# Ampliación de interpolación con Splines

Miguel Anguita Ruiz Pablo Baeyens Fernández Pablo David Medina Sánchez
Ruben Morales Pérez Francisco Javier Morales Piqueras

## Índice

# 1. Splines cuadráticos

El espacio de splines de clase 2 se nota $S_2(x_1, x_2, ..., x_n)$. Una base sería $\{1, x, x^2, (x - x_1)_+, (x - x_2)_+, ..., (x - x_n)_+\}$

## 1.1. Descripción del espacio de splines cuadráticos

El espacio de splines de clase 2 con $n$ nodos se denota $S_2(x_1, x_2, ..., x_n)$. Los splines de clase 2 están constituidos por parábolas, de forma que además de tener una función continua, su derivada también lo es. Por lo tanto, para $i = 1, ..., n-1$ tenemos la siguiente condición:

$$\boxed{\begin{array}{l} s_i(x_i) = s_{i+1}(x_{i+1}) \\ s'_i(x_i) = s'_{i+1}(x_{i+1}) \end{array}}$$

**Proposición.** *El conjunto* $S_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ *satisface las propiedades siguienes:*

1. *Es un espacio vectorial con* $\dim(S_2(x_1, x_2, ..., x_n))$

## 1.2. Interpolación con splines cuadráticos

## 1.3. Error en los splines cuadráticos

**Teorema.** *Sean* $f \in C^2([a,b])$, $\{x_i\}_{i=0...n} \in \mathscr{P}([a,b])$, $s \in S_2^1(\{x_i\}_{i=0...n})$ *spline para* $f$, $h = max\{x_i - x_{i-1}\}_{i=1...n}$, $E = f - s$. *Además, sea* $M > 0$ *tal que:*

$$M \geq Sup\{|f''(x) - f''(y)| \ : \ |x - y| \leq h, \ x, y \in [a,b]\}$$

*Entonces, se verifica, para todo* $x \in [a,b]$*:*

$$E(x) \leq \frac{h^2 M}{2} \tag{1}$$

La demostración, así como cotas para las derivadas y cotas más precisas en función de la localización de $x$ puede encontrarse en *Quadratic Interpolatory Splines*, W. Kammerer, G. Reddien y R.S. Varga, (1973).

## 1.4. Ejemplos

## 2. Splines cúbicos

### 2.1. Construcción a partir de los valores de $s''(x)$ en los nodos $\{x_i\}$

### 2.2. Propiedades de minimización

Comenzamos planteando un problema de minimización sobre $(C^2([a,b]), ||\cdot||)$, con la norma definida de la forma usual:

$$||f|| = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \tag{2}$$

El problema es aproximar una función de clase 2 con funciones que la interpolen en unos nodos y cuyas derivadas en los extremos coincidan:

**Problema.** Sea $f \in C^2([a,b])$, $P \in \mathscr{P}([a,b])$. Sea $H \subset C^2([a,b])$ definido por:

$$H = \{g \in C^2([a,b]) \ : \ \forall p \in P \ g(p) = f(p) \text{ y } \ g'(a) = f'(a), \ g'(b) = f'(b)\}$$

Hallar $u \in H$ tal que $||f - u||$ sea mínimo.

#### 2.2.1. Cota de error en los splines cúbicos

**Teorema.** *Sea $f \in C^4([a,b])$, $n \in \mathbb{N}$, $P = \{x_i\}_{i=0\ldots n} \in \mathscr{P}([a,b])$ y $s \in S_3^1(P)$ spline para $f$. Además, sean $h = max\{x_i - x_{i-1}\}_{i=1\ldots n}$, $M > 0$ cota superior de $|f^{iv)}|$ en $[a,b]$ y $E = f - s$, $x \in [a,b]$.*

*Se verifica:*

$$|E(x)| \leq \frac{5M}{384}h^4 \tag{3}$$

La demostración, así como cotas para las derivadas, puede consultarse en *Optimal Error Bounds for Cubic Spline Interpolation*, Charles Hall y Weston Meyer, (1976).

### 2.3. Ejemplos

## 3. Implementación en ordenador: Octave

Hemos implementado las siguientes funciones en Octave:

1. `SplineLineal`: Calcula spline **lineal**. *(Usado en los splines cúbicos)*
2. `Spline31` : Calcula spline de **clase 1**.
3. `SplineNat`: Calcula spline **natural**.
4. `SplinePer`: Calcula spline **periódico**.
5. `SplineSuj`: Calcula spline **sujeto**.
6. `SplineCuad`: Calcula spline **cuadrático** de clase 1.

### 3.1. Spline Lineal

La función que nos permite calcular un spline lineal es muy

```
function s = SplineLineal(x,y)
  p = diff(y)./diff(x);
  A = [p' y(1:end-1)'];
  s = mkpp(x,A);
end
```

### 3.2. Splines cuadráticos

Utilizando el sistema que vimos anteriormente, podemos definir fácilmente una función que calcule los coeficientes de un spline cuadrático de clase 1:

```
function s = coefsSplineCuad(x, y, d_k, k)
  # Número de intervalos
  n = length(x) - 1;

  # 1, x, x²
  A(:,1) = [ones(n+1,1); 0];
  A(:,2) = [x'         ; 1];
  A(:,3) = [x'.^2      ; 2.*x(k+1)];

  # Potencias truncadas
  for j = 4 : n + 2
    pot    =  @(t) (t > x(j-2)) .* (t - x(j-2));
    A(:,j) = [pot(x').^2; 2.*pot(x(k+1))];
  end

  # Resolución del sistema
  s = A \ [y' ; d_k];

end
```

# A. Definiciones y notación

**Definición.** Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado con extremos $a, b$:

- Una **partición** $P$ de $I$ es un subconjunto finito de $I$ con $a, b \in P$ .
- $\mathscr{P}(I)$ es el conjunto de todas las particiones de $I$.

**Definición.** Sea $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. La **potencia truncada** en $a$ de grado $n$, $(x-a)_+^n$ viene dada por:

$$(x-a)_+^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ (x-a)^n & \text{si } x > a \end{cases}$$

Cualquier potencia truncada de grado $n$ es de clase $n-1$, y su derivada de orden $n$ presenta una discontinuidad en $a$. La derivada de $(x-a)_+^n$ en $x$ es $n(x-a)_+^{n-1}$.

Su implementación en Octave es bastante sencilla: dados `a` y `n`, podemos definir la potencia truncada como función anónima de la siguiente forma:

```
pot = @(x) (x > a) * (x - a)^n
```

Como Octave tiene tipos dinámicos convertirá `(x > a)` a 1 si $x > a$ y a 0 en otro caso.