
所有不超过二/三元的逻辑联结词构成最小完全集求法

问题难点：三元联结词的组合情况太多，无法计算

解决思路：缩小搜索空间

Post's Functional Completeness Theorem

适用范围：2 值(True/False)真值函数

作用：判断一个真值函数/逻辑联结词集合是否是完全集

定理：提出了 5 条规则 $\{T_0, T_1, L, M, S\}$ ，每个规则对应着一个逻辑逻辑联结词的集合。对于一个逻辑联结词的集合 S ，如果 S 不是上述 5 个集合中任一集合的子集，那么 S 就是一个完全集。

换种表达方式：上述 5 条规则 $\{T_0, T_1, L, M, S\}$ ，如果对于每条规则，联结词集合 S 中都至少有一个元素不满足，则 S 是一个完全集。

5 条规则

设一个逻辑联结词有 n 个命题变元 $\{x_1, \dots, x_n\}$, 取值为 $\{y_1, \dots, y_{2^n}\}$

虚拟变元:

在其他变元取值一定的情况下, 某个变元无论取值为 T 或 F, 对结果 y 都没有影响, 则称该变元为虚拟变元。

规则:

$$T_0: y_1 = 0$$

$$T_1: y_{2^n} = 0$$

L : 去除虚拟变元之后, 满足下面两个条件中任意一个

1. 当 y 为 T 时, 对应的命题变元为 T 的个数为奇数, 当 y 为 F 时, 对应的命题变元为 T 的个数为偶数。
2. 当 y 为 T 时, 对应的命题变元为 T 的个数为偶数, 当 y 为 F 时, 对应的命题变元为 T 的个数为奇数。

M :

对于 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 的任意一种取值 $\{x_1', \dots, x_n'\}$, 其结果为 y_i 。

将 $\{x_1', \dots, x_n'\}$ 中任一取值为 F 的 x_i' 变为 T, 这时对应的结果为 y_j 。

始终满足: $y_j \geq y_i$ 。

S : 始终满足: $f(x_1, \dots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \dots, \neg x_n)$

缩小搜索空间

定义 5 个集合:

$\{\neg T_0\}, \{\neg T_1\}, \{\neg L\}, \{\neg M\}, \{\neg S\}$ 分别为不满足 T_0, T_1, L, M, S 规则的逻辑联结词集合，相互之间可以有交集。

完全集的定义:

从集合 $\{\neg T_0\}, \{\neg T_1\}, \{\neg L\}, \{\neg M\}, \{\neg S\}$ 中分别抽出至少一个元素构成的集合

定义逻辑联结词集合 C :

从集合 $\{\neg T_0\}, \{\neg T_1\}, \{\neg L\}, \{\neg M\}, \{\neg S\}$ 中分别抽取一个元素组成的集合。

完全集 = 所有 $\{C$ 与 C 的所有父集}

最小完全集 $\subset \{C\}$

搜索空间: 所有的集合 C

暴力搜索法

遍历所有的集合C(可重复)，共 $78 * 78 * 208 * 189 * 192 \approx 450$ 亿

每次遍历，执行以下操作：

1. 对集合C进行去重
2. 根据去重后集合中元素个数存入 1,2,3,4,~~5~~相应的文件中

构造最小完全集集合L，并依次遍历文件 1,2,3,4:

1. 对文件中元素进行去重
2. 将子集不在集合L中的元素加入到集合L中

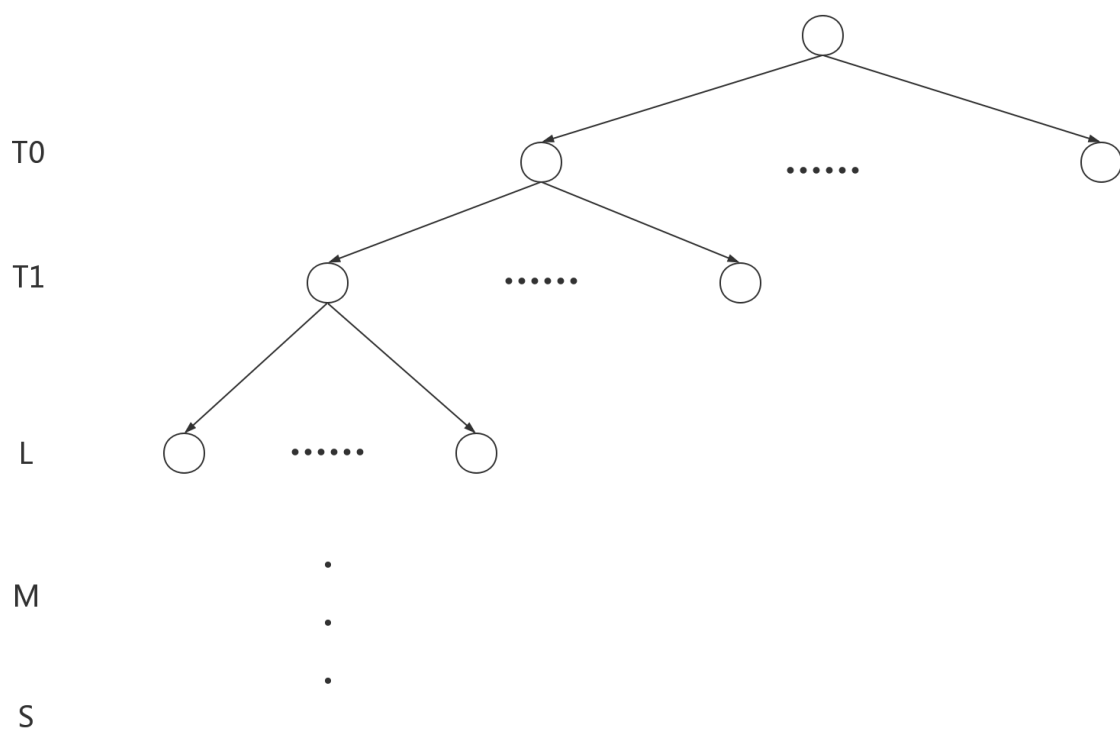
最小完全集不可能有 5 个不同元素：

反证法：如果最小完全集有 5 个不同元素，则上述 5 个集合中，每个集合都至少有一个元素只属于该集合，也就是只满足一个规则。这种情况是不存在的。

总时间：大概 1 天

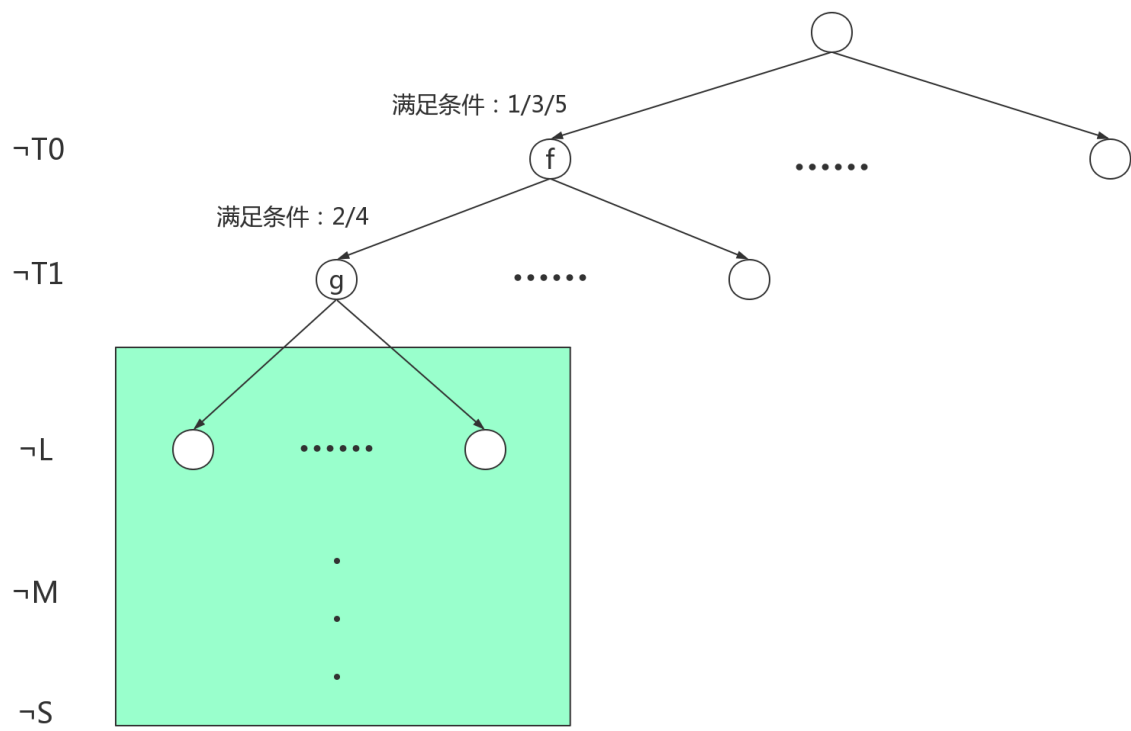
剪枝(+贪婪)搜索法

暴力搜索：



先纵向遍历，再横向遍历

剪枝：



当遍历完 f 和 g 之后，此时的集合就已经是一个完全集了，继续纵向遍历的结果一定不可能是一个最小完全集，所以可以停止纵向遍历，开始横向遍历。

贪婪：在遍历前，对集合 $\{\neg T_0\}, \{\neg T_1\}, \{\neg L\}, \{\neg M\}, \{\neg S\}$ 都进行排序，满足条件多的元素放在前面。

搜索后得到的结果中包含重复和非最小完全集，需要进一步去重和筛选。

搜索时间：2 分钟

搜索结果：600 万+

去重时间：10 分钟

去重后结果：10 万+

筛选时间：5 分钟

进一步筛除非最小完全集后结果：11376