

A low-angle, upward-looking photograph of several modern skyscrapers reaching towards a blue sky with scattered white clouds. The buildings are made of glass and steel, with varying architectural styles. A small airplane is visible in the distance between the buildings.

Chapter 5

Fractionally Differentiated Features

01.

Motivation

- 낮은 SNR
 - 금융 계열은 차익 거래의 결과 인해 낮은 SNR(signal-to-noise ratios)를 보인다고 알려짐
- 정상성
 - 일반적으로 비정상적 시계열은 정수 미분과 같은 정상성 변환 기법을 사용
 - 하지만 정수 미분은 기억을 지움으로써 신호를 더 감소시킴
 - 가격에는 이전 가격 수준에 대한 이력(기억) 존재
 - 수익율은 기억 단절
- 목표
 - 본 장에서는 최대한 기억을 보존하면서 데이터의 정상성을 보장하는 데이터 변환 기법 소개

02.

THE STATIONARITY VS MEMORY DILEMMA

정상성 대 기억 딜레마

- 비정상성

- 일반적으로 금융 시계열은 비정상성을 보임
 - 기억
 - 과거 기간 동안의 계열의 평균값의 변화 흐름
- 연구자들이 분석을 수행할 경우 수익률, 수익률의 변화, 변동성의 변화 같은 불변의 프로세스로 작업 해야함
- 이러한 데이터 변환은 계열을 **정상성**으로 만들지만, 계열에 포함된 **기억 소실 문제 발생**

- **핵심** : 추론을 위해서는 **정상성이 보장** 되어야 하지만, **기억 또한 보존** 되어야 정보로써 활용할 수 있음

- 기억 : 모델 예측력의 기반
- 정상성 : 모델 강건성의 기반
- 현재 가격이 장기 기대 가격대보다 얼마나 벗어났는지 산정 필요

정상성 대 기억 딜레마

- 정상성 대 기억 딜레마
- 수익률
 - 정상성을 보이거나 기억이 없음
- 가격
 - 기억은 있으나 비정상성
- 해결 방법
 - 기억을 최대한 보존하면서 가격 계열을 정상성으로 만들 수 있는 최저 미분 탐색
 - 수익률은 가격 변환을 하는 여러 가능한 방법 중 하나일 뿐 인지 필요

03.

Literature Review

Literature Review

- Literature Review
 - 대부분의 금융 시계열 문헌은 비정상성 상태 계열을 정수 변환을 통해 정상성으로 바꾼다고 전제함
 - 문제의식
 - 1) 왜 정수 1 미분이 최적인가?
 - 2) 과도한 미분이 EMH가정에 편향되도록 만든 이유 중 하나인가?
 - 호스킹
 - 분수 미분 제안
 - 다만 확률적 프로세스를 미분할 때는 상당한 계산량 필요
 - 정수 단계가 아닌 차분 연산자 적용 범위 일반화

04.

The Method

The Method

- 분수 미분에 대한 이해

- 연산자 B

- 정의

- 백시프트 연산자

- $B^k X_t = X_{t-k}$

- ex)

- $(1 - B)^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$

- $B^2 X_t = X_{t-2}$

- $(1 - B)^2 = 1 - 2B + B^2$

- 특징

- 양의 정수에 대해서 $(x + y)^n = \sum \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

- 이때 $(1 + x)^d = \sum \binom{d}{k} x^k$

- 결론

- $(1 - B)^d = \sum \binom{d}{k} (-B)^k = \sum \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (d-i)}{k!} (-B)^k = \sum (-B)^k \prod_{i=0}^{k-1} \frac{d-i}{k-i} = 1 - dB + \frac{d(d-1)}{2!} B^2 - \frac{d(d-1)(d-2)}{3!} B^3 + \dots$

The Method

장기기억

- $\tilde{X}_t = \sum w_k X_{t-k}$

- $w = \{1, -d, \frac{d(d-1)}{2!}, -\frac{d(d-1)(d-2)}{3!}, \dots, (-1)^k \prod \frac{d-i}{k!}, \dots\}$

- $d = 1$ 일 때 수익률 계산과 같음

반복적 계산

- 위 식에 따르면 가중값은 다음과 같은 수식을 따른다

- $w_k = -w_{k-1} \frac{d-k+1}{k}$

그림 설명

그림 1

- 각 분수 미분 계열의 값을 계산하기 위해 사용된 가중값의 시퀀스($d \in [0,1]$)

- ex) $d = 0$ 일때, $w_0 = 1$ 일때를 제외하고 모두 0

- $w_0 = 1$ 다음의 가중값은 $[-1,0]$ 범위 내에 존재

그림 2

- 각 분수 미분 계열의 값을 계산하기 위해 사용된 가중값의 시퀀스($d \in [1,2]$)

- $d > 1$ 일 때, $w_1 < -1$ 이며, $w_k > 0, \forall k \geq 2$

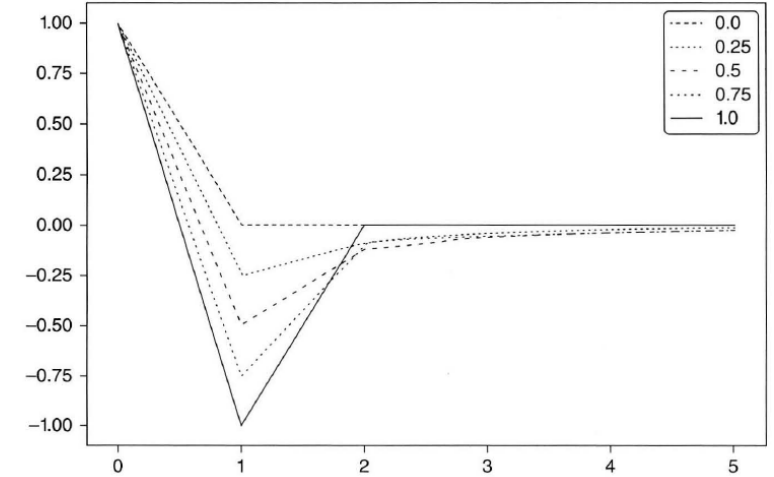


그림 5-1 k 의 증가(x축)에 따른 w_k (y축). 각 선은 특정한 값 $d \in [0,1]$ 에 연계돼 있고, 0.1씩 증가시켜 나간다.

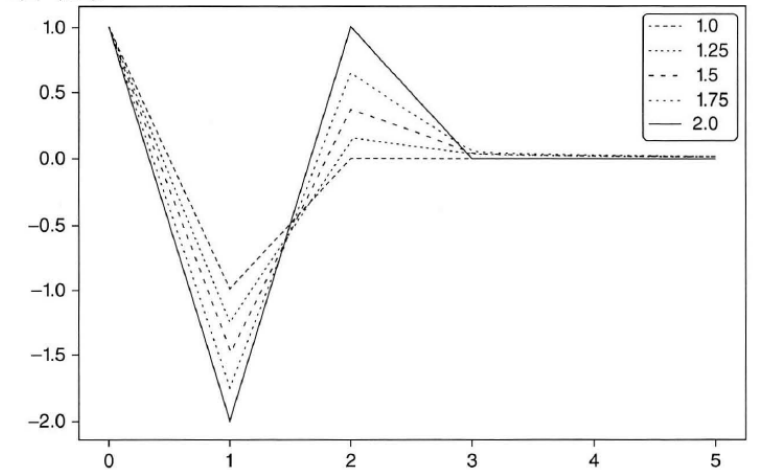


그림 5-2 k 증가(x축)에 따른 w_k (y축). 각 선은 0.1씩 증가하는 특정한 $d \in [1,2]$ 에 연계돼 있다.

The Method

```
def getWeights(d,lags):
    # return the weights from the series expansion of the differencing operator
    # for real orders d and up to lags coefficients
    w=[1]
    for k in range(1,lags):
        w.append(-w[-1]*((d-k+1))/k)
    w=np.array(w).reshape(-1,1)
    return w

def plotWeights(dRange, lags, numberPlots):
    weights=pd.DataFrame(np.zeros((lags, numberPlots)))
    interval=np.linspace(dRange[0],dRange[1],numberPlots)
    for i, diff_order in enumerate(interval):
        weights[i]=getWeights(diff_order,lags)
    weights.columns = [round(x,2) for x in interval]
    fig=weights.plot(figsize=(15,6))
    plt.legend(title='Order of differencing')
    plt.title('Lag coefficients for various orders of differencing')
    plt.xlabel('lag coefficients')
    #plt.grid(False)
    plt.show()

def ts_differencing(series, order, lag_cutoff):
    # return the time series resulting from (fractional) differencing
    # for real orders order up to lag_cutoff coefficients

    weights=getWeights(order, lag_cutoff)
    res=0
    for k in range(lag_cutoff):
        res += weights[k]*series.shift(k).fillna(0)
    return res[lag_cutoff:]
```

The Method

- 수렴

- $k > d$ 이면, $w_{k-1} \neq 0$ 일 경우 $\left| \frac{w_k}{w_{k-1}} \right| = \left| \frac{d-k+1}{k} \right| < 1$, 나머지는 $w_k = 0$
- 따라서 가중값은 0에 점근적으로 수렴
- $\text{int}[d]$ 가 짝수이면 $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = 0^-$, 홀수이면 $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = 0^+$
 - 가중값의 부호 변경은 정상성 상태로 만드는데 필요함,
 - 기억이 줄어들거나, 시간이 지남에 따라 상쇄되기 때문

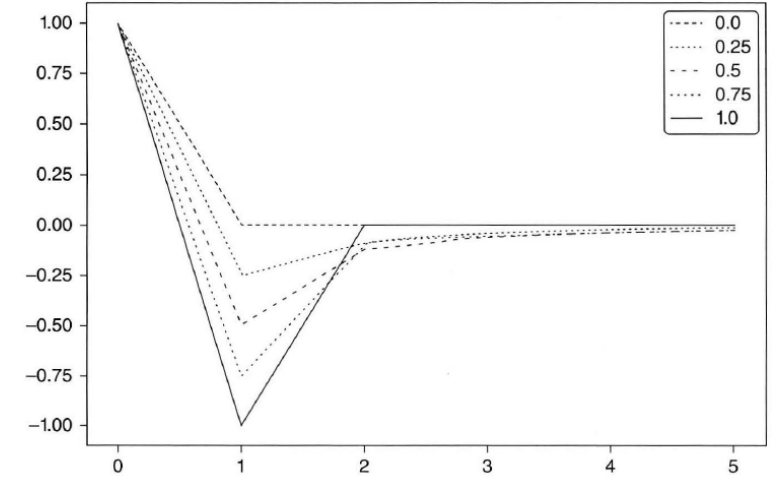


그림 5-1 k 의 증가(x축)에 따른 w_k (y축). 각 선은 특정한 값 $d \in [0,1]$ 에 연계돼 있고, 0.1씩 증가시켜 나간다.

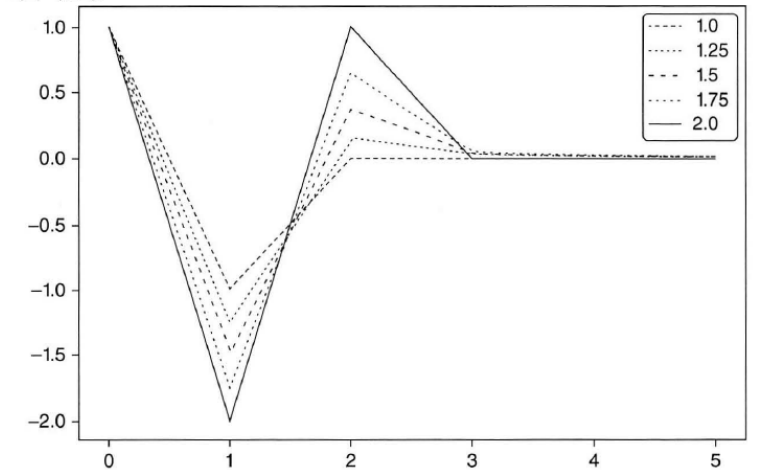


그림 5-2 k 증가(x축)에 따른 w_k (y축). 각 선은 0.1씩 증가하는 특정한 $d \in [1,2]$ 에 연계돼 있다.

05.

Implementation

Implementation

- 구현 방법의 종류
 - 확장하는-윈도우(Expanding Window)
 - 고정-너비-윈도우 fracdiff(Fixed-Width Window Fracdiff)
- 확장하는 윈도우
 - 모델링
 - X_t : T 개의 실수 관측값 시계열
 - $\tilde{X}_T: \{w_k\}, k = 0, \dots, T-1$ 사용
 - $\tilde{X}_{T-l}: \{w_k\}, k = 0, \dots, T-l-1$ 사용
 - 초기 포인트와 최종 포인트가 서로 다른 기억량을 가짐
 - 분석
 - 각 시점 파라미터 l 은 가중값-손실 $\lambda_l = \frac{\sum_{j=T-l}^T |w_j|}{\sum_{i=0}^{T-1} |w_i|}$ 결정
 - 허용 레벨 $\tau \in [0,1]$ 일 때, $\lambda_{l^*} \leq \tau, \lambda_{l^*} > \tau$ 를 만족하는 l^* 결정

$T-l$ 부터 T, \tilde{X}_{T-l} 이 고려하지 못하는 가중치

$$\lambda_l = \frac{\sum_{j=T-l}^T |\omega_j|}{\sum_{i=0}^{T-1} |\omega_i|}$$

초기 시점부터 T, \tilde{X}_T 의 가중치

Implementation

기호	의미	수식
T	만기	
t	시점	
X	시계열	
\tilde{X}_T	T 시점 분수 미분값	$w_k \text{ for } k = 0, \dots, T - 1$
λ_l	T 로부터 l 만큼 떨어진 시점의 가중치 손실값	$\lambda_l = \frac{\sum_{j=T-l}^T w_j }{\sum_{i=0}^{T-1} w_i }$
τ	가중치 손실의 허용 레벨 l^* 의 척도	$\lambda_{l^*} \leq \tau, \lambda_{l^*+1} > \tau$

Implementation

- 확장하는 윈도우
 - 모델링
 - λ_{l^*} : w_k 의 수렴 속도에 종속되어 있음
 - $d \in [0,1]$
 - $d = 1 \rightarrow w_k = 0, \forall k > 1, \lambda_l = 0, \forall l > 1$ 이므로 \tilde{X}_l 삭제
 - $d \rightarrow 0^+$ 에 접근할수록 l^* 증가, 가중값-손실 $\lambda_{l^*} \leq \tau$ 유지 위해 초기 \tilde{X}_T 의 더 많은 부분이 삭제
 - 그림
 - 상단 : $d = 0.4, \tau = 1$
 - 하단 : $d = 0.4, \tau = 0.01$
 - 특성
 - 윈도우가 확장되면서 음이 가중값이 추가되고, 이에 따라 음수로 이동

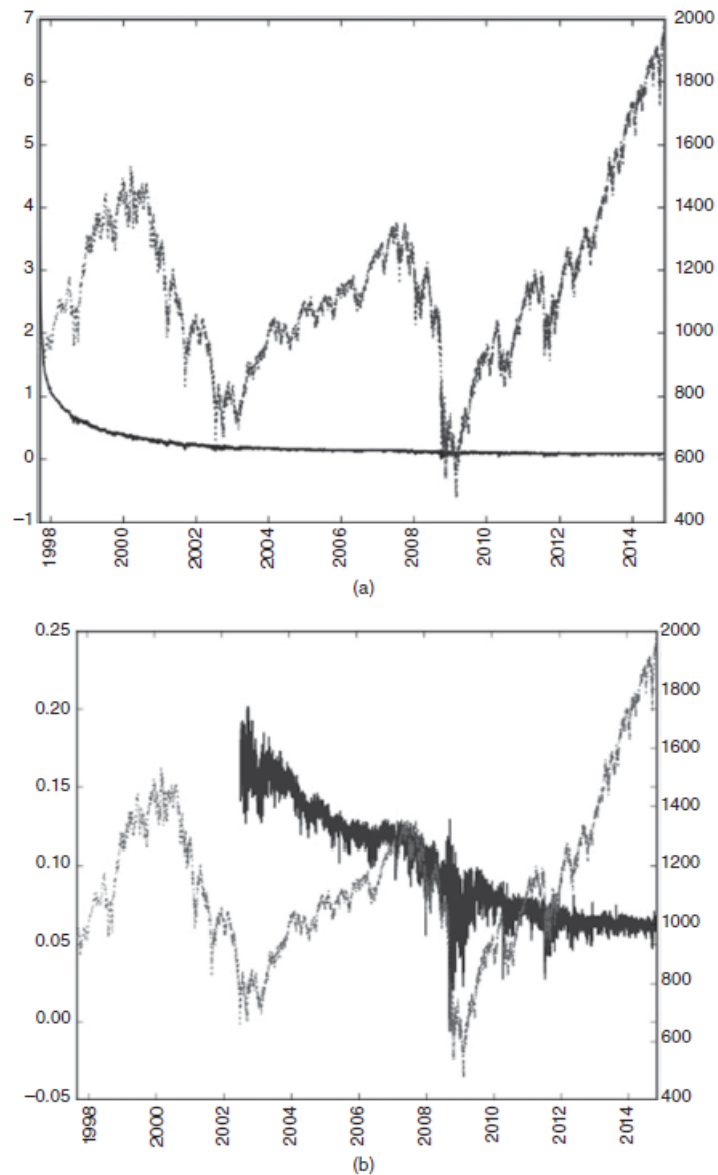


FIGURE 5.3 Fractional differentiation without controlling for weight loss (top plot) and after controlling for weight loss with an expanding window (bottom plot)

Implementation

- 고정-너비 윈도우 fracdiff
 - 목표
 - 계수($|w_k|$)가 주어진 임계값(τ) 이하가 되면 가중값 삭제
 - $|w_{l^*}| \geq \tau, |w_{l^*+1}| \leq \tau$ 가 되도록 만드는 첫 번째 l^* 를 찾는 것과 같음
 - $\tilde{w}_k \begin{cases} w_k & \text{if } k \leq l^* \\ 0 & \text{if } k > l^* \end{cases}$
 - $\tilde{X}_t = \sum_{k=0}^{l^*} \tilde{w}_k X_{t-k}$
 - $t = T - l^* + 1, \dots, T$
 - 장점
 - 가중값의 동일한 벡터를 $\{\tilde{X}_t\}_{t=l^*, \dots, T}$ 사용
 - 추가된 가중값으로 인해 음수로 변하는 것 막을 수 있음

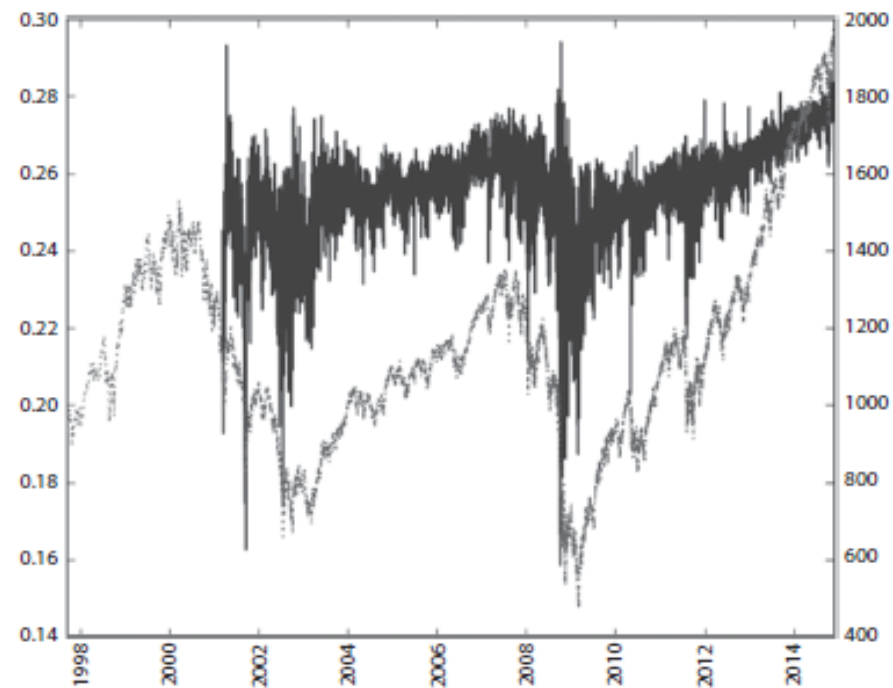


FIGURE 5.4 Fractional differentiation after controlling for weight loss with a fixed-width window

06.

Stationarity with maximum memory preservation

Stationarity with maximum memory preservation

- 최대 기억 유지 정상성

- 고정-너비 윈도우 fracdiff 기법을 이 계열에 적용할 경우, \tilde{X}_t 가 정상성이 되는 최소 계수 d^* 구할 수 있음
 - $\{X_t\}_{t=l^*, \dots, T}$ 가 이미 정상성이라면, $d^* = 0$, $\{X_t\}$ 가 단위근 갖고 있을 경우 $d^* < 1$, 폭발적 행동을 보인다면 $d^* > 1$
 - $0 < d^* \ll 1$ 일 경우(적절한 비정상성) 전체 정수 미분이 초과 기억을 없애버림

- 예시

- 0.35일 경우 ADF 테스트 통과(정상성)
- 다만 이 경우 상관관계는 여전히 높은(0.995)
- 따라서 0.35일 때, 정상성을 보존하면서도 장기 기억 보존
- 원시 계열과 수익률 계열 간의 상관관계는 0.03
 - 표준 정수 미분이 계열의 기억을 거의 모두 삭제

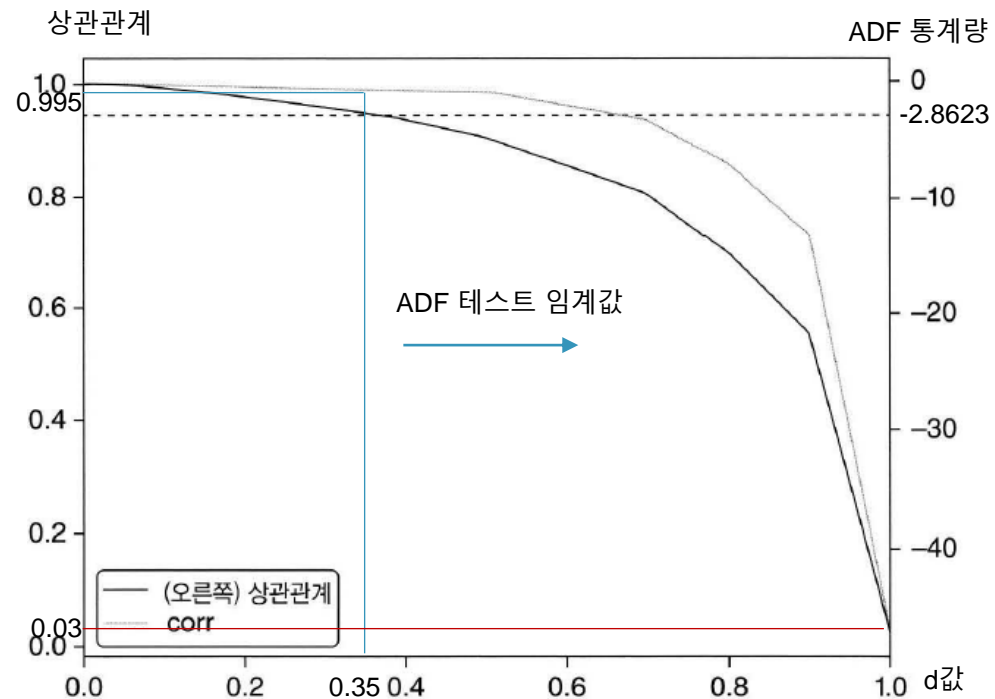


그림 5-5 E-mini S&P 500 선물 로그 가격에 대한 d 의 함수로의 ADF 통계량

Stationarity with maximum memory preservation

표 5-1 가장 유동성이 높은 몇 가지 선물 계약의 FFD(d)에 대한 ADF 통계량

	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
AD1 Curney	-1.7253	-1.8665	-2.2801	-2.9743	-3.9590	-5.4450	-7.7387	-10.3412	-15.7255	-22.5170	-43.8281
BO1 Comdty	-0.7039	-1.0021	-1.5848	-2.4038	-3.4284	-4.8916	-7.0604	-9.5089	-14.4065	-20.4393	-38.0683
BP1 Curney	-1.0573	-1.4963	-2.3223	-3.4641	-4.8976	-6.9157	-9.8833	-13.1575	-19.4238	-26.6320	-43.3284
BTS1 Comdty	-1.7987	-2.1428	-2.7600	-3.7019	-4.8522	-6.2412	-7.8115	-9.4645	-11.0334	-12.4470	-13.6410
BZ1 Index	-1.6569	-1.8766	-2.3948	-3.2145	-4.2821	-5.9431	-8.3329	-10.9046	-15.7006	-20.7224	-29.9510
C 1 Comdty	-1.7870	-2.1273	-2.9539	-4.1642	-5.7307	-7.9577	-11.1798	-14.6946	-20.9925	-27.6602	-39.3576
CC1 Comdty	-2.3743	-2.9503	-4.1694	-5.8997	-8.0868	-10.9871	-14.8206	-18.6154	-24.1738	-29.0285	-34.8580
CD1 Curney	-1.6304	-2.0557	-2.7284	-3.8380	-5.2341	-7.3172	-10.3738	-13.8263	-20.2897	-27.6242	-43.6794
CF1 Index	-1.5539	-1.9387	-2.7421	-3.9235	-5.5085	-7.7585	-11.0571	-14.6829	-21.4877	-28.9810	-44.5059
CL1 Comdty	-0.3795	-0.7164	-1.3359	-2.2018	-3.2603	-4.7499	-6.9504	-9.4531	-14.4936	-20.8392	-41.1169
CN1 Comdty	-0.8798	-0.8711	-1.1020	-1.4626	-1.9732	-2.7508	-3.9217	-5.2944	-8.4257	-12.7300	-42.1411
CO1 Comdty	-0.5124	-0.8468	-1.4247	-2.2402	-3.2566	-4.7022	-6.8601	-9.2836	-14.1511	-20.2313	-39.2207
CT1 Comdty	-1.7604	-2.0728	-2.7529	-3.7853	-5.1397	-7.1123	-10.0137	-13.1851	-19.0603	-25.4513	-37.5703
DM1 Index	-0.1929	-0.5718	-1.2414	-2.1127	-3.1765	-4.6695	-6.8852	-9.4219	-14.6726	-21.5411	-49.2663
DU1 Comdty	-0.3365	-0.4572	-0.7647	-1.1447	-1.6132	-2.2759	-3.3389	-4.5689	-7.2101	-10.9025	-42.9012
DX1 Curney	-1.5768	-1.9458	-2.7358	-3.8423	-5.3101	-7.3507	-10.3569	-13.6451	-19.5832	-25.8907	-37.2623
EC1 Comdty	-0.2727	-0.6650	-1.3359	-2.2112	-3.3112	-4.8320	-7.0777	-9.6299	-14.8258	-21.4634	-44.6452
EC1 Curney	-1.4733	-1.9344	-2.8507	-4.1588	-5.8240	-8.1834	-11.6278	-15.4095	-22.4317	-30.1482	-45.6373
ED1 Comdty	-0.4084	-0.5350	-0.7948	-1.1772	-1.6633	-2.3818	-3.4601	-4.7041	-7.4373	-11.3175	-46.4487
EE1 Curney	-1.2100	-1.6378	-2.4216	-3.5470	-4.9821	-7.0166	-9.9962	-13.2920	-19.5047	-26.5158	-41.4672
EO1 Comdty	-0.7903	-0.8917	-1.0551	-1.3465	-1.7302	-2.3500	-3.3068	-4.5136	-7.0157	-10.6463	-45.2100

Stationarity with maximum memory preservation

EO1 Index	-0.6561	-1.0567	-1.7409	-2.6774	-3.8543	-5.5096	-7.9133	-10.5674	-15.6442	-21.3066	-35.1397
ER1 Comdty	-0.1970	-0.3442	-0.6334	-1.0363	-1.5327	-2.2378	-3.2819	-4.4647	-7.1031	-10.7389	-40.0407
ES1 Index	-0.3387	-0.7206	-1.3324	-2.2252	-3.2733	-4.7976	-7.0436	-9.6095	-14.8624	-21.6177	-46.9114
FA1 Index	-0.5292	-0.8526	-1.4250	-2.2359	-3.2500	-4.6902	-6.8272	-9.2410	-14.1664	-20.3733	-41.9705
FC1 Comdty	-1.8846	-2.1853	-2.8808	-3.8546	-5.1483	-7.0226	-9.6889	-12.5679	-17.8160	-23.0530	-31.6503
FV1 Comdty	-0.7257	-0.8515	-1.0596	-1.4304	-1.8312	-2.5302	-3.6296	-4.9499	-7.8292	-12.0467	-49.1508
G 1 Comdty	0.2326	0.0026	-0.4686	-1.0590	-1.7453	-2.6761	-4.0336	-5.5624	-8.8575	-13.3277	-42.9177
GC1 Comdty	-2.2221	-2.3544	-2.7467	-3.4140	-4.4861	-6.0632	-8.4803	-11.2152	-16.7111	-23.1750	-39.0715
GX1 Index	-1.5418	-1.7749	-2.4666	-3.4417	-4.7321	-6.6155	-9.3667	-12.5240	-18.6291	-25.8116	-43.3610
HG1 Comdty	-1.7372	-2.1495	-2.8323	-3.9090	-5.3257	-7.3805	-10.4121	-13.7669	-19.8902	-26.5819	-39.3267
HI1 Index	-1.8289	-2.0432	-2.6203	-3.5233	-4.7514	-6.5743	-9.2733	-12.3722	-18.5308	-25.9762	-45.3396
HO1 Comdty	-1.6024	-1.9941	-2.6619	-3.7131	-5.1772	-7.2468	-10.3326	-13.6745	-19.9728	-26.9772	-40.9824
IB1 Index	-2.3912	-2.8254	-3.5813	-4.8774	-6.5884	-9.0665	-12.7381	-16.6706	-23.6752	-30.7986	-43.0687
IK1 Comdty	-1.7373	-2.3000	-2.7764	-3.7101	-4.8686	-6.3504	-8.2195	-9.8636	-11.7882	-13.3983	-14.8391
IR1 Comdty	-2.0622	-2.4188	-3.1736	-4.3178	-5.8119	-7.9816	-11.2102	-14.7956	-21.6158	-29.4555	-46.2683
JA1 Comdty	-2.4701	-2.7292	-3.3925	-4.4658	-5.9236	-8.0270	-11.2082	-14.7198	-21.2681	-28.4380	-42.1937
JB1 Comdty	-0.2081	-0.4319	-0.8490	-1.4289	-2.1160	-3.0932	-4.5740	-6.3061	-9.9454	-15.0151	-47.6037
JE1 Curncy	-0.9268	-1.2078	-1.7565	-2.5398	-3.5545	-5.0270	-7.2096	-9.6808	-14.6271	-20.7168	-37.6954
JG1 Comdty	-1.7468	-1.8071	-2.0654	-2.5447	-3.2237	-4.3418	-6.0690	-8.0537	-12.3908	-18.1881	-44.2884
JO1 Comdty	-3.0052	-3.3099	-4.2639	-5.7291	-7.5686	-10.1683	-13.7068	-17.3054	-22.7853	-27.7011	-33.4658
JY1 Curncy	-1.2616	-1.5891	-2.2042	-3.1407	-4.3715	-6.1600	-8.8261	-11.8449	-17.8275	-25.0700	-44.8394
KC1 Comdty	-0.7786	-1.1172	-1.7723	-2.7185	-3.8875	-5.5651	-8.0217	-10.7422	-15.9423	-21.8651	-35.3354
L 1 Comdty	-0.0805	-0.2228	-0.6144	-1.0751	-1.6335	-2.4186	-3.5676	-4.8749	-7.7528	-11.7669	-44.0349

신뢰 수준 95%에서, ADF 검정의 임계값은 -2.8623이다. 로그-가격 계열은 모두 $d < 0.6$ 에서 정상성을 보이고, 대부분은 $d < 0.3$ 에서 정상성을 보인다.

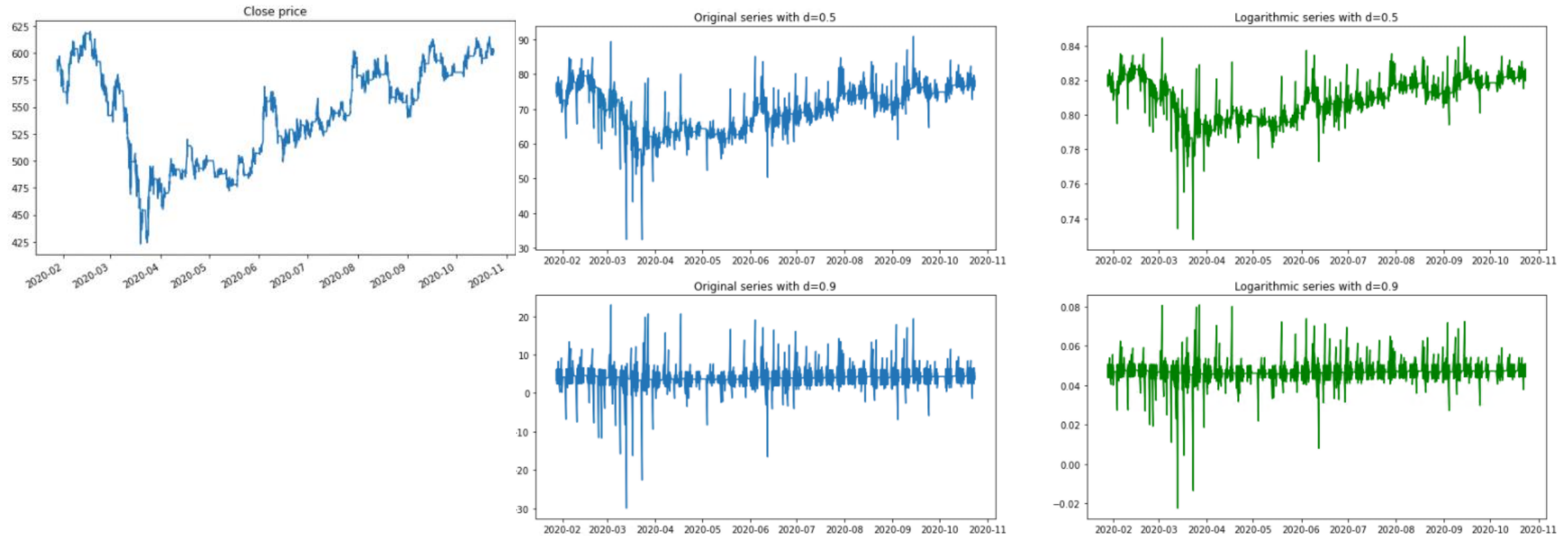
07.

Conclusion

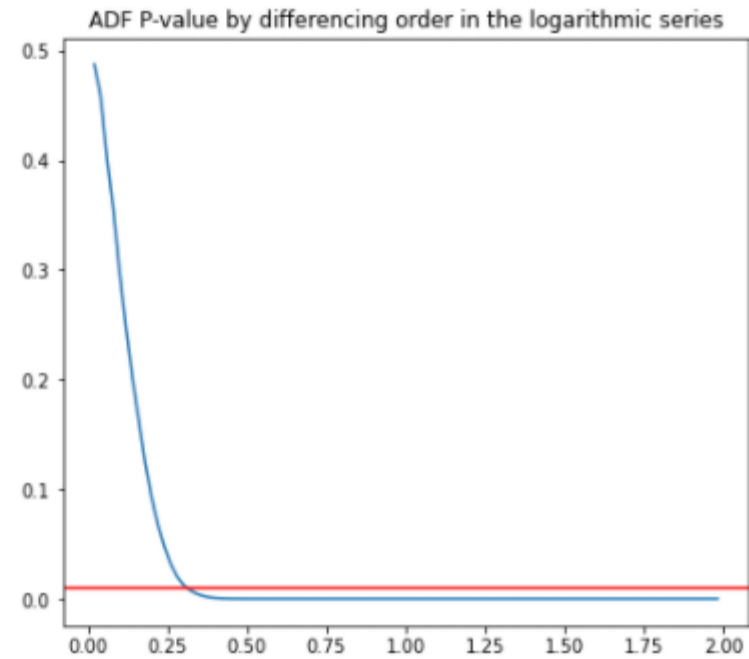
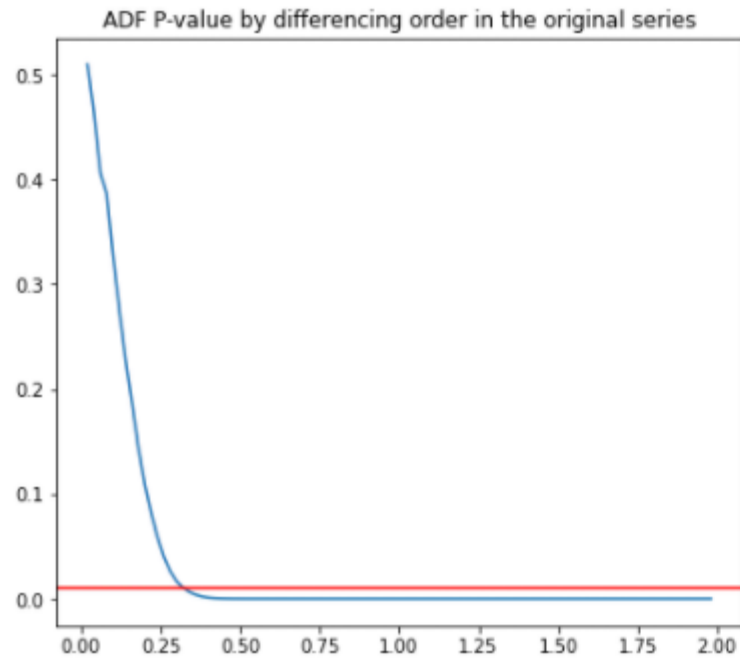
Conclusion

- 대부분의 계량 경제 분석은 둘 중 하나의 패러다임을 따름
 - 박스-젠킨스
 - 수익률은 정상성이지만 기억을 잃음
 - 앵글-그랜저
 - 로그 가격은 기억이 있지만, 비정상성
 - 공적분은 비정상성 계열에서 회귀가 작동하게 하는 트릭으로서 기억이 보존됨
 - 그러나 공적분 변수 개수는 제한되고, 공적분 벡터는 불안정함
- FFD는 정상성을 얻으면서도 기억을 최대한 보존함
- 머신 러닝 예측을 위한 것이므로 공적분 트릭 역시 필요 없음
- 실험
 - 1. 시계열의 누적 합 계산
 - 특정 차수 미분 진행
 - 2. 다양한 $d \in [0,1]$ 에 대한 $FFD(d)$ 계열 계산
 - 3. $FFD(d)$ 에 대한 ADF 통계량의 p 값이 5% 이하가 되는 최소 d 찾음
 - 4. 예측 문제에 $FFD(d)$ 계열 사용

Conclusion



Conclusion



A low-angle, upward-looking photograph of several modern skyscrapers reaching towards a bright blue sky with scattered white clouds. A white commercial airplane is visible in the center of the frame, flying upwards. The perspective creates a sense of height and grandeur.

Thank you