

# Ampliación de interpolación con Splines

Miguel Anguita Ruiz      Pablo Baeyens Fernández      Pablo David Medina Sánchez  
Ruben Morales Pérez      Francisco Javier Morales Piqueras

## Índice

<b>1. Splines cuadráticos</b>	<b>2</b>
1.1. Introducción a los splines . . . . .	2
1.2. Descripción del espacio de splines cuadráticos . . . . .	2
1.3. Interpolación con splines cuadráticos . . . . .	2
1.4. Error en los splines cuadráticos . . . . .	2
1.5. Ejemplos . . . . .	3
<b>2. Splines cúbicos</b>	<b>4</b>
2.1. Construcción a partir de los valores de $s''(x)$ en los nodos $\{x_i\}$ . . . . .	4
2.1.1. Splines cúbicos a partir de las segundas derivadas: . . . . .	4
2.2. Propiedades de minimización . . . . .	5
2.2.1. Cota de error en los splines cúbicos . . . . .	6
2.3. Ejemplos . . . . .	6
<b>3. Implementación en ordenador: Octave</b>	<b>7</b>
3.1. Spline Lineal . . . . .	7
3.2. Splines cuadráticos . . . . .	7
<b>A. Definiciones y notación</b>	<b>8</b>

# 1. Splines cuadráticos

## 1.1. Introducción a los splines

**Definición.** Sea  $[a, b]$  un intervalo,  $P = \{x_i\}_{i=0 \dots n} \in \mathcal{P}([a, b])$ ,  $k, r \in \mathbb{N}$ ,  $r < k$ . Se dice que  $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es un spline si  $s \in C^r([a, b])$  y para todo  $1 \leq i \leq n$ ,  $s|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathbb{P}_k$ .  $S_k^r(P)$  es el espacio de dichas funciones.

.

## 1.2. Descripción del espacio de splines cuadráticos

Partimos de  $[a, b]$  un intervalo y  $P = \{x_i\}_{i=0 \dots n} \in \mathcal{P}([a, b])$ . En esta primera sección nos centramos en los splines cuadráticos: los pertenecientes a  $S_2^1(P)$ .

Sus trozos son polinomios de grado menor o igual que 2 de la forma  $ax^2 + bx + c$ . Además son funciones de clase 1 (derivables en  $[a, b]$  con derivada continua), lo que nos proporcionará condiciones interesantes para resolver problemas de interpolantes con este tipo de splines.

Describamos a continuación este espacio.

**Proposición.** Sea  $[a, b]$  intervalo,  $P = \{x_i\}_{i=0 \dots n} \in \mathcal{P}([a, b])$ , entonces  $\dim(S_2(P)) = n + 2$ .

*Demostración.* Sea  $s \in S_2(P)$ .

- Para cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$   $s|_{[x_{i-1}, x_i]}(x) = ax^2 + bx + c$  para ciertos  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto cada trozo está determinado por 3 parámetros. Con  $n$  trozos tenemos  $3n$  parámetros en total.
- Si imponemos la continuidad y derivabilidad en los extremos tenemos que:

$$s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i) \quad s'_i(x_i) = s'_{i+1}(x_i)$$

para todo  $i = 1 \dots n - 1$ . De cada condición se obtienen  $n - 1$  ecuaciones, por lo tanto obtendremos:  $n - 1 + n - 1 = 2n - 2$  ecuaciones linealmente independientes.

Por lo tanto,  $\dim(S_2(P)) = 3n - (2n - 2) = n + 2$ . □

Con el conocimiento de la dimensión del espacio podemos describir una base representativa del espacio de splines cuadráticos con el uso de potencias truncadas. Una **base del espacio** es :  $\{1, x, x^2, (x - x_1)_+^2, \dots, (x - x_{n-1})_+^2\}$ .

## 1.3. Interpolación con splines cuadráticos

## 1.4. Error en los splines cuadráticos

**Teorema.** Sean  $f \in C^2([a, b])$ ,  $\{x_i\}_{i=0 \dots n} \in \mathcal{P}([a, b])$ ,  $s \in S_2^1(\{x_i\}_{i=0 \dots n})$  spline para  $f$ ,  $h = \max\{x_i - x_{i-1}\}_{i=1 \dots n}$ ,  $E = f - s$ . Además, sea  $M > 0$  tal que:

$$M \geq \sup\{|f''(x) - f''(y)| : |x - y| \leq h, x, y \in [a, b]\}$$

Entonces, se verifica, para todo  $x \in [a, b]$ :

$$E(x) \leq \frac{h^2 M}{2} \tag{1}$$

La demostración, así como cotas para las derivadas y cotas más precisas en función de la localización de  $x$  puede encontrarse en *Quadratic Interpolatory Splines*, W. Kammerer, G. Reddien y R.S. Varga, (1973).

## 1.5. Ejemplos

## 2. Splines cúbicos

### 2.1. Construcción a partir de los valores de $s''(x)$ en los nodos $\{x_i\}$

#### 2.1.1. Splines cúbicos a partir de las segundas derivadas:

Uno de los problemas de la interpolación polinomial es que, al ir aumentando los nodos (diferentes), el grado del polinomio aumenta ( $gr(p) = n - 1$ ). Esto conlleva unas fluctuaciones en los extremos de la interpolación. (\*\*1)

Sin embargo, si dividimos el intervalo en una partición  $P = \{x_i\}_{i=0..n} \in \mathcal{P}([t_0, t_n])$ , con un serie de subintervalos, podemos aproximar un polinomio en cada intervalo minimizando la cota de error.

Para no volver a tener el problema de las fluctuaciones, indeseables en la mayoría de las aplicaciones, se suelen utilizar polinomios interpolantes de grado  $\leq 3$ . Esta técnica se conoce como aproximación polinomial fragmentaria, donde:

Spline cúbicos: La aproximación más utilizada es la interpolación con splines cúbicos debido a que proporciona un excelente ajuste a los puntos tabulados y su cálculo no es excesivamente complejo.

#### Propiedades:

Dada una función definida en  $[a, b]$ , una partición del intervalo  $P = \{x_i\}_{i=0..n} \in \mathcal{P}([a, b])$ :

- $S$  es un polinomio cúbico denotado por  $S_j$  en el subintervalo de extremos  $x_j$  y  $x_{j+1}$ , para  $j = 0, 1, ..n - 1$ .
- $S_j(x_j) = f(x_j)$  y  $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$
- $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$
- $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$

Dentro de los cúbicos encontramos los de clase 1 y 2, denotados por:

1. Los splines cúbicos de clase 1 son continuos y derivables en su dominio. Son un espacio vectorial de dimensión  $2*(n+1)$ , cuya base es: .

Una desventaja de estos splines es que no se asegura que haya derivabilidad en los extremos, en un contexto geométrico eso significa que la función no es *suave* en los puntos de unión. Generalmente las condiciones físicas necesitan esa suavidad, y es aquí donde intervienen los splines cúbicos de clase 2.

2. Los splines cúbicos de clase 2 son continuos y 2 veces derivables. Como sabemos que la dimensión de un spline  $S_k^r$  es  $(k - r)n + r + 1$  la dimensión de este espacio vectorial es  $(3 - 2)n + 2 + 1 = n + 3$ . Cuando  $k = r + 1$  el superíndice se omite.

Como tenemos  $n + 1$  variables, tenemos 2 libertades en la resolución.

## 2.2. Propiedades de minimización

Comenzamos planteando un problema de minimización sobre el espacio normado  $(C^2([a, b]), \|\cdot\|)$ , con la norma definida de la forma usual:

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \quad (2)$$

Planteamos el problema:

**Problema.** Sea  $f \in C^2([a, b])$ ,  $P \in \mathcal{P}([a, b])$ . Sea  $H \subset C^2([a, b])$  definido por:

$$H = \{g \in C^2([a, b]) : \forall p \in P \ g(p) = f(p) \text{ y } g'(a) = f'(a), g'(b) = f'(b)\}$$

Hallar  $u \in H$  tal que  $\|u''\|$  sea mínima.

Para resolver el problema, demostramos el siguiente teorema:

**Teorema** (Minimización). Sea  $f \in C^2([a, b])$ ,  $P \in \mathcal{P}([a, b])$ ,  $s$  spline sujeto para  $f$ . Se verifica:

$$\forall u \in H : \|s''\| \leq \|u''\| \quad (3)$$

*Demostración.* Sea  $u \in H$ ,  $e = u - s$ . Tenemos:

$$\|u''\|^2 = \|e'' + s''\|^2 = \|e''\|^2 + \|s''\|^2 + 2 \langle e'', s'' \rangle \quad (4)$$

Dividimos  $\langle e'', s'' \rangle$  en intervalos:

$$\langle e'', s'' \rangle = \int_a^b e''(x)s''(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} e''(x)s''(x)dx \quad (5)$$

En cada intervalo, integramos por partes ( $u = s''$ ,  $dv = e''(x)dx$ ):

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} e''(x)s''(x)dx = e'(x)s''(x)|_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} e' s''' \quad (6)$$

Sustituyendo 6 en 5, agrupando la integral y simplificando la suma tenemos:

$$\langle e'', s'' \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \left( e'(x)s''(x)|_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} \right) - \sum_{i=1}^{n-1} \int_a^b e' s''' = (e'(b)s''(b) - e'(a)s''(a)) - \sum_{i=1}^{n-1} s_i \int_a^b e' = (e'(b)s''(b) - e'(a)s''(a)) \quad (7)$$

Donde utilizamos que  $e(a) = e(b) = 0$ . Por tanto  $\langle e'', s'' \rangle = 0$  y tenemos:

$$\|u''\|^2 = \|e''\|^2 + \|s''\|^2 + 2 \langle e'', s'' \rangle = \|e''\|^2 + \|s''\|^2 \geq \|s''\|^2 \quad (8)$$

Por lo que  $\|s''\| \leq \|u''\|$ . □

### 2.2.1. Cota de error en los splines cúbicos

**Teorema.** Sea  $f \in C^4([a, b])$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P = \{x_i\}_{i=0 \dots n} \in \mathcal{P}([a, b])$  y  $s \in S_3^1(P)$  spline para  $f$ . Además, sean  $h = \max\{x_i - x_{i-1}\}_{i=1 \dots n}$ ,  $M > 0$  cota superior de  $|f^{(iv)}|$  en  $[a, b]$  y  $E = f - s$ ,  $x \in [a, b]$ .

Se verifica:

$$|E(x)| \leq \frac{5M}{384}h^4 \quad (9)$$

La demostración, así como cotas para las derivadas, puede consultarse en *Optimal Error Bounds for Cubic Spline Interpolation*, Charles Hall y Weston Meyer, (1976).

### 2.3. Ejemplos

### 3. Implementación en ordenador: Octave

Hemos implementado las siguientes funciones en Octave:

1. **SplineLineal**: Calcula spline **lineal**. (*Usado en los splines cúbicos*)
2. **Spline31**: Calcula spline de **clase 1**.
3. **SplineNat**: Calcula spline **natural**.
4. **SplinePer**: Calcula spline **periódico**.
5. **SplineSuj**: Calcula spline **sujeto**.
6. **SplineCuad**: Calcula spline **cuadrático** de clase 1.

#### 3.1. Spline Lineal

La función que nos permite calcular un spline lineal es muy

```
function s = SplineLineal(x,y)
    p = diff(y)./diff(x);
    A = [p' y(1:end-1)'];
    s = mkpp(x,A);
end
```

#### 3.2. Splines cuadráticos

Utilizando el sistema que vimos anteriormente, podemos definir fácilmente una función que calcule los coeficientes de un spline cuadrático de clase 1:

```
function s = coefsSplineCuad(x, y, d_k, k)
    # Número de intervalos
    n = length(x) - 1;

    # 1, x, x^2
    A(:,1) = [ones(n+1,1); 0];
    A(:,2) = [x' ; 1];
    A(:,3) = [x'.^2 ; 2.*x(k+1)];

    # Potencias truncadas
    for j = 4 : n + 2
        pot = @(t) (t > x(j-2)) .* (t - x(j-2));
        A(:,j) = [pot(x').^2; 2.*pot(x(k+1))];
    end

    # Resolución del sistema
    s = A \ [y' ; d_k];

end
```

## A. Definiciones y notación

**Definición.** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo cerrado y acotado con extremos  $a, b$ :

- Una **partición**  $P$  de  $I$  es un subconjunto finito de  $I$  con  $a, b \in P$ .
- $\mathcal{P}(I)$  es el conjunto de todas las particiones de  $I$ .

**Definición.** Sea  $a \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . La **potencia truncada** en  $a$  de grado  $n$ ,  $(x - a)_+^n$  viene dada por:

$$(x - a)_+^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ (x - a)^n & \text{si } x > a \end{cases}$$

Cualquier potencia truncada de grado  $n$  es de clase  $n - 1$ , y su derivada de orden  $n$  presenta una discontinuidad en  $a$ . La derivada de  $(x - a)_+^n$  en  $x$  es  $n(x - a)_+^{n-1}$ .

Su implementación en Octave es bastante sencilla: dados **a** y **n**, podemos definir la potencia truncada como función anónima de la siguiente forma:

```
pot = @(x) (x > a) * (x - a)^n
```

Como Octave tiene tipos dinámicos convertirá  $(x > a)$  a 1 si  $x > a$  y a 0 en otro caso.