A low-angle, upward-looking photograph of several modern skyscrapers reaching towards a bright blue sky with scattered white clouds. The perspective creates a sense of height and scale. A small airplane is visible in the distance between the buildings.

# Chapter 14

## Backtesting Statistics

# 01.

---

## 백테스트 통계량의 종류

# 백테스트 통계량의 종류

- **목적**

- 다양한 투자 전략을 평가하고 비교하는데 사용
- 전략에서 리스크 비대칭, 낮은 성능 등을 발견하는데 도움

- **종류**

- 일반적 특성(2장)
- 성능(3장)
- 실행/삭감(4장)
- 총 거래비용(5장)
- 수익률/리스크 효율(6장)
- 분류 점수(7장)
- 속성(8장)

# 02.

---

## 일반적인 특성

## 일반적인 특성

- **종류**
  - **시간 범위(Time Range)**
    - 시간 날짜와 종료 날짜 지정
    - 전략 테스트 사용 기간이 충분히 길어야 함(범용성)
  - **평균(Average AUM)**
    - 운용중인 자산의 평균 가치
    - 매수와 매도 포지션의 달러 가치를 양의 실수로 간주
  - **용량(Capacity)**
    - 목표 리스트-조정 성능을 성취할 수 있는 최대 AUM
    - 적절한 베팅 크기와 리스크 다각화를 위해선 최저 AUM 필요.
      - 최소 AUM 넘어서면 AUM 증가에 따라 더 높은 거래 비용과 더 낮은 거래량으로 인한 성능 저하
  - **레버리지(Leverage)**
    - 필요한 대출 총액
    - 평균 AUM과 평균 달러 포지션 크기의 비율 계산
  - **최대 달러 포지션 크기(Maximum Dollar Position Size)**
    - 전략이 평균 AUM을 크게 초과하는지 여부
    - 평균 AUM에 근접한 최대 달러 포지션을 취하는 전략 선호

## 일반적인 특성

- 종류
  - 롱 비율(Ratio of Longs)
    - 베팅 중 매수 포지션의 비율
  - 베팅 빈도(Frequency of Bets)
    - 연간 베팅 개수(동일한 포지션은 시퀀스는 동일한 베팅으로 간주)
    - 거래 수를 기준으로 사용할 경우 시그널 과대 추출 문제 발생 가능
  - 평균 보유 기간(Average Holding Period)
    - 베팅이 유지되는 일 수의 평균
  - 연환산 거래량(Annualized turnover)
    - 연간 거래된 평균 달러량과 평균 연간 AUM 비율 측정
  - 기저와의 상관관계(Correlation to underlying)
    - 전략의 수익률과 기저 투자 상품 범위의 수익률과의 상관관계

```
# 포지션이 바뀐 날 탐색
## df0 : 거래 0인 날(포지션 변동)
df0 = trade_position[trade_position==0].index
## df1 : 전날 거래가 0이 아닌 날
df1 = trade_position.shift(1)
df1 = df1[df1!=0].index
## bets : 전날 포지션이 0이 아닌데, 현재 0인 날(0 연속 방지)
bets = df0.intersection(df1)
## 전날 포지션과 다음날 포지션 곱함, 음수라면 포지션 변동
df0 = trade_position.iloc[1:] * trade_position.iloc[:-1].values
## 전날 0이 아닌데 현재 0 + 전날과 다음날 포지션 변동일
bets = bets.union(df0[df0<0].index).sort_values()
## 마지막 날이 포함되어 있지 않으면 추가
if trade_position.index[-1] not in bets:
    bets.append(trade_position.index[-1:])
```



## 일반적인 특성

```
def getHoldingPeriod(tPos):
    ## DataFrame, 0 생성
    hp, tEntry = pd.DataFrame(columns = ["dT", "w"]), 0.
    ## pDiff : 일자별 변동량, tDiff : 첫날부터 index 일까지의 날짜 수
    pDiff, tDiff = tPos.diff(), (tPos.index - tPos.index[0]) / \
        p.timedelta64(1, "D")

    ## 1부터 총 거래일까지
    for i in range(1, tPos.shape[0]):
        ## 일자별 변동량 * 전날 포지션
        ## 포지션 증가(매수 상태에서 매수, 매도 상태에서 매도) or 변화 없음
        if pDiff.iloc[i]*tPos.iloc[i-1] >= 0:
            ## 해당 포지션이 0이 아니라면
            if tPos.iloc[i] != 0:
                tEntry = (tEntry * tPos.iloc[i - 1] + tDiff[i] * pDiff.iloc[i]) / tPos.iloc[i]
            ## 포지션 감소
        else:
            ## 포지션 변경(매수 상태에서 매도, 매도 상태에서 매수)
            if tPos.iloc[i] * tPos.iloc[i-1] < 0:
                hp.loc[tPos.index[i], ["dT", "w"]] = (tDiff[i] - tEntry, abs(tPos.iloc[i-1]))
                ## 진입 시점 초기화
                tEntry = tDiff[i]
            ## 포지션 변경 x
        else:
            hp.loc[tPos.index[i], ["dT", "w"]] = (tDiff[i] - tEntry, abs(pDiff.iloc[i]))
    ## 포지션 보유시
    if hp["w"].sum() > 0:
        ## 평균 계산
        hp = (hp["dT"] * hp["w"]).sum() / hp["w"].sum()
    ## hp["w"].sum() == 0 : 포지션 보유 x
    else:
        hp = np.nan
    return hp
```

# 03.

---

## 성능



- 종류
  - 손익(PnL)
    - 백테스트 전체에 발생한 달러 총액
    - 최종 포지션 현금화 금액
  - 매수 포지션으로부터의 손익(PnL from long position)
    - 손익 중 매수 포지션으로만 발생한 비중
    - 롱-숏 편향, 시장 중립 전략 평가시 유용
  - 수익률 연환산 비율(Annualized rate of return)
    - 총 수익률의 시간-가중 연환산 평균 비율
  - 히트 비율(Hit ratio)
    - 양의 수익 결과를 낸 베팅 비중
  - 히트로부터 평균 수익률(Average return from hits)
    - 수익을 낸 베팅의 평균 수익률
  - 미스로부터 평균 수익률(Average return from misses)
    - 손실을 낸 베팅의 평균 수익률

- 수익률의 시간-가중 비율
  - 정의
    - 총 수익률
      - 경과 이자, 지급 쿠폰, 산정 기간 동안의 배당을 포함한 실현 및 비실현 손실로부터의 수익률 비율
  - 특징
    - GIPS 규칙
      - 수익률의 시간 가중 비율 계산후 외부 현금 흐름으로 수정
        - GIPS(Global Investment Performance Standards)
          - 투자 매니저들 사이에서 통용되는 스탠다드(CFA)
    - TWRR
      - 각 외부 현금 흐름의 시각에 포트폴리오 가치를 결정함으로써 계산
      - $r_{i,t} : [t-1, t]$  사이에서 포트폴리오 i의 TWRR
        - $r_{i,t} = \frac{\pi_{i,t}}{K_{i,t}}$
        - $\pi_{i,t} = \sum [(\Delta P_{j,t} + A_{j,t})\theta_{i,j,t-1} + \Delta\theta_{i,j,t}(P_{j,t} - \bar{P}_{j,t-1})]$
        - $K_{i,j} = \sum \bar{P}_{j,t-1}\theta_{i,j,t-1} + \max\{0, \sum \bar{P}_{j,t}\Delta\theta_{i,j,t}\}$

- 수익률의 시간-가중 비율

- 설명

- $$r_{i,t} = \frac{\pi_{i,t}}{K_{i,t}}$$

- $$\pi_{i,t} = \Sigma[(\Delta P_{j,t} + A_{j,t})\theta_{ij,t-1} + \Delta\theta_{ij,t}(P_{j,t} - \bar{P}_{j,t-1})]$$

- $\pi_{i,t}$  : 시각  $t$ 에서의 포트폴리오  $i$ 의  $MtM$  수익 또는 손실

- $MtM$  : 현재 시장에서 통용되는 가격

- 수익 변동 + 자산 변동

- $A_{j,t}$  : 시각  $t$ 에서의 단위 투자 상품에 지급한 경과 이자 또는 배당

- $P_{j,t}$  : 시간  $t$ 에서의 증권  $j$ 의 순가격

- $\bar{P}_{j,t}$  : 서브-주기  $t$  동안 증권  $j$ 에 대한 포트폴리오  $i$ 의 거래된 순가격의 평균

- $\theta_{ij,t}$  : 시각  $t$ 에서의 증권  $j$ 에 대한 포트폴리오의 재산

- $$K_{i,j} = \Sigma \bar{P}_{j,t-1} \theta_{ij,t-1} + \max\{0, \Sigma \bar{P}_{j,t} \Delta \theta_{ij,t}\}$$

- $K_{i,t}$  : 서브-주기  $t$  동안의 포트폴리오  $i$ 에 의한 AUM의 시장 가치

- Max 항을 포함하는 목적은 추가 구매를 위한 자금 조달

- $\widetilde{P}_{j,t}$  : 시각  $t$ 에서의 증권  $j$ 의 매매 가격

- $\widetilde{P}_{i,j}$  : 서브-주기  $t$  동안 증권  $j$ 에 대한 포트폴리오  $i$ 의 거래된 매매 가격의 평균

- 수익률의 시간-가중 비율

- 설명

- $r_{i,t} = \frac{\pi_{i,t}}{K_{i,t}}$

- $\pi_{i,t} = \sum [(\Delta P_{j,t} + A_{j,t})\theta_{i,j,t-1} + \Delta\theta_{i,j,t}(P_{j,t} - \bar{P}_{j,t-1})]$

- $K_{i,j} = \sum \tilde{P}_{j,t-1}\theta_{i,j,t-1} + \max\{0, \sum \widetilde{\bar{P}_{j,t}}\Delta\theta_{i,j,t}\}$

- 전제

- 현금 유입은 일의 시작에서 발생한다고 가정

- 현금 유출은 일의 끝에서 발생

- $\varphi_{i,j} = \prod(1 + r_{i,t})$

- $\varphi_{i,T}$  : 전체 생명에 걸쳐 포트폴리오  $i$ 에 투자된 1달러의 성능

- 포트폴리오  $i$ 의 수익률 연환산 비율

- $R_i = (\varphi_{i,T})^{-y_i} - 1$

- $y_i$  :  $r_{i,1}$ 과  $r_{i,T}$  사이에 경과한 연수

# 04.

---

런

- **전제**
  - 투자 전략의 수익률은 IID를 따르지 않는 경우가 많음
- **정의**
  - **런**
    - 동일한 부호 수익률의 런된 시퀀스
    - 하방 리스크를 증가시키는 양상
- **수익률 집중**
  - 수익률 시계열이 주어질 때,  $w^-$  와  $w^+$ 를 계산
    - $r^+ = \{r_t | r_t > 0\}$
    - $r^- = \{r_t | r_t < 0\}$
    - $w^+ = \{r_t^+ (\sum r_t^+)^{-1}\}$ 
      - 수익 가중값
    - $w^- = \{r_t^- (\sum r_t^-)^{-1}\}$ 
      - 손실 가중값

- 허핀달-허시먼 지수로부터 영감

- 정의

- 시장 집중도를 나타내는 지표
- 시장 내 사업자의 각 시장 점유율을 제공하여 합함

$$\bullet \quad h^+ = \frac{\sum (w_t^+)^2 - \|w^+\|^{-1}}{1 - \|w^+\|^{-1}} = \left( \frac{E[(r_t^+)^2]}{E[r_t^+]^2} - 1 \right) (\|r^+\| - 1)^{-1}$$

$$\bullet \quad h^- = \frac{\sum (w_t^-)^2 - \|w^-\|^{-1}}{1 - \|w^-\|^{-1}} = \left( \frac{E[(r_t^-)^2]}{E[r_t^-]^2} - 1 \right) (\|r^-\| - 1)^{-1}$$

- 특징

- $0 \leq h^+ \leq 1$
- $h^+ = 0 \leftrightarrow w_t^+ = \|w^+\|^{-1} \forall t$ 
  - 항상 수익률이 같음
- $h^+ = 1 \leftrightarrow \exists i |w_i^+ = \sum_t w_t^+$

---

#### 코드 14.3 HHI 집중도를 유도하는 알고리즘

```
rHHIPos=getHHI(ret[ret>=0]) # 베팅별 양의 수익률 집중도
rHHINeg=getHHI(ret[ret<0]) # 베팅별 음의 수익률 집중도
tHHI=getHHI(ret.groupby(pd.TimeGrouper(freq='M')).count()) # 집중도. bets/
month
#-----
def getHHI(betRet):
    if betRet.shape[0]<=2:return np.nan
    wght=betRet/betRet.sum()
    hhi=(wght**2).sum()
    hhi=(hhi-betRet.shape[0]**-1)/(1.-betRet.shape[0]**-1)
    return hhi
```

---



- 목표
  - 높은 SR
  - 높은 연간 베팅 수  $||r^+|| + ||r^-|| = T$
  - 높은 히트 비율
    - 상대적으로 낮은  $||r^-||$
  - 낮은  $h^+$ 
    - 오른쪽 두터운 꼬리가 없음
  - 낮은  $h^-$ 
    - 왼쪽으로 두터운 꼬리가 없음
  - 낮은  $h[t]$ 
    - 시간에 대해 집중되지 않은 베팅

## • 드롭다운과 수면하 시간

### • 정의

#### • 드롭 다운

- 두 런된 최고점 사이에서 투자로 입은 최대 손실

#### • 수면하 시간

- 두 런된 최고점과 손익이 이전 최대 손익을 초과한 시점 사이의 경과 시간

### 코드 14.4 DD와 TuW의 시퀀스 도출

```
def computedDD_TuW(series,dollars=False):
    # 연계된 DD와 수면하 시간 계열을 계산
    df0=series.to_frame('pn1')
    df0['hwm']=series.expanding().max()
    df1=df0.groupby('hwm').min().reset_index()
    df1.columns=['hwm','min']
    df1.index=df0['hwm'].drop_duplicates(keep='first').index # hwm 시간
    df1=df1[df1['hwm']>df1['min']] # hwm 다음 DD
    if dollars:dd=df1['hwm']-df1['min']
    else:dd=1-df1['min']/df1['hwm']
    tuw=((df1.index[1:]-df1.index[:-1])/np.timedelta64(1,'Y')).values # 연
    tuw=pd.Series(tuw,index=df1.index[:-1])
    return dd,tuw
```

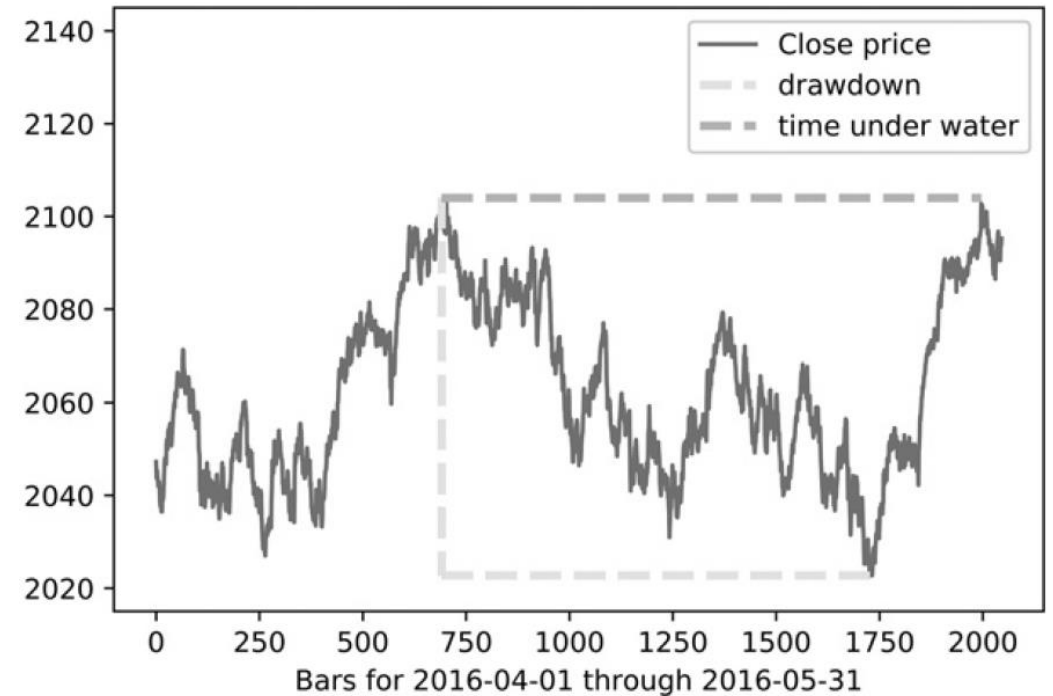


FIGURE 14.1 Examples of drawdown (DD) and time under water + (TuW)

# 05.

---

## 거래 비용 구현

## 거래 비용 구현

- 종류
  - 거래액별 브로커 비용
    - 거래한 포트폴리오에 대해 브로커에게 지급하는 비용
    - 환전 비용 포함
  - 거래액별 평균 슬리피지
    - 하나의 포트폴리오 거래에 관여된 실행 비용(브로커 비용 제외)
    - 중간가보다 높은 실행가로 증권을 샀을 때 발생하는 손실 포함
  - 거래액별 달러 성과
    - 달러 성과와 총 포트폴리오 거래액 간의 비율
    - 손익을 넘기 전까지 실행에 얼마나 많은 비용이 소요되는지 나타냄
  - 실행 비용 대비 수익률
    - 달러 성과와 총 실행 비용 사이의 비율

# 06.

---

## 효율성

## 효율성

- 샤프 지수
  - 전제
    - 전략의 수익률  $\{r_t\}$ 의 평균이  $\mu$ , 분산  $\sigma^2$ , IID
  - 수식
    - $SR = \frac{\mu}{\sigma}$
  - 한계
    - $\mu, \sigma$ 를 알 수 없기 때문에 참 SR 값을 확실히 알 수 없음
- 확률적 샤프 지수(PSR)
  - 전제
    - Fat tail 수익률로부터 야기되는 부풀림 효과(inflationary effect)를 퍼지하여 수정 SR를 만들어야 함
  - 정의
    - $SR^*$  : 사용자 정의 벤치마크 샤프지수
      - 투자 기술이 없을 때를 기준으로 할 경우 0으로 설정
    - $\widehat{SR}$  : 관측 샤프 지수
    - PSR : 확률적 샤프 지수
      - $\widehat{SR}$ 이  $SR^*$ 보다 클 확률 추정

## 효율성

- 확률적 샤프 지수(PSR)

- 수식

$$\bullet \widehat{PSR}[SR^*] = Z \left[ \frac{(\widehat{SR} - SR^*)\sqrt{T-1}}{\sqrt{1 - \hat{\nu}_3 \widehat{SR} + \frac{\hat{\nu}_4 - 1}{4} \widehat{SR}^2}} \right]$$

- $Z$  : 표준 정규분포의 CDF

- $T$  : 관측된 수익률 개수

- $\hat{\nu}_3$  : 수익률의 왜도

- $\hat{\nu}_4$  : 수익률의 첨도

- 의미

- 주어진  $SR^*$ 에 대하여  $\widehat{SR}$ 이 크거나,  $T$ 가 길거나,  $\hat{\nu}_3$ 가 양으로 클 경우 증가

- $\hat{\nu}_4$  더 두터운 꼬리일 경우 감소



- 줄어든 샤프 지수(DSR)
  - 정의
    - 임계값이 시행의 다수성을 반영해 조정된 PSR
    - $\widehat{PSR}[SR^*]$ 로 추정 가능
    - $SR^*$ 를 사용자 정의로 사용하지 않고 재정의
  - $SR^*$ 
    - $SR^* = \sqrt{V[\{\widehat{SR}_n\}]}((1 - \gamma)Z^{-1}\left[1 - \frac{1}{N}\right] + \gamma Z^{-1}\left[1 - \frac{1}{N}e^{-1}\right])$
    - $V[\{\widehat{SR}_n\}]$ : 시행의 예측 SR에 대한 분산
    - $N$ : 독립된 시행 개수
    - $Z$ : 표준 정규분포의 CDF
    - $\gamma$ : 오일러-마스케로니 상수

- 효율성 통계량
  - 연환산 SR
    - $\sqrt{a}$ 에 의해 연환산된 SR
      - $a$  : 연간 관측된 평균 수익률의 개수
  - 정보 지수
    - 평균 초과 수익률과 추적 오차 사이의 연환산 지수
  - PSR
    - 비정규수익률이나 추적 길이로부터 야기되는 부풀림 현상 교정
  - DSR
    - SP에서 비정규 수익률이나 추적 기록 길이, 다수의 테스트/ 선택 편향으로부터 야기되는 부풀림 현상 교정

# 07.

---

분류 점수

## 분류 점수

### • 종류

#### • 정확도(accuracy)

- 알고리즘에 의해 정확히 레이블된 비율

$$\frac{TP+TN}{TP+TN+FP+FN}$$

#### • 정밀도(precision)

- 예측된 긍정 중 참 긍정의 비율

$$\frac{TP}{TP+FP}$$

#### • 재현율(recall)

- 긍정 중에서 참 긍정의 비율

$$\frac{TP}{TP+FN}$$

#### • F1

- 정밀도와 재현율의 조화평균

$$F_1 = 2 \frac{Precision * Recall}{Precision + Recall}$$

#### • 음의 로그 손실(negative log loss)

- 정확한지 아닌지만 고려하는 것이 아니라 예측의 확률까지 고려

표 14-1 이진 분류기의 네 가지 퇴행 경우

조건	실패	정확도	정밀도	재현율	F1
모두 1을 관측	TN = FP = 0	= 재현율	1	[0,1]	[0,1]
모두 0을 관측	TP = FN = 0	[0,1]	0	NaN	NaN
모두 1을 예측	TN = FN = 0	= 정밀도	[0,1]	1	[0,1]
모두 0을 예측	TP = FP = 0	[0,1]	NaN	0	NaN

# 08.

---

속성

- **목적**

- 손익을 리스크 분류에 대해 분해
  - 무슨 리스크에 대해 노출되었는지 이해 필요
    - 만기
    - 신용도
    - 환금성
    - 경제 분야
    - 환율
    - 국가 신용도
    - 발행자
  - 다만 이런 리스크는 직교하는 것이 아니기 때문에 중첩 부분이 있음
  - 손익의 기여 부분은 범주 내에서 찾고자 함

- **방법**

- 1. 투자 분야의 각 멤버가 특정 시점에서 각 리스크 부류에서 하나에만 속해야 함
- 2. 각 리스크 부류에 대해서 리스크 범주별 하나의 인덱스 구성
  - 단기, 중기, 장기로 분류
  - 인덱스 가중값의 합은 1
- 3. 2단계 반복
  - 투자 분야로부터 가중값을 이용해 리스크 범주 인덱스를 구성

A low-angle, upward-looking photograph of several modern skyscrapers reaching towards a bright blue sky with scattered white clouds. A white commercial airplane is visible in the center of the frame, flying upwards. The perspective creates a sense of height and grandeur.

Thank you