

Tvorba sbírky planimetrických a stereometrických úloh

Ročníková práce



MENSA
GYMNÁZIUM

Mensa gymnázium, o.p.s.

Jan Strmiska

2021 - 2023

2. strana

3. strana

Prohlašuji, že jsem svou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V dne

Podpis autora

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu ročníkové práce Mgr. Matúši Kepičovi za odborné vedení, za pomoc a rady při zpracování této práce.

Obsah

Úvod	2
1 Teoretická část	3
1.1 Jednotné přijímací zkoušky pro střední školy a gymnázia	3
2 Praktická část	4
2.1 Výběr úloh	4
2.2 Statistická analýza přijímacích zkoušek z minulých let	4
2.3 Zkoumání úloh	11
2.4 Tvorba úloh vlastní sbírky	11
3 Sbírka	13
3.1 8leté obory	14
3.1.1 Planimetrie	14
3.1.2 Rýsování	27
3.1.3 Stereometrie	46
Závěr	53
Zdroje	54

Úvod

Tato ročníková práce se zaměřuje na tvorbu sbírky planimetrických a stereometrických příkladů, která má pomoci studentům připravujícím se na střední školu a gymnázium. Toto je motivován mým zájmem o tuto oblast matematiky a své zkušeností s tím, jak mohou někteří studenti s tímto typem úloha bojovat.

Cílem sbírky je poskytnout přehledný materiál, který studentům umožní lépe osvojit si potřebné dovednosti k řešení planimetrických a stereometrických úloh.

Sbírka bude strukturována dle témat jednotlivých úloh a bude přehledně čitelná a atraktivní vizuálně.

V rámci této práce je předpokládáno, že studenti již mají osvojenou znalost planimetrických a stereometrických konceptů, kterou získali v rámci školní výuky. Sbírka bude tedy obsahovat především různorodé příklady, které studentům umožní procvičit a zlepšit své schopnosti v dané oblasti.

Kapitola 1

Teoretická část

1.1 Jednotné přijímací zkoušky pro střední školy a gymnázia

Zkoušky tvoří příspěvková organizace CERMAT, neboli Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, která byla zřízena ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy v roce 2006. [2] Tato organizace také zařizuje státní maturitní zkoušky a závěrečné zkoušky. [12]

Jde o národně jednotné přijímací zkoušky, které jsou povinnou součástí prvního kola přijímacího řízení do všech maturitních oborů s výjimkou oborů s talentovou zkouškou a oborů zkráceného studia. Jednotná přijímací zkouška se skládá ze dvou písemných testů: z českého jazyka a literatury a z matematiky. Varianty testů jsou různé pro čtyřleté obory vzdělání (včetně oborů nástavbového studia), pro šestiletá gymnázia a pro osmiletá gymnázia. Maximální možný počet dosažených bodů v testech z matematiky i českého jazyka a literatury je 50 bodů. [13]

V České republice byly jednotné přijímací zkoušky testovány v letech 2015 a 2016, povinně zavedeny byly v roce 2017. [11]

Přijímací zkoušky z předchozích roků jsou dostupné na webových stránkách Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání. [14]

Kapitola 2

Praktická část

2.1 Výběr úloh

Nejdříve jsme získali přijímací zkoušky CERMAT od roku 2015 do roku 2022. Ty jsou volně dostupné na internetu. Z každého roku jsme se snažili čerpat z pravých testů, tedy řádných a náhradních termínů, a ne ilustračních. Pokud ale v daný rok bylo pravých testů málo, použili jsme i ty.

Jako první jsme tyto zkoušky prošli, a vybrali z nich všechny úlohy které se týkají planimetrie nebo stereometrie.

Následovně jsme tyto úlohy kategorizovali podle

- typu oboru,
- termínu ze kterého pochází
- a posledně do 3 hlavních kategorií, jimiž jsou
 - úlohy planimetrické,
 - stereometrické a
 - rýsovací.

V testech se neobjevily žádné stereometrické rýsovací úlohy, pouze planimetrické rýsovací.

Úloh jsme napříč vybrali 456.

Následně jsme všechny úlohy jednoho oboru dali k sobě podle kategorií a vytvořili podkategorie. Například jedna z podkategorií planimetrických úloh pro 6leté obory byly úlohy zaměřené na úhly.

2.2 Statistická analýza přijímacích zkoušek z minulých let

Po roztrídění všech úloh jsme spočítali, jak často se v testech objevují a jakou mají bodovou váhu.

Přišli jsme k závěru že planimetrické a stereometrické úlohy jsou velmi důležité, jelikož v 8letých oborech odpovídají skoro 38 % známky. Také se planimetrické, rýsovací a stereometrické úlohy objevují přibližně v poměru 2 : 1 : 1 pro tyto obory.

Tabulka 2.1: Distribuce počtu úloh pro 8leté obory

8leté obory		Počet úloh			
		Planimetrie	Rýsování planimetrie	Stereometrie	Celkem
2022	1. řádný termín	2	1	1	14
	2. řádný termín	1	1	3	14
	1. náhradní termín	4	1	1	14
	2. náhradní termín	2	1	2	14
2021	1. řádný termín	2	1	1	14
	2. řádný termín	2	1	1	14
	1. náhradní termín	3	1	1	14
	2. náhradní termín	2	1	1	14
2020	1. řádný termín	2	1	1	14
	1. náhradní termín	3	1	1	14
2019	1. řádný termín	3	1	1	14
	2. řádný termín	3	1	1	14
	1. náhradní termín	2	1	2	14
	2. náhradní termín	1	1	2	14
2018	1. řádný termín	1	1	1	14
	2. řádný termín	2	1	2	14
	1. náhradní termín	1	1	2	14
	2. náhradní termín	4	1	1	14
2017	1. řádný termín	1	1	1	14
	2. řádný termín	3	1	1	14
	1. náhradní termín	3	1	1	14
	2. náhradní termín	3	1	1	14
2016	1. řádný termín	3	1	2	16
	Ilustrační	3	1	2	16
2015	1. řádný termín	2	1	2	16
	Ilustrační	2	2	1	17
Průměr		2,31	1,04	1,38	14,35
Průměrná četnost		16,09 %	7,24 %	9,65 %	32,98 %

Tabulka 2.2: Distribuce bodů za úlohu pro 8leté obory

8leté obory		Body za úlohy			
		Planimetrie	Rýsování planimetrie	Stereometrie	Celkem
2022	1. řádný termín	8	6	5	50
	2. řádný termín	2	6	7	50
	1. náhradní termín	10	6	5	50
	2. náhradní termín	12	6	4	50
2021	1. řádný termín	8	6	5	50
	2. řádný termín	6	6	5	50
	1. náhradní termín	10	6	5	50
	2. náhradní termín	8	6	2	50
2020	1. řádný termín	8	6	5	50
	1. náhradní termín	12	6	4	50
2019	1. řádný termín	12	6	5	50
	2. řádný termín	12	6	5	50
	1. náhradní termín	8	6	4	50
	2. náhradní termín	4	6	4	50
2018	1. řádný termín	4	6	5	50
	2. řádný termín	8	6	4	50
	1. náhradní termín	4	6	4	50
	2. náhradní termín	12	6	2	50
2017	1. řádný termín	4	6	5	50
	2. řádný termín	8	6	5	50
	1. náhradní termín	11	6	2	50
	2. náhradní termín	11	6	2	50
2016	1. řádný termín	10	6	4	50
	Ilustrační	10	6	4	50
2015	1. řádný termín	6	6	4	50
	Ilustrační	6	8	6	50
Průměr		8,23	6,08	4,31	50,00
Průměrná četnost		16,46 %	12,15 %	8,62 %	37,23 %

Tabulka 2.3: Distribuce počtu úloh pro 6leté obory

6leté obory		Počet úloh co obsahuje			Celkem
		Planimetrie	Rýsování planimetrie	Stereometrie	
2022	1. řádný termín	4	2	0	16
	2. řádný termín	4	2	1	16
	1. náhradní termín	6	2	0	16
	2. náhradní termín	3	2	1	16
2021	1. řádný termín	3	2	1	16
	2. řádný termín	2	2	2	16
	1. náhradní termín	4	2	1	16
	2. náhradní termín	4	2	1	16
2020	1. řádný termín	3	2	1	16
	1. náhradní termín	3	2	1	16
2019	1. řádný termín	3	2	1	16
	2. řádný termín	3	2	1	16
	1. náhradní termín	5	2	0	16
	2. náhradní termín	3	1	1	16
2018	1. řádný termín	3	2	0	16
	2. řádný termín	3	2	1	16
	1. náhradní termín	3	2	0	16
	2. náhradní termín	3	2	1	16
2017	1. řádný termín	3	2	1	17
	2. řádný termín	4	2	1	17
	1. náhradní termín	4	2	2	17
	2. náhradní termín	4	2	0	17
2016	1. řádný termín	3	1	1	17
	Ilustrační	4	1	1	17
2015	1. řádný termín	3	1	1	17
	Ilustrační	2	2	2	17
Průměr		3,42	1,85	0,88	16,31
Průměrná četnost		20,99 %	11,32 %	5,42 %	37,74 %

Tabulka 2.4: Distribuce bodů za úlohu pro 6leté obory

6leté obory		Celkem bodů			Celkem
		Planimetrie	Rýsování planimetrie	Stereometrie	
2022	1. řádný termín	8	6	2	50
	2. řádný termín	10	6	4	50
	1. náhradní termín	13	6	4	50
	2. náhradní termín	9	6	2	50
2021	1. řádný termín	10	6	4	50
	2. řádný termín	5	6	4	50
	1. náhradní termín	14	6	2	50
	2. náhradní termín	12	6	2	50
2020	1. řádný termín	10	6	4	50
	1. náhradní termín	10	6	4	50
2019	1. řádný termín	10	5	4	50
	2. řádný termín	10	5	3	50
	1. náhradní termín	14	5	4	50
	2. náhradní termín	6	5	3	50
2018	1. řádný termín	10	6	0	50
	2. řádný termín	10	6	4	50
	1. náhradní termín	8	6	0	50
	2. náhradní termín	9	6	2	50
2017	1. řádný termín	8	6	3	50
	2. řádný termín	12	6	3	50
	1. náhradní termín	12	6	4	50
	2. náhradní termín	11	5	2	50
2016	1. řádný termín	9	5	3	50
	Ilustrační	10	6	2	50
2015	1. řádný termín	7	6	2	50
	Ilustrační	5	5	5	50
Průměr		9,69	5,73	2,92	50,00
Průměrná četnost		19,38 %	11,46 %	5,85 %	36,69 %

Tabulka 2.5: Distribuce počtu úloh pro 4leté obory

4leté obory		Počet úloh co obsahuje			Celkem
		Planimetrie	Rýsování planimetrie	Stereometrie	
2022	1. řádný termín	3	2	1	16
	2. řádný termín	4	2	2	16
	1. náhradní termín	2	2	3	16
	2. náhradní termín	3	2	2	16
2021	1. řádný termín	2	2	0	16
	2. řádný termín	2	2	1	16
	1. náhradní termín	3	2	1	16
	2. náhradní termín	4	2	1	16
2020	1. řádný termín	3	2	2	16
	1. náhradní termín	4	2	1	16
2019	1. řádný termín	4	1	1	16
	2. řádný termín	2	2	2	16
	1. náhradní termín	5	2	1	16
	2. náhradní termín	3	2	1	16
2018	1. řádný termín	6	2	0	16
	2. řádný termín	3	2	1	16
	1. náhradní termín	4	2	0	16
	2. náhradní termín	4	2	1	16
2017	1. řádný termín	3	2	1	16
	2. řádný termín	3	2	2	16
	1. náhradní termín	5	2	2	16
	2. náhradní termín	3	2	1	16
2016	1. řádný termín	4	2	1	17
	Ilustrační	4	2	1	17
2015	1. řádný termín	4	2	1	17
	Ilustrační	5	2	0	17
Průměr		3,54	1,96	1,15	16,15
Průměrná četnost		21,90 %	12,14 %	7,14 %	41,19 %

Tabulka 2.6: Distribuce bodů za úlohu pro 4leté obory

4leté obory		Celkem bodů			Celkem
		Planimetrie	Rýsování planimetrie	Stereometrie	
2022	1. řádný termín	6	5	3	50
	2. řádný termín	11	5	6	50
	1. náhradní termín	6	6	7	50
	2. náhradní termín	9	5	4	50
2021	1. řádný termín	11	5	0	50
	2. řádný termín	11	6	6	50
	1. náhradní termín	9	5	4	50
	2. náhradní termín	8	6	2	50
2020	1. řádný termín	8	5	5	50
	1. náhradní termín	10	6	4	50
2019	1. řádný termín	8	3	2	50
	2. řádný termín	2	5	5	50
	1. náhradní termín	17	5	2	50
	2. náhradní termín	8	5	3	50
2018	1. řádný termín	15	5	0	50
	2. řádný termín	9	6	2	50
	1. náhradní termín	11	6	0	50
	2. náhradní termín	11	6	2	50
2017	1. řádný termín	7	3	2	50
	2. řádný termín	7	5	4	50
	1. náhradní termín	13	5	4	50
	2. náhradní termín	7	5	2	50
2016	1. řádný termín	11	5	2	50
	Ilustrační	10	5	2	50
2015	1. řádný termín	10	5	3	50
	Ilustrační	13	5	0	50
Průměr		9,54	5,12	2,92	50,00
Průměrná četnost		19,08 %	10,23 %	5,85 %	35,15 %

2.3 Zkoumání úloh

Pro tvorbu vlastní sbírky jsme se dívali na podkategorie úloh, hledali společné rysy a dělali si poznámky.

Zajímavé je, že se kostra testu opakuje, typy úloh jsou tedy napříč testy podobné. Můžete si povšimnout, že absolutní většina zkoušek pro 4leté obory obsahuje přesně 2 rýsovací úlohy.

Dále jsme pozorovali, že se některé úlohy objevují v jeden rok napříč několika obory, někdy všemi. Opakují se ale v testech které se píší ve stejný den, a tak není možné se o nich dozvědět před zkouškou a získat tak výhodu.

Obrázek 2.1: Tato úloha se v roce 2022 objevuje ve všech 3 oborech, a to v 1. náhradním termínu.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 16

Výsledný obrazec vytvoříme následujícím postupem:

1. Na vodorovné přímce sestrojíme několik stejně vzdálených bodů (černých puntíků).
2. Prvním černým puntíkem vedeme dvě různoběžné šikmé přímky. Druhým a každým dalším černým puntíkem vedeme rovnoběžky s oběma těmito přímkami.
3. Všechny nově vzniklé průsečky označíme černými puntíky a těmi vedeme vodorovné přímky.
4. Na spodní vodorovné přímce označíme všechny nově vzniklé průsečky bílými puntíky.

Výsledný obrazec

2 body

3 body

(CZVV)

16

max. 4 body

16.1 Výsledný obrazec obsahuje celkem 36 černých puntíků.
Určete počet všech vodorovných přímek v tomto obrazci.

16.2 Výsledný obrazec obsahuje celkem 49 vodorovných přímek.
Určete počet bílých puntíků na spodní vodorovné přímce tohoto obrazce.

16.3 Výsledný obrazec má na spodní vodorovné přímce celkem 64 bílých puntíků.
Určete počet všech černých puntíků v tomto obrazci.

2.4 Tvorba úloh vlastní sbírky

Pro vlastní sbírku jsme se rozhodli tvořit úlohy pro 8leté obory. Bylo to zčásti kvůli typu úloh které obsahují a zčásti kvůli tomu že sám studuji 8letý obor.

Úlohy jsme vytvářeli podle poznámek. Často jsou vysoce inspirované úlohami, které se v pravých zkouškách objevily.

Tvořené úlohy se liší od úloh CERMAT hlavně vzhledem, který je barevný, veselejší a přehlednější, a tím, že formát odpovědi tvořených úloh je otevřený. Student tak nemá na výběr z určitých možností a nemůže si tak tipovat.

Úlohy CERMAT mají často na výběr z odpovědí A-E, nejspíš proto že se pak dají jednodušeji opravovat.

Další rozdíl je využití geometrického zápisu, které CERMAT nevyužívá. Pro jistotu se před sbírkou vyskytuje přehled vysvětlující co která značka znamená.

Úlohy jsou tvořeny v programu GeoGebra. Z něj jsou exportovány do formátu PDF a vloženy do sbírky. Stereometrické úlohy jsou exportovány do formátu PNG, jelikož 3d GeoGebra nepodporuje ani PDF, ani jiné vektorové formáty.

Kapitola 3

Sbírka

Geometrický zápis

$\triangle ABC$	Trojúhelník ABC
$\square EFGH$	Čtverec EFGH
$\square IJKL$	Obdélník IJKL
$ MN $	Vzdálenost mezi body M a N
\overline{OP}	Úsečka OP
\overrightarrow{QR}	Polopřímka QR
\overleftrightarrow{ST}	Přímka určená body ST
\overleftarrow{u}	Přímka u
$ V\overleftrightarrow{W} $	Vzdálenost mezi bodem V a přímkou W
$\angle \alpha$	Úhel α
$x \perp \overline{YZ}$	Přímka x je kolmá na úsečku YZ
$a \parallel b$	Přímka a je rovnoběžná s přímkou b
$ CD = EF $	Vzdálenost mezi body A a B se rovná vzdálenosti mezi body C a D
$ GH > IJ $	Vzdálenost mezi body G a H je větší než vzdálenosti mezi body I a J

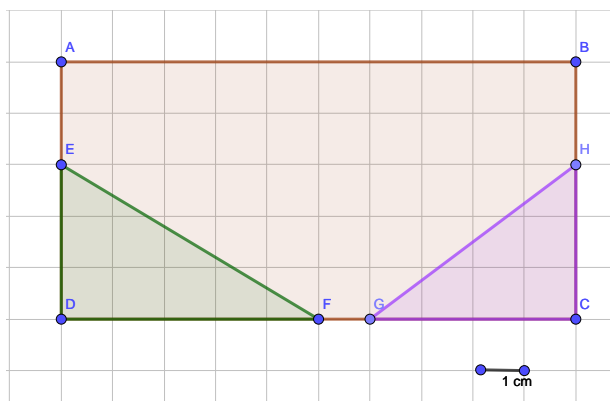
3.1 8leté obory

3.1.1 Planimetrie

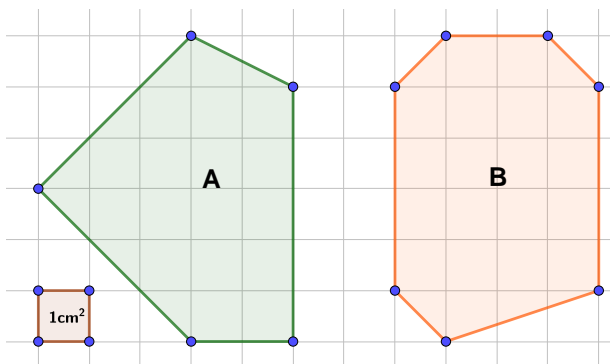
Čtvercové síť

Úlohy

1. Určete obsah $\triangle DEF$, $\triangle GCH$ a $\square ABCD$

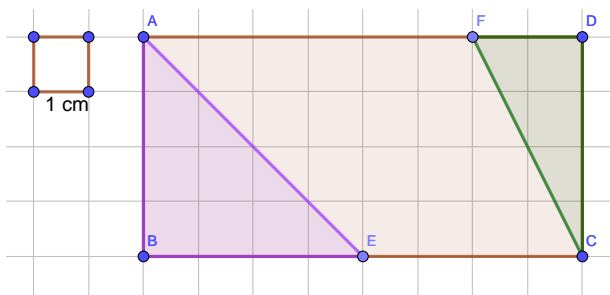


2. Vypočítejte obsah tvaru A a B

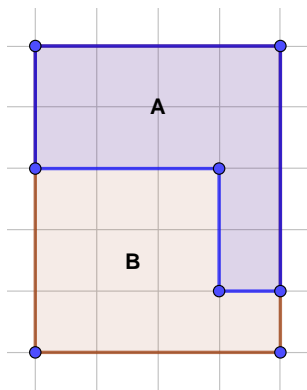


3. Odpovězte na následující ano/ne otázky:

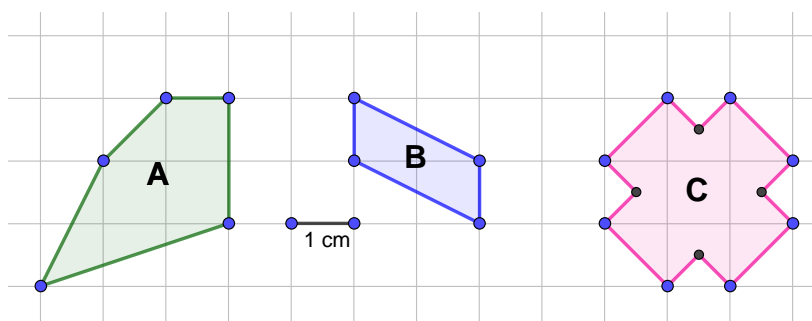
- Je obsah $\triangle ABE$ 2krát větší než obsah $\triangle FDC$?
- Je součet obsahů $\triangle ABE$ a $\triangle FDC$ větší než polovina obsahu $\square ABCD$?
- Je obsah $\square ABCD$ 4krát větší než obsah $\triangle ABE$?



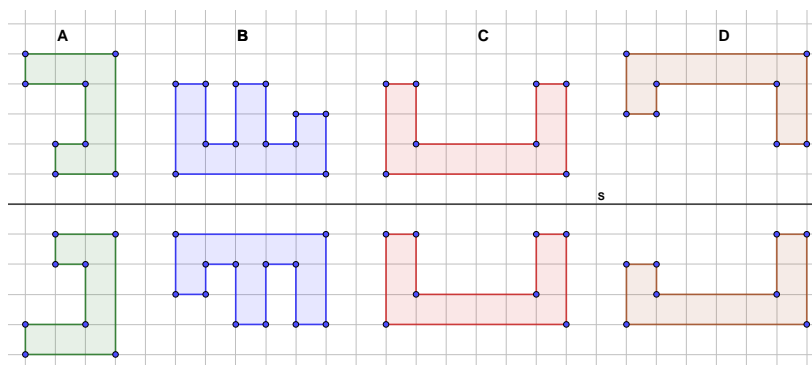
4. Určete, který ze tvarů má větší obsah a o kolik cm^2 a který má delší obvod a o kolik cm. Obsah jednoho čtverečku je 1 cm^2



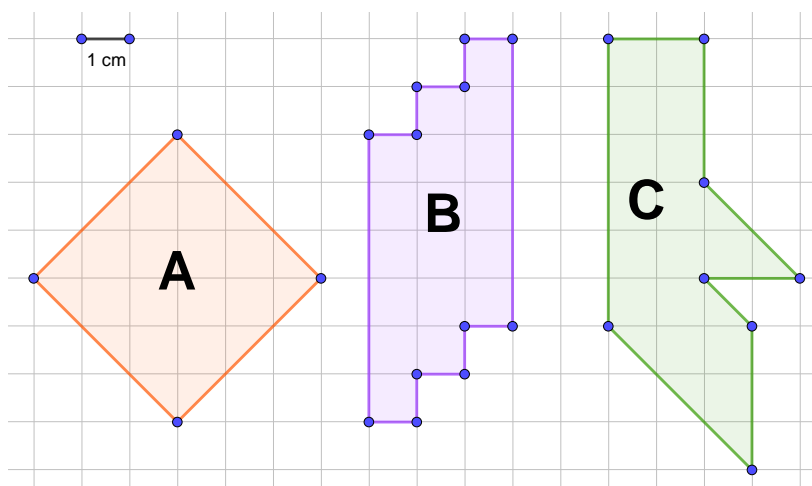
5. Určete obsah tvarů A, B a C.



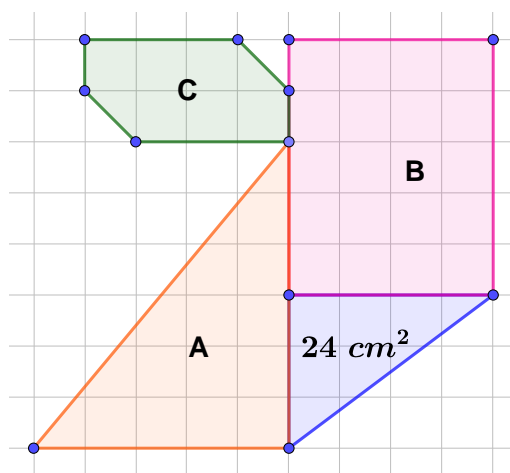
6. Které z následujících tvarů jsou osově souměrné podle osy s?



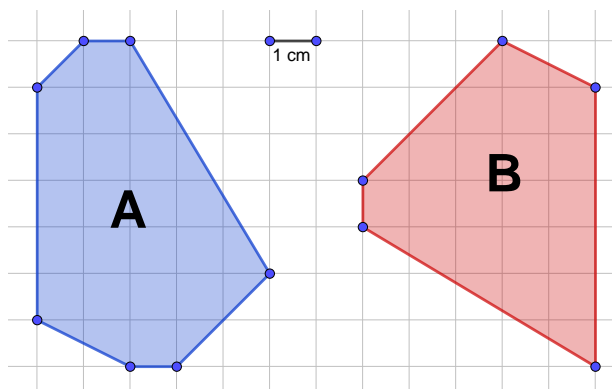
7. Určete obsahy všech tvarů. Který z nich má největší obsah?



8. Určete obsahy všech tvarů, jestliže znáte obsah trojúhelníku.

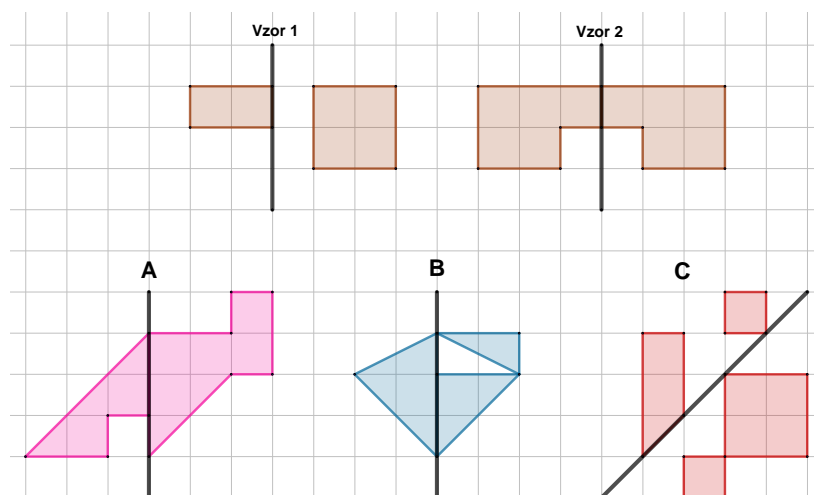


9. Určete, který ze tvarů má větší obvod a o kolik cm, a který má větší obsah a o kolik cm^2 .



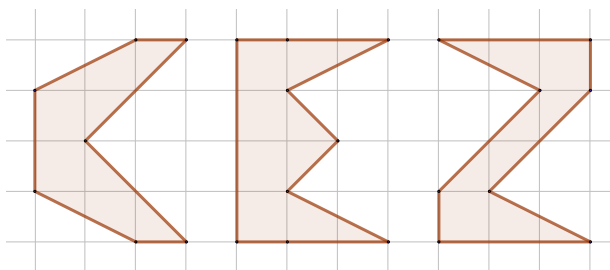
10. Obrazce A, B a C obtiskněte podle vyznačené úsečky z jedné strany na druhou, a pak opačně. Tak vznikne nový obrazec, který bude osově symetrický podle vyznačené úsečky. (viz. Vzor 1, po obtisknutí Vzor 2)

Určete obsahy jednotlivých obrazců. Jeden čtvereček čtvercové sítě má obsah 1 cm^2 .

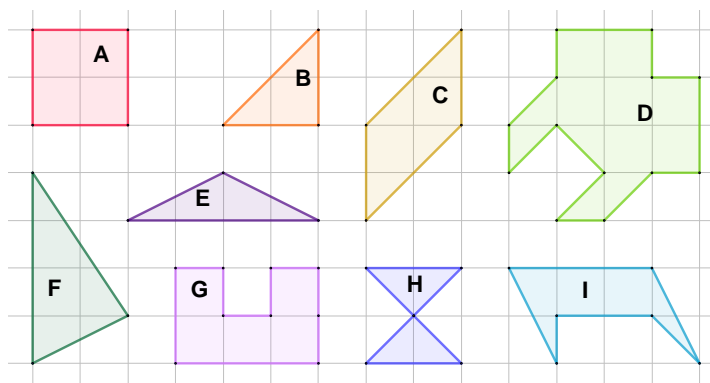


11. Na následující příloze jsou 3 písmena, C, E a Z. Určete:

- součet obsahů všech písmen,
- jestli je větší obvod písmene C nebo Z.



12. Vypište všechny tvary, které jsou osově souměrné podle libovolné osy. Určete také součet obsahů tvarů C, H, F a G.



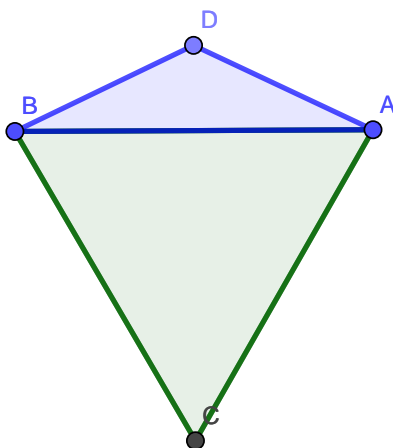
Řešení

1. Obsah $\triangle DEF = 7,5 \text{ cm}^2$, $\triangle GCH = 6 \text{ cm}^2$ a $\square ABCD = 50 \text{ cm}^2$
2. Obsah $A = 20 \text{ cm}^2$, $B = 21 \text{ cm}^2$
3. Ano, ne, ano
4. Oba mají stejný obsah, rozdíl je tedy 0 cm^2 . Tvar A má obvod delší o 2 cm.
5. Obsah $A = 5 \text{ cm}^2$, $B = 2 \text{ cm}^2$, $C = 6 \text{ cm}^2$
6. Pouze tvar A.
7. Obsah $A = 18 \text{ cm}^2$, $B = 18 \text{ cm}^2$, $C = 19 \text{ cm}^2$. Největší obsah má tvar C.
8. Obsah $A = 72 \text{ cm}^2$, $B = 80 \text{ cm}^2$, $C = 28 \text{ cm}^2$.
9. Oba tvary mají stejný obvod, rozdíl je tedy 0 cm. Obsah tvaru A je větší o 2 cm^2 .
10. Obsah $A = 15,5 \text{ cm}^2$, $B = 8 \text{ cm}^2$, $C = 15 \text{ cm}^2$
11. Součet obsahů je 25 cm^2 . Obvod písmene Z je větší než obvod písmene C.
12. Tvary A, B, D, E, G a I jsou souměrné podle aspoň 1 osy. Součet obsahů je 15 cm^2

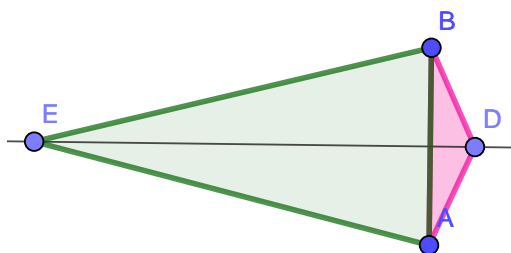
Obvod, obsah a délky

Úlohy

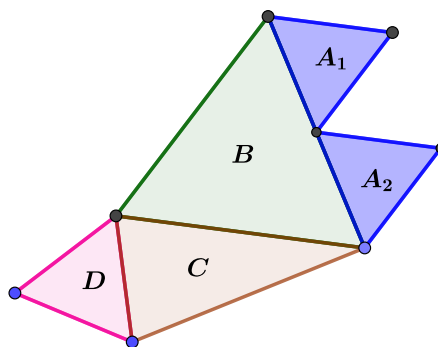
1. $\triangle ABC$ je rovnostranný a $\triangle ABD$ je rovnoramenný. $|BD| = 4$ cm. Obvod $\triangle ABD$ je 15 cm. Jaký je obvod tvaru ADBC?



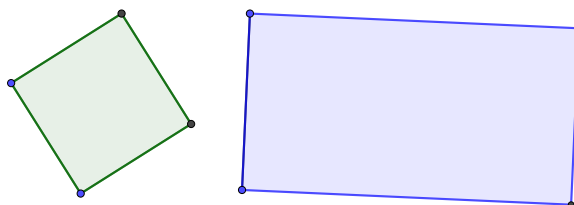
2. $\triangle ABD$ a $\triangle ABE$ jsou rovnoramenné. $|AB| = 4$ cm. $|AD| = 3$ cm. Obvod $\triangle ABE$ je 2krát delší než obvod $\triangle ABD$. Jaký je obvod tvaru ADBE?



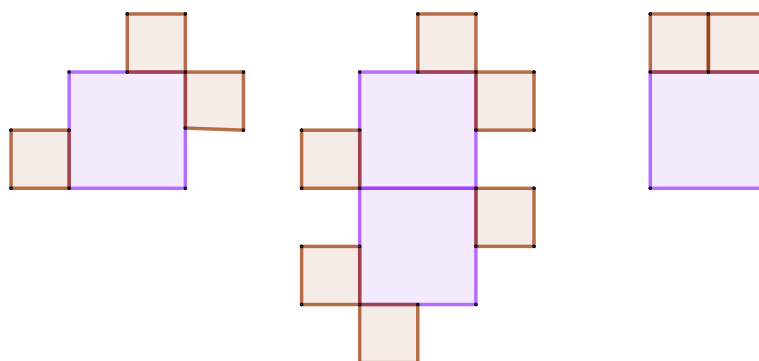
3. $\triangle A_1$ a $\triangle A_2$ jsou navzájem shodné. $\triangle A_1$, $\triangle A_2$, $\triangle B$, $\triangle C$ jsou rovnostranné. $\triangle C$ je rovnoramenný. Obvod $\triangle A_1$ je 18 cm. Obvod $\triangle D$ je o 3 cm delší než obvod $\triangle A_1$. Určete obvod $\triangle C$.



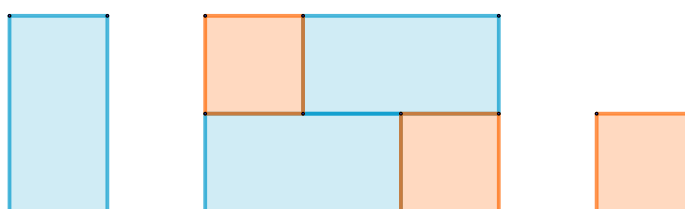
4. Z provázku byl sestroyen čtverec tak, že byl natažen po obvodu. Jeho obsah je 49 cm^2 . Poté byl tento provázek rozmotán, a byl z něj vytvořen obdélník o obsahu 45 cm^2 . Jaké jsou délky jeho stran? (Obrázek je pouze ilustrační)



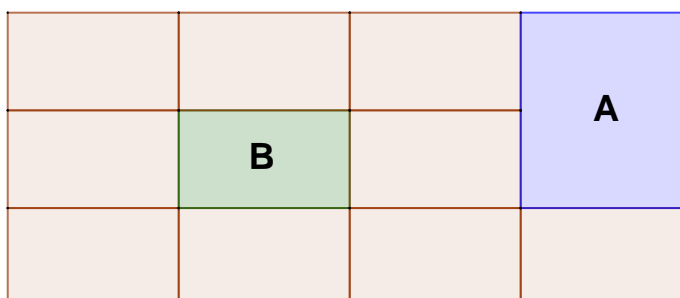
5. Tvar vlevo má obvod 182 cm. Skládá se z malých a velkých čtverců. 4 malé čtverce se vejdou do jednoho velkého. Určete obvody tvaru uprostřed a vpravo.



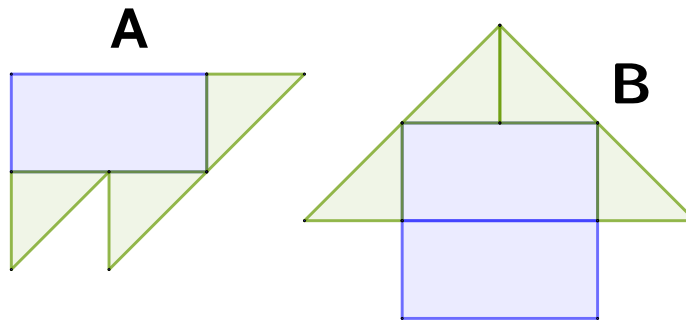
6. Obvod malého modrého obdélníku je 72 cm. Jeho delší strana je 2krát delší než jeho kratší strana. Tvar vpravo je čtverec. Určete obsah prostředního tvaru.



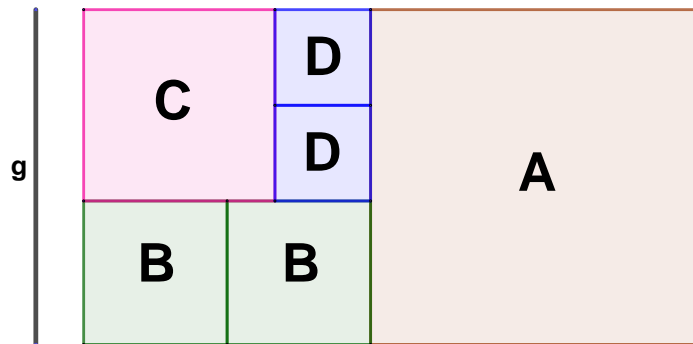
7. Obvod $\square A$ je 34 cm. Obsah $\square B$ je 35 cm^2 . Jaké jsou délky stran $\square A$?



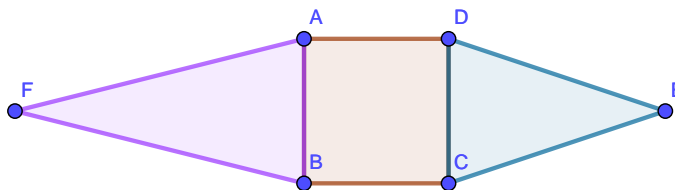
8. Zelené \triangle jsou rovnostranné a pravoúhlé. Obvod tvaru A je 77 cm, obvod tvaru B je 82 cm. Jaká je délka základny zeleného \triangle ?



9. Délka g je 14 cm. Jaký je obsah čtverce D?



10. Obsah $\square ABCD$ je 64 cm. Obvod $\triangle ABF$ je 2krát delší než obvod $\square ABCD$. Součet délek obou ramen $\triangle ABF$ se rovná obvodu $\triangle CDE$. Jaký je obvod tvaru EDAFBC?



Řešení

1. Obvod tvaru ADBC je 22 cm.
2. Obvod tvaru ADBE je 22 cm.
3. Obvod $\triangle C$ je 31 cm.
4. Délky stran jsou 9 cm a 5 cm.
5. Obvod tvaru uprostřed je 312 cm. Obvod tvaru vpravo je 130 cm.
6. Obsah prostředního tvaru je 216 cm^2
7. Délky stran jsou 10 cm a 7 cm.
8. Délka základny zeleného \triangle je 5 cm.
9. Obsah $\square D$ je 4 cm^2
10. Obvod tvaru EDAFBC je 120 cm?

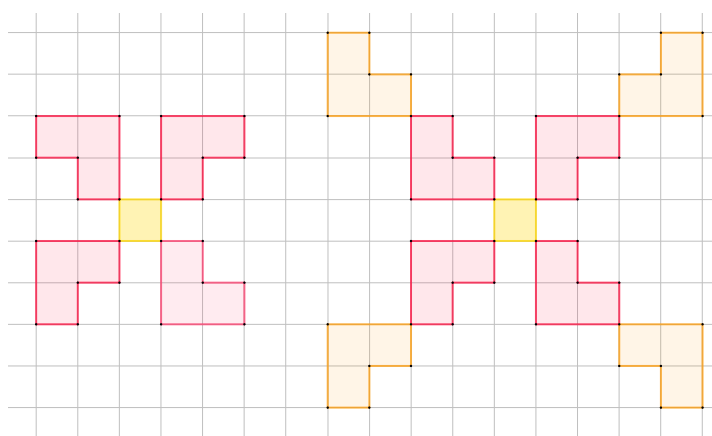
Rekurzivní úlohy

Úlohy zaměřené na opakování jevů.

Úlohy

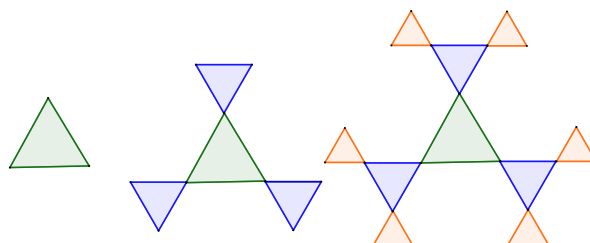
1. Na obrázku je vyobrazen květ rostliny, který má 4 okvětní lístky. Každý den se každý okvětní lístek prodlouží o jednu sekci. Vlevo je květ v první den, vpravo druhý den. Jedna sekce okvětního lístku má povrch 4 cm^2 .

Kolik bude mít květ okvětních lístků den 15.? Kolik budou mít každý sekci? Jaký bude celkový povrch lístků? (Do tohoto součtu nepočítejte střed květu)



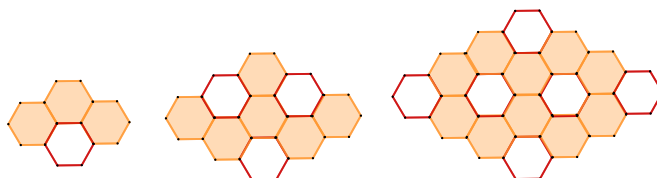
2. Na obrázku je krystal ve 3 fázích růstu, a to v prvním, druhém a třetím roce. Každý rok na konce krystalu (vrcholy \triangle) které jsou „volné“ přibude další \triangle . Ten bude mít poloviční povrch než \triangle , ze kterého roste.

Z kolika \triangle se bude krystal skládat v den 8? Pokud má krystal první rok povrch o velikosti 32 cm^2 , jaký bude mít povrch v 6. roce?



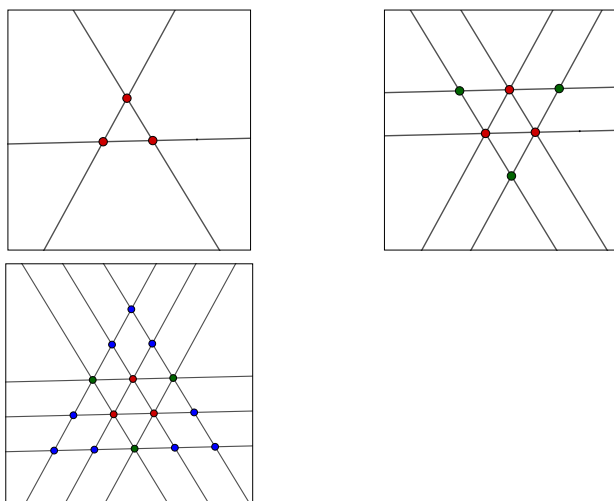
3. Včelky budují plástev. Staví jí tak, že každou hodinu přidají jedno patro, ale pouze směrem nahoru. Na obrázku je postup jejich stavby v hodině 1., 2., a 3. zleva doprava. Do většiny komůrek je uložen med (vyznačen oranžově), některé jsou ale ponechané prázdné. Tyto prázdné komůrky jsou vždy odděleny ze všech stran medem.

Kolik komůrek bude plástev mít ve 12. hodině? Kolik prázdných komůrek bude mít v hodině 6.?

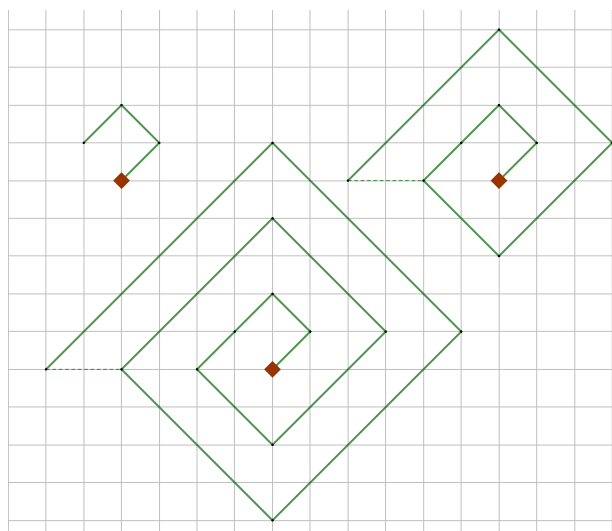


4. Na prvním obrázku jsou 3 přímky, které se všechny navzájem protínají. Do dalšího, druhého, obrázku je na každý průsečík narysována přímka, která je \perp s přímkou která průsečík netvoří. Tímto systémem se pokračuje dál.

Kolik průsečíků vznikne na dalším, 4., obrázku?

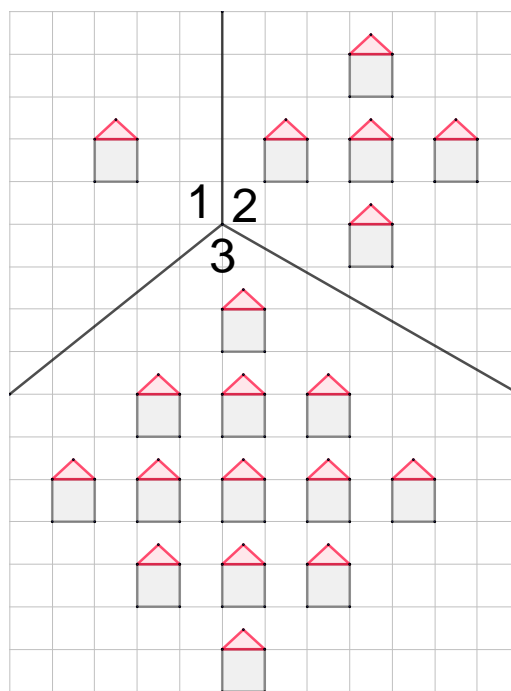


5. Na obrázku je vyobrazen had. Každý týden povyroste o jedno zatočení kolem svého těla. Vlevo nahoře je had v první týden, vpravo nahoře v týden druhý a uprostřed dole v týden třetí. Pokud je had v prvním týdnu dlouhý 6 cm, jak dlouhý bude v týdnu 4. a 5.?



6. Na obrázku je vesnice, která se každý rok rozroste. Domy vždy přibudou tak, že všechny domy z předchozího roku budou mít sousedy ze všech světových stran.

Kolik bude domů mezi domem prostředním a nejsevernějším domem v roce 100? (prostřední a nejsevernější dům nepočítejte) Z kolika domů se bude vesnice skládat ve 20. rok?



Řešení

1. 15. den bude mít stále 4 okvětní lístky. Každý bude mít 15 sekcí. Celkový povrch bude 240 cm^2 .
2. V den 8. se bude skládat z 384 lístků. Povrch v den 6. bude 3008 cm^2
3. Ve 12. hodině bude mít 102 komůrek. V 6. hodině bude mít 12 prázdných komůrek.
4. Vznikne 30 nových průsečíků.
5. V 4. týdnu bude měřit 123 cm, v 5. 200 cm.
6. Bude mezi nimi 98 domů. Ve 20. rok se bude skládat z 761 domů.

3.1.2 Rýsování

Podle bodů

Úlohy

1. Narýsujte $\square ABED$ tak, aby v něm ležel bod C. Dále sestrojte $\triangle DCE$.

A

B

C

2. Narýsujte $\square ACDE$ tak, aby na \overleftrightarrow{ED} ležel bod B.



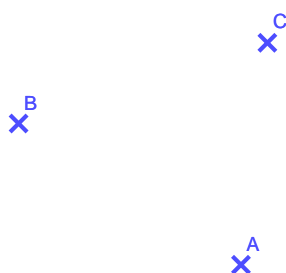
3. Narýsujte $\square ADEF$. Bod D leží na \overline{AB} a bod E leží na \overline{DC} .
 $\angle ABD$ tedy musí být pravý.

\times^A

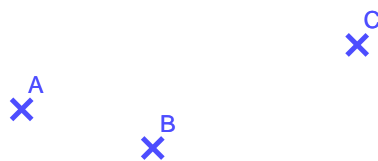
\times^C

\times^B

4. Narýsujte $\square BCDE$ tak, aby se v něm nenacházel bod A. Následovně narýsujte bod A' , který je osově souměrný bodu A dle \overline{BC} . Poté sestrojte $\triangle AA'B$.



5. Narýsujte $\square ABDE$ tak, aby $|\overline{BC}| = |\overline{CD}|$.

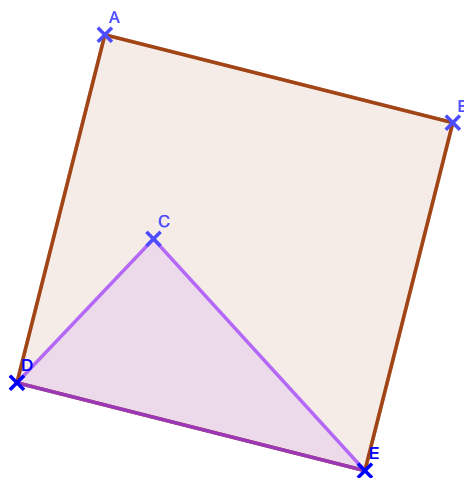


6. Narýsujte $\square BCDF$ tak, aby $|\overline{AB}| = |\overline{AD}|$. Sestrojte všechny možnosti.

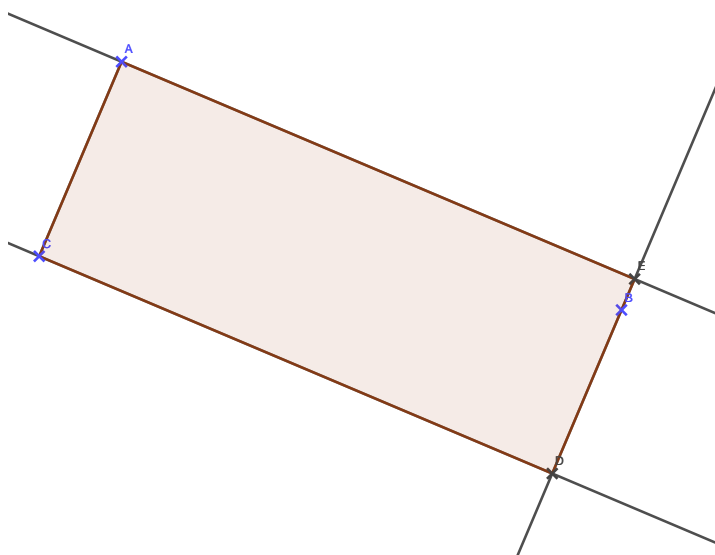


Řešení

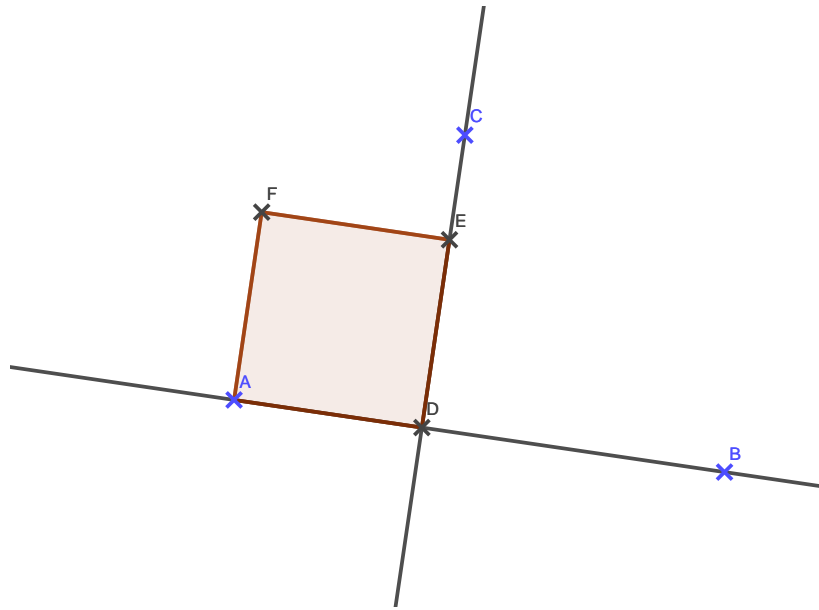
1.



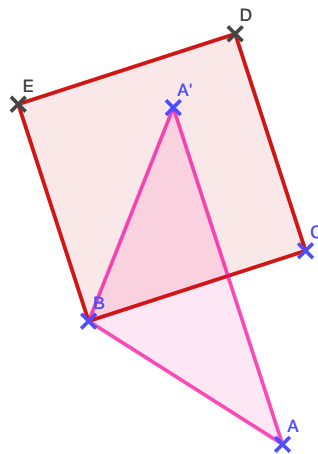
2.



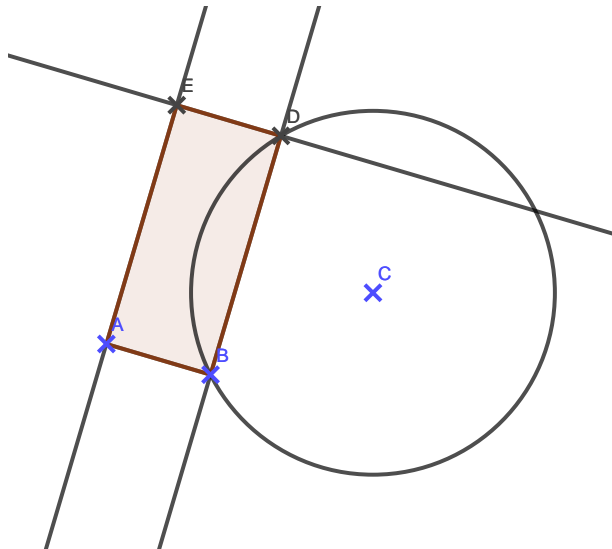
3.



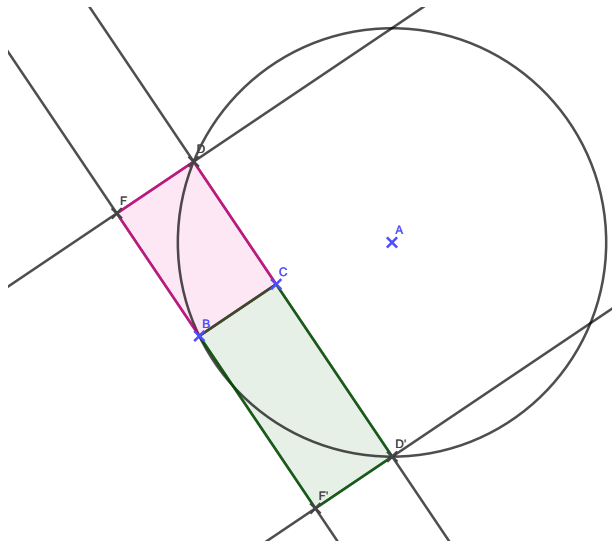
4.



5.



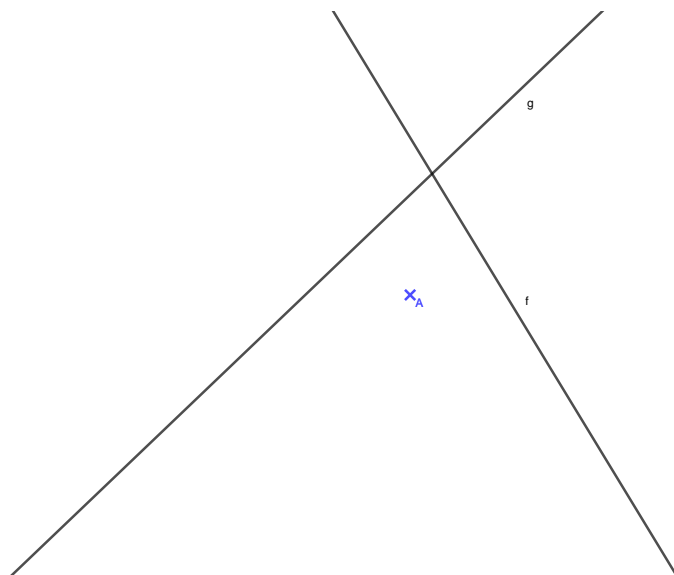
6.



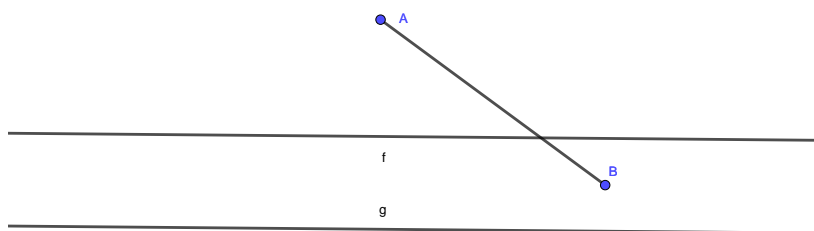
Podle bodů a čar

Úlohy

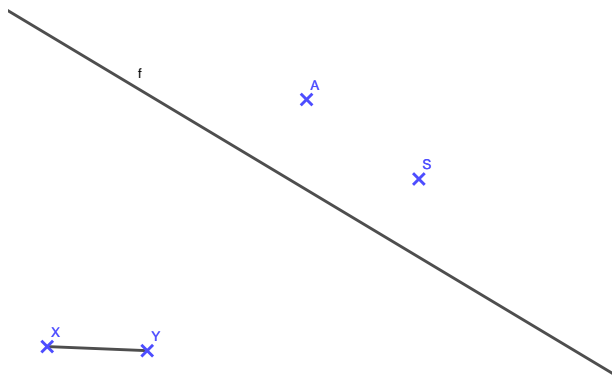
1. Narýsujte rovnoramenný $\triangle ABC$, jehož základna leží na \overleftrightarrow{g} .
Platí, že $|\overleftrightarrow{f} A| = |\overleftrightarrow{f} B|$.



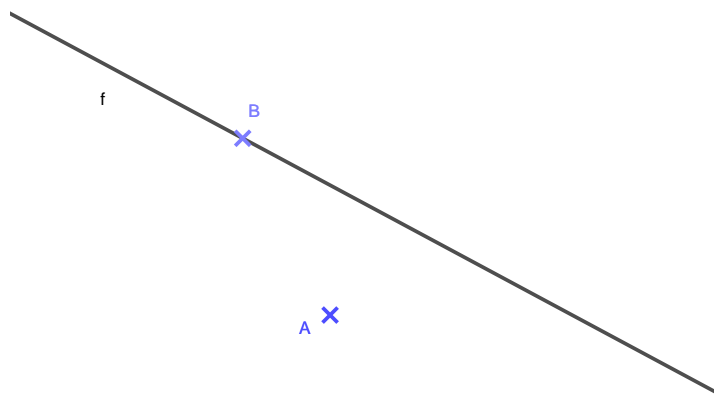
2. Narýsujte $\square ABCD$ tak, aby bod C ležel na \overleftrightarrow{g} a bod D na \overleftrightarrow{f} .



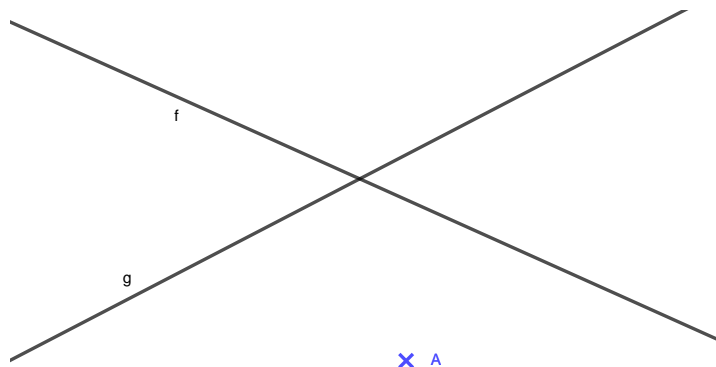
3. Narýsujte rovnoramenný $\triangle ABC$, jehož základna leží na \overleftrightarrow{f} . Platí $|\overline{XY}| = |\overline{SB}|$.



4. Narýsujte rovnoramenný $\triangle ABC$, jehož základna leží na \overleftrightarrow{f} . Následně vytvořte rovnostranný $\triangle CDE$ tak, aby $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ a bod E nenáležel $\triangle ABC$.



5. Sestrojte $\square ABCD$ tak, aby bod D ležel na jedné z přímek a aby strana B byla kolmá na druhou. Narýsujte všechny možnosti.

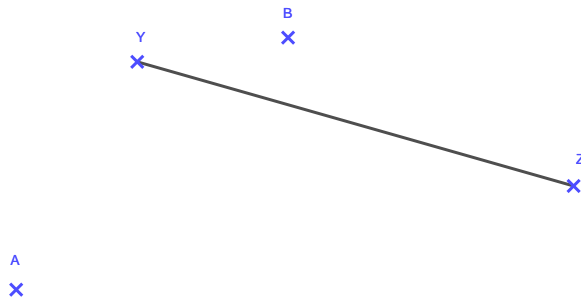


6. Narýsujte $\square ABCD$ tak, aby strana b ležela na \overrightarrow{XY} , $|\overrightarrow{XYA}| = |AZ|$ a $|BC| = |BZ|$.

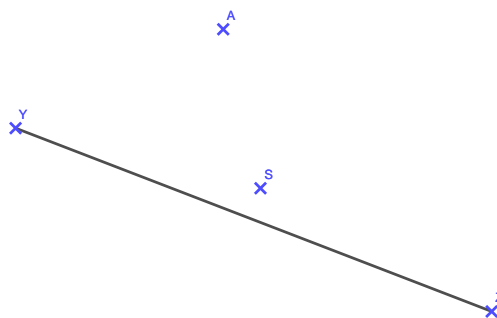
\times^Z



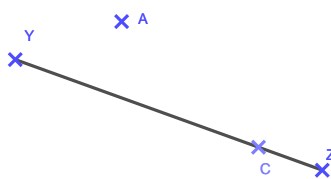
7. Narýsujte $\square ABCD$ tak, aby středem \overline{YZ} byl zároveň středem \overline{BC} .



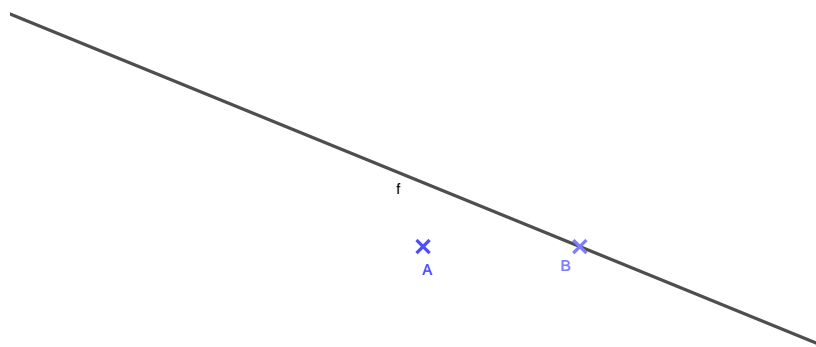
8. Narýsujte rovnoramenný $\triangle ABC$ tak, aby bod B ležel na \overline{ZY} , $|SB| = |SA|$. Základnou je strana BC.



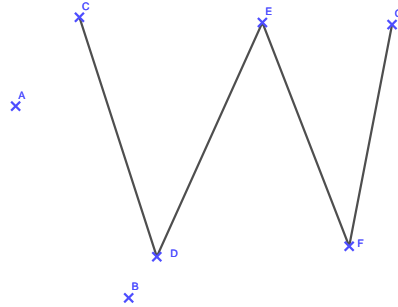
9. Narýsujte pravoúhlý $\triangle ABC$ aby bod B ležel na \overline{ZY} a strana AC byla jeho nejdelší stranou.
Dále narýsujte $\triangle ACD$ jehož pravý úhel leží u bodu A aby platilo $|AB| = |AD|$.
Jako poslední narýsujte rovnostranný $\triangle CED$ tak, aby $|ED| > |EA|$.



10. Narýsujte $\square ABCD$ kterým prochází \overleftrightarrow{f} .
Dále sestrojte $\triangle EDF$ tak, aby se bod E nacházel na průsečíku \overleftrightarrow{f} a \overleftrightarrow{CD} , bod F se nacházel na \overleftrightarrow{AC} a $|AF| = |AC|$.

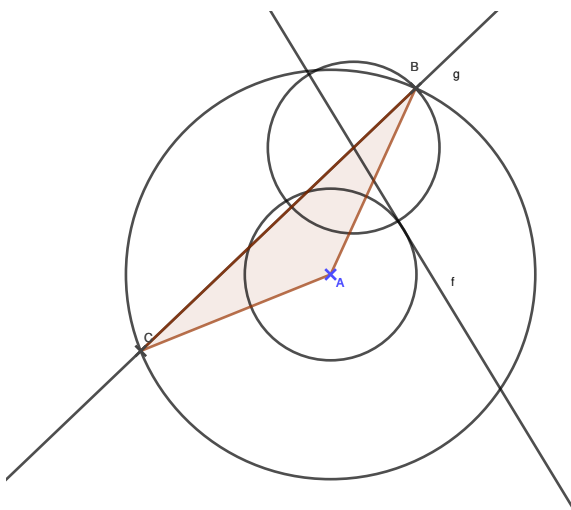


11. Narýsujte $\triangle ABH$ aby $|BH| = |ED|$, $|AH| < |EF|$ a aby se bod H nacházel na lomené čáře CDEFG.

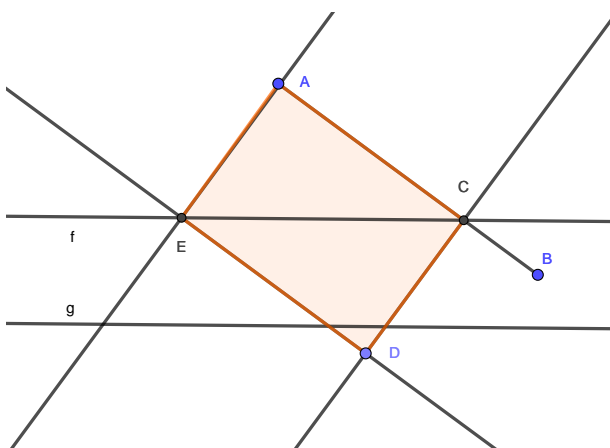


Řešení

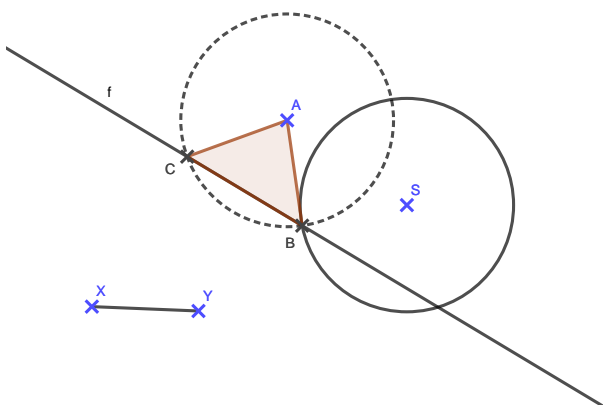
1.



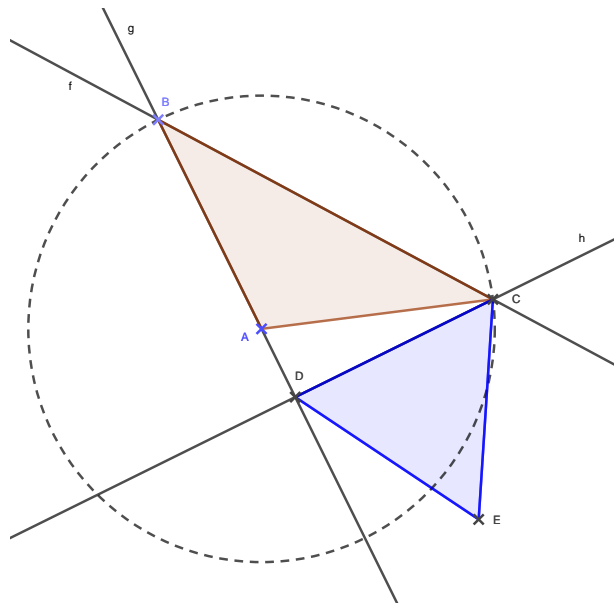
2.



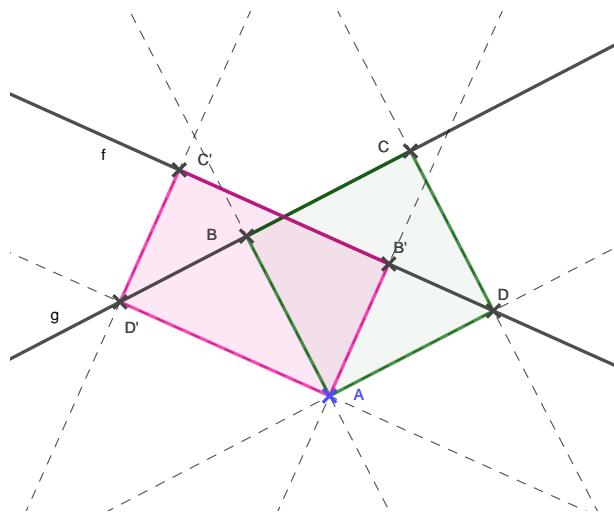
3.



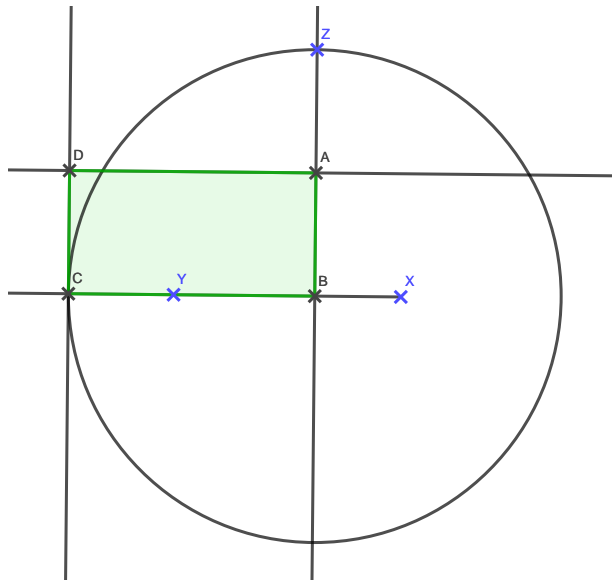
4.



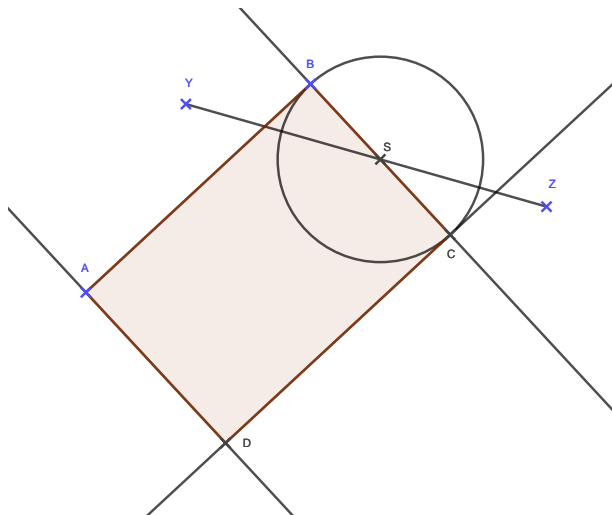
5.



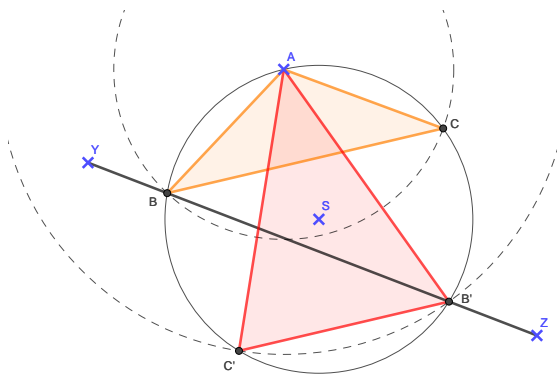
6.



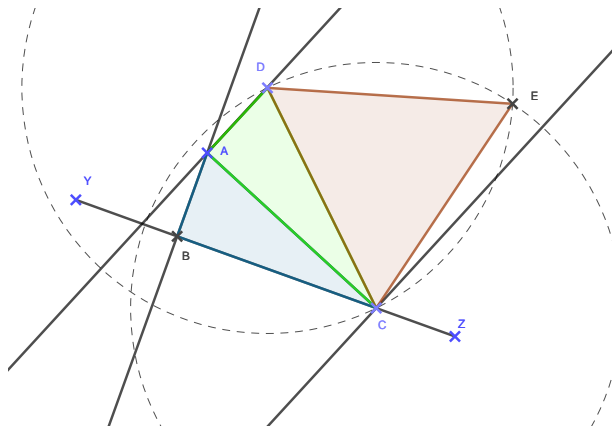
7.



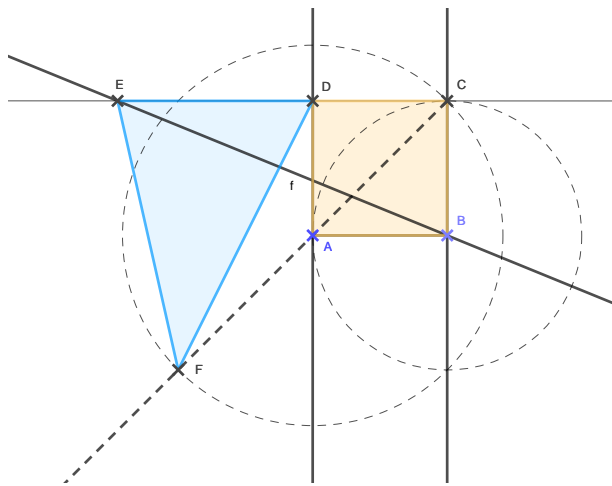
8.



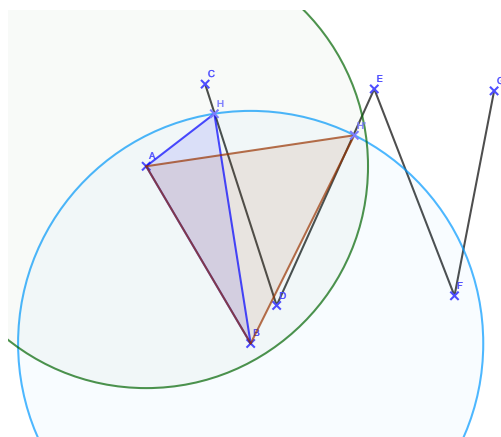
9.



10.



11.

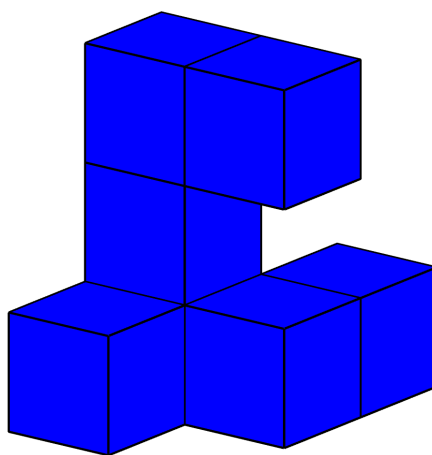


3.1.3 Stereometrie

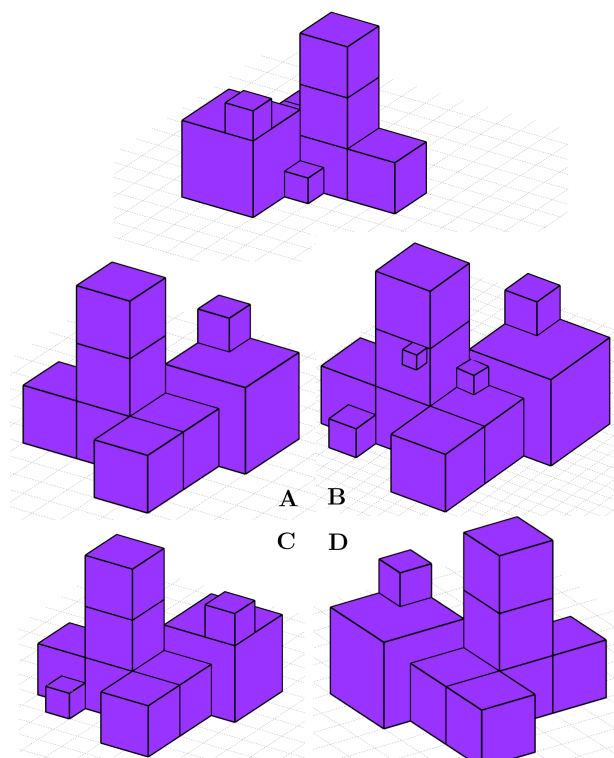
Kostky

Úlohy

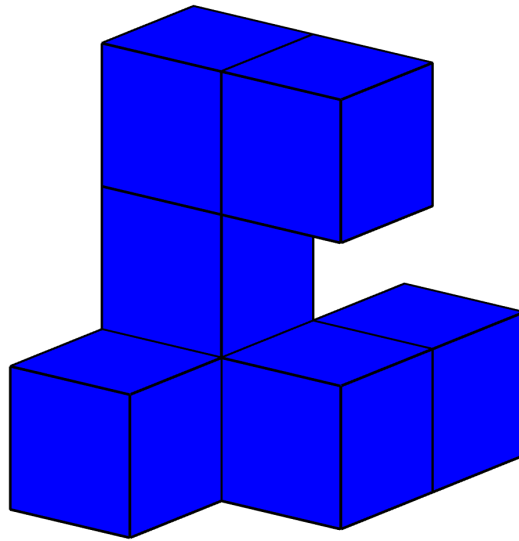
1. Víte že se kostky dotýkají pouze stěnami. Spočítejte
 - počet kostek které jsou vidět,
 - počet kostek,
 - počet stěn kostek, které jsou na povrch útvaru,
 - objem útvaru, pokud je objem jedné kostky 4 cm^3 .



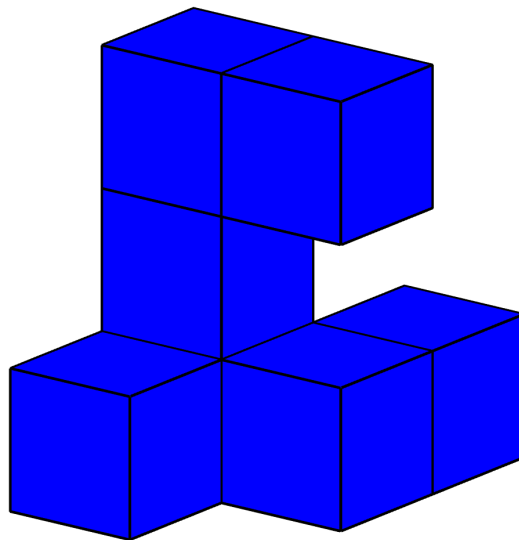
2. Na obrázku vidíte stavbu složenou z krychlí. Jak může vypadat z druhé strany? Vyberte všechny možnosti.



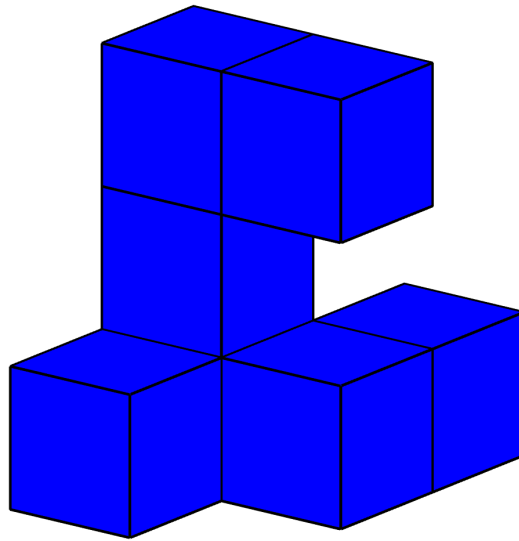
3.



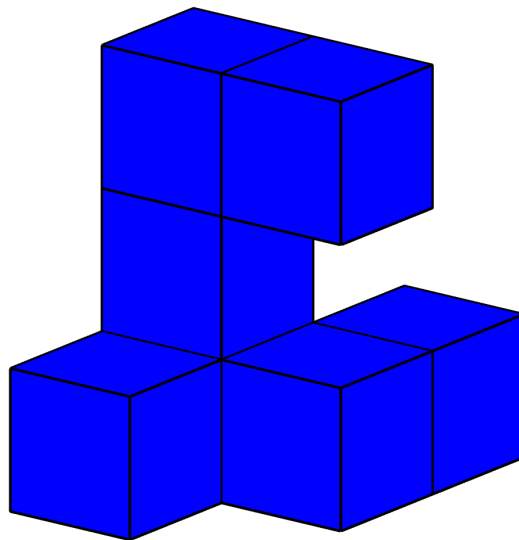
4.



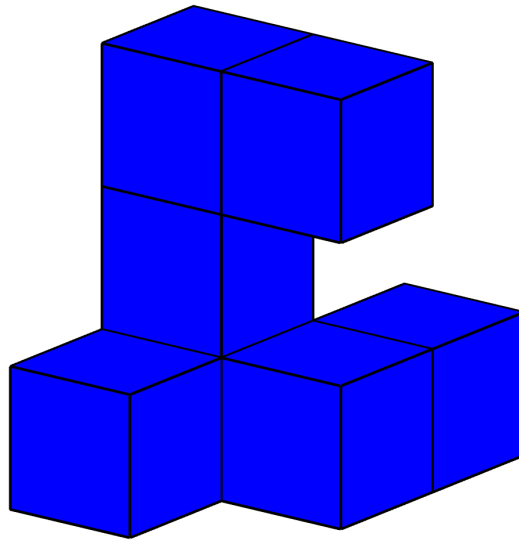
5.



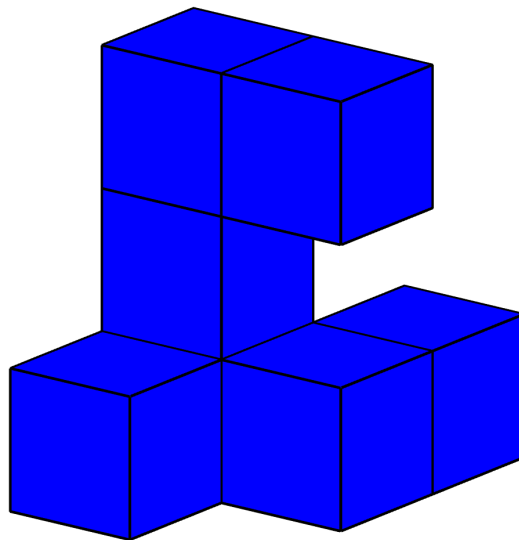
6.



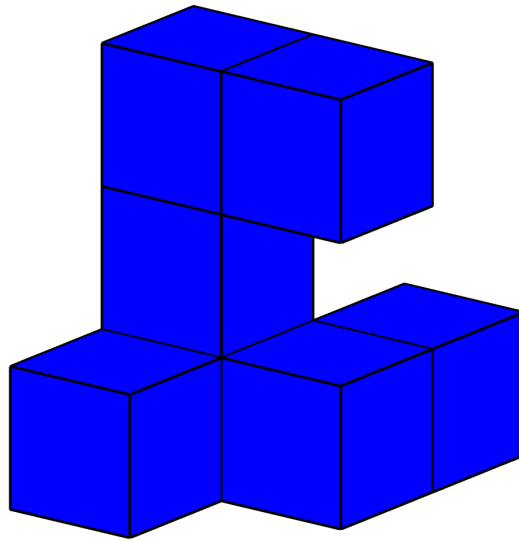
7.



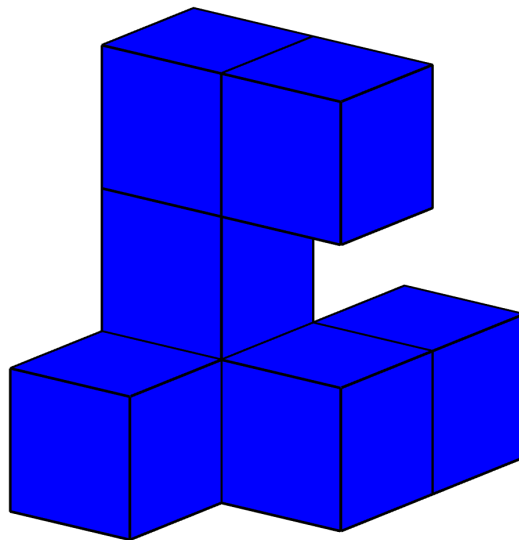
8.



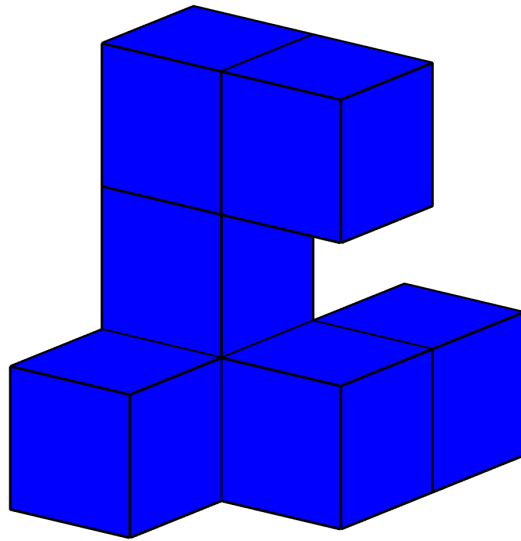
9.



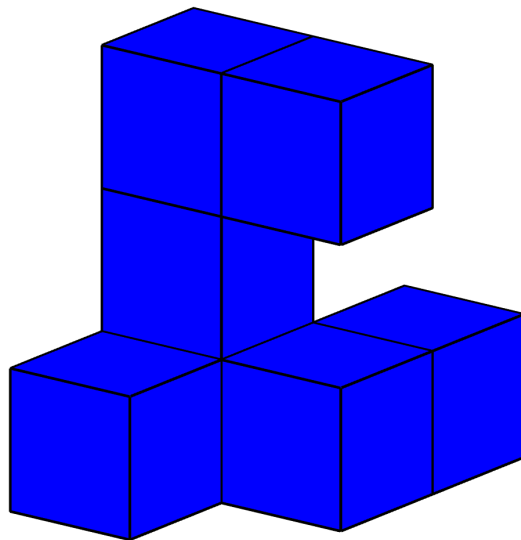
10.



11.



12.



Řešení

1. Kostek je vidět 6. Pokud víme že se kostky dotýkají, je jich 7. Na povrchu útvaru je 30 stěn. Objem je 28 cm^3 .
2. Může vypadat jako A nebo B.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.
- 11.
- 12.

Závěr

Vytvořil jsem sbírku planimetrických a stereometrických úloh, která může pomoci k přípravě na zkoušky pro 8leté studium nebo může být využita pedagogy, kteří své studenty chtějí na zkoušku připravit.

Snažil jsem se tématem a jednotlivými úlohami co nejvíce napodobit úlohy, které se objevují v jednotné zkoušce. A myslím, že jsem v tomto úspěš.

Při tvorbě sbírky jsem zjistil, jaké to je vytvářet sbírky, které celý svůj studentský život používám.

Bibliografie a další zdroje

- [1] Polák Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1972.
- [2] Zákony pro lidi. *Zákon č. 561/2004 Sb.* [online]. 2004. URL: <https://www.zakonyprolidi.cz/cs/2004-561#p80-2>.
- [3] Calda Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU*. Sv. 1. Praha 4: Prometheus, 2008. ISBN: 978-80-7196-020-1.
- [4] Calda Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU*. Sv. 2. Praha 4: Prometheus, 2008. ISBN: 978-80-7196-057-7.
- [5] Calda Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU*. Sv. 3. Praha 4: Prometheus, 2008. ISBN: 978-80-7196-109-3.
- [6] Vondra Jan et al. *Matematika pro střední školy*. Brno: Didaktis, 2013. ISBN: 978-80-7358-211-1.
- [7] Liška Marek, Valenta Tomáš a Král Lukáš. *Matika pro spolužáky. Planimetrie*. Hradec Králové: ProSpolužáky.cz, 2017. ISBN: 978-80-906702-0-4.
- [8] Liška Marek, Valenta Tomáš a Král Lukáš. *Matika pro spolužáky. Planimetrie*. pracovní sešit. Hradec Králové: ProSpolužáky.cz, 2017. ISBN: 978-80-906702-0-4.
- [9] Liška Marek, Valenta Tomáš a Král Lukáš. *Matika pro spolužáky. Stereometrie*. pracovní sešit. Hradec Králové: ProSpolužáky.cz, 2017. ISBN: 978-80-88255-10-9.
- [10] Liška Marek, Valenta Tomáš a Král Lukáš. *Matika pro spolužáky. Stereometrie*. pracovní sešit. Hradec Králové: ProSpolužáky.cz, 2017. ISBN: 978-80-88255-11-6.
- [11] Jiří Zíka. *Souhrnná závěrečná zpráva*. [online]. 2017. URL: https://data.cermat.cz/files/files/JPZ/JPZ2017-zaverecna_zprava.pdf.
- [12] Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. *CERMAT*. [online]. 2023. URL: <https://maturita.cermat.cz/>, <https://zkouska.cermat.cz/>, <https://prijimacky.cermat.cz/>.
- [13] Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. *Jednotná přijímací zkouška 2023*. [online]. 2023. URL: <https://prijimacky.cermat.cz/menu/jednotna-prijimaci-zkouska>.
- [14] Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. *Testová zadání v PDF*. [online]. 2023. URL: <https://prijimacky.cermat.cz/menu/testova-zadani-k-procvicovani/testova-zadani-v-pdf>.