Interpolación con splines cuadráticos

Métodos Numéricos

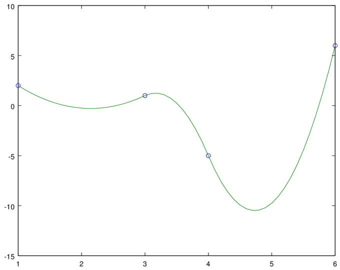
Rubén Morales
Pablo Baeyens
Francisco Morales
Pablo Medina
Miguel Anguita

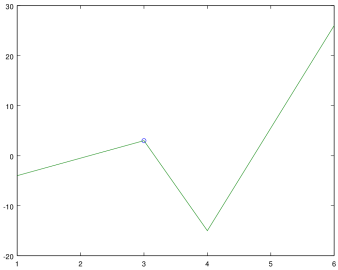
10 de Junio de 2015

Splines cuadráticos

Definición

Un **spline cuadrático** es una función $s \in S_2^1(P)$, para cierta partición P sobre un intervalo.





Dimensión del espacio

Proposición

Sea $[a, b]$ *intervalo,* $P = \{x_i\}_{i=0\ldots n} \in \mathscr{P}([a, b])$*, entonces* $\dim(S_2(P)) = n + 2$.

Demostración.

Podemos deducirlo a partir de la fórmula general:

$$\dim(S_k^r(P)) = (k - r)n + r + 1$$

Así:

$$\dim(S_2^1(P)) = (2 - 1)n + 1 + 1 = 2$$

□

Dimensión del espacio

Proposición

Sea $[a, b]$ *intervalo,* $P = \{x_i\}_{i=0\ldots n} \in \mathscr{P}([a, b])$*, entonces* $\dim(S_2(P)) = n + 2$.

Demostración.

Podemos deducirlo a partir de la fórmula general:

$$\dim(S_k^r(P)) = (k - r)n + r + 1$$

Así:

$$\dim(S_2^1(P)) = (2 - 1)n + 1 + 1 = 2$$

□

Dimensión del espacio

Proposición

Sea $[a, b]$ *intervalo,* $P = \{x_i\}_{i=0\ldots n} \in \mathscr{P}([a, b])$*, entonces* $\dim(S_2(P)) = n + 2$.

Demostración.

Podemos deducirlo a partir de la fórmula general:

$$\dim(S_k^r(P)) = (k - r)n + r + 1$$

Así:

$$\dim(S_2^1(P)) = (2 - 1)n + 1 + 1 = 2$$

$\square$

Dimensión del espacio

Proposición

Sea $[a, b]$ *intervalo,* $P = \{x_i\}_{i=0\dots n} \in \mathscr{P}([a, b])$*, entonces* $\dim(S_2(P)) = n + 2$.

Demostración.

Podemos deducirlo a partir de la fórmula general:

$$\dim(S_k^r(P)) = (k - r)n + r + 1$$

Así:

$$\dim(S_2^1(P)) = (2 - 1)n + 1 + 1 = 2$$

$\square$

Dimensión del espacio

Proposición

Sea $[a, b]$ *intervalo,* $P = \{x_i\}_{i=0\ldots n} \in \mathscr{P}([a, b])$*, entonces* $\dim(S_2(P)) = n + 2$.

Demostración.

Podemos deducirlo a partir de la fórmula general:

$$\dim(S_k^r(P)) = (k - r)n + r + 1$$

Así:

$$\dim(S_2^1(P)) = (2 - 1)n + 1 + 1 = 2$$

$\square$

Base del espacio

Base

Conocida la dimensión podemos establecer una base:

$$\{1, x, x^2, (x - x_1)_+^2, ..., (x - x_{n-1})_+^2\}$$

Problema de interpolación

Problema

Hallar $s \in S_2(P)$ tal que para todo $0 \leq i \leq n$, $s(x_i) = y_i$ y para un cierto k, $s'(x_k) = d_k$.

Los datos del problema son:

$$\begin{array}{c|ccccc} x_i & x_0 & \cdots & x_k & \cdots & x_n \\ y_i & y_0 & \cdots & y_k & \cdots & y_n \\ d_i & & & d_k & & \end{array}$$

Método local

Dada la derivada en el nodo k, podemos calcular mediante diferencias divididas los trozos a ambos lados:

Si d_k queda a la **derecha** del trozo:

$$\begin{array}{llll} x_{k-1} & y_{k-1} & & \\ x_k & y_k & p_k & \\ x_k & y_k & d_k & \frac{d_k - p_k}{h_k} \end{array}$$

$$s_k(x) = y_{k-1} + p_k(x - x_{k-1}) + \frac{d_k - p_k}{h_k}(x - x_{k-1})(x - x_k)$$

Método local

Dada la derivada en el nodo k, podemos calcular mediante diferencias divididas los trozos a ambos lados:

Si d_k queda a la **izquierda** del trozo:

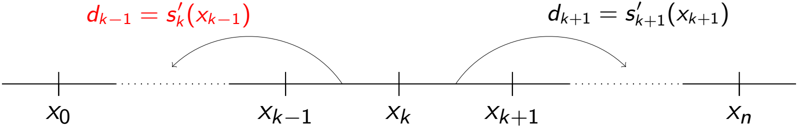
$$\begin{array}{llll} x_k & y_k & & \\ x_k & y_k & d_k & \\ x_{k+1} & y_{k+1} & p_{k+1} & \frac{p_{k+1}-d_k}{h_k} \end{array}$$

$$s_{k+1}(x) = y_k + d_k(x - x_k) + \frac{p_{k+1} - d_k}{h_{k+1}}(x - x_k)(x - x_k)$$

Método local

Repetimos este proceso actualizando la derivada:

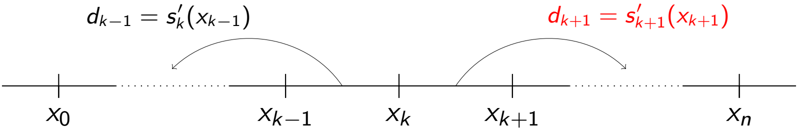
- Hacia la izquierda, aplicando la primera fórmula.
- Hacia la derecha, aplicando la segunda fórmula.



Método local

Repetimos este proceso actualizando la derivada:

- Hacia la izquierda, aplicando la primera fórmula.
- Hacia la derecha, aplicando la segunda fórmula.



Ejemplo: Método local

Método local

Hallar $s \in S_2(-1, 1, 3, 6, 7)$ que interpole los datos de la tabla.

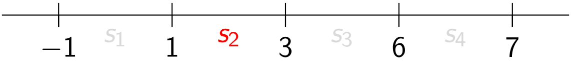
x_i	-1	1	3	6	7
y_i	1	4	8	2	9
d_i			5		

Ejemplo: Método local

Primero avanzamos hacia la izquierda:

1	4		
3	8	2	
3	8	5	$\frac{3}{2}$

$$s_2(x) = 4 + 2(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)(x-3)$$



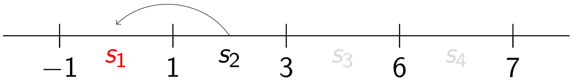
Ejemplo: Método local

Primero avanzamos hacia la izquierda:

-1	1		
1	4	$\frac{3}{2}$	
1	4	-1	$\frac{-5}{4}$

$$s_1(x) = 1 + \frac{3}{2}(x+1) - \frac{5}{4}(x+1)(x-1)$$

$d_1 = s_2'(x_1) = -1$

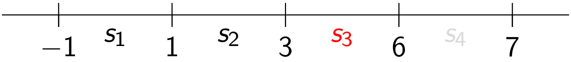


Ejemplo: Método local

Y después hacia la derecha:

3	8		
3	8	5	
6	2	-2	$\frac{-7}{3}$

$$s_3(x) = 8 + 5(x-3) - \frac{7}{3}(x-3)(x-3)$$

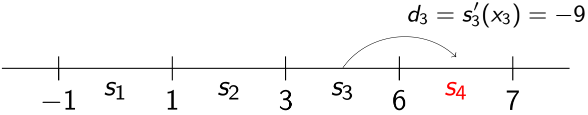


Ejemplo: Método local

Y después hacia la derecha:

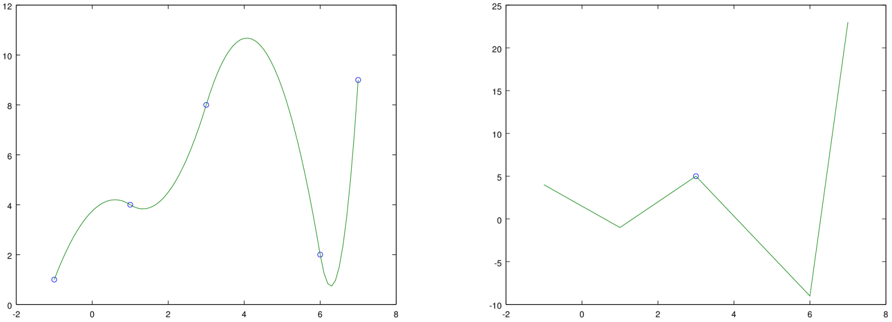
6	2		
6	2	-9	
7	9	7	16

$$s_4(x) = 2 - 9(x-6) + 16(x-6)(x-6)$$



Ejemplo: Método local

$$s(x) = \begin{cases} 1 + \frac{3}{2}(x+1) - \frac{5}{4}(x+1)(x-1) & x \in [-1,1] \\ 4 + 2(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)(x-3) & x \in (1,3] \\ 8 + 5(x-3) - \frac{7}{3}(x-3)(x-3) & x \in (3,6] \\ 2 - 9(x-6) + 16(x-6)(x-6) & x \in (6,7] \end{cases}$$



Método global

Resolvemos el sistema, añadiendo la condición para la derivada:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & (x_1 - x_1)_+^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & (x_n - x_1)_+^2 & \cdots & (x_n - x_{n-1})_+^2 \\ 0 & 1 & 2x_k & 2(x_k - x_1)_+ & \cdots & 2(x_k - x_{n-1})_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \\ d_k \end{pmatrix}$$

$$s(x) = a + bx + cx^2 + \alpha_1 (x - x_1)_+^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(x - x_{n-1})_+^2$$

Método global

Resolvemos el sistema, añadiendo la condición para la derivada:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & (x_1 - x_1)_+^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & (x_n - x_1)_+^2 & \cdots & (x_n - x_{n-1})_+^2 \\ 0 & 1 & 2x_k & 2(x_k - x_1)_+ & \cdots & 2(x_k - x_{n-1})_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \\ d_k \end{pmatrix}$$

$$s(x) = a + bx + cx^2 + \alpha_1(x - x_1)_+^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(x - x_{n-1})_+^2$$

Método global

Resolvemos el sistema, añadiendo la condición para la derivada:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & (x_1 - x_1)_+^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & (x_n - x_1)_+^2 & \cdots & (x_n - x_{n-1})_+^2 \\ 0 & 1 & 2x_k & 2(x_k - x_1)_+ & \cdots & 2(x_k - x_{n-1})_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \\ d_k \end{pmatrix}$$

$$s(x) = a + bx + cx^2 + \alpha_1(x - x_1)_+^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(x - x_{n-1})_+^2$$

Ejemplo: Método global

Método global

Hallar $s \in S_2(2, 4, 5, 8)$ que interpole los datos de la tabla.

x_i	2	4	5	8
y_i	7	3	5	5
d_i		4		

Ejemplo: Método global

Debemos hallar $a, b, c, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que, para $x \in [2, 8]$:

$$s(x) = a + bx + cx^2 + \alpha_1 (x-4)_+^2 + \alpha_2 (x-5)_+^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 25 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 64 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$a = 35 \quad b = -20 \quad c = 3 \quad \alpha_1 = -5 \quad \alpha_2 = 2$$

Ejemplo: Método global

Debemos hallar $a, b, c, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que, para $x \in [2, 8]$:

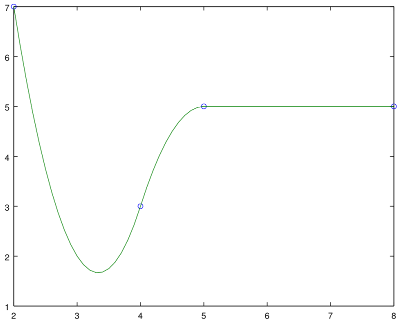
$$s(x) = a + bx + cx^2 + \alpha_1(x-4)_+^2 + \alpha_2(x-5)_+^2$$

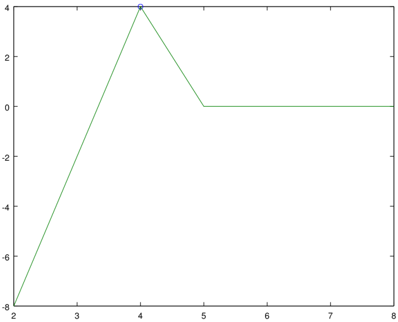
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 25 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 64 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$a = 35 \quad b = -20 \quad c = 3 \quad \alpha_1 = -5 \quad \alpha_2 = 2$$

Ejemplo: Método global

$$s(x) = \begin{cases} 3x^2 - 20x + 35 & x \in [2,4] \\ -2x^2 + 20x - 45 & x \in (4,5] \\ 5 & x \in (5,8] \end{cases}$$





SplineCuad

Implementamos la función con el **método global**.

1. Calculamos la matriz de coeficientes:

```
n = length(x) - 1;

A(:,1) = [ones(n+1,1); 0];
A(:,2) = [x'          ; 1];
A(:,3) = [x'.^2       ; 2.*x(k+1)];

for j = 4 : n + 2
  t      = @(s) (s > x(j-2)) .* (s - x(j-2));
  A(:, j) = [t(x').^2; 2.*t(x(k+1))];
end
```

SplineCuad

Implementamos la función con el **método global**.

2. Y resolvemos el sistema:

```
sol = A \ [y' ; d_k];

for k = 1:n
  p = sol(3:-1:1)';

  for l = 2:k
    p += sol(l+2).*[1, -2.*x(l), x(l).^2];
  end

  B(k, :) = polyaffine(p,[-x(k) 1]);
end

s = mkpp(x,B);
```

SplineCuadLocal

1. Recorremos todos los nodos de `k+1` en adelante:

```
for i = (k+1):(length(x)-1)
  p = (y(i+1)-y(i))/(x(i+1)-x(i));
  q = (p-d)/(x(i+1)-x(i));
  v = [x(i) x(i)];
  s(i,:) = [0, 0, y(i)]+[0, d, -d*x(i)]+q*poly(v);
  d = polyval(polyder(s(i,:)),x(i+1));
end
  d = d_k;
```

SplineCuadLocal

2. Recorremos todos los nodos desde `k` hasta el `1`:

```
for j = k:-1:1
  p = (y(j+1)-y(j))/(x(j+1)-x(j))
  q = (d-p)/(x(j+1)-x(j))
  v = [x(j) x(j+1)]
  s(j,:) = [0 0 y(j)]+[0 p -p*x(j)]+q*poly(v);
  d = polyval(polyder(s(j,:)), x(j))
end
```

SplineCuadLocal

3. Y cambiamos de base usando `polyaffine`:

```
for i = 1:length(s)
  s(i,:) = polyaffine(s(i,:), [-x(i), 1]);
end
```