,n}(t) (1 + 0 - a_1 t) \mathbf{P}_0 + B_{1,n}(t) \left( 1 + a_1(1-t) - \frac{a_2}{2} t \right) \mathbf{P}_1 + \\ & + B_{2,n}(t) \left( 1 + \frac{a_2}{n-1} (1-t) - \frac{a_3}{3} t \right) \mathbf{P}_2 + \dots + \\ & + B_{i-1,n}(t) \left( 1 + \frac{a_{i-1}}{n-i+2} (1-t) - \frac{a_i}{i} t \right) \mathbf{P}_{i-1} + \\ & + B_{i,n}(t) \left( 1 + \frac{a_i}{n-i+1} (1-t) - \frac{a_{i+1}}{i+1} t \right) \mathbf{P}_i + \dots + \\ & + B_{n,n}(t) (1 + a_n(1-t) + 0) \mathbf{P}_n \end{aligned}$$

El término de la expresión sobre la que actúa el parámetro  $a_i$  es:

$$\begin{aligned} & a_i \left( -\frac{B_{i-1,n}(t)}{i} t \mathbf{P}_{i-1} + \frac{B_{i,n}(t)}{n-i+1} (1-t) \mathbf{P}_i \right) = \\ = & a_i \left( -\frac{\binom{n}{i-1} (1-t)^{n-i+1} t^{i-1}}{i} t \mathbf{P}_{i-1} + \frac{\binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i}{n-i+1} (1-t) \mathbf{P}_i \right) = \\ & a_i \left( \frac{n!}{(n-i+1)! i!} (1-t)^{n-i+1} t^i \right) (\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}) \end{aligned}$$

Supongamos que  $a_j = 0, \forall j \in \{0, 1, \dots, n\}, j \neq i$ , y cambiamos el valor del parámetro  $a_i$  de  $a_i^1$  a  $a_i^2$ , denotamos  $\Delta a_i = a_i^1 - a_i^2$ . La curva  $\hat{\alpha}(t)$  cambiará de  $\hat{\alpha}^1(t)$  a  $\hat{\alpha}^2(t)$ , igualmente denotamos  $\Delta \hat{\alpha}(t) = \hat{\alpha}^1(t) - \hat{\alpha}^2(t)$ . Se tiene que:

$$\Delta \hat{\alpha}(t) = \Delta a_i \frac{n!}{(n-i+1)!i!} (1-t)^{n-i+1} t^i (\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1})$$

Esto tiene la siguiente interpretación geométrica: Fijando  $t_0 \in [0, 1]$ , el punto  $\hat{\alpha}(t_0) \in \mathbb{R}^m$  se desplaza en la dirección  $\overrightarrow{\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i}$  con una magnitud de

$$\|\Delta \hat{\alpha}(t_0)\| = |\Delta a_i| \frac{n!}{(n-i+1)!i!} (1-t_0)^{n-i+1} t_0^i \|\overrightarrow{\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i}\|$$

Veámoslo gráficamente:

**NOTA: PONER AQUÍ LAS GRÁFICAS. CÓDIGO EN EL JUPYTER NOTEBOOK**

Veamos ahora cómo conectar dos curvas de Bézier con parámetros de forma.

**Definición: (Continuidad paramétrica,  $C^r$ )**

Sean dos curvas de Bézier  $\hat{\alpha}(t, a_1, \dots, a_n)$  y  $\hat{\beta}(t, b_1, \dots, b_m)$ ,  $t \in [0, 1]$  con  $n$  y  $m$  parámetros de forma respectivamente, ambas curvas diferenciables hasta grado  $r+1$ , ( $n, m > r$ ). Diremos que  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$  son  $C^r$ -continuas si se cumple:

$$\hat{\alpha}^{(k)}(1, a_1, \dots, a_n) = \hat{\beta}^{(k)}(0, b_1, \dots, b_m), \forall k \in \{0, 1, \dots, r\} \quad (2)$$

donde  $^{(k)}$  denota la derivada  $k$ -ésima respecto la variable  $t$ .

Estudiemos más en detalle este tipo de continuidad para  $r < 3$ .

$$\hat{\alpha}(t, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^n \hat{B}_{i,n}(t) \mathbf{P}_i = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \left[ 1 + \frac{a_i}{n-i+1} (1-t) - \frac{a_{i+1}}{i+1} t \right] \mathbf{P}_i$$

$$\hat{\beta}(t, b_1, \dots, b_m) = \sum_{j=0}^m \hat{B}_{j,m}(t) \mathbf{Q}_j = \sum_{j=0}^m B_{j,m}(t) \left[ 1 + \frac{b_j}{m-j+1} (1-t) - \frac{b_{j+1}}{j+1} t \right] \mathbf{Q}_j$$

**Condiciones  $C^0$ :**

Observamos que:  $B_{i,n}(1) = \delta_{i,n}$  y  $B_{i,n}(0) = \delta_{i,0}$ , siendo  $\delta_{i,j}$  la *Delta de Kronecker* y recordemos que  $a_0 = a_{n+1} = b_0 = b_{m+1} = 0$  Se tiene que:

$$\hat{\alpha}(1, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^n \delta_{i,n} \left[ 1 + \frac{a_i}{n-i+1} (1-1) - \frac{a_{i+1}}{i+1} \right] \mathbf{P}_i = \left[ 1 + 0 - \frac{a_{n+1}}{i+1} \right] \mathbf{P}_n = \mathbf{P}_n$$

$$\hat{\beta}(0, b_1, \dots, b_m) = \sum_{j=0}^m \delta_{j,0} \left[ 1 + \frac{b_j}{m-j+1} (1-0) - \frac{b_{j+1}}{j+1} 0 \right] \mathbf{Q}_j = \left[ 1 + \frac{b_0}{m-0+1} - 0 \right] \mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_0$$

Por tanto, la condición para la continuidad  $C^0$  es:

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{Q}_0 \quad (3)$$

**Condiciones  $C^1$ :**

Deben cumplirse las Condiciones  $C^0$ :  $\mathbf{P}_n = \mathbf{Q}_0$

Además debe cumplirse:  $\hat{\alpha}^1(1, a_1, \dots, a_n) = \hat{\beta}^1(0, b_1, \dots, b_m)$

$$\hat{\alpha}^1(t, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^n \left[ \frac{d}{dt} (B_{i,n}(t)) \left[ 1 + \frac{a_i}{n-i+1}(1-t) - \frac{a_{i+1}}{i+1}t \right] - B_{i,n}(t) \left[ \frac{a_i}{n-i+1} + \frac{a_{i+1}}{i+1} \right] \right] \mathbf{P}_i$$

$$\hat{\beta}^1(t, b_1, \dots, b_m) = \sum_{j=0}^m \left[ \frac{d}{dt} (B_{j,m}(t)) \left[ 1 + \frac{b_j}{m-j+1}(1-t) - \frac{b_{j+1}}{j+1}t \right] - B_{j,m}(t) \left[ \frac{b_j}{m-j+1} + \frac{b_{j+1}}{j+1} \right] \right] \mathbf{Q}_j$$

Teniendo en cuenta que  $\frac{d}{dt} B_{i,n}(t) = n(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t))$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_{i,n}(1) &= n(\delta_{i-1,n-1} - \delta_{i,n-1}) = n(\delta_{i,n} - \delta_{i,n-1}) \\ \frac{d}{dt} B_{i,n}(0) &= n(\delta_{i-1,0} - \delta_{i,0}) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} &\hat{\alpha}^1(1, a_1, \dots, a_n) = \\ &= \sum_{i=0}^n \left[ n(\delta_{i,n} - \delta_{i,n-1}) \left[ 1 + \frac{a_i}{n-i+1}(1-1) - \frac{a_{i+1}}{i+1}1 \right] - \delta_{i,n} \left[ \frac{a_i}{n-i+1} + \frac{a_{i+1}}{i+1} \right] \right] \mathbf{P}_i = \\ &= -n \left[ 1 - \frac{a_n}{n} \right] \mathbf{P}_{n-1} + [n - a_n] \mathbf{P}_n = \\ &= [a_n - n] \mathbf{P}_{n-1} + [n - a_n] \mathbf{P}_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\hat{\beta}^1(0, b_1, \dots, b_m) = \\ &= \sum_{j=0}^m \left[ n(\delta_{j-1,0} - \delta_{j,0}) \left[ 1 + \frac{b_j}{m-j+1}(1-0) - \frac{b_{j+1}}{j+1}0 \right] - \delta_{j,0} \left[ \frac{b_j}{m-j+1} + \frac{b_{j+1}}{j+1} \right] \right] \mathbf{Q}_j = \\ &= \left[ -m \left( 1 + \frac{b_0}{m-j+1} \right) - (0 + b_1) \right] \mathbf{Q}_0 + \left[ m \left( 1 + \frac{b_1}{n} \right) \right] \mathbf{Q}_1 = \\ &= -[m + b_1] \mathbf{Q}_0 + [m + b_1] \mathbf{Q}_1 \end{aligned}$$

Entonces, debe cumplirse:

$$\mathbf{Q}_1 = \frac{[a_n - n] \mathbf{P}_{n-1} + [n - a_n] \mathbf{P}_n}{m + b_1} + \mathbf{Q}_0 \quad (4)$$

**Condiciones  $C^2$ :**

Deben cumplirse las condiciones de  $C^1$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_0 &= \mathbf{P}_n \\ \mathbf{Q}_1 &= \frac{[a_n - n] \mathbf{P}_{n-1} + [n - a_n] \mathbf{P}_n}{m + b_1} + \mathbf{Q}_0\end{aligned}$$

Y además debe cumplirse:  $\hat{\alpha}^{(2)}(1, a_1, \dots, a_n) = \hat{\beta}^{(2)}(0, b_1, \dots, b_m)$ :

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}^{(2)}(t, a_1, \dots, a_n) &= \\ &= \sum_{i=0}^n \left[ \frac{d^2}{dt^2} (B_{i,n}(t)) \left[ 1 + \frac{a_i}{n-i+1} (1-t) - \frac{a_{i+1}}{i+1} t \right] - 2 \frac{d}{dt} B_{i,n}(t) \left[ \frac{a_i}{n-i+1} + \frac{a_{i+1}}{i+1} \right] \right] \mathbf{P}_i \\ \hat{\beta}^{(2)}(t, b_1, \dots, b_m) &= \\ &= \sum_{j=0}^m \left[ \frac{d^2}{dt^2} (B_{j,m}(t)) \left[ 1 + \frac{b_j}{m-j+1} (1-t) - \frac{b_{j+1}}{j+1} t \right] - 2 \frac{d}{dt} B_{j,m}(t) \left[ \frac{b_j}{m-j+1} + \frac{b_{j+1}}{j+1} \right] \right] \mathbf{Q}_j\end{aligned}$$

Observamos que:

$$\frac{d^2}{dt^2} (B_{i,n}(t)) = n \left[ \frac{d}{dt} B_{i-1,n-1}(t) - \frac{d}{dt} B_{i,n-1}(t) \right] = n(n-1) [B_{i-2,n-2}(t) - 2B_{i-1,n-2}(t) + B_{i,n-2}(t)]$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} B_{i,n}(1) &= n(n-1) [\delta_{i,n} - 2\delta_{i,n-1} + \delta_{i,n-2}] \\ \frac{d^2}{dt^2} B_{i,n}(0) &= n(n-1) [\delta_{i-2,0} - 2\delta_{i-1,0} + \delta_{i,0}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}^{(2)}(1, a_1, \dots, a_n) &= \\ &= \sum_{i=0}^n \left[ n(n-1) [\delta_{i,n} - 2\delta_{i,n-1} + \delta_{i,n-2}] \left[ 1 - \frac{a_{i+1}}{i+1} \right] - 2n [\delta_{i,n} - \delta_{i,n-1}] \left[ \frac{a_i}{n-i+1} + \frac{a_{i+1}}{i+1} \right] \right] \mathbf{P}_i = \\ &= [n(n-1-a_{n-1})] \mathbf{P}_{n-2} + [-2(n-1)(n-a_n) + na_{n-1} + 2a_n] \mathbf{P}_{n-1} + [n(n-1) - 2na_n] \mathbf{P}_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^{(2)}(0, b_1, \dots, b_m) &= \\ &= \sum_{j=0}^m \left[ m(m-1) [\delta_{j-2,0} - 2\delta_{j-1,0} + \delta_{j,0}] \left[ 1 + \frac{b_j}{m-j+1} \right] - 2m [\delta_{j-1,0} - \delta_{j,0}] \left[ \frac{b_j}{m-j+1} + \frac{b_{j+1}}{j+1} \right] \right] \mathbf{Q}_j = \\ &= [m(m-1) + 2mb_1] \mathbf{Q}_0 + [-2(m-1)(m+b_1) - 2b_1 - mb_2] \mathbf{Q}_1 + [m(m-1+b_2)] \mathbf{Q}_2\end{aligned}$$

Entonces, debe cumplirse:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_2 = & \frac{1}{m(m-1+b_2)} [n(n-1-a_{n-1})\mathbf{P}_{\mathbf{n}-2} + [(-2n+2)(n-a_n) + a_{n-1} + 2a_n]\mathbf{P}_{\mathbf{n}-1} + \\ & + [n(n-1) - 2na_n]\mathbf{P}_{\mathbf{n}} - [m(m-1) + 2mb_1]\mathbf{Q}_0 - [-2(m-1)(m+b_1) - 2b_1 - mb_2]\mathbf{Q}_1] \end{aligned}$$

## 2.2 Curvas fraccionarias generalizadas