Memoria provisional

September 18, 2022

1 Introducción

1.1 Curvas de Bézier

Qué son, breve resumen de su historia y para qué son utilizadas.

1.2 Motivación y objetivos

Qué son las curvas fraccionarias generalizadas, ventajas, mencionar posibles usos. Objetivo: Aplicarlas al Data Fitting en Superficies de Riemann. Plan de trabajo.

2 Curvas de Bézier fraccionarias generalizadas

2.1 Parámetros de forma

Sea la curva de Bézier original definida por los $n+1$ puntos de control $\mathbf{P_i} \in \mathbb{R}^m$:

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\mathbf{P_i}$$

donde

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i, \qquad t \in [0,1]$$

Definimos la **Base de funciones Bernstein de grado n con n parámetros de forma** como:

$$\hat{B}_{i,n}(t) = B_{i,n}(t)(1 + \frac{a_i}{n-i+1}(1-t) - \frac{a_{i+1}}{i+1}t), \qquad t \in [0,1]$$
$$a_0 = a_{n+1} = 0 \qquad -(n-i+1) < a_i < i, \qquad i = 0, 1, ..., n$$

donde $a_1, ..., a_n$ son los *parámetros de forma.*

La base de funciones $\hat{B}_{i,n}(t)$ tiene las siguientes propiedades:

1. $\hat{B}_{i,n}(t) \geq 0, \qquad t \in [0,1]$

2. $\hat{B}_{i,n}(t) = \hat{B}_{n-i,n}(1-t)$, cuando $a_i = -a_{n-i+1}$
3. $\hat{B}_{i,n}(t) = B_{i,n}(t)$ cuando $a_i = 0, \qquad i = 1, ..., n.$
4. $\sum_{i=0}^{n} \hat{B}_{i,n}(t) = 1$

NOTA: ¿LO DEMUESTRO O MENCIONO EL ARTÍCULO DONDE SE DEMUESTRA? LA DEMOSTRACIÓN ES MECÁNICA

Definimos la **Curva de Bézier de grado n con n parámetros de forma** como

$$\hat{\alpha}(t) = \sum_{i=0}^{n} \hat{B}_{i,n}(t) P_i, \qquad t \in [0,1] \tag{1}$$

Por las propiedades de la base de funciones $\hat{B}_{i,n}$ se sigue que la nueva curva de Bézier cumple la propiedad del casco convexo.

Veamos el efecto que tiene en las curvas al variar los valores de los parámetros de forma. El desarrollo de una curva de grado n con n parámetros de forma, con $\mathbf{P_0}, \mathbf{P_1}, ..., \mathbf{P_n} \in \mathbb{R}^m$ puntos de control es:

$$\begin{gathered}
\hat{\alpha}(t) = B_{0,n}(t)\left(1 + 0 - a_1 t\right)\mathbf{P_0} + B_{1,n}(t)\left(1 + a_1(1-t) - \frac{a_2}{2}t\right)\mathbf{P_1} + \\
+ B_{2,n}(t)\left(1 + \frac{a_2}{n-1}(1-t) - \frac{a_3}{3}t\right)\mathbf{P_2} + ... + \\
+ B_{i-1,n}(t)\left(1 + \frac{a_{i-1}}{n-i+2}(1-t) - \frac{a_i}{i}t\right)\mathbf{P_{i-1}} + \\
+ B_{i,n}(t)\left(1 + \frac{a_i}{n-i+1}(1-t) - \frac{a_{i+1}}{i+1}t\right)\mathbf{P_i} + ... + \\
+ B_{n,n}(t)\left(1 + a_n(1-t) + 0\right)\mathbf{P_n}
\end{gathered}$$

El término de la expresión sobre la que actúa el parámetro a_i es:

$$\begin{gathered}
a_i\left(-\frac{B_{i-1,n}(t)}{i} t\mathbf{P_{i-1}} + \frac{B_{i,n}(t)}{n-i+1}(1-t)\mathbf{P_i}\right) = \\
= a_i\left(-\frac{\binom{n}{i-1}(1-t)^{n-i+1}t^{i-1}}{i} t\mathbf{P_{i-1}} + \frac{\binom{n}{j}(1-t)^{n-i}t^{i}}{n-i+1}(1-t)\mathbf{P_i}\right) = \\
a_i\left(\frac{n!}{(n-i+1)!i!}(1-t)^{n-i+1}t^{i}\right)(\mathbf{P_i} - \mathbf{P_{i-1}})
\end{gathered}$$

Supongamos que $a_j = 0, \forall j \in \{0, 1, ..., n\}, j \neq i$, y cambiamos el valor del parámetro a_i de a_i^1 a a_i^2, denotamos $\Delta a_i = a_i^1 - a_i^2$. La curva $\hat{\alpha}(t)$ cambiará de $\hat{\alpha}^1(t)$ a $\hat{\alpha}^2(t)$, igualmente denotamos $\Delta\hat{\alpha}(t) = \hat{\alpha}^1(t) - \hat{\alpha}^2(t)$. Se tiene que:

$$\Delta\hat{\alpha}(t) = \Delta a_i \frac{n!}{(n-i+1)!i!}(1-t)^{n-i+1}t^i\,(\mathbf{P_i} - \mathbf{P_{i-1}})$$

Esto tiene la siguiente interpretación geométrica: Fijando $t_0 \in [0,1]$, el punto $\hat{\alpha}(t_0) \in \mathbb{R}^m$ se desplaza en la dirección $\overrightarrow{\mathbf{P_{i-1}P_i}}$ con una magnitud de

$$\|\Delta\hat{\alpha}(t_o)\| = \Delta a_i \frac{n!}{(n-i+1)!i!}(1-t_0)^{n-i+1}t_0^j\|\overrightarrow{\mathbf{P_{i-1}P_i}}\|$$