Tvorba sbírky planimetrických a stereometrických úloh

Ročníková práce

Mensa gymnázium, o.p.s.

Jan Strmiska

2021 - 2023

2. strana

3. strana

Prohlašuji, že jsem svou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V .... dne ....

Podpis autora

Poděkování

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu ročníkové práce Mgr. Matúši Kepičovi za odborné vedení, za pomoc a rady při zpracování této práce.

Obsah

Úvod

Tato ročníková práce se zaměřuje na tvorbu sbírky planimetrických a stereometrických příkladů, která má pomoci studentům připravujícím se na střední školu a gymnázium. Toto je motivováno mým zájmem o tuto oblast matematiky a mými zkušenostmi s tím, jak někteří studenti mohou s tímto typem úloha bojovat.

Cílem sbírky je poskytnout přehledný materiál, který studentům umožní lépe si osvojit potřebné dovednosti k řešení planimetrických a stereometrických úloh.

Sbírka bude strukturována dle témat jednotlivých úloh a bude přehledně čitelná a vizuálně přitažlivá.

V rámci této práce je předpokládáno, že studenti již mají osvojenou znalost planimetrických a stereometrických konceptů, kterou získali v rámci školní výuky. Sbírka bude tedy obsahovat především různorodé příklady, které studentům umožní procvičit a zlepšit své schopnosti v dané oblasti.

1. Teoretická část

1.1 Jednotné přijímací zkoušky pro střední školy a gymnázia

Zkoušky tvoří příspěvková organizace CERMAT neboli Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, která byla zřízena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy ČR v roce 2006. [2] Tato organizace také zařizuje státní maturitní zkoušky a závěrečné zkoušky. [13]

Jde o národně jednotné přijímací zkoušky, které jsou povinnou součástí prvního kola přijímacího řízení do všech maturitních oborů s výjimkou oborů s talentovou zkouškou a oborů zkráceného studia. Jednotná přijímací zkouška se skládá ze dvou písemných testů - z českého jazyka a literatury a z matematiky. Varianty testů jsou různé pro čtyřleté obory vzdělání (včetně oborů nástavbového studia), pro šestiletá gymnázia a pro osmiletá gymnázia. Maximální možný počet dosažených bodů v testech z matematiky i českého jazyka a literatury je 50 bodů. [14]

V České republice byly jednotné přijímací zkoušky testovány v letech 2015 a 2016, povinně zavedeny byly v roce 2017. [11]

Přijímací zkoušky z předchozích roků jsou dostupné na webových stránkách Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání. [15]

1.2 Vysvětlení teoretických základů

1.2.1 Obvod

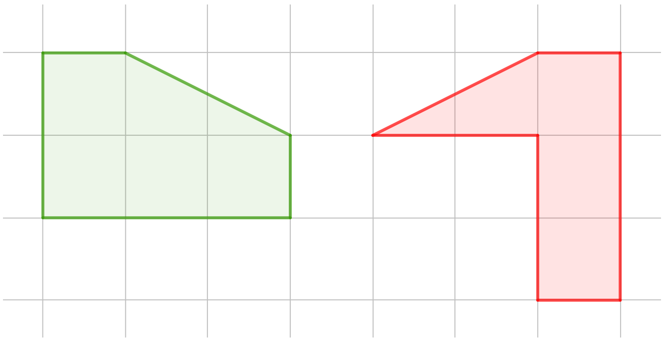
Obvod je součet délek čar, které vymezují nějaký útvar. [12]

Ve čtvercové síti lze obvod spočítat sečtením všech čar, které útvar tvoří. Pokud čáry nevedou rovnoběžně se sítí, můžeme je i přesto odečítat.

Příklad

Pokud chceme znát rozdíl obvodů těchto dvou tvarů, nemusíme znát oba dva obvody. U obou tvarů neznáme délku čáry, která není rovnoběžná se sítí. Víme ale, že jsou stejně dlouhé. Můžeme je tedy odečíst a pak počítat s rozdíly zbytku, které dokážeme jednoduše určit.

Pokud je délka strany čtverce, ze kterého je čtvercové pole 1 cm, rozdíl obvodů jsou 2 cm.



1.2.2 Obsah

Obsah vyjadřuje, kolik „místa v rovině“ útvar zaujímá. Měří se v jednotkách obsahu. [12]

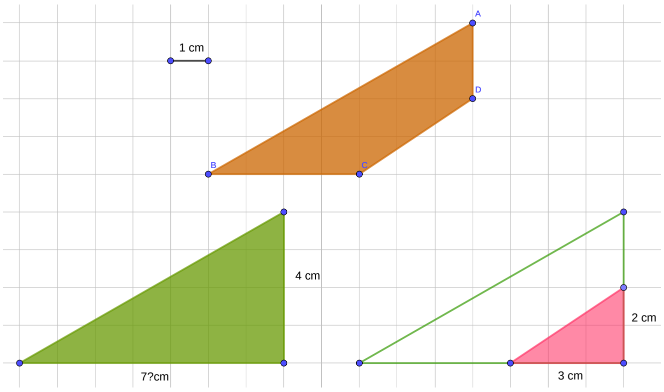
Příkladem jednotek obsahu jsou centimetry čtvereční (cm^2) nebo metry čtvereční (m^2).

K výpočtu obsahu je nejdůležitější pamatovat si vzorce. Pokud je útvar složitý, budeme jich muset použít několik.

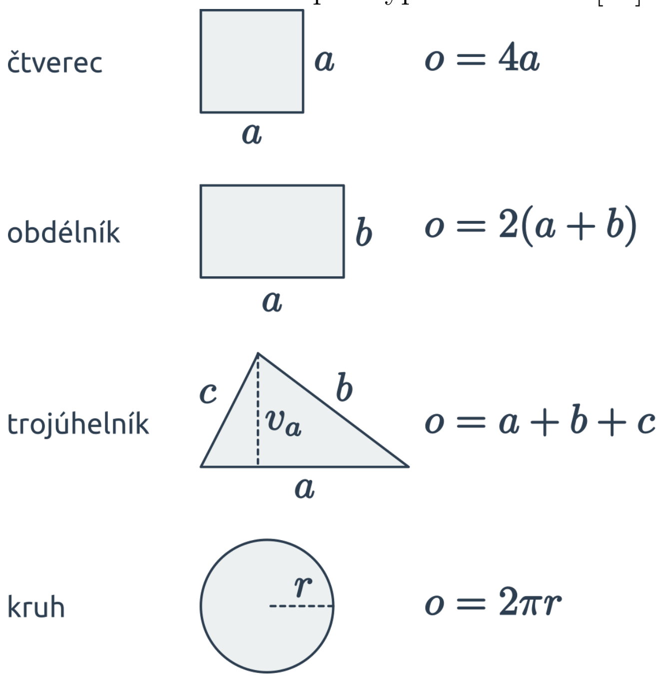
Příklad

Pokud potřebujeme vypočítat obsah tvaru ABCD, stačí si uvědomit, že ho můžeme vypočítat jako obsah velkého (zeleného) trojúhelníku mínus obsah menšího (růžového) trojúhelníku.

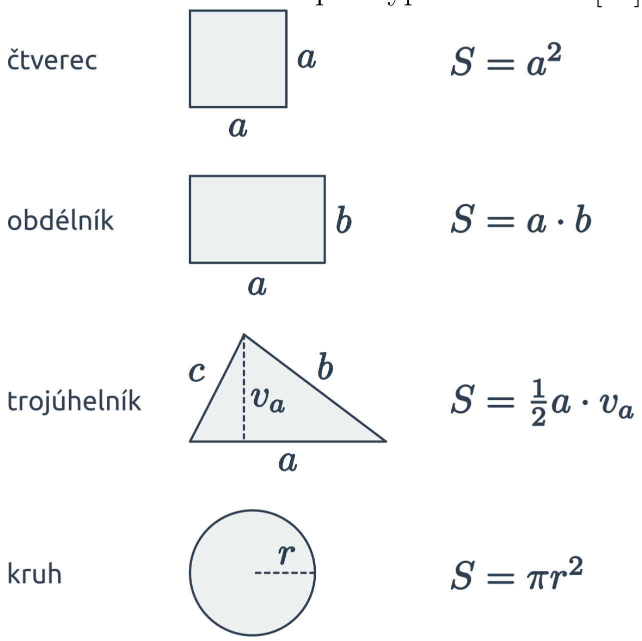
$\frac{7*4}{2} - \frac{3*2}{2} = 14 - 3 = 11$ cm^2.



Obrázek 1.1: Vzorce pro výpočet obvodu [12]



Obrázek 1.2: Vzorce pro výpočet obsahu [12]



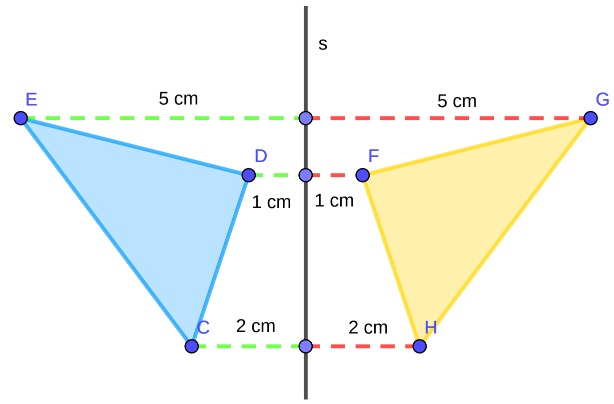
1.2.3 Osová souměrnost

Osová souměrnost je geometrické zobrazení. Při ní se každý bod útvaru zobrazí na druhou stranu nějaké předem určené osy, která se nazývá osa souměrnosti. Osa souměrnosti je určena přímkou.

Osová souměrnost se dá představit jako překlopení podle osy.

Příklad

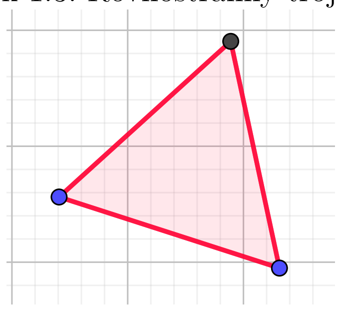
Tyto 2 trojúhelníky jsou osově souměrné, jelikož všechny jejich body jsou „překlopené" podle osy s.
$\frac{7*4}{2} - \frac{3*2}{2} = 14 - 3 = 11$ cm^2.



1.2.4 Rovnostranný trojúhelník

Rovnostranný trojúhelník je trojúhelník, jehož všechny strany mají stejnou délku.

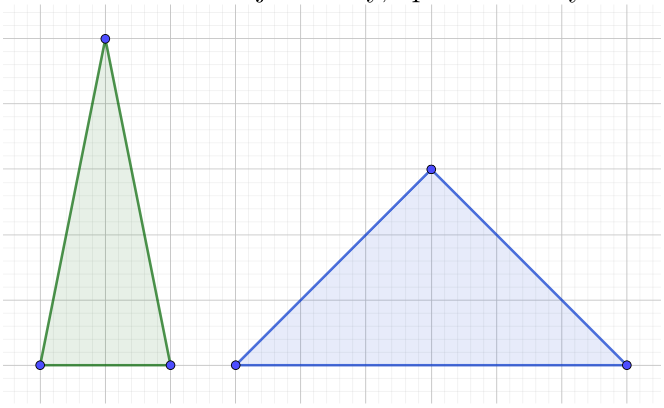
Obrázek 1.3: Rovnostranný trojúhelník



1.2.5 Rovnoramenný trojúhelník

Rovnoramenný trojúhelník je trojúhelník, jehož 2 strany mají stejnou délku. Tyto 2 strany se nazývají odvěsny, 3. strana se jmenuje základna.

Obrázek 1.4: 2 rovnoramenné trojúhelníky, spodní strany obou jsou základny



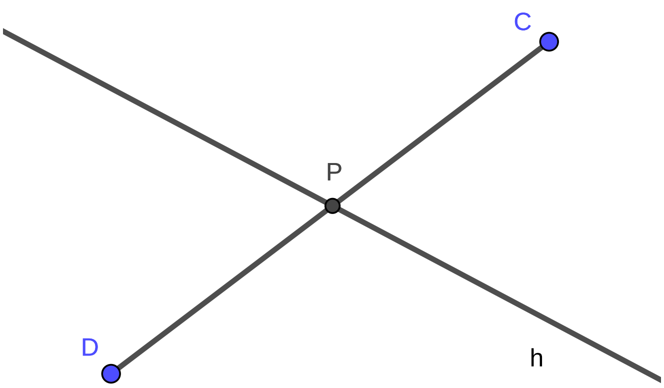
1.2.6 Shodnost trojúhelníků

2 trojúhelníky jsou navzájem shodné, pokud se rovnají délky všech jejich stran.

1.2.7 Průsečík

Průsečík je bod, ve kterém se protínají 2 čáry, například přímky nebo úsečky.

Obrázek 1.5: Průsečík P přímky s a úsečky CD, který je nazvaný P



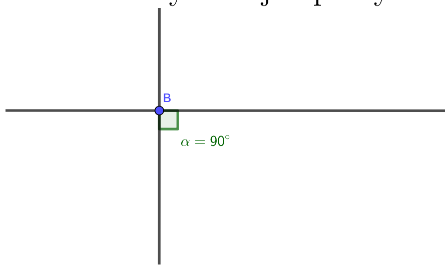
1.2.8 Pravý úhel, kolmost

Pravý úhel je úhel o velikosti 90°. 2 čáry jsou na sebe kolmé, pokud svírají pravý úhel.

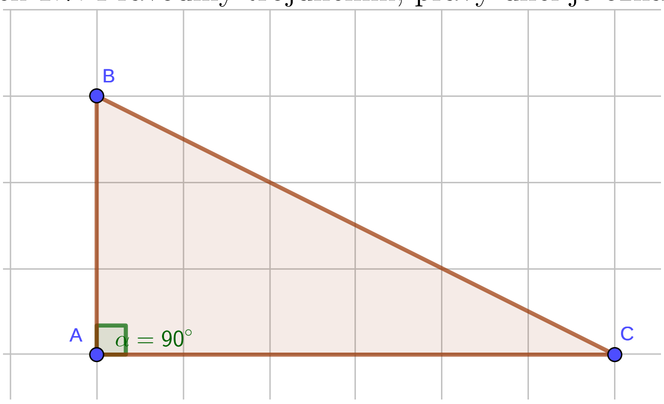
1.2.9 Pravoúhlý trojúhelník

Trojúhelník je pravoúhlý, pokud je jeden z jeho úhlů pravý.

Obrázek 1.6: 2 kolmé čáry svírající pravý úhel označený α



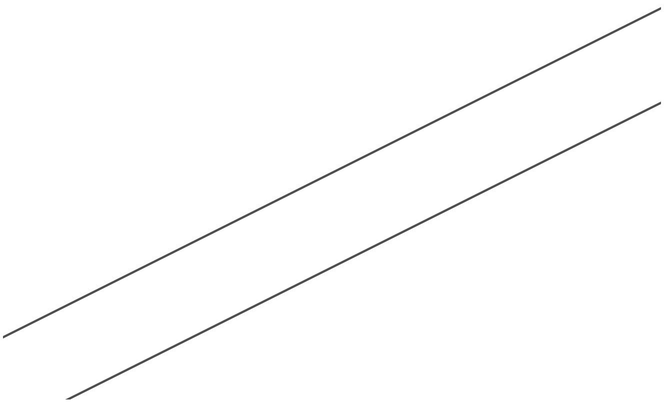
Obrázek 1.7: Pravoúhlý trojúhelník, pravý úhel je označen α.



1.2.10 Rovnoběžnost

Přímky jsou na sebe rovnoběžné, pokud se nikdy nepotkají. Úsečky jsou na sebe rovnoběžné, pokud se jimi vedené přímky nikdy nepotkají.

Obrázek 1.8: 2 rovnoběžné přímky



1.2.11 Krychle

Krychle je prostorové těleso. Také se nazývá kostka.

Vrcholy

Vrcholy krychle jsou body, které jsou v jejích rozích. Krychle jich má 8.

Hrany

Hrany jsou čáry, které spojují vrcholy. Krychle jich má 12.

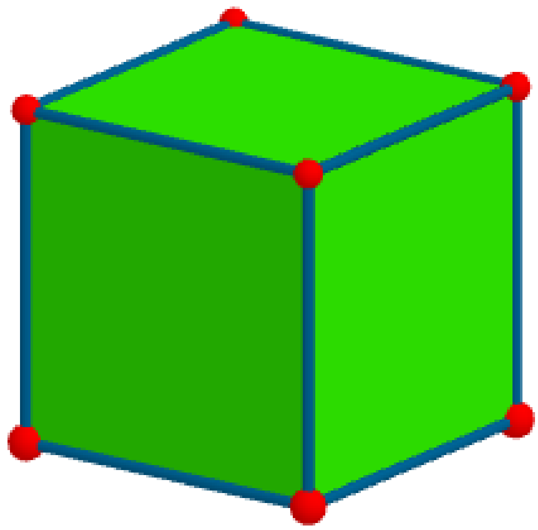
Stěny

Stěny jsou čtverce tvořené 4 vrcholy krychle. Krychle jich má 6.

Povrch

Povrch krychle je součet obsahů jejích stěn, neboli 6krát obsah jedné stěny. Měří se v jednotkách obsahu.

Obrázek 1.9: Krychle, na které jsou červeně vyznačeny vrcholy, modře hrany a zeleně stěny.



2. Praktická část

2.1 Výběr úloh

Prvním krokem k vytvoření sbírky bylo získat přijímací zkoušky CERMAT na střední školy z matematiky od roku 2015 do roku 2022. Ty jsou volně dostupné na internetu. Z každého roku jsme se snažili čerpat z pravých testů, tedy řádných a náhradních termínů, a ne ilustračních. Pokud ale v daný rok bylo pravých testů málo, použili jsme i ty.

Nejdříve jsme tyto zkoušky prošli a vybrali z nich všechny úlohy, které se týkají planimetrie nebo stereometrie.

Následovně jsme tyto úlohy kategorizovali podle:

- typu oboru;
- termínu, ze kterého pochází;
- a nakonec do 3 hlavních kategorií, jimiž jsou:
  - úlohy planimetrické,
  - stereometrické a
  - rýsovací.

V testech se neobjevily žádné stereometrické rýsovací úlohy, pouze planimetrické rýsovací. Úloh jsme napříč všemi tématy vybrali 456.

Následně jsme všechny úlohy jednoho oboru dali k sobě podle kategorií a vytvořili podkategorie. Například jedna z podkategorií planimetrických úloh pro 6leté obory byly úlohy zaměřené na úhly.

2.2 Statistická analýza přijímacích zkoušek z minulých let

Po roztřídění všech úloh jsme spočítali, jak často se v testech objevují a jakou mají bodovou váhu.

Přišli jsme k závěru, že planimetrické a stereometrické úlohy jsou velmi důležité, jelikož v 8letých oborech odpovídají skoro 38 % známky. Také se planimetrické, rýsovací a stereometrické úlohy objevují přibližně v poměru 2 : 1 : 1 pro tyto obory.

Tabulka 2.1: Distribuce počtu úloh pro 8leté obory

8leté obory		Počet úloh typu			Celkem úloh
Rok	Termín	Planimetrie	Rýsování planimetrie	Stereometrie	
2022	1. řádný	2	1	1	14
	2. řádný	1	1	3	14
	1. náhradní	4	1	1	14
	2. náhradní	2	1	2	14
2021	1. řádný	2	1	1	14
	2. řádný	2	1	1	14
	1. náhradní	3	1	1	14
	2. náhradní	2	1	1	14
2020	1. řádný	2	1	1	14
	1. náhradní	3	1	1	14
2019	1. řádný	3	1	1	14
	2. řádný	3	1	1	14
	1. náhradní	2	1	2	14
	2. náhradní	1	1	2	14
2018	1. řádný	1	1	1	14
	2. řádný	2	1	2	14
	1. náhradní	1	1	2	14
	2. náhradní	4	1	1	14
2017	1. řádný	1	1	1	14
	2. řádný	3	1	1	14
	1. náhradní	3	1	1	14
	2. náhradní	3	1	1	14
2016	1. řádný	3	1	2	16
	Ilustrační	3	1	2	16
2015	1. řádný	2	1	2	16
	Ilustrační	2	2	1	17
Průměr		2,31	1,04	1,38	14,35
Průměrná četnost		16,09 %	7,24 %	9,65 %	32,98 %

Tabulka 2.2: Distribuce bodů za úlohu pro 8leté obory

8leté obory		Body za úlohy typu			Maximální počet bodů
Rok	Termín	Planimetrie	Rýsování planimetrie	Stereometrie	
2022	1. řádný	8	6	5	50
	2. řádný	2	6	7	50
	1. náhradní	10	6	5	50
	2. náhradní	12	6	4	50
2021	1. řádný	8	6	5	50
	2. řádný	6	6	5	50
	1. náhradní	10	6	5	50
	2. náhradní	8	6	2	50
2020	1. řádný	8	6	5	50
	1. náhradní	12	6	4	50
2019	1. řádný	12	6	5	50
	2. řádný	12	6	5	50
	1. náhradní	8	6	4	50
	2. náhradní	4	6	4	50
2018	1. řádný	4	6	5	50
	2. řádný	8	6	4	50
	1. náhradní	4	6	4	50
	2. náhradní	12	6	2	50
2017	1. řádný	4	6	5	50
	2. řádný	8	6	5	50
	1. náhradní	11	6	2	50
	2. náhradní	11	6	2	50
2016	1. řádný	10	6	4	50
	Ilustrační	10	6	4	50
2015	1. řádný	6	6	4	50
	Ilustrační	6	8	6	50
Průměr		8,23	6,08	4,31	50,00
Průměrný poměr bodové hodnoty		16,46 %	12,15 %	8,62 %	37,23 %

Tabulka 2.3: Distribuce počtu úloh pro 6leté obory

6leté obory		Počet úloh typu			Celkem úloh
Rok	Termín	Planimetrie	Rýsování planimetrie	Stereometrie	
2022	1. řádný	4	2	0	16
	2. řádný	4	2	1	16
	1. náhradní	6	2	0	16
	2. náhradní	3	2	1	16
2021	1. řádný	3	2	1	16
	2. řádný	2	2	2	16
	1. náhradní	4	2	1	16
	2. náhradní	4	2	1	16
2020	1. řádný	3	2	1	16
	1. náhradní	3	2	1	16
2019	1. řádný	3	2	1	16
	2. řádný	3	2	1	16
	1. náhradní	5	2	0	16
	2. náhradní	3	1	1	16
2018	1. řádný	3	2	0	16
	2. řádný	3	2	1	16
	1. náhradní	3	2	0	16
	2. náhradní	3	2	1	16
2017	1. řádný	3	2	1	17
	2. řádný	4	2	1	17
	1. náhradní	4	2	2	17
	2. náhradní	4	2	0	17
2016	1. řádný	3	1	1	17
	Ilustrační	4	1	1	17
2015	1. řádný	3	1	1	17
	Ilustrační	2	2	2	17
Průměr		3,42	1,85	0,88	16,31
Průměrná četnost		20,99 %	11,32 %	5,42 %	37,74 %

Tabulka 2.4: Distribuce bodů za úlohu pro 6leté obory

6leté obory		Body za úlohy typu			Maximální počet bodů
Rok	Termín	Planimetrie	Rýsování planimetrie	Stereometrie	
2022	1. řádný	8	6	2	50
	2. řádný	10	6	4	50
	1. náhradní	13	6	4	50
	2. náhradní	9	6	2	50
2021	1. řádný	10	6	4	50
	2. řádný	5	6	4	50
	1. náhradní	14	6	2	50
	2. náhradní	12	6	2	50
2020	1. řádný	10	6	4	50
	1. náhradní	10	6	4	50
2019	1. řádný	10	5	4	50
	2. řádný	10	5	3	50
	1. náhradní	14	5	4	50
	2. náhradní	6	5	3	50
2018	1. řádný	10	6	0	50
	2. řádný	10	6	4	50
	1. náhradní	8	6	0	50
	2. náhradní	9	6	2	50
2017	1. řádný	8	6	3	50
	2. řádný	12	6	3	50
	1. náhradní	12	6	4	50
	2. náhradní	11	5	2	50
2016	1. řádný	9	5	3	50
	Ilustrační	10	6	2	50
2015	1. řádný	7	6	2	50
	Ilustrační	5	5	5	50
Průměr		9,69	5,73	2,92	50,00
Průměrný poměr bodové hodnoty		19,38 %	11,46 %	5,85 %	36,69 %

Tabulka 2.5: Distribuce počtu úloh pro 4leté obory

4leté obory		Počet úloh typu			Celkem úloh
Rok	Termín	Planimetrie	Rýsování planimetrie	Stereometrie	
2022	1. řádný	3	2	1	16
	2. řádný	4	2	2	16
	1. náhradní	2	2	3	16
	2. náhradní	3	2	2	16
2021	1. řádný	2	2	0	16
	2. řádný	2	2	1	16
	1. náhradní	3	2	1	16
	2. náhradní	4	2	1	16
2020	1. řádný	3	2	2	16
	1. náhradní	4	2	1	16
2019	1. řádný	4	1	1	16
	2. řádný	2	2	2	16
	1. náhradní	5	2	1	16
	2. náhradní	3	2	1	16
2018	1. řádný	6	2	0	16
	2. řádný	3	2	1	16
	1. náhradní	4	2	0	16
	2. náhradní	4	2	1	16
2017	1. řádný	3	2	1	16
	2. řádný	3	2	2	16
	1. náhradní	5	2	2	16
	2. náhradní	3	2	1	16
2016	1. řádný	4	2	1	17
	Ilustrační	4	2	1	17
2015	1. řádný	4	2	1	17
	Ilustrační	5	2	0	17
Průměr		3,54	1,96	1,15	16,15
Průměrná četnost		21,90 %	12,14 %	7,14 %	41,19 %

Tabulka 2.6: Distribuce bodů za úlohu pro 4leté obory

4leté obory		Body za úlohy typu			Maximální počet bodů
Rok	Termín	Planimetrie	Rýsování planimetrie	Stereometrie	
2022	1. řádný	6	5	3	50
	2. řádný	11	5	6	50
	1. náhradní	6	6	7	50
	2. náhradní	9	5	4	50
2021	1. řádný	11	5	0	50
	2. řádný	11	6	6	50
	1. náhradní	9	5	4	50
	2. náhradní	8	6	2	50
2020	1. řádný	8	5	5	50
	1. náhradní	10	6	4	50
2019	1. řádný	8	3	2	50
	2. řádný	2	5	5	50
	1. náhradní	17	5	2	50
	2. náhradní	8	5	3	50
2018	1. řádný	15	5	0	50
	2. řádný	9	6	2	50
	1. náhradní	11	6	0	50
	2. náhradní	11	6	2	50
2017	1. řádný	7	3	2	50
	2. řádný	7	5	4	50
	1. náhradní	13	5	4	50
	2. náhradní	7	5	2	50
2016	1. řádný	11	5	2	50
	Ilustrační	10	5	2	50
2015	1. řádný	10	5	3	50
	Ilustrační	13	5	0	50
Průměr		9,54	5,12	2,92	50,00
Průměrný poměr bodové hodnoty		19,08 %	10,23 %	5,85 %	35,15 %

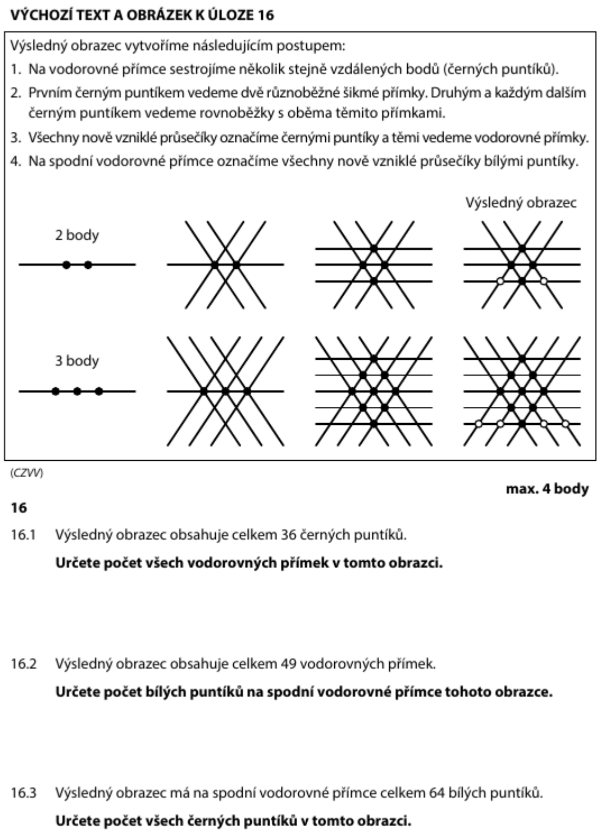
2.3 Zkoumání úloh

Pro tvorbu vlastní sbírky jsme se dívali na podkategorie úloh, hledali společné rysy a dělali si poznámky.

Zajímavé je, že se kostra testu opakuje, typy úloh jsou tedy napříč testy podobné. Můžete si povšimnout, že absolutní většina zkoušek pro 4leté obory obsahuje přesně 2 rýsovací úlohy.

Dále jsme pozorovali, že se některé úlohy objevují v jeden rok napříč několika obory, někdy všemi. Opakují se ale v testech, které se píší ve stejný den, a tak není možné se o nich dozvědět před zkouškou a získat tak výhodu.

Obrázek 2.1: Tato úloha se v roce 2022 objevuje ve všech 3 oborech, a to v 1. náhradním termínu. [15]



VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 16

Výsledný obrazec vytvoříme následujícím postupem:

1. Na vodorovné přímce sestrojíme několik stejně vzdálených bodů (černých puntíků).
2. Prvním černým puntíkem vedeme dvě různoběžné šikmé přímky. Druhým a každým dalším černým puntíkem vedeme rovnoběžky s oběma těmito přímkami.
3. Všechny nově vzniklé průsečíky označíme černými puntíky a těmi vedeme vodorovné přímky.
4. Na spodní vodorovné přímce označíme všechny nově vzniklé průsečíky bílými puntíky.

(CZVV)

max. 4 body

16

16.1 Výsledný obrazec obsahuje celkem 36 černých puntíků.
Určete počet všech vodorovných přímek v tomto obrazci.

16.2 Výsledný obrazec obsahuje celkem 49 vodorovných přímek.
Určete počet bílých puntíků na spodní vodorovné přímce tohoto obrazce.

16.3 Výsledný obrazec má na spodní vodorovné přímce celkem 64 bílých puntíků.
Určete počet všech černých puntíků v tomto obrazci.

2.4 Tvorba úloh vlastní sbírky

Pro vlastní sbírku jsme se rozhodli tvořit úlohy pro 8leté obory. Bylo to zčásti kvůli typu úloh, které obsahují, a zčásti kvůli tomu že sám studuji 8letý obor.

Úlohy jsme vytvářeli podle poznámek. Často jsou vysoce inspirované úlohami, které se v pravých zkouškách objevily.

Tvořené úlohy se liší od úloh CERMAT hlavně vzhledem, který je barevný, veselejší a přehlednější, a tím, že formát odpovědi tvořených úloh je otevřený. Student tak nemá na výběr z určitých možností, a nemůže si tak tipovat.

Úlohy CERMAT mají často na výběr z odpovědí A-E, nejspíš proto, že se pak dají jednodušeji opravovat.

Další rozdíl je využití geometrického zápisu, které CERMAT nevyužívá. Pro jistotu se před sbírkou vyskytuje přehled vysvětlující, co která značka znamená.

Úlohy jsou tvořeny v programu GeoGebra. Z něj jsou exportovány do formátu PDF a vloženy do sbírky. Stereometrické úlohy jsou exportovány do formátu PNG, jelikož 3D GeoGebra nepodporuje ani PDF ani jiné vektorové formáty.

V obrázky úloh nemají popisky kvůli vzhledu. Obrázky bez popisků jsou tvořeny autorem.

3. Sbírka

Geometrický zápis

$\triangle$ABC	Trojúhelník ABC
$\square$EFGH	Čtverec EFGH
$\sqsubset\!\sqsupset$IJKL	Obdélník IJKL
|MN|	Vzdálenost mezi body M a N
$\overline{\mathrm{OP}}$	Úsečka OP
$\overrightarrow{\mathrm{QR}}$	Polopřímka QR
$\overleftrightarrow{\mathrm{ST}}$	Přímka určená body ST
$\overleftrightarrow{\mathrm{u}}$	Přímka u
$\lvert\mathrm{V}\overleftrightarrow{\mathrm{w}}\rvert$	Vzdálenost mezi bodem V a přímkou W
$\angle\alpha$	Úhel α
$x \perp \overline{\mathrm{YZ}}$	Přímka x je kolmá na úsečku YZ
$a\|b$	Přímka a je rovnoběžná s přímkou b
$\lvert\mathrm{CD}\rvert = \lvert\mathrm{EF}\rvert$	Vzdálenost mezi body A a B se rovná vzdálenosti mezi body C a D
$\lvert\mathrm{GH}\rvert > \lvert\mathrm{IJ}\rvert$	Vzdálenost mezi body G a H je větší než vzdálenosti mezi body I a J

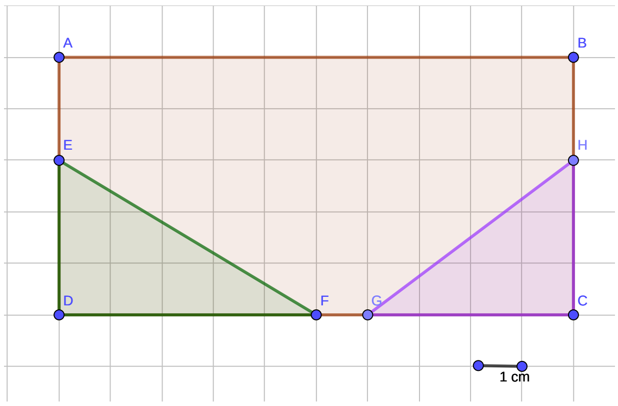
3.1 8leté obory

3.1.1 Planimetrie

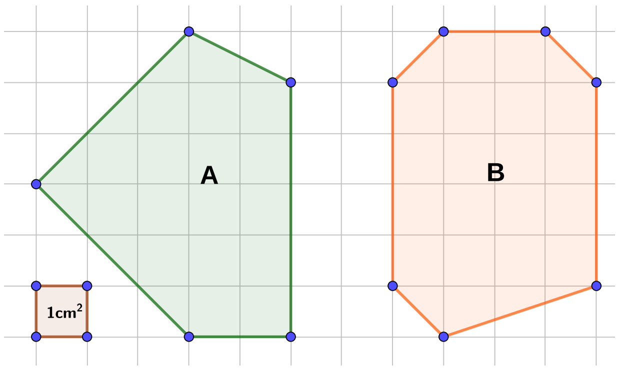
Čtvercové sítě

Úlohy

1. Určete obsah △DEF, △GCH a ▭ABCD.

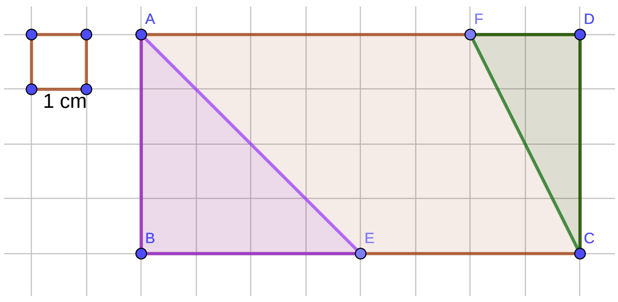


2. Vypočtěte obsah tvaru A a B.

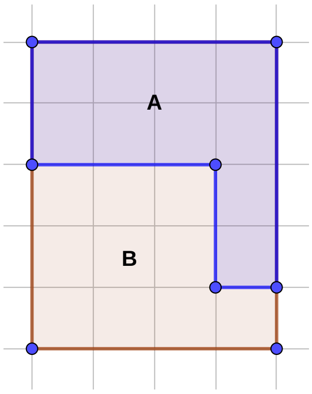


3. Odpovězte na následující ano/ne otázky:

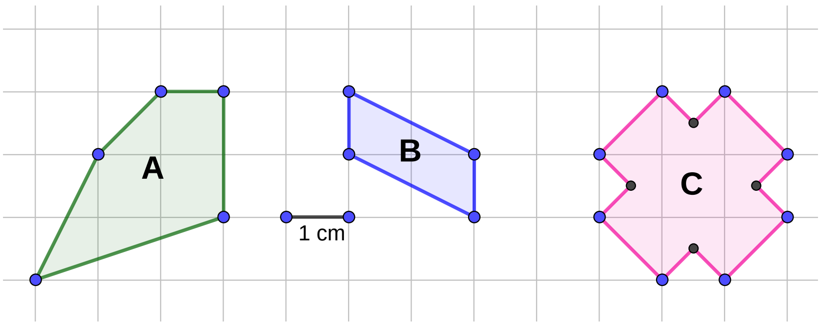
- Je obsah △ABE 2krát větší než obsah △FDC?
- Je součet obsahů △ABE a △FDC větší než polovina obsahu ▭ABCD?
- Je obsah ▭ABCD 4krát větší než obsah △ABE?



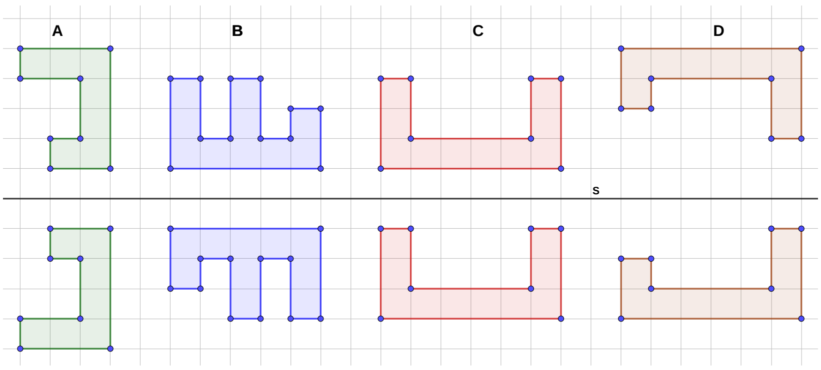
4. Určete, který ze tvarů má větší obsah a o kolik cm^2 a který má delší obvod a o kolik cm. Obsah jednoho čtverečku čtvercové sítě je $1\,\mathrm{cm}^2$.



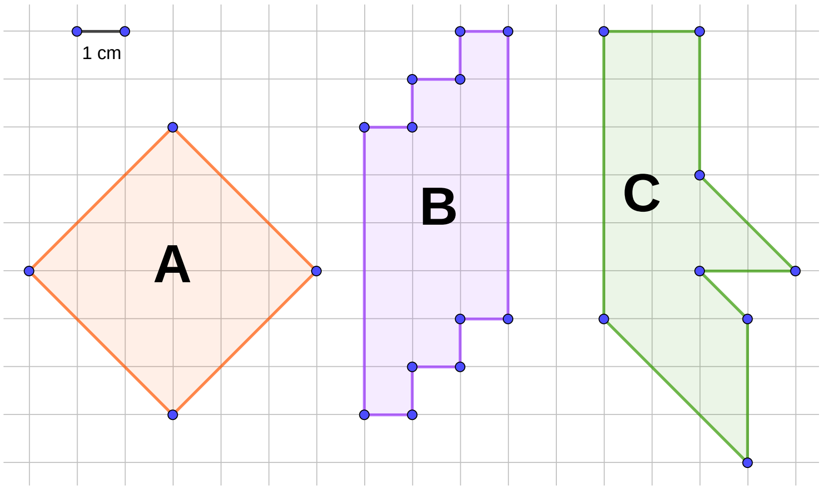
5. Určete obsah tvarů A, B a C.



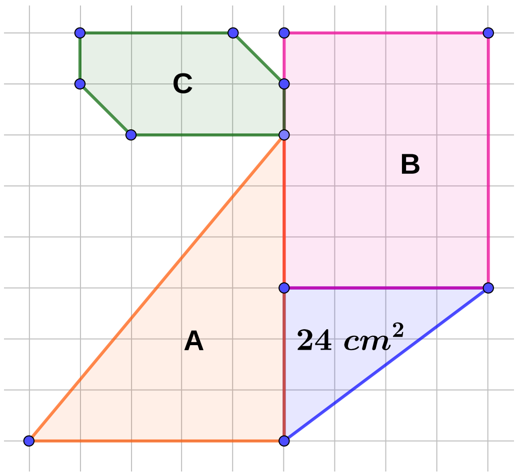
6. Které z následujících tvarů jsou osově souměrné podle osy s?



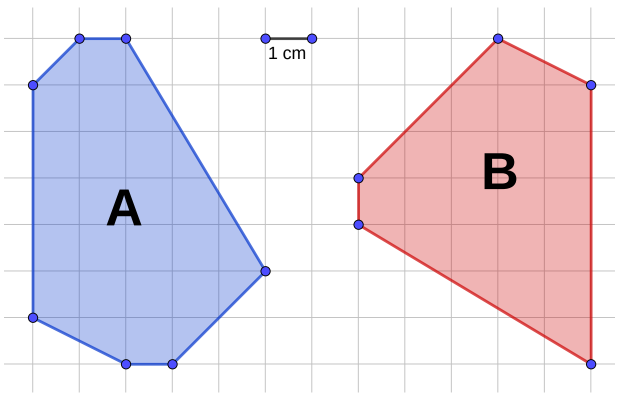
7. Určete obsahy všech tvarů. Který z nich má největší obsah?



8. Určete obsahy všech tvarů, jestliže znáte obsah trojúhelníku.

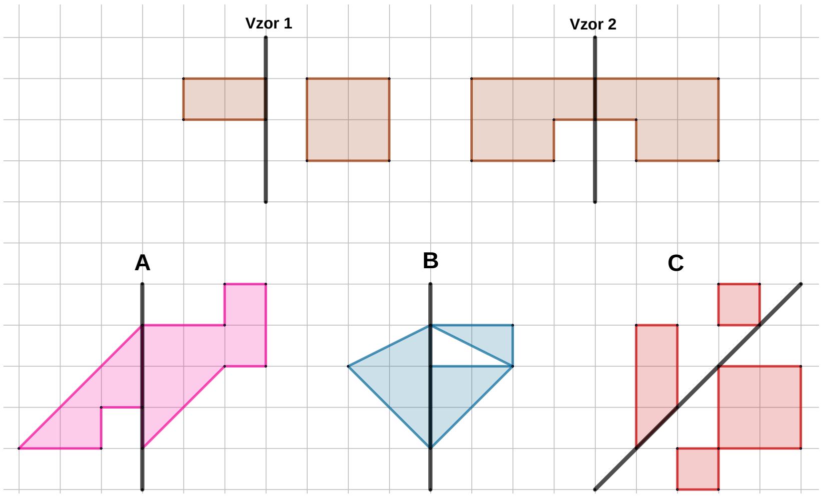


9. Určete, který ze tvarů má větší obvod a o kolik cm a který má větší obsah a o kolik cm^2.



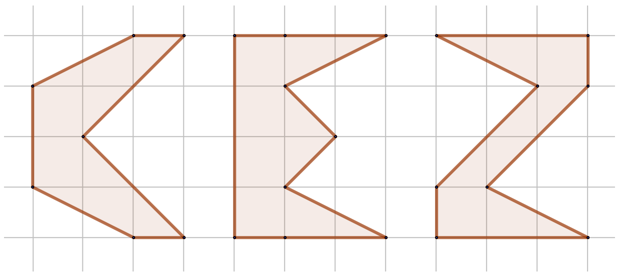
10. Obrazce A, B a C obtiskněte podle vyznačené úsečky z jedné strany na druhou a pak opačně. Tak vznikne nový obrazec, který bude osově symetrický podle vyznačené úsečky. (viz Vzor 1, po obtisknutí Vzor 2)

Určete obsahy jednotlivých obrazců. Jeden čtvereček čtvercové sítě má obsah 1 cm^2.

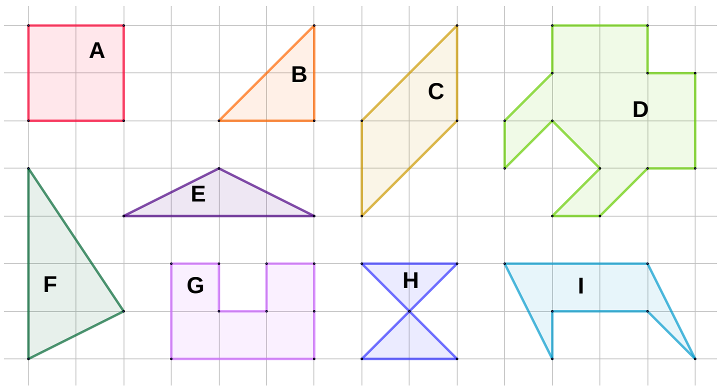


11. Na následující příloze jsou 3 písmena, C, E a Z. Určete:

- součet obsahů všech písmen,
- jestli je větší obvod písmene C nebo Z.



12. Vypište všechny tvary, které jsou osově souměrné podle libovolné osy. Určete také součet obsahů tvarů C, H, F a G.



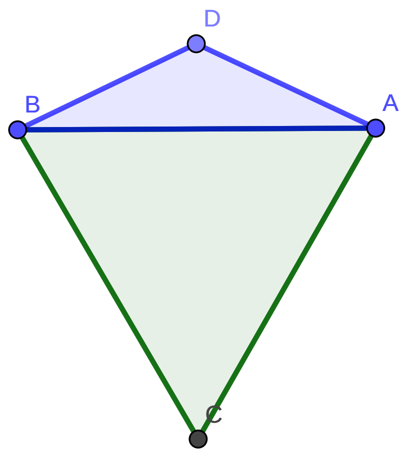
Řešení

1. Obsah $\triangle DEF = 7{,}5\,\mathrm{cm}^2$, $\triangle GCH = 6\,\mathrm{cm}^2$ a $\square ABCD = 50\,\mathrm{cm}^2$.
2. Obsah $A = 20\,\mathrm{cm}^2$, $B = 21\,\mathrm{cm}^2$.
3. Ano, ne, ano.
4. Oba mají stejný obsah, rozdíl je tedy $0\,\mathrm{cm}^2$. Tvar A má obvod delší o 2 cm.
5. Obsah $A = 5\,\mathrm{cm}^2$, $B = 2\,\mathrm{cm}^2$, $C = 6\,\mathrm{cm}^2$.
6. Pouze tvar A.
7. Obsah $A = 18\,\mathrm{cm}^2$, $B = 18\,\mathrm{cm}^2$, $C = 19\,\mathrm{cm}^2$. Největší obsah má tvar C.
8. Obsah $A = 72\,\mathrm{cm}^2$, $B = 80\,\mathrm{cm}^2$, $C = 28\,\mathrm{cm}^2$.
9. Oba tvary mají stejný obvod, rozdíl je tedy 0 cm. Obsah tvaru A je větší o $2\,\mathrm{cm}^2$.
10. Obsah $A = 15{,}5\,\mathrm{cm}^2$, $B = 8\,\mathrm{cm}^2$, $C = 15\,\mathrm{cm}^2$.
11. Součet obsahů je $25\,\mathrm{cm}^2$. Obvod písmene Z je větší než obvod písmene C.
12. Tvary A, B, D, E, G a I jsou souměrné podle aspoň 1 osy. Součet obsahů je $15\,\mathrm{cm}^2$.

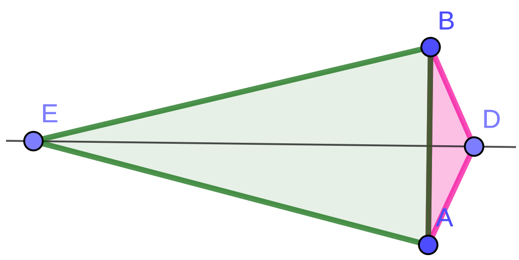
Obvod, obsah a délky

Úlohy

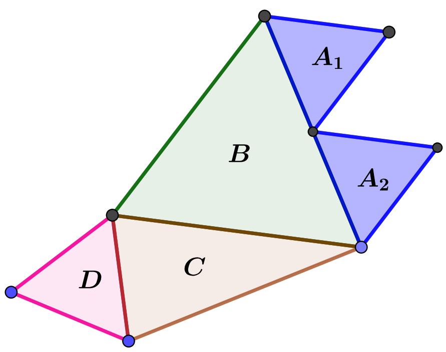
1. $\triangle$ABC je rovnostranný a $\triangle$ABD je rovnoramenný. $|BD| = 4$ cm. Obvod $\triangle$ABD je 15 cm. Jaký je obvod tvaru ADBC?



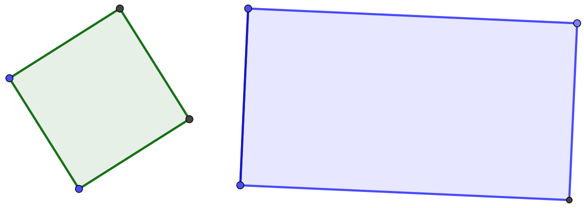
2. $\triangle$ABD a $\triangle$ABE jsou rovnoramenné. $|AB| = 4$ cm. $|AD| = 3$ cm. Obvod $\triangle$ABE je 2krát delší než obvod $\triangle$ABD. Jaký je obvod tvaru ADBE?



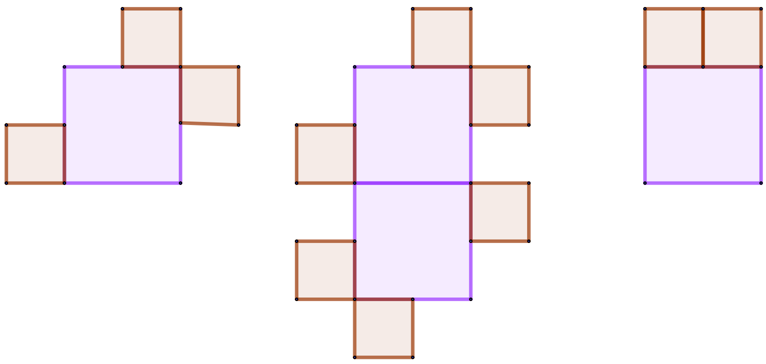
3. $\triangle A_1$ a $\triangle A_2$ jsou navzájem shodné. $\triangle A_1$, $\triangle A_2$, $\triangle$B a $\triangle$D jsou rovnostranné. $\triangle$C je rovnoramenný. Obvod $\triangle A_1$ je 18 cm. Obvod $\triangle$D je o 3 cm delší než obvod $\triangle A_1$. Určete obvod $\triangle$C.



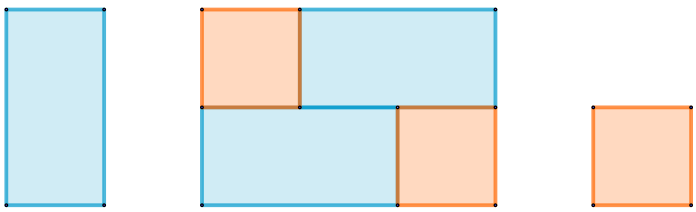
4. Z provázku byl sestrojen čtverec tak, že byl provázek natažen po jeho obvodu. Obsah tohoto čtverce byl $49\,\text{cm}^2$. Poté byl tento provázek rozmotán a byl z něj vytvořen obdélník o obsahu $45\,\text{cm}^2$. Jaké jsou délky jeho stran? (Obrázek je pouze ilustrační.)



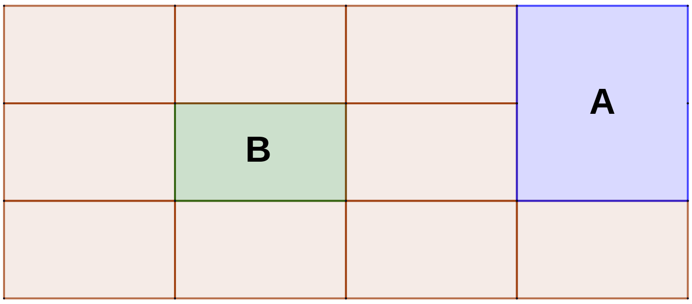
5. Tvar vlevo má obvod 182 cm. Skládá se z malých a velkých čtverců. 4 malé čtverce se vejdou do jednoho velkého. Určete obvody tvaru uprostřed a vpravo.



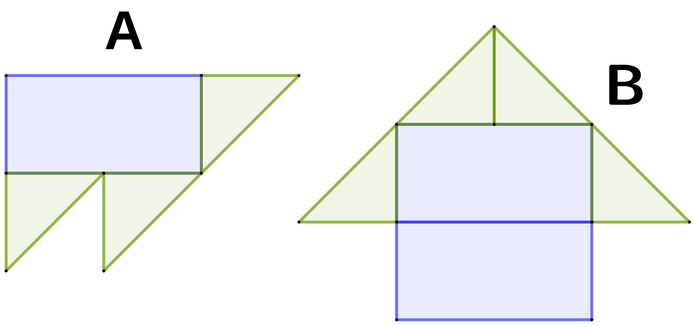
6. Obvod malého modrého obdélníku je 72 cm. Jeho delší strana je 2krát delší než jeho kratší strana. Tvar vpravo je čtverec. Určete obsah prostředního tvaru.



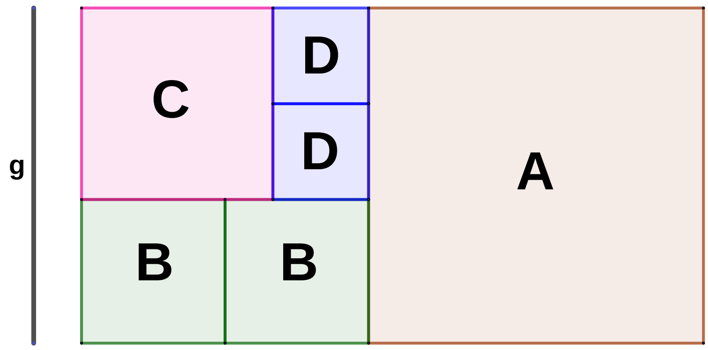
7. Obvod ▭A je 34 cm. Obsah ▭B je $35\,\text{cm}^2$. Jaké jsou délky stran ▭A?



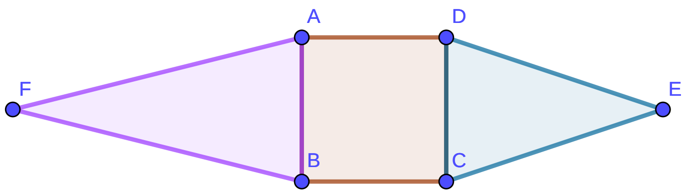
8. Zelené △ jsou rovnostranné a pravoúhlé. Obvod tvaru A je 77 cm, obvod tvaru B je 82 cm. Jaká je délka základny zeleného △?



9. Délka $\overline{g}$ je 14 cm. Jaký je obsah čtverce D?



10. Obsah □ABCD je 64 cm. Obvod △ABF je 2krát delší než obvod □ABCD. Součet délek obou ramen △ABF se rovná obvodu △CDE. Jaký je obvod tvaru EDAFBC?



Řešení

1. Obvod tvaru ADBC je 22 cm.
2. Obvod tvaru ADBE je 22 cm.
3. Obvod $\triangle$C je 31 cm.
4. Délky stran jsou 9 cm a 5 cm.
5. Obvod tvaru uprostřed je 312 cm. Obvod tvaru vpravo je 130 cm.
6. Obsah prostředního tvaru je $216\,\mathrm{cm}^2$.
7. Délky stran jsou 10 cm a 7 cm.
8. Délka základny zeleného $\triangle$ je 5 cm.
9. Obsah $\square$D je $4\,\mathrm{cm}^2$.
10. Obvod tvaru EDAFBC je 120 cm.

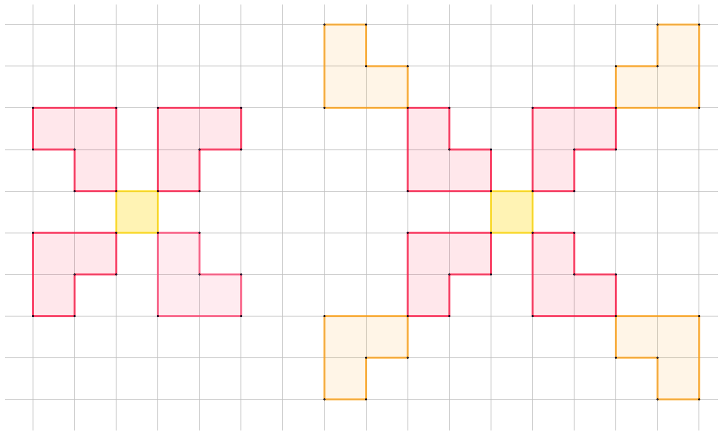
Rekurzivní úlohy

Úlohy zaměřené na opakování jevů.

Úlohy

1. Na obrázku je vyobrazen květ rostliny, který má 4 okvětní lístky. Každý den se každý okvětní lístek prodlouží o jednu sekci. Vlevo je květ v první den, vpravo druhý den. Jedna sekce okvětního lístku má povrch 4 cm^2.

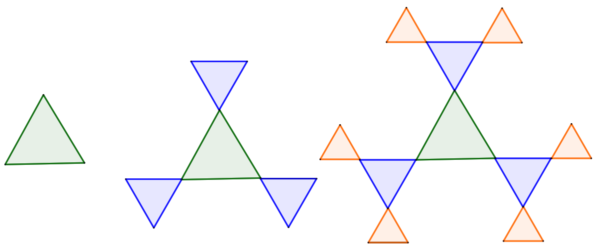
   Kolik bude mít květ okvětních lístků 15. den? Kolik budou mít každý sekcí? Jaký bude celkový povrch lístků? (Do tohoto součtu nepočítejte střed květu.)



2. Na obrázku je krystal ve 3 fázích růstu, a to v prvním, druhém a třetím roce. Každý rok na konce krystalu (vrcholy △), které jsou „volné”, přibude další △. Ten bude mít poloviční povrch než △, ze kterého roste.

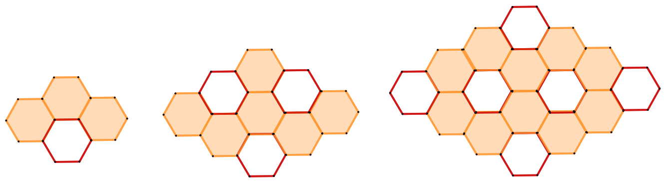
   Z kolika △ se bude krystal skládat v 8. roce?

   Pokud má krystal první rok povrch o velikosti 32 cm^2, jaký bude mít povrch v 6. roce?



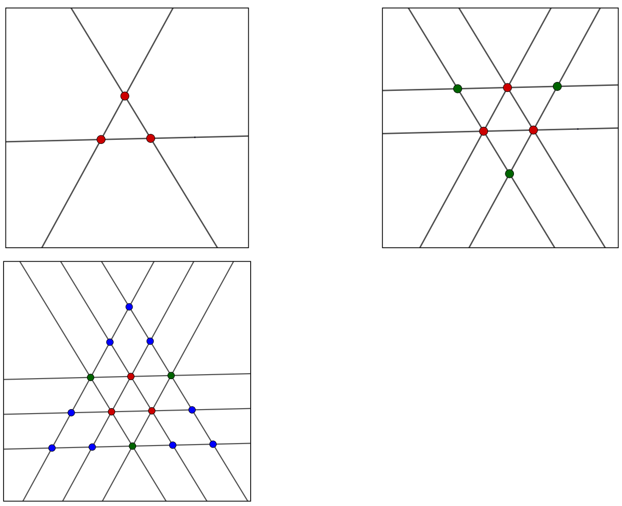
3. Včelky budují plástev. Staví ji tak, že každou hodinu přidají jedno patro, ale pouze směrem nahoru. Na obrázku je postup jejich stavby v hodině 1., 2., a 3. zleva doprava. Do většiny komůrek je uložen med (vyznačen oranžově), některé jsou ale ponechané prázdné. Tyto prázdné komůrky jsou vždy obklopeny ze všech stran komůrkami s medem.

Kolik celkem komůrek bude plástev mít ve 12. hodině? Kolik prázdných komůrek bude mít v hodině 6.?



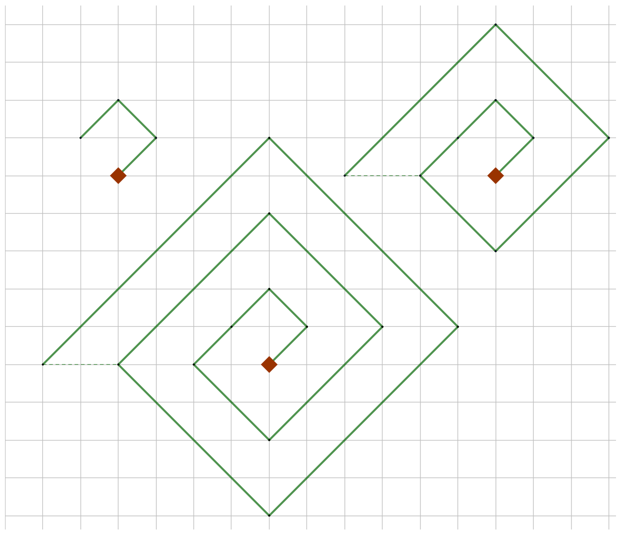
4. Na prvním obrázku jsou 3 přímky, které se všechny navzájem protínají. Do dalšího, druhého, obrázku je na každý průsečík narýsována přímka, která je $\perp$ s přímkou, která průsečík netvoří. Tímto systémem se pokračuje dál.

Kolik průsečíků vznikne na dalším, 4. obrázku?



5. Na obrázku je vyobrazen had. Každý týden povyroste o jedno zatočení kolem svého těla. Vlevo nahoře je had v první týden, vpravo nahoře v týden druhý a uprostřed dole v týden třetí.

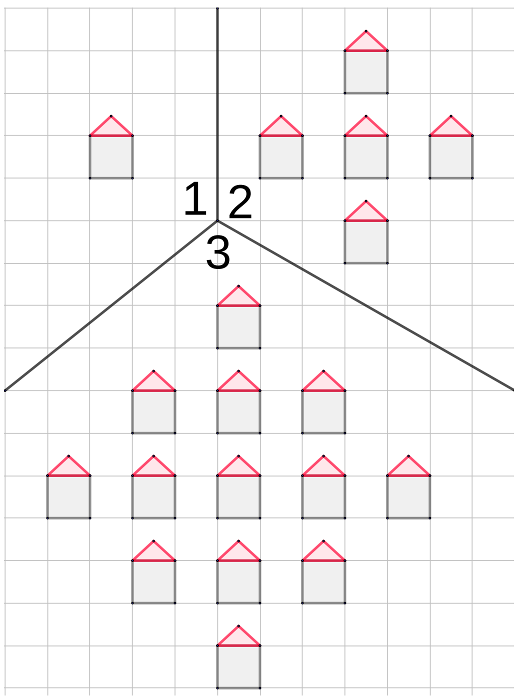
Pokud je had v prvním týdnu dlouhý 6 cm, jak dlouhý bude v týdnu 4. a 5.?



6. Na obrázku je vesnice, která se každý rok rozroste. Domy vždy přibudou tak, že všechny domy z předchozího roku budou mít sousedy ze všech světových stran.

Kolik bude domů mezi domem prostředním a nejsevernějším domem v roce 100? (Prostřední a nejsevernější dům nepočítejte.)

Z kolika domů se bude vesnice skládat ve 20. rok?



Řešení

1. 15. den bude mít stále 4 okvětní lístky. Každý bude mít 15 sekcí. Celkový povrch bude 240 cm^2.

2. V den 8. se bude skládat z 384 lístků. Povrch v den 6. bude 3008 cm^2.

3. Ve 12. hodině bude mít 102 komůrek. V 6. hodině bude mít 12 prázdných komůrek.

4. Vznikne 30 nových průsečíků.

5. V 4. týdnu bude měřit 123 cm, v 5. týdnu 200 cm.

6. Bude mezi nimi 98 domů. Ve 20. rok se bude skládat z 761 domů.

3.1.2 Rýsování

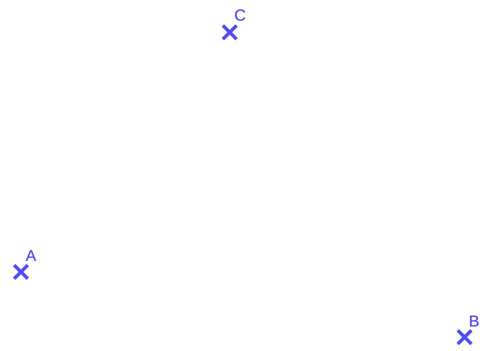
Podle bodů

Úlohy

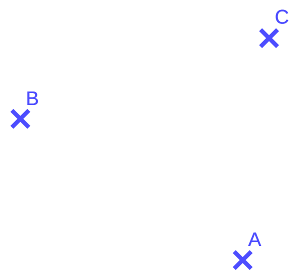
1. Narýsujte $\square$ABED tak, aby v něm ležel bod C. Dále sestrojte $\triangle$DCE.

2. Narýsujte ▭ACDE tak, aby na $\overleftrightarrow{ED}$ ležel bod B.

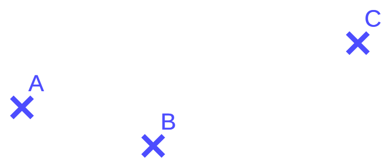
3. Narýsujte $\square ADEF$. Bod D leží na $\overline{AB}$ a bod E leží na $\overline{DC}$. $\angle ABD$ tedy musí být pravý.



4. Narýsujte $\square$BCDE tak, aby se v něm nenacházel bod A. Následovně narýsujte bod A’, který je osově souměrný bodu A dle $\overline{\mathrm{BC}}$. Poté sestrojte $\triangle$AA’B.



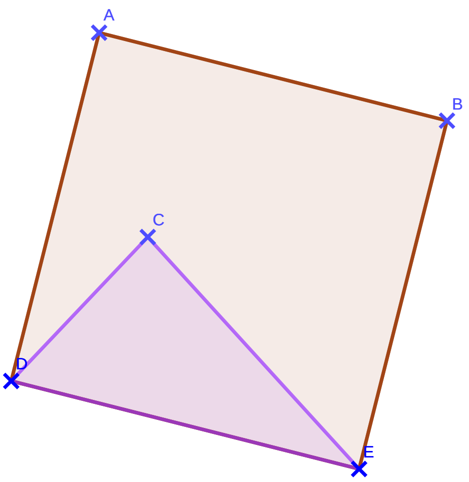
5. Narýsujte $\sqsubset\!\sqsupset$ABDE tak, aby $|\overline{\mathrm{BC}}| = |\overline{\mathrm{CD}}|$.



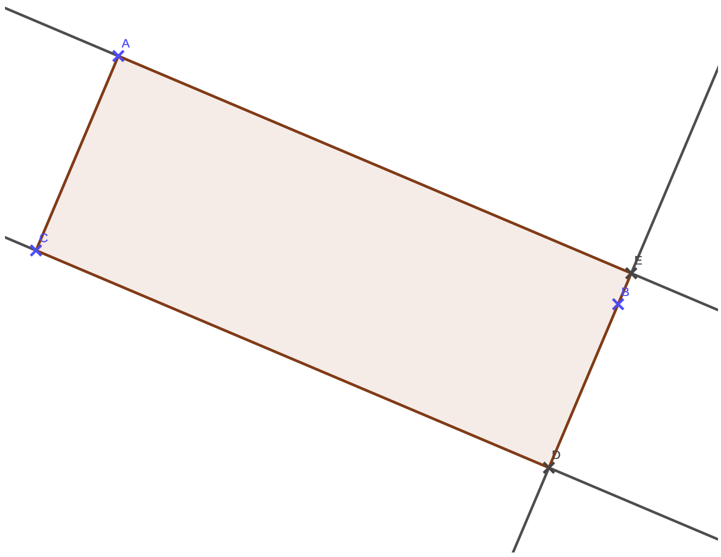
6. Narýsujte ▭BCDF tak, aby $|\overline{\mathrm{AB}}| = |\overline{\mathrm{AD}}|$. Sestrojte všechny možnosti.

Řešení

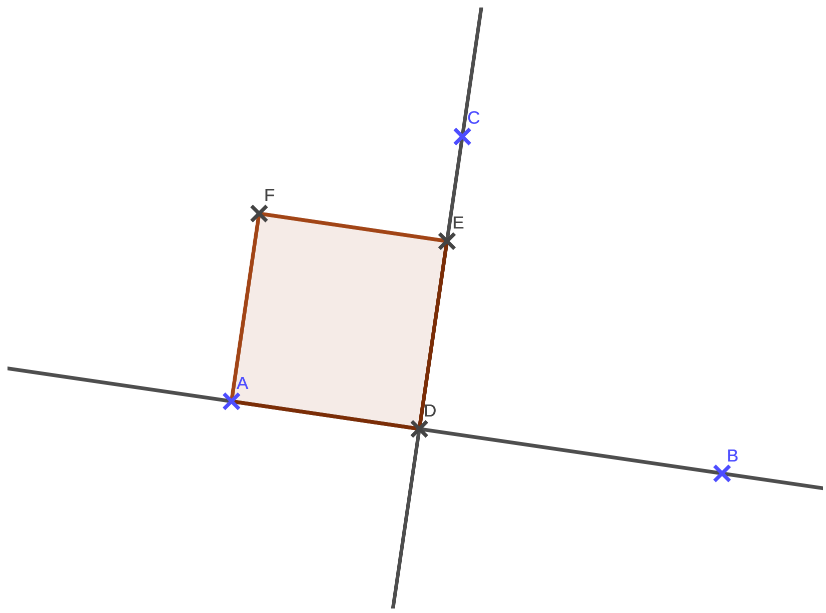
1.



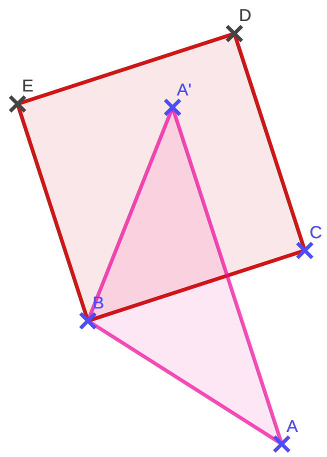
2.



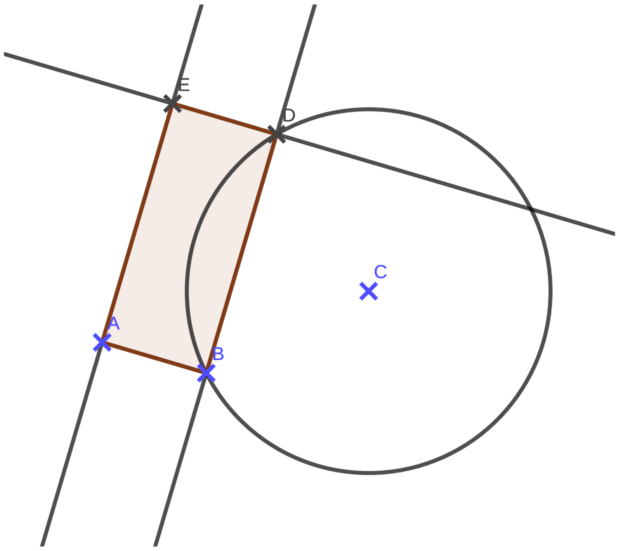
3.



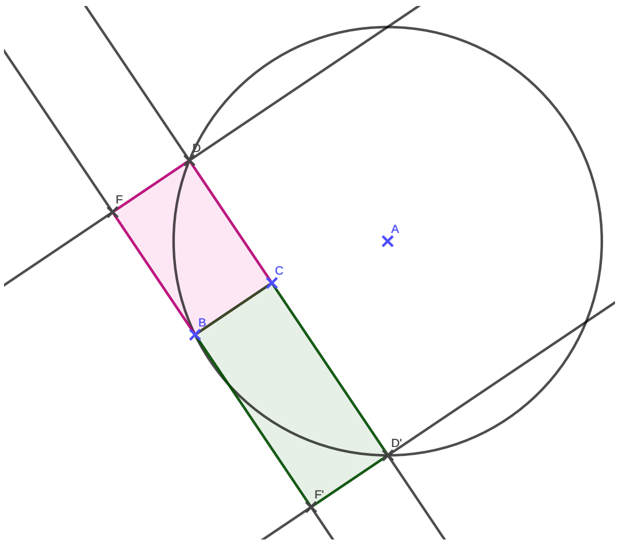
4.



5.



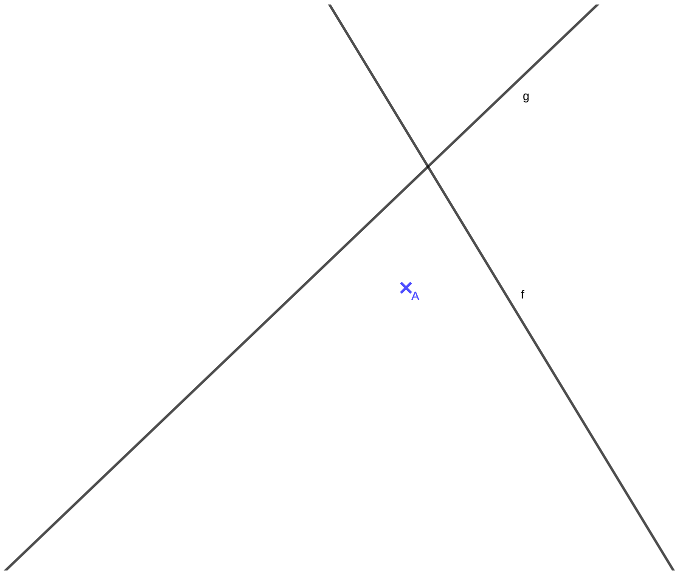
6.



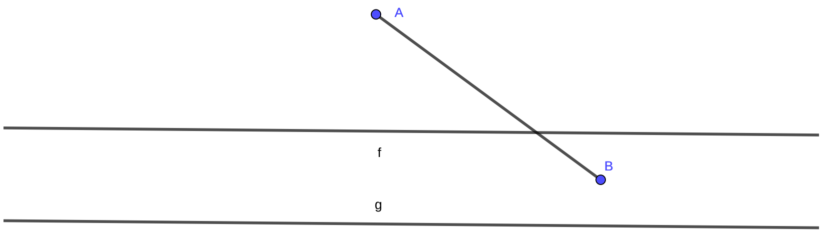
Podle bodů a čar

Úlohy

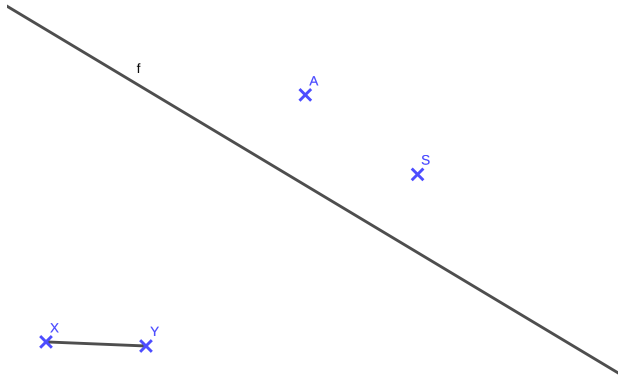
1. Narýsujte rovnoramenný $\triangle ABC$, jehož základna leží na $\overleftrightarrow{g}$. Platí, že $|\overleftrightarrow{f}A| = |\overleftrightarrow{f}B|$.



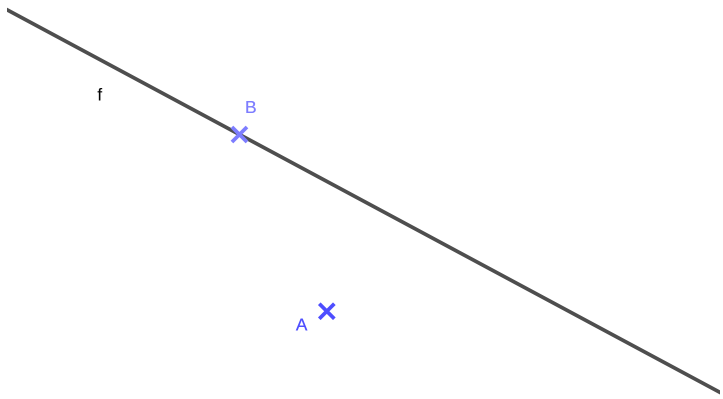
2. Narýsujte ▭ABCD tak, aby bod C ležel na $\overleftrightarrow{g}$ a bod D na $\overleftrightarrow{f}$.



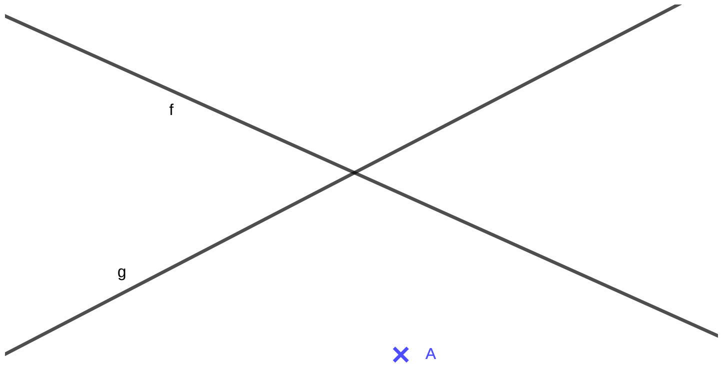
3. Narýsujte rovnoramenný $\triangle ABC$, jehož základna leží na $\overleftrightarrow{f}$. Platí $|\overline{XY}| = |\overline{SB}|$.



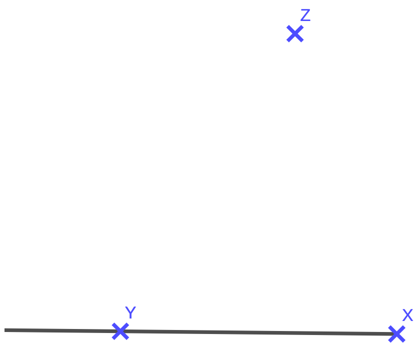
4. Narýsujte rovnoramenný $\triangle ABC$, jehož základna leží na $\overleftrightarrow{f}$. Následně vytvořte rovnostranný $\triangle CDE$ tak, aby $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ a bod E nenáležel $\triangle ABC$.



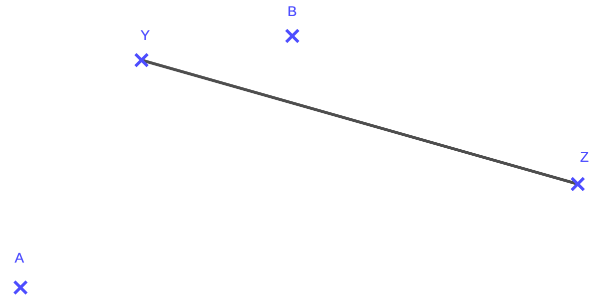
5. Sestrojte □ABCD tak, aby bod D ležel na jedné z přímek a aby strana B byla kolmá na druhou. Narýsujte všechny možnosti.



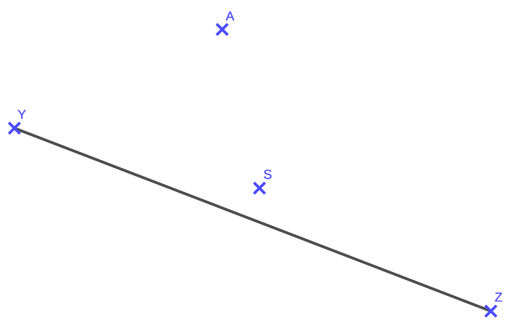
6. Narýsujte ▭ABCD tak, aby strana b ležela na $\overrightarrow{XY}$, $|\overrightarrow{XY}A| = |AZ|$ a $|BC| = |BZ|$.



7. Narýsujte ▭ABCD tak, aby středem $\overline{YZ}$ byl zároveň středem $\overline{BC}$.



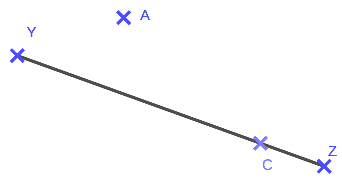
8. Narýsujte rovnoramenný $\triangle ABC$ tak, aby bod B ležel na $\overline{ZY}$, $|SB| = |SA|$. Základnou je strana BC.



9. Narýsujte pravoúhlý $\triangle$ABC, aby bod B ležel na $\overline{\text{ZY}}$ a strana AC byla jeho nejdelší stranou.

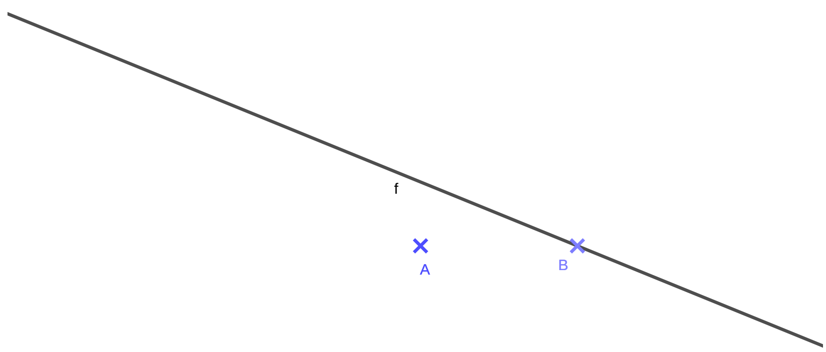
Dále narýsujte $\triangle$ACD, jehož pravý úhel leží u bodu A, aby platilo $|AB| = |AD|$.

Jako poslední narýsujte rovnostranný $\triangle$CED tak, aby $|ED| > |EA|$.

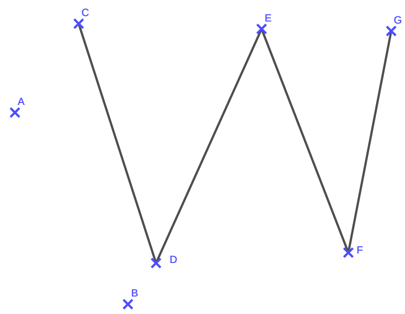


10. Narýsujte $\square$ABCD, kterým prochází $\overleftrightarrow{\text{f}}$.

Dále sestrojte $\triangle$EDF tak, aby se bod E nacházel na průsečíku $\overleftrightarrow{\text{f}}$ a $\overleftrightarrow{\text{CD}}$, bod F se nacházel na $\overleftrightarrow{\text{AC}}$ a $|AF| = |AC|$.

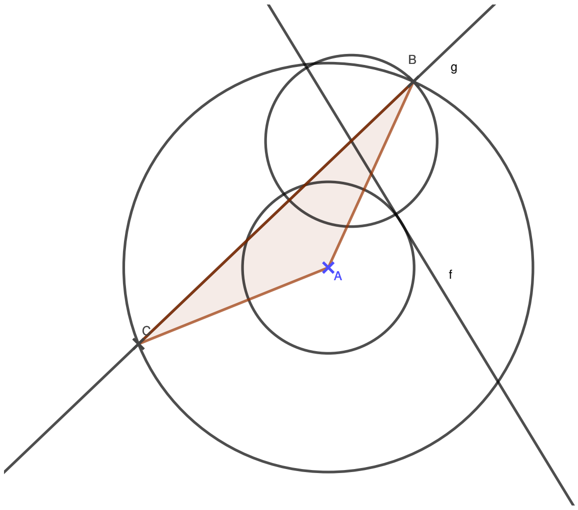


11. Narýsujte $\triangle ABH$, aby $|BH| = |ED|$, $|AH| < |EF|$ a aby se bod H nacházel na lomené čáře CDEFG.

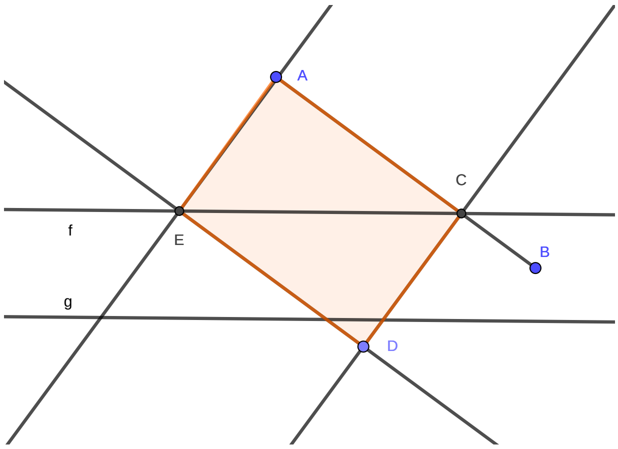


Řešení

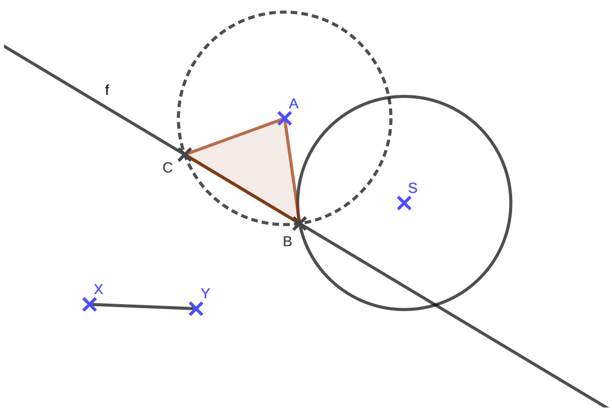
1.



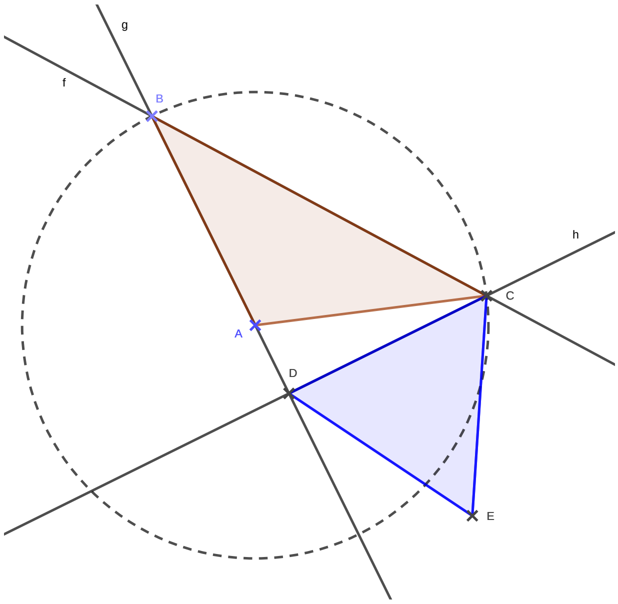
2.



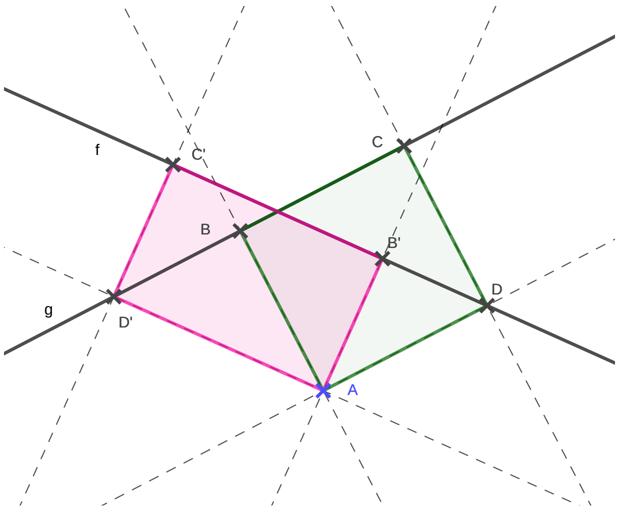
3.



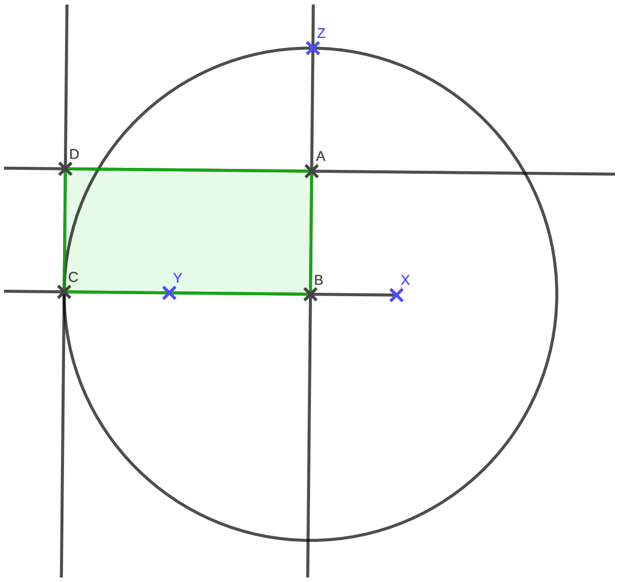
4.



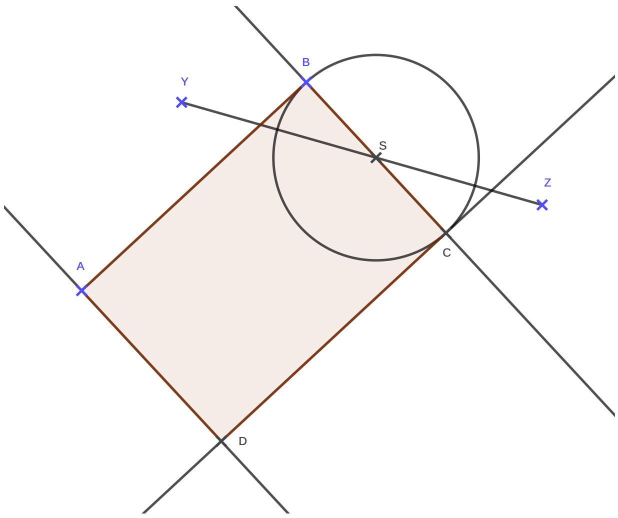
5.



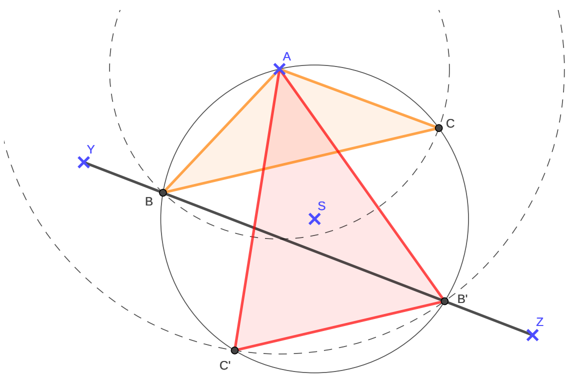
6.



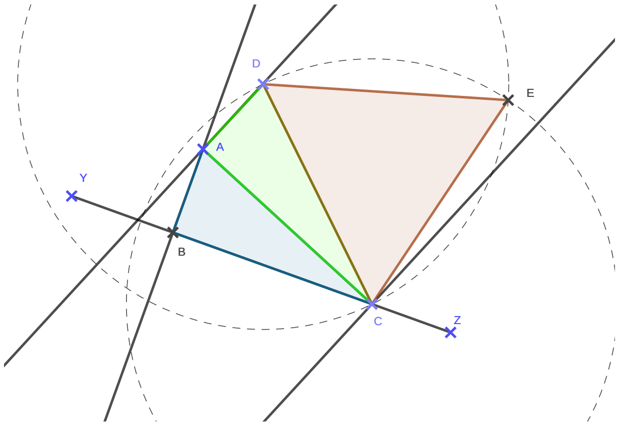
7.



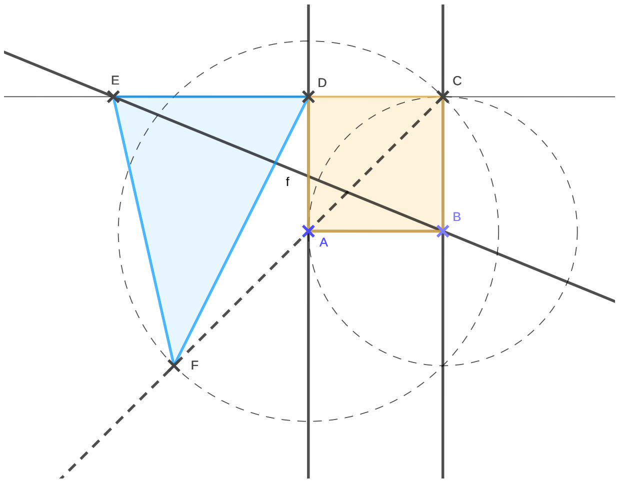
8.



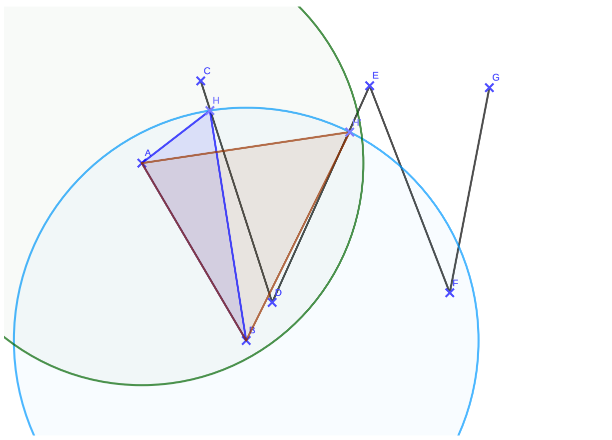
9.



10.



11.



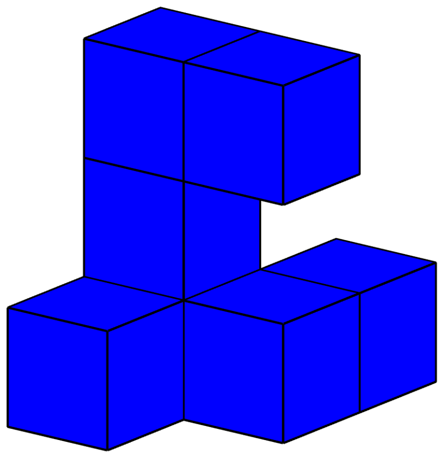
3.1.3 Stereometrie

Kostky

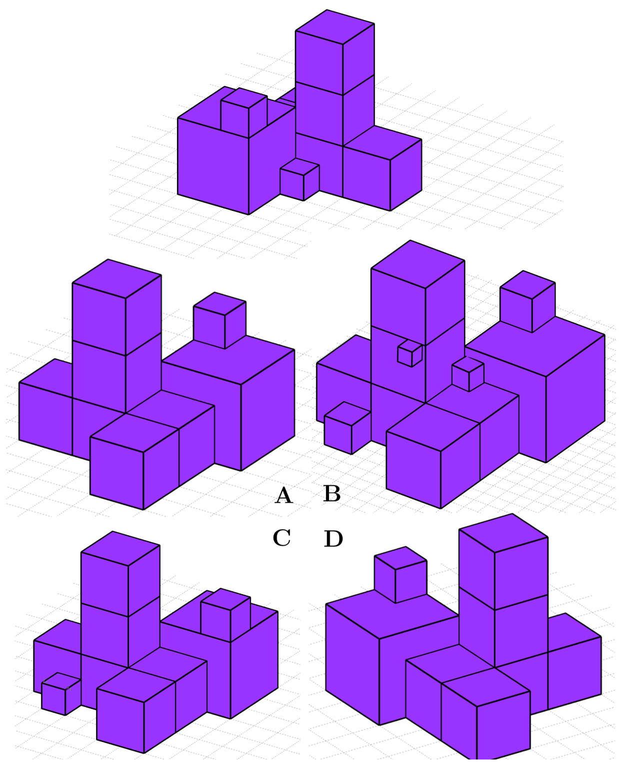
Úlohy

1. Víte, že se kostky dotýkají pouze stěnami. Spočítejte:

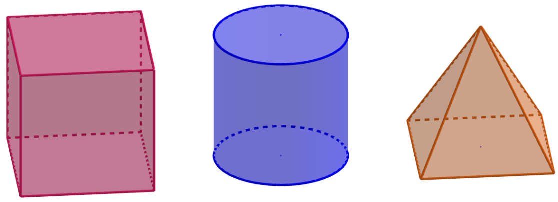
   - počet kostek, které jsou vidět;
   - počet kostek;
   - počet stěn kostek, které jsou na povrch útvaru;
   - objem útvaru, pokud je objem jedné kostky 4 cm^3.



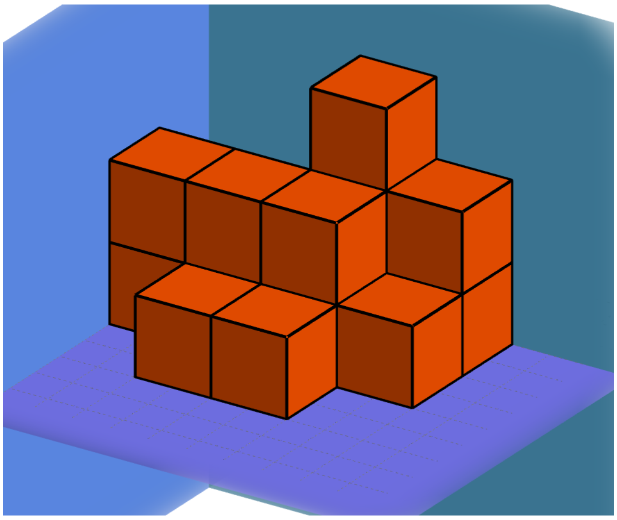
2. Na obrázku vidíte stavbu složenou z krychlí. Jak může vypadat z druhé strany? Vyberte všechny možnosti.



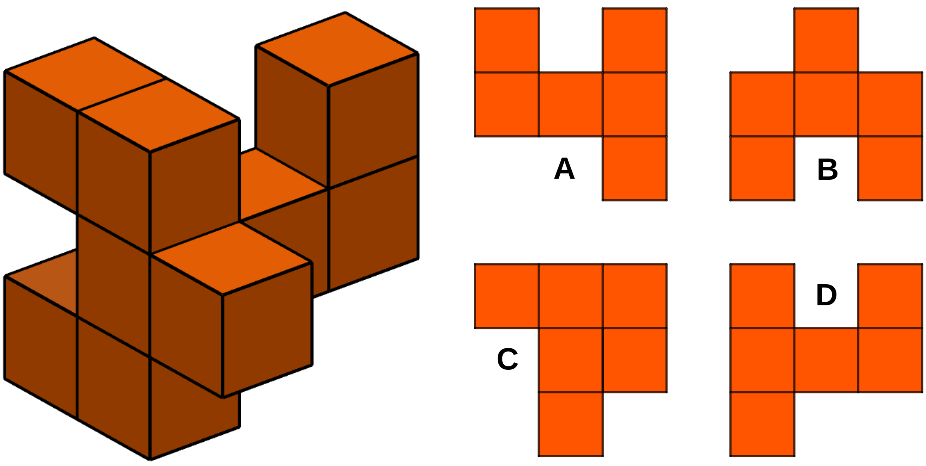
3. Pojmenujte tělesa zleva doprava.



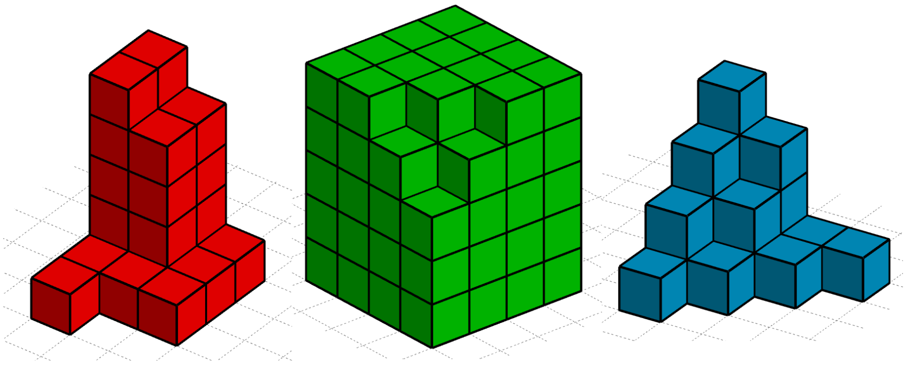
4. Kolik je na obrázku nejmenší možný počet kostek, pokud víme, že kostka musí stát buď na podložce, nebo na jiné kostce?



5. Vlevo je těleso složené z kostek. Jak by mohlo vypadat, pokud bychom se na něj podívali z určité strany? Vyberte možné pohledy zprava. (Vyber A, B, C nebo D.)

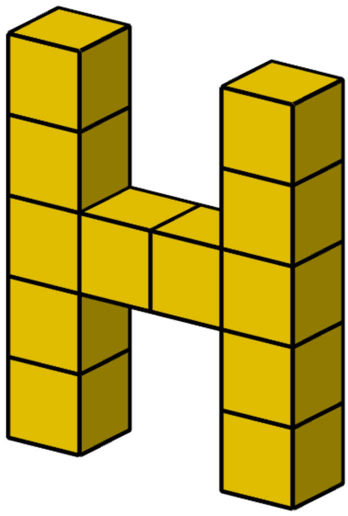


6. Srovnejte tělesa složená z kostek podle obsahu. Určete, o kolik cm^3 je největší těleso větší než nejmenší těleso, pokud je obsah jedné kostky 3 cm^3.



7. Na obrázku je písmeno H slepené z bílých kostek. Po slepení bylo namalováno na žluto.

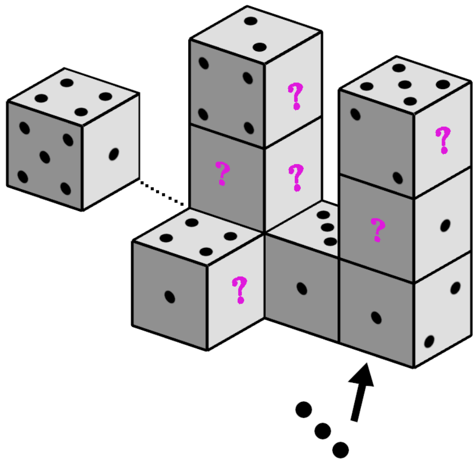
Kolik stěn na sobě má lepidlo? Kolik stěn má na sobě žlutou barvu.



8. Na obrázku jsou poskládány hrací kostky do útvaru. Víme následující:

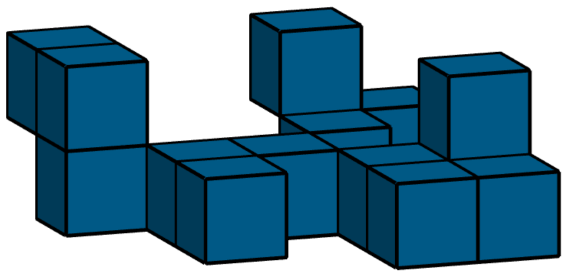
- Součet hodnot dvou protějších stran hrací kostky je 7.
- Všechny kostky se dotýkají stěnami.
- Kostka, která není vidět, byla posunuta doleva.
- Tři tečky se šipkou ukazují, jaká hodnota je na spodní stěně pravé dolní kostky.
- Některé hodnoty jsou neznámé, ty jsou označené otazníkem.

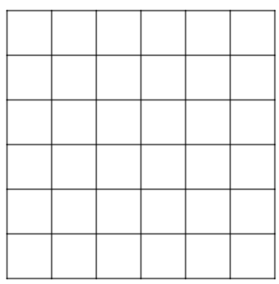
Jaký je součet všech hodnot, které jsou na útvaru zvenku?

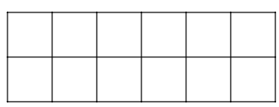


9. Na horním obrázku jsou kostky. Dotýkají se buď stěnami, nebo hranami.

Do čtvercových sítí vkresli, co bychom viděli, pokud bychom se dívali na kostky z 2 úhlů podhledu. Do pravé to, co bychom viděli shora, a do levé to, co bychom viděli zleva.

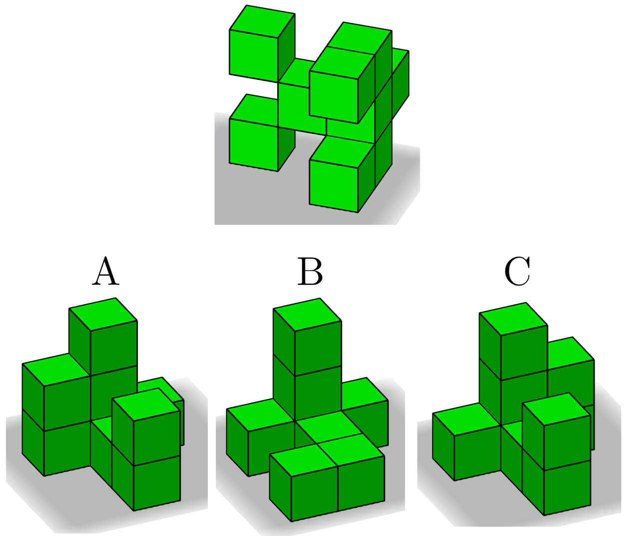




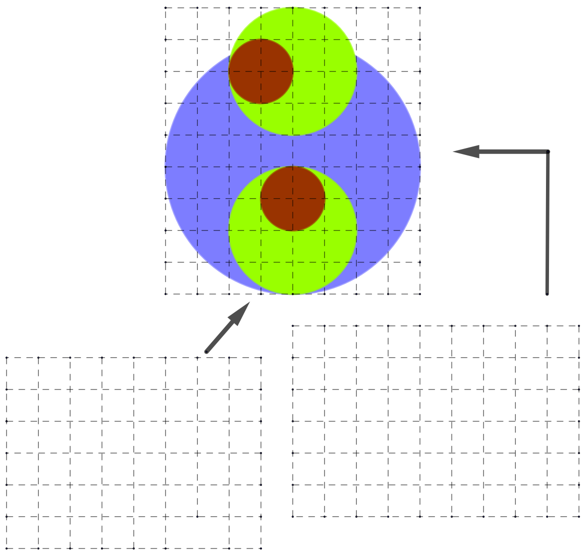


10. Zelené kostky byly slepené lepidlem do tělesa nahoře. Kvůli horku se těleso roztálo a všechny kostky spadly.

Jak kostky po spadnutí vypadají? (Vyber A, B, nebo C.)

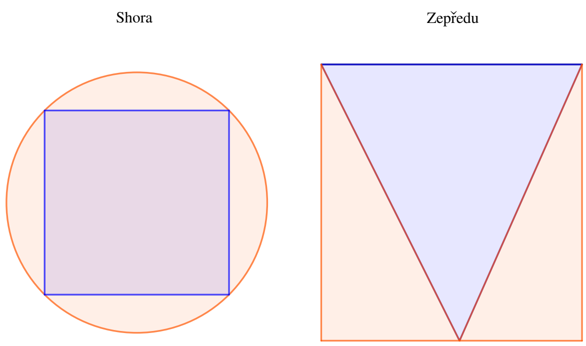


11. Na obrázku je narozeninový dort focený shora. Má 3 patra, nejnižší je modré, prostřední je zelené a nejvyšší je hnědé. Do čtvercových sítí dokresli, jak dort vypadá ze stran určených šipkami.



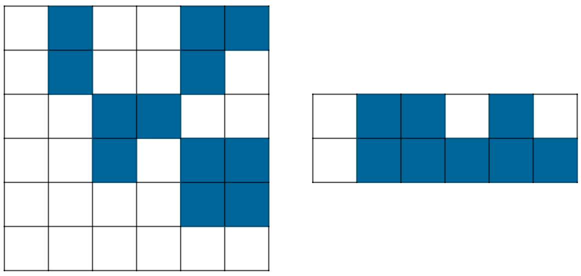
12. Na obrázku jsou 2 fotky skleněného objektu. Jedna je focená shora, druhá zepředu.

Popište tento objekt. (Možný popis: Objekt je na povrchu modrý a má tvar koule, uvnitř této koule je zelený čtverec.)



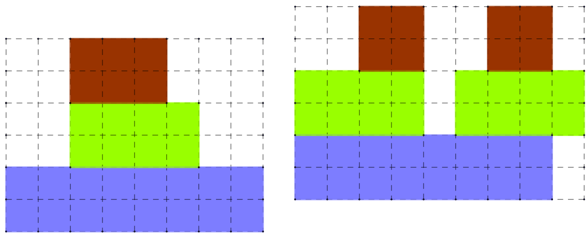
Řešení

1. Kostek je vidět 6. Pokud víme, že se kostky dotýkají, je jich 7. Na povrchu útvaru je 30 stěn. Objem je 28 cm^3.
2. Může vypadat jako A nebo B.
3. Tělesa se jmenují kostka, válec a jehlan.
4. Je na něm minimálně 14 kostek.
5. Může vypadat jako možnost A, B a D.
6. Největší je prostřední těleso, druhé největší je těleso vlevo a nejmenší je těleso vpravo. Největší těleso je větší než nejmenší těleso o 171 cm^3.
7. 22 stěn na sobě má lepidlo, 50 stěn na sobě má žlutou barvu.
8. Součet je 115.
9.

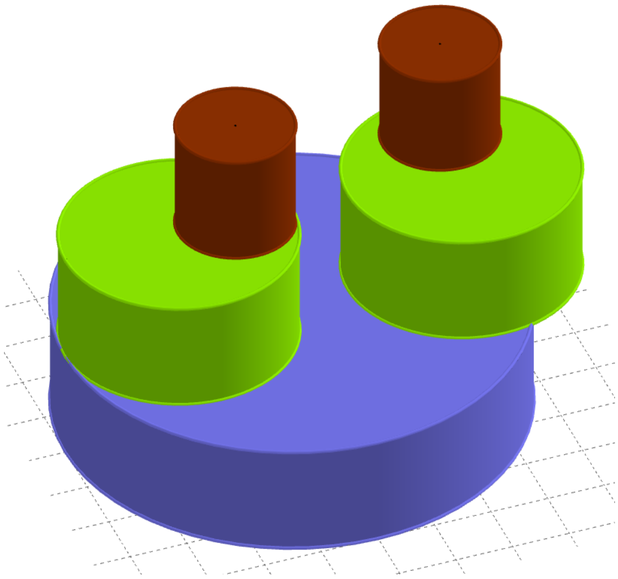


10. Správná možnost je C.

11.



3D vizualizace:



12. Objekt je na povrchu oranžový a má tvar válce, uvnitř tohoto válce je modrý jehlan.

Závěr

Vytvořil jsem sbírku planimetrických a stereometrických úloh, která může pomoci k přípravě na zkoušky pro 8leté studium nebo může být využita pedagogy, kteří své studenty chtějí na zkoušku připravit.

Snažil jsem se tématem a jednotlivými úlohami co nejvíce napodobit úlohy, které se objevují v jednotné zkoušce. A myslím, že jsem v tomto uspěl.

Při tvorbě práce jsem zjistil, jaké to je vytvářet sbírky, které celý svůj studentský život používám. Osvojil jsem si program GeoGebra, ve kterém jsem vytvářel úlohy a LaTeX, ve kterém jsem práci psal.

Bibliografie a další zdroje

[1] Polák Josef. *Přehled středoškolské matematiky.* 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1972.

[2] Zákony pro lidi. *Zákon č. 561/2004 Sb.* [online]. 2004. URL: `https://www.zakonyprolidi.cz/cs/2004-561#p80-2`.

[3] Calda Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU.* Sv. 1. Praha 4: Prometheus, 2008. ISBN: 978-80-7196-020-1.

[4] Calda Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU.* Sv. 2. Praha 4: Prometheus, 2008. ISBN: 978-80-7196-057-7.

[5] Calda Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU.* Sv. 3. Praha 4: Prometheus, 2008. ISBN: 978-80-7196-109-3.

[6] Vondra Jan et al. *Matematika pro střední školy.* Brno: Didaktis, 2013. ISBN: 978-80-7358-211-1.

[7] Liška Marek, Valenta Tomáš a Král Lukáš. *Matika pro spolužáky. Planimetrie.* Hradec Králové: ProSpolužáky.cz, 2017. ISBN: 978-80-906702-0-4.

[8] Liška Marek, Valenta Tomáš a Král Lukáš. *Matika pro spolužáky. Planimetrie.* pracovní sešit. Hradec Králové: ProSpolužáky.cz, 2017. ISBN: 978-80-906702-0-4.

[9] Liška Marek, Valenta Tomáš a Král Lukáš. *Matika pro spolužáky. Stereometrie.* pracovní sešit. Hradec Králové: ProSpolužáky.cz, 2017. ISBN: 978-80-88255-10-9.

[10] Liška Marek, Valenta Tomáš a Král Lukáš. *Matika pro spolužáky. Stereometrie.* pracovní sešit. Hradec Králové: ProSpolužáky.cz, 2017. ISBN: 978-80-88255-11-6.

[11] Jiří Zíka. *Souhrnná závěrečná zpráva.* [online]. 2017. URL: `https://data.cermat.cz/files/files/JPZ/JPZ2017-zaverecna_zprava.pdf`.

[12] Umíme matiku. *Obsah, obvod.* [online]. 2023. URL: `https://www.umimematiku.cz/cviceni-obsah-obvod`.

[13] Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. *CERMAT.* [online]. 2023. URL: `https://maturita.cermat.cz/,%20https://zkouska.cermat.cz/,https://prijimacky.cermat.cz/`.

[14] Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. *Jednotná přijímací zkouška 2023.* [online]. 2023. URL: `https://prijimacky.cermat.cz/menu/jednotna-prijimaci-zkouska`.

[15] Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. *Testová zadání v PDF*. [online]. 2023. URL: https://prijimacky.cermat.cz/menu/testova-zadani-k-procvicovani/testova-zadani-v-pdf.

Seznam obrázků

Seznam tabulek