所有不超过二/三元的逻辑联结词构成最小完全集求法

问题难点：三元联结词的组合情况太多，无法计算

解决思路：缩小搜索空间

SY1806214 陈鸿超

Post's Functional Completeness Theorem

**适用范围**：2值(True/False)真值函数

**作用**：判断一个真值函数/逻辑联结词集合是否是完全集

**定理**：提出了5条规则，每个规则对应着一个逻辑逻辑联结词的集合。对于一个逻辑联结词的集合S，如果S不是上述5个集合中任一集合的子集，那么S就是一个完全集。

**换种表达方式：**上述5条规则，如果对于每条规则，联结词集合S中都至少有一个元素不满足，则S是一个完全集。

5条规则

设一个逻辑联结词有n个命题变元，取值为

虚拟变元：

在其他变元取值一定的情况下，某个变元无论取值为T或F，对结果都没有影响，则称该变元为虚拟变元。

规则：

：

：

: 去除虚拟变元之后，满足下面两个条件中任意一个

1. 当为T时，对应的命题变元为T的个数为奇数，当为F时，对应的命题变元为T的个数为偶数。
2. 当为T时，对应的命题变元为T的个数为偶数，当为F时，对应的命题变元为T的个数为奇数。

：

对于的任意一种取值，其结果为。

将中任一取值为F的变为T，这时对应的结果为。

始终满足：。

：始终满足：

缩小搜索空间

**定义5个集合**：

分别为不满足规则的逻辑联结词集合，相互之间可以有交集。

**完全集的定义**：

从集合中分别抽出至少一个元素构成的集合

**定义逻辑联结词集合**：

从集合中分别抽取一个元素组成的集合。

**搜索空间**：所有的集合

暴力搜索法

遍历所有的集合(可重复)，共

每次遍历，执行以下操作：

1. 对集合进行去重
2. 根据去重后集合中元素个数存入1,2,3,4,~~5~~相应的文件中

构造最小完全集集合，并依次遍历文件1,2,3,4：

1. 对文件中元素进行去重
2. 将子集不在集合中的元素加入到集合中

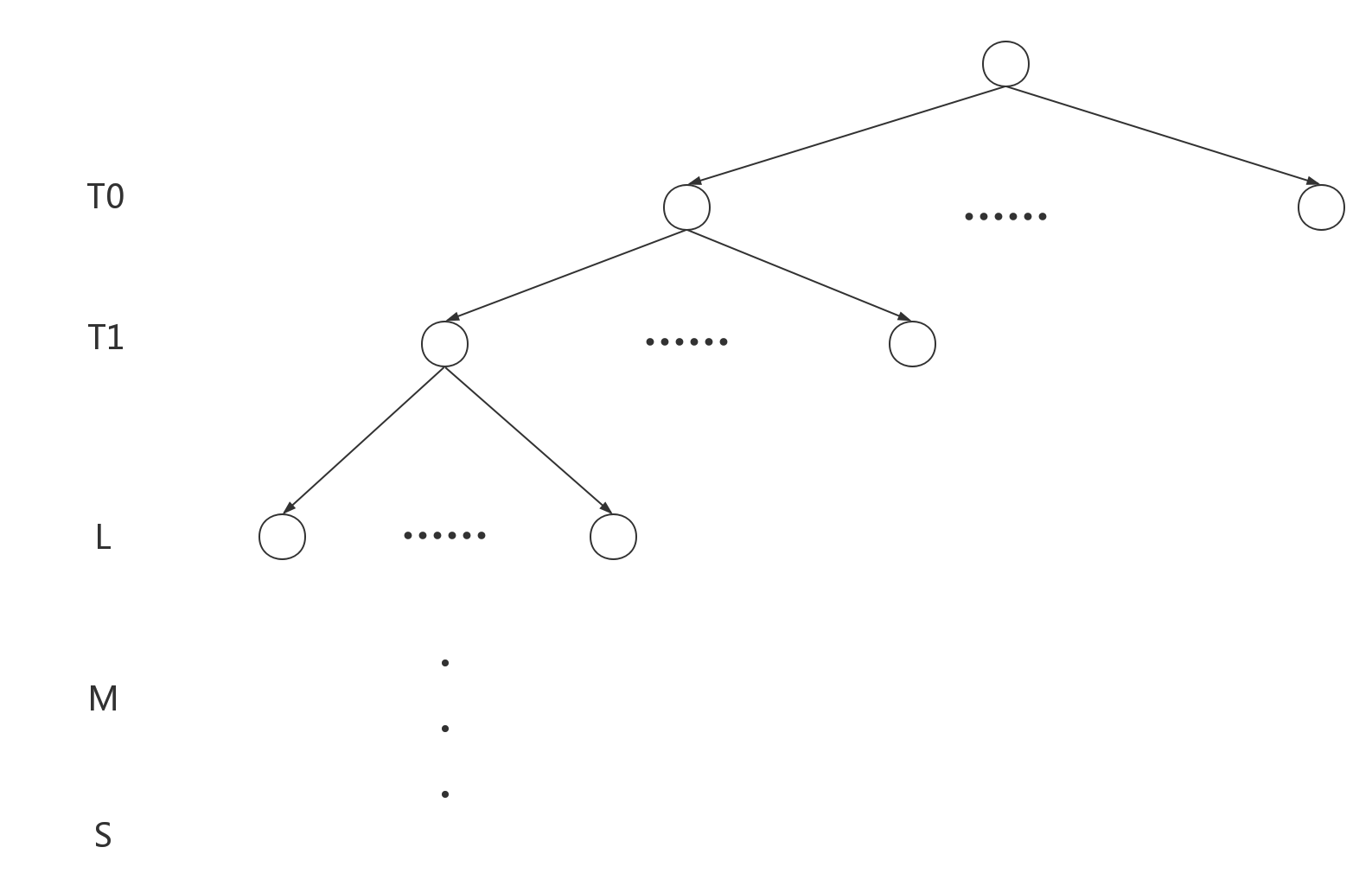
最小完全集不可能有5个不同元素：

反证法：如果最小完全集有5个不同元素，则上述5个集合中，每个集合都至少有一个元素只属于该集合，也就是只满足一个规则。这种情况是不存在的。

总时间：大概1天

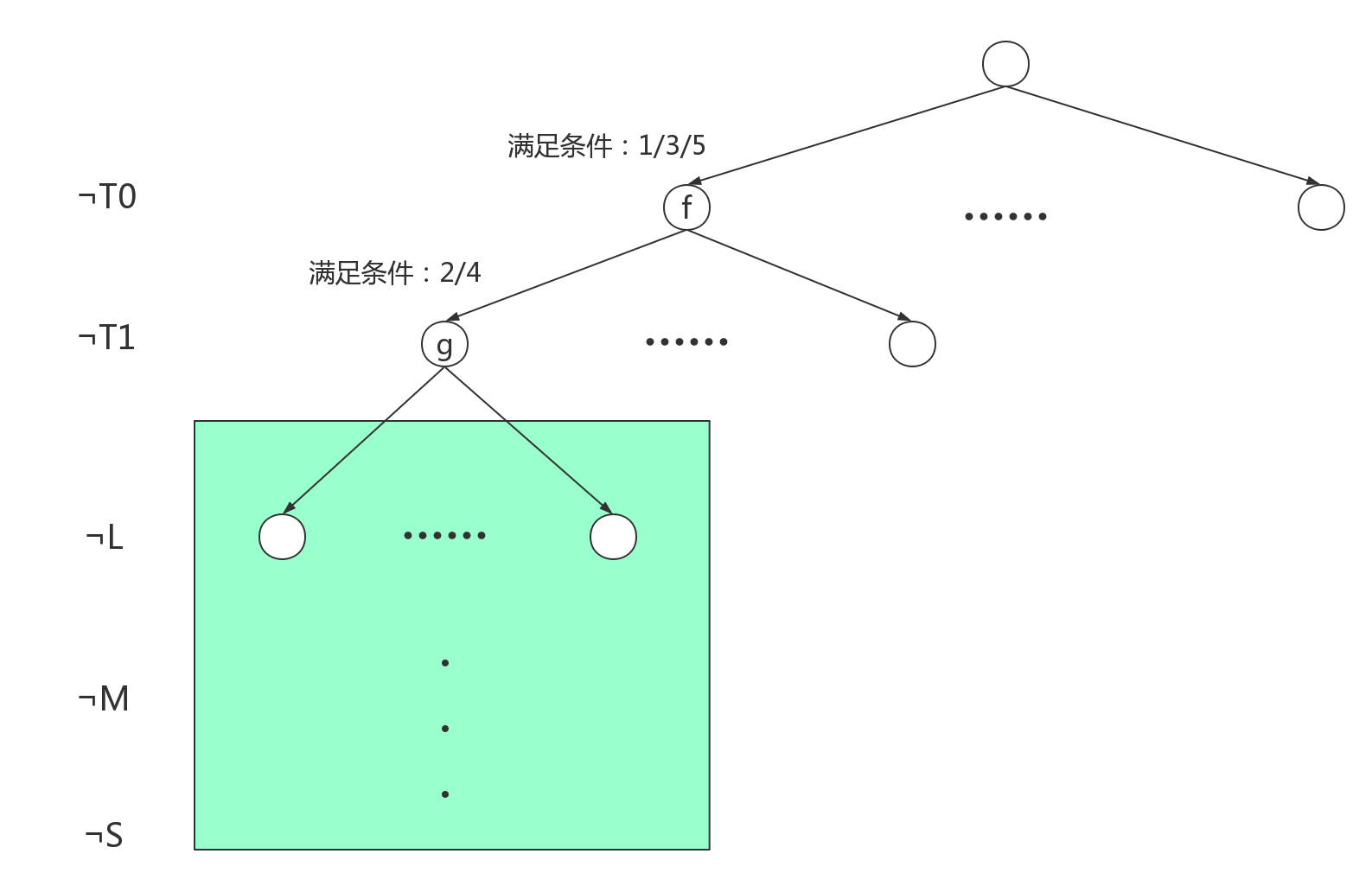
剪枝(+贪婪)搜索法

暴力搜索：



先纵向遍历，再横向遍历

剪枝：



当遍历完f和g之后，此时的集合就已经是一个完全集了，继续纵向遍历的结果一定不可能是一个最小完全集，所以可以停止纵向遍历，开始横向遍历。

贪婪：在遍历前，对集合都进行排序，满足条件多的元素放在前面。

搜索后得到的结果中包含重复和非最小完全集，需要进一步去重和筛选。

搜索时间：2分钟

搜索结果：600万+

去重时间：10分钟

去重后结果：10万+

筛选时间：5分钟

进一步筛除非最小完全集后结果：11376