

# Ampliación de interpolación con Splines

Miguel Anguita Ruiz      Pablo Baeyens Fernández      Pablo David Medina Sánchez  
Rubén Morales Pérez      Francisco Javier Morales Piqueras

## Índice

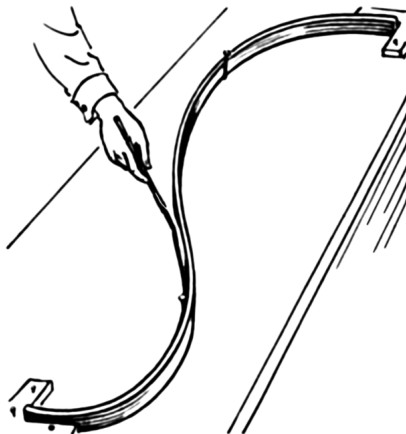
<b>1. Splines cuadráticos</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción a los splines . . . . .	3
1.2. Descripción del espacio de splines cuadráticos . . . . .	3
1.3. Interpolación con splines cuadráticos . . . . .	4
1.3.1. Método local: cálculo trozo a trozo . . . . .	4
1.3.2. Método global: cálculo con una base de potencias truncadas . . . . .	5
1.4. Error en los splines cuadráticos . . . . .	6
1.5. Ejemplos . . . . .	6
<b>2. Splines cúbicos</b>	<b>10</b>
2.1. Construcción a partir de los valores de $S''(x)$ en los nodos $\{x_i\}$ . . . . .	11
2.2. Propiedades de minimización . . . . .	14
2.3. Error en los splines cúbicos . . . . .	15
2.4. Ejemplos . . . . .	16
<b>3. Implementación en ordenador: Octave</b>	<b>18</b>
3.1. Splines cuadráticos . . . . .	18
3.2. Splines cúbicos . . . . .	20
3.2.1. Spline sujeto . . . . .	20
3.2.2. Spline natural . . . . .	21
3.2.3. Spline periódico . . . . .	21
<b>A. Definiciones y notación</b>	<b>23</b>
<b>B. Bibliografía</b>	<b>23</b>



# 1. Splines cuadráticos

## 1.1. Introducción a los splines

La palabra **spline** con el tiempo se usó para referirse a una larga banda flexible generalmente de metal, que podía usarse para dibujar curvas continuas suaves, forzando a la banda a pasar por puntos específicos y trazados a lo largo de dicha curva.



La formalización del concepto de *función spline*, es decir, una curva continua que pasa por ciertos puntos se resume en la siguiente definición:

**Definición.** Sean  $[a, b]$  un intervalo,  $P = \{x_i\}_{i=0 \dots n} \in \mathcal{P}([a, b])$ ,  $k, r \in \mathbb{N}$ ,  $r < k$ . Se dice que  $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es un spline de clase  $r$  y grado  $k$  si  $s \in C^r([a, b])$  y para todo  $1 \leq i \leq n$ ,  $s|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathbb{P}_k$ .  $S_k^r(P)$  es el espacio de dichas funciones.

## 1.2. Descripción del espacio de splines cuadráticos

Partimos de  $[a, b]$  un intervalo y  $P \in \mathcal{P}([a, b])$ . En esta primera sección nos centramos en los splines cuadráticos, los pertenecientes a  $S_2^1(P)$ .

Sus trozos son polinomios de grado menor o igual que 2 de la forma  $ax^2 + bx + c$ . Además son funciones de clase 1 (derivables en  $[a, b]$  con derivada continua), lo que proporciona unas condiciones interesantes para resolver problemas de interpolantes.

**Proposición.** Sea  $[a, b]$  intervalo,  $P = \{x_i\}_{i=0 \dots n} \in \mathcal{P}([a, b])$ , entonces  $\dim(S_2(P)) = n + 2$ .

*Demostración.* Sea  $s \in S_2(P)$ .

- Para cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$   $s|_{[x_{i-1}, x_i]}(x) = ax^2 + bx + c$  para ciertos  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto cada trozo está determinado por 3 parámetros. Con  $n$  trozos tenemos  $3n$  parámetros en total.

- Si imponemos la continuidad y derivabilidad en los extremos tenemos que

$$s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i) \quad s'_i(x_i) = s'_{i+1}(x_i)$$

para todo  $i = 1, \dots, n-1$ . De cada condición se obtienen  $n-1$  ecuaciones, por lo tanto obtendremos:  $n-1 + n-1 = 2n-2$  restricciones.

Por lo tanto,  $\dim(S_2(P)) = 3n - (2n-2) = n+2$ . □

Conociendo la dimensión del espacio podremos establecer una base del espacio de splines cuadráticos con el uso de potencias truncadas. Una *base del espacio* es:

$$\{1, x, x^2, (x-x_1)_+^2, \dots, (x-x_{n-1})_+^2\}$$

### 1.3. Interpolación con splines cuadráticos

#### 1.3.1. Método local: cálculo trozo a trozo

El problema que debemos resolver es el siguiente:

**Problema.** Sea  $[a, b]$  intervalo,  $P \in \mathcal{P}([a, b])$  partición. Hallar  $s \in S_2(P)$  tal que:

$$s(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$s'(x_k) = d_k \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Es decir, sabemos los valores de la función en todos los nodos y el valor de la derivada en el nodo  $k$ .

*Solución.* Si  $k \neq 0$ , para calcular  $s_k$  podemos calcular la tabla de diferencias divididas:

x	y	DD1	DD2
$x_{k-1}$	$y_{k-1}$		
$x_k$	$y_k$	$p_k$	
$x_k$	$y_k$	$d_k$	$\frac{d_k - p_k}{h_k}$

De esta forma,  $s_k$  queda, para  $x \in [x_{k-1}, x_k]$

$$s_k(x) = y_{k-1} + p_k(x - x_{k-1}) + \frac{d_k - p_k}{h_k}(x - x_{k-1})(x - x_k) \quad (1)$$

Conocida la expresión de  $s_k$  podemos calcular  $d_{k-1} = s'_k(x_{k-1})$ , y repetir este proceso para calcular  $s_{k-1}$ , hasta llegar a  $k=1$  ( $s_1$  con derivada  $d_1$ ).

Si  $k \neq n$ , debemos calcular  $s_{k+1}$ . Como sabemos la derivada  $d_k$ , calculamos la tabla de diferencias divididas:

x	y	DD1	DD2
$x_k$	$y_k$		
$x_k$	$y_k$	$d_k$	
$x_{k+1}$	$y_{k+1}$	$p_{k+1}$	$\frac{p_{k+1}-d_k}{h_k}$

De esta forma,  $s_{k+1}$  queda para  $x \in [x_k, x_{k+1}]$  de la siguiente forma:

$$s_{k+1}(x) = y_k + d_k(x - x_k) + \frac{p_{k+1} - d_k}{h_{k+1}}(x - x_k)(x - x_k) \quad (2)$$

El método queda entonces de la siguiente forma:

1. Para  $i$  desde  $k$  hasta 0:
  - a) Calculamos  $d_i$ , (conocida en el primer caso) haciendo  $d_i = s'_{i+1}(x_i)$ .
  - b) Aplicamos la fórmula (1) para calcular  $s_i$ .
2. Para  $i$  desde  $k + 1$  hasta  $n$ :
  - a) Calculamos  $d_i$  haciendo  $d_i = s'_{i-1}(x_i)$
  - b) Aplicamos la fórmula (2) para calcular  $s_i$ .

### 1.3.2. Método global: cálculo con una base de potencias truncadas

Para este método usaremos esta base del espacio vectorial  $S_2(P)$ :

$$\{1, x, x^2, (x - x_1)_+^2, \dots, (x - x_{n-1})_+^2\}$$

Tenemos los siguientes matrices y vectores:

- $G$ : matriz de Gram. Evaluamos los elementos de la base en todos los nodos. Añadimos una ecuación para la primera derivada en  $x_k$ .
- $X$ : vector de coeficientes.
- $b$ : vector con los valores que queremos interpolar.

De esta forma, deberíamos resolver el sistema  $GX = b$ .

Si notamos por  $x_k$  el nodo en el que conocemos la derivada y  $d_k$  la derivada en el nodo, el sistema queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & (x_1 - x_1)_+^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & (x_n - x_1)_+^2 & \cdots & (x_n - x_{n-1})_+^2 \\ 0 & 1 & 2x_k & 2(x_k - x_1)_+ & \cdots & 2(x_k - x_{n-1})_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ d_k \end{pmatrix}$$

Es una matriz escalonada ya que las potencias truncadas serán 0 antes del nodo que las define. Finalmente la solución sería, para  $x \in [a, b]$ :

$$s(x) = a + bx + cx^2 + \alpha_1(x - x_1)_+^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(x - x_{n-1})_+^2$$

#### 1.4. Error en los splines cuadráticos

**Teorema.** Sean  $f \in C^3([a, b])$ ,  $\{x_i\}_{i=0 \dots n} \in \mathcal{P}([a, b])$ ,  $s \in S_2(\{x_i\}_{i=0, \dots, n})$  spline para  $f$  (con derivada dada en un nodo),  $E = f - s$ . Sean:

- $h = \max(\{h_i\}_{i=1 \dots n})$
- $M$  cota superior de  $f'''$
- $D = \max\{|f'(x) - d_i|\}_{i=0 \dots n}$

Entonces, para todo  $x \in [a, b]$ :

$$E(x) \leq \frac{Dh}{4} + \frac{2Mh^3}{81}$$

#### 1.5. Ejemplos

**Problema.** Dados los datos de la tabla, halla mediante el método global el spline cuadrático que interpole los nodos  $x_i$  con  $i = 0, \dots, 3$  y cuya derivada en  $x_1$  sea 4.

$x_i$	2	4	5	8
$y_i$	7	3	5	5
$d_i$		4		

*Solución.* Debemos hallar  $s \in S_2(P)$  con  $a, b, c, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  tales que, para  $x \in [2, 8]$ :

$$s(x) = a + bx + cx^2 + \alpha_1(x-4)_+^2 + \alpha_2(x-5)_+^2$$

Planteamos el sistema de ecuaciones  $GX = b$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 25 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 64 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos la solución  $a = 35, b = -20, c = 3, \alpha_1 = -5, \alpha_2 = 2$ . Por tanto, para  $x \in [2, 8]$ :

$$s(x) = 35 - 20x + 3x^2 - 5(x-4)_+^2 + 2(x-5)_+^2$$

Es decir:

$$s(x) = \begin{cases} 3x^2 - 20x + 35 & x \in [2, 4] \\ -2x^2 + 20x - 45 & x \in (4, 5] \\ 5 & x \in (5, 8] \end{cases}$$

**Problema.** Dados los siguientes datos, calcula el spline cuadrático que los interpola utilizando el método local:

$$\begin{array}{c|ccccc} x_i & -1 & 1 & 3 & 6 & 7 \\ y_i & 1 & 4 & 8 & 2 & 9 \\ d_i & & & 5 & & \end{array}$$

*Solución.* Nos dan la derivada en el nodo 3, procedemos a calcular las diferencias divididas en los nodos 1 y 3 para hallar  $s_2$ :

x	y	DD1	DD2
1	4		
3	8	2	
3	8	5	$3/2$

$s_2$  queda en su intervalo:

$$s_2(x) = 4 + 2(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)(x-3)$$

Ahora estimamos la derivada en el nodo 1:

$$s_2'(x) = 2 + \frac{3}{2} \cdot [(x-3) + (x-1)] = 3x - 4$$

$$s_2'(1) = 3 \cdot 1 - 4 = -1$$

Realizamos de nuevo la tabla de diferencias divididas:

x	y	DD1	DD2
-1	1		
1	4	$\frac{3}{2}$	
1	4	-1	$-\frac{5}{4}$

$s_1$  queda en su intervalo:

$$s_1(x) = 1 + \frac{3}{2}(x+1) - \frac{5}{4}(x+1)(x-1)$$

Ahora que hemos calculado la expresión de  $s$  para todos los intervalos a la izquierda de la derivada, calculamos la función para todos los valores a la derecha de la derivada.

Calculamos las diferencias divididas para nodos 3 y 6:

x	y	DD1	DD2
3	8		
3	8	5	
6	2	-2	$-\frac{7}{3}$

$s_3$  y su derivada se ajustan a su intervalo:

$$s_3(x) = 8 + 5(x-3) - \frac{7}{3}(x-3)(x-3)$$

$$s_3'(x) = 5 - \frac{7}{3}2(x-3) = 5 - \frac{7}{3}2 \cdot (x-3)$$

Estimamos la derivada del nodo 6:

$$s_3'(6) = 5 - \frac{7}{3} \cdot 2 \cdot 3 = -9$$

Finalmente, calculamos  $s_4$ :

x	y	DD1	DD2
6	2		
6	2	-9	
7	9	7	16

De esta forma, la expresión de  $s_4$  sería:

$$s_4(x) = 2 - 9(x-6) + 16(x-6)(x-6)$$

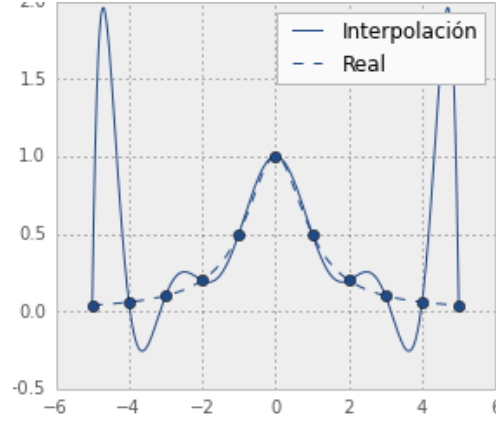


Por lo tanto, el spline buscado es:

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = 1 + \frac{3}{2}(x+1) - \frac{5}{4}(x+1)(x-1) & \text{si } x \in [-1, 1] \\ s_2(x) = 4 + 2(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)(x-3) & \text{si } x \in (1, 3] \\ s_3(x) = 8 + 5(x-3) - \frac{7}{3}(x-3)(x-3) & \text{si } x \in (3, 6] \\ s_4(x) = 2 - 9(x-6) + 16(x-6)(x-6) & \text{si } x \in (6, 7] \end{cases}$$

## 2. Splines cúbicos

Uno de los problemas de la interpolación polinomial es que, al ir aumentando el número de nodos el grado del polinomio requerido para interpolarlos aumenta. Esto conlleva fluctuaciones en los extremos de la interpolación.



Si dividimos el intervalo en una partición podemos interpolar utilizando un polinomio  $S_i(x)$  de grado 3 en cada intervalo, es decir, utilizando **splines cúbicos**. Como veremos después este método minimiza la cota de error.

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) & \text{si } x \in (x_1, x_2] \\ S_i(x) & \text{si } x \in (x_i, x_{i+1}] \\ S_{n-1}(x) & \text{si } x \in (x_{n-1}, x_n] \end{cases} \quad (3)$$

Esta interpolación lineal fragmentaria pasa por los puntos:  $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$

Dentro de los cúbicos encontramos los de clase 1 y 2, denotados por  $S_3^1$  y  $S_3^2$  (ó  $S_3$ ).

1. Los splines cúbicos de **clase 1** son continuos y derivables con derivada continua. Conforman un espacio vectorial de dimensión  $2(n+1)$ . Una base es:

$$\{1, x, x^2, x^3, (x - x_1)_+^2, (x - x_1)_+^3, \dots, (x - x_{n-1})_+^2, (x - x_{n-1})_+^3\}$$

Estos splines no aseguran derivabilidad en los extremos. En un contexto geométrico esto significa que la función no es *suave* en los puntos de unión. Generalmente las condiciones físicas necesitan esa suavidad, y es aquí donde intervienen los splines cúbicos de clase 2.

2. Los splines cúbicos de **clase 2** son continuos y 2 veces derivables. A partir de la fórmula general, la dimensión de este espacio para una partición  $\{x_i\}_{i=0, \dots, n}$  es  $\dim(S_3^2(P)) = (3-2)n + 2 + 1 = n + 3$ . Como tenemos  $n + 1$  variables, tenemos 2 libertades en la resolución.

## 2.1. Construcción a partir de los valores de $S''(x)$ en los nodos $\{x_i\}$

Vamos a plantear un método de resolución utilizando las segundas derivadas, denotamos, para  $i = 1, \dots, n-1$ :  $M_i = S''(x_i)$ , que son desconocidos a priori salvo en un spline natural.

Como el spline es de clase 2, tenemos para  $i = 1, \dots, n-1$ :

$$S''(x_i) = S''_i(x_i) = S''_{i+1}(x_i)$$

La restricción a cada intervalo de  $S$  es un polinomio  $S_i$  de grado 3, por ende,  $S''_i$  es lineal, con expresión para  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ :

$$S''_i(x) = M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}$$

Integramos dos veces usando que  $S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$  y  $S_i(x_i) = y_i$  para las constantes de integración, obteniendo, para  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ :

$$S_i(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + (y_{i-1} - \frac{M_{i-1}h_i^2}{6}) \cdot \frac{x_i - x}{h_i} + (y_i - \frac{M_i h_i^2}{6}) \cdot \frac{x - x_{i-1}}{h_i}$$

Esta ecuación nos permite calcular  $S$  conocidas  $M_i$  con  $i = 0, 1, \dots, n$ . Las condiciones de suavidad en las ligaduras nos permiten igualar  $S'_{i+1}(x_i) = S'_i(x_i)$ . Derivando una vez, si  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ :

$$S'_i(x) = -M_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - (M_i - M_{i-1}) \frac{h_i}{6}$$

Si  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ :

$$S'_{i+1}(x) = -M_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_{i+1}} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - (M_{i+1} - M_i) \frac{h_{i+1}}{6}$$

Recordando que  $h_i = x_i - x_{i-1}$  e igualando  $S'_{i+1}(x_i) = S'_i(x_i)$ :

$$-M_i \frac{h_{i+1}}{2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - (M_{i+1} - M_i) \frac{h_{i+1}}{6} = M_i \frac{h_i}{2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - (M_i - M_{i-1}) \frac{h_i}{6}$$

Agrupamos los  $M_i$ :

$$-M_i \frac{h_{i+1}}{2} + M_i \frac{h_{i+1}}{6} - M_i \frac{h_i}{2} + M_i \frac{h_i}{6} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} = M_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} + M_{i-1} \frac{h_i}{6}$$

Multiplicamos a ambos lados por 6, sacamos factor común y recordamos que  $p_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$ :

$$6M_i \left( \frac{-3h_{i+1}}{6} + \frac{h_{i+1}}{6} - 3\frac{h_i}{6} + \frac{h_i}{6} \right) + 6(p_{i+1} - p_i) = M_{i+1}h_{i+1} + M_{i-1}h_i$$

Agrupando y multiplicando  $M_i$  arriba y abajo por  $(-2)$ :

$$-2M_i \frac{-2h_{i+1} - 3h_i + h_i}{-2} + 6(p_{i+1} - p_i) = M_{i+1}h_{i+1} + M_{i-1}h_i$$

Pasamos el  $M_i$  a la derecha y dividimos por  $(h_{i+1} + h_i)$  en ambos lados:

$$6 \frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1} + h_i} = M_{i+1} \frac{h_{i+1}}{h_{i+1} + h_i} + M_{i-1} \frac{h_i}{h_{i+1} + h_i} + 2M_i$$

Denotando por  $\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}$ ,  $\lambda_i = 1 - \mu_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$  y  $\gamma_i = 6 \frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1} + h_i}$ :

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = \gamma_i \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (4)$$

Con los  $M_i$  en las ligaduras tendremos  $(n-1)$  condiciones, para que el sistema sea determinado nos faltan dos condiciones. Hay diferentes condiciones que se nos pueden presentar:

#### ■ Spline sujeto

$S'_1(x_0) = f'_0$  y  $S'_n(x_n) = f'_n$ . De acuerdo con la fórmula de  $S'(x)$  obtenemos:

$$\begin{aligned} f'_0 &= -\frac{M_0 h_1}{2} + f[x_0, x_1] - \frac{(M_1 - M_0)h_1}{6} \\ \implies 2M_0 + M_1 &= \frac{6(f[x_0, x_1] - f'_0)}{h_1} = 6f[x_0, x_0, x_1] \end{aligned} \quad (5)$$

Donde el último paso se deduce de (7)

Equivalentemente para  $x_n$ :

$$\begin{aligned} S'_n(x_n) &= -\frac{M_{n-1}(x_n - x_n)^2}{2h_n} + \frac{M_n(x_n - x_{n-1})^2}{2h_n} + \frac{(y_n - y_{n-1})}{h_n} - \frac{(M_n - M_{n-1})h_n}{6} \\ \implies M_{n-1} + 2M_n &= 6f[x_{n-1}, x_n, x_n] \end{aligned} \quad (6)$$

Denotando por  $\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}$ ,  $\lambda_i = 1 - \mu_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$  y  $\gamma_i = 6 \frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1} + h_i}$ :

Usando (7), (5), (6) y teniendo en cuenta que  $\gamma_0 = \mu_0 = 0$  la matriz del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

### ■ Spline natural

En este caso  $M_0 = 0$  y  $M_n = 0$ ,  $\lambda_0 = \mu_n = 1$  por lo que el sistema queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{n-2} \\ \gamma_{n-1} \end{pmatrix}$$

A partir del valor de los  $M_i$  se obtienen los polinomios  $S_i(x)$  en cada intervalo.

### ■ Spline periódico

En este caso  $S'_1(x_0) = S'_n(x_n)$  y  $S''_1(x_0) = S''_n(x_n)$ . Como se sigue cumpliendo que

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = \gamma_i \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (7)$$

el sistema queda algo así:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & ? & \cdots & \cdots \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \cdots & \cdots & ? & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \\ ? \end{pmatrix}$$

En el spline periódico  $M_0 = M_n$ , podemos razonarlo de la forma siguiente:

$$S''_1(x_0) = M_0 \frac{h_1}{h_1} + M_1 \frac{x_0 - x_0}{h_1} = S''_n(x_n) = M_{n-1} \frac{x_n - x_n}{h_n} + M_n \frac{h_n}{h_n} \implies M_0 = M_n$$

$\implies$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \cdots & \cdots & ? & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \\ ? \end{pmatrix}$$

Igualando las primeras derivadas en el primer y último nodo:

$$\begin{aligned}
S'_1(x_0) &= -\frac{M_0 h_1}{2} + \frac{M_0 h_1}{6} + f[x_0, x_1] - \frac{M_1 h_1}{6} = M_n h_n / 2 + f[x_{n-1}, x_n] - \frac{M_n - M_{n-1}}{6} h_n = S'_n(x_n) \\
&\implies -\frac{M_0 h_1}{2} + f[x_0, x_1] - \frac{(M_1 - M_0) h_1}{6} = \frac{M_{n-1} (x_n - x_n)^2}{h_n} + \frac{M_n h_n^2}{2 h_n} + f[x_{n-1}, x_n] - \frac{M_n h_n}{6} + \frac{M_{n-1} h_n}{6} \\
&\dots \implies -2M_0 h_1 - M_1 h_1 - 2M_n h_n - M_{n-1} h_n = -6(f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]).
\end{aligned}$$

El sistema queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ -2h_1 & -h_1 & \cdots & -2h_n & -5h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \\ -6(f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]) \end{pmatrix}$$

A partir del valor de los  $M_i$  se obtienen los polinomios  $S_i(x)$  en cada intervalo.

## 2.2. Propiedades de minimización

Comenzamos planteando un problema de minimización sobre el espacio euclídeo  $(C^2([a, b]), < \cdot, \cdot >)$ , con la métrica y norma definida de la forma usual:

$$< f, g > = \int_a^b f g, \quad \|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2}$$

Planteamos el problema:

**Problema.** Sea  $f \in C^2([a, b])$ ,  $P \in \mathcal{P}([a, b])$ . Sea  $H \subset C^2([a, b])$  definido por:

$$H = \{g \in C^2([a, b]) : \forall x_i \in P \ g(x_i) = f(x_i) \text{ y } g'(a) = f'(a), \ g'(b) = f'(b)\}$$

Hallar  $u \in H$  tal que  $\|u''\|$  sea mínima.

Para resolver el problema, demostramos el siguiente teorema:

**Teorema** (Minimización). Sea  $f \in C^2([a, b])$ ,  $P \in \mathcal{P}([a, b])$ ,  $s$  spline sujeto para  $f$ . Se verifica:

$$\forall u \in H : \|s''\| \leq \|u''\|$$

*Demostración.* Sea  $u \in H$ ,  $e = u - s$ . Tenemos:

$$\|u''\|^2 = \|e'' + s''\|^2 = \|e''\|^2 + \|s''\|^2 + 2 < e'', s'' >$$

Dividimos  $\langle e'', s'' \rangle$  en intervalos:

$$\langle e'', s'' \rangle = \int_a^b e'' s'' = \sum_1^{n-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e'' s''$$

En cada intervalo, integramos por partes:

$$\sum_1^{n-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e'' s'' = \sum_1^{n-1} e'(x) s''(x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \sum_1^{n-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e' s'''$$

La primera sumatoria es una suma telescópica, por lo que conservamos el primer y último término:

$$\sum_1^{n-1} e'(x) s''(x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = e'(b) s''(b) - e'(a) s''(a) = (u'(b) - s'(b)) s''(b) - (u'(a) - s'(b)) s''(a) = 0$$

ya que  $u, s \in H$ .

En cuanto a la segunda,  $s'''|_{[x_i, x_{i+1}]}$  es constante, por lo que podemos sacarlo de la integral:

$$\sum_1^{n-1} c_i \int_a^b e' = \sum_1^{n-1} c_i (e(b) - e(a)) = 0$$

Es decir,  $\langle e'', s'' \rangle = 0$ . Por tanto:

$$\|u''\|^2 = \|e''\|^2 + \|s''\|^2 + 2 \langle e'', s'' \rangle = \|e''\|^2 + \|s''\|^2 \geq \|s''\|^2$$

donde utilizamos que la norma siempre es positiva. □

Así, podemos observar que el **spline cúbico sujeto** asociado a una función  $f$  tiene la menor norma de su segunda derivada de entre las que interpolan a  $f$  en una partición dada, por lo que resuelve nuestro problema.

### 2.3. Error en los splines cúbicos

**Teorema.** Sea  $f \in C^4([a, b])$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P = \{x_i\}_{i=0 \dots n} \in \mathcal{P}([a, b])$  y  $s \in S_3^1(P)$  spline para  $f$ . Además, sean  $h = \max\{x_i - x_{i-1}\}_{i=1 \dots n}$ ,  $M > 0$  cota superior de  $|f^{iv}|$  en  $[a, b]$  y  $E = f - s$ ,  $x \in [a, b]$ .

Se verifica:

$$|E(x)| \leq \frac{5M}{384} h^4 \tag{8}$$

La demostración, así como cotas para las derivadas, puede consultarse en *Optimal Error Bounds for Cubic Spline Interpolation*, Charles Hall y Weston Meyer, (1976).

## 2.4. Ejemplos

### ■ Sujeto

**Problema.** Hallar spline sujeto tal que:

1. Pasa por los puntos:  $\{(0, 0), (1, 0,5), (2, 2), (3, 1,5)\}$
2.  $S'(0) = 0,2$  y  $S'(3) = -1$

*Solución.* Como los nodos están equiespaciados  $h_i = 1 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$\lambda_0 = \mu_3 = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$$

Calculamos las diferencias divididas para obtener los  $\gamma_i$

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{\gamma_0}{6} &= f[x_0, x_0, x_1] = \frac{f[x_1, x_0] - f[x_0, x_0]}{x_1 - x_0} = \left( \frac{0,5 - 0}{1 - 0} - 0,2 \right) / 1 = 0,3 \\ \blacksquare \frac{\gamma_1}{6} &= f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \left( \frac{2 - 0,5}{1 - 0} - \frac{0,5 - 0}{1 - 0} \right) / 2 = \frac{1}{2} \\ \blacksquare \frac{\gamma_2}{6} &= f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1} = \left( \frac{1,5 - 2}{1 - 0} - \frac{2 - 0,5}{1 - 0} \right) / 1 = -1 \\ \blacksquare \frac{\gamma_3}{6} &= f[x_2, x_3, x_3] = \frac{f[x_3, x_3] - f[x_2, x_3]}{x_3 - x_2} = \left( -1 - \frac{1,5 - 2}{1 - 0} \right) / 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

El sistema queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot \frac{3}{10} \\ 6 \cdot \frac{1}{2} \\ 6 \cdot (-1) \\ 6 \cdot (-\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

Del que obtenemos la solución  $M_0 = -0,36$ ,  $M_1 = 2,52$ ,  $M_2 = -3,72$  y  $M_3 = 0,36$ . Calculamos los trozos finalmente aplicando la fórmula:

$$S_1(x) = M_0 \frac{(x_1 - x)^3}{6} + M_1 \frac{(x - x_0)^3}{6} + (y_0 - \frac{M_0}{6}) \frac{x_1 - x}{1} + (y_1 - \frac{M_1}{6}) \frac{x - x_0}{1} = 0,48x^3 - 0,18x^2 + 0,2x$$

Equivalentemente para  $S_2$  y  $S_3$ , obtenemos la solución:

$$S(x) = \begin{cases} 0,48x^3 - 0,18x^2 + 0,2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -1,04x(x-1)^3 + 1,26(x-1)^2 + 1,28(x-1) - 0,5 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0,68(x-2)^3 - 1,86(x-2)^2 + 0,68(x-2) + 2 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$



■ **Natural**

**Problema.** Hallar spline natural tal que:

1. Pasa por los puntos:  $\{(1, 3), (2, 6), (3, 4), (4, 0)\}$
2.  $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$

*Solución.* Como los nodos están equiespaciados  $h_i = 1 \ \forall i \in \{1..n\}$

$$\mu_2 = \lambda_1 = \frac{1}{2}$$

Calculamos las diferencias divididas para obtener los  $\gamma_i$

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{\gamma_1}{6} &= f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \left( \frac{4-6}{3-2} - \frac{6-3}{2-1} \right) / 2 = -\frac{5}{2} \\ \blacksquare \frac{\gamma_2}{6} &= f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1} = \left( \frac{0-4}{4-3} - \frac{4-6}{3-2} \right) / 2 = -1 \end{aligned}$$

El sistema queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot (-\frac{5}{2}) \\ 6 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

Del que obtenemos la solución  $M_1 = -\frac{36}{5}$ ,  $M_2 = -\frac{6}{5}$ . Calculamos los trozos finalmente aplicando la fórmula:

$$S_1(x) = M_0 \frac{(x_1 - x)^3}{6} + M_1 \frac{(x - x_0)^3}{6} + (y_0 - \frac{M_0}{6}) \cdot \frac{x_1 - x}{1} + (y_1 - \frac{M_1}{6}) \cdot \frac{x - x_0}{1} = 1,2x^3 + 3,6x^2 + \frac{3}{5}x$$

Equivalentemente para  $S_2$  y  $S_3$ , obtenemos la solución:

$$S(x) = \begin{cases} 1,2x^3 + 3,6x^2 + \frac{3}{5}x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x^3 - \frac{48}{5}x^2 + \frac{159}{5}x - 32 & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ \frac{6}{5}x^3 - \frac{72}{5}x^2 + \frac{267}{5}x - 60 & \text{si } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

(una vez descentrados, ver uso de ‘polyaffine’)

### 3. Implementación en ordenador: Octave

#### 3.1. Splines cuadráticos

Utilizando el **método global**, podemos definir fácilmente una función que calcule un spline cuadrático de clase 1:

```
function s = SplineCuad(x, y, d_k, k)
    # Número de intervalos
    n = length(x) - 1;

    # 1, x, x^2
    A(:,1) = [ones(n+1,1); 0];
    A(:,2) = [x' ; 1];
    A(:,3) = [x'.^2 ; 2.*x(k+1)];

    # Potencias truncadas
    for j = 4 : n + 2
        t = @(s) (s > x(j-2)) .* (s - x(j-2));
        A(:, j) = [t(x').^2; 2.*t(x(k+1))];
    end

    # Resolución del sistema
    sol = A \ [y' ; d_k];

    for k = 1:n
        p = sol(3:-1:1)';

        for l = 2:k
            p += sol(l+2).*[1, -2.*x(l), x(l).^2];
        end

        B(k, :) = polyaffine(p,[-x(k) 1]);
    end

    s = mkpp(x,B);
end
```

Otra implementación posible es calcular el spline **a trozos**:

```
function z = SplineCuadLocal(x, y, d_k, k)
    d = d_k;
    h = diff(x);
    p = diff(y)./h;

    #Recorremos todos los nodos de n+1 en adelante:
    if (k != (length(x) - 1))
        for i = (k+1):(length(x)-1)
            q = (p(i) - d)/h(i);
            v = [x(i) x(i+1)];
            s(i,:) = [0, 0, y(i)] + [0, d, -d*x(i)] + q*poly(v);
            d = polyval(polyder(s(i,:)),x(i+1));
        end
        d = d_k;
    endif

    #Recorremos todos los nodos desde n hasta el 1:
    if (k != 0)
        for j = k:-1:1
            q = (d - p(j))/h(j);
            v = [x(j) x(j+1)];
            s(j,:) = [0 0 y(j)] + [0 p(j) -p(j)*x(j)] + q*poly(v);
            d = polyval(polyder(s(j,:)), x(j));
        end
    endif

    for i = 1:(length(x) - 1)
        s(i,:) = polyaffine(s(i,:), [-x(i), 1]);
    end

    z = mkpp(x, s);
end
```

## 3.2. Splines cúbicos

Para el cálculo de splines cúbicos por medio de la segunda derivada resolvemos el sistema y luego aplicamos la fórmula para obtener la expresión de cada fórmula:

### 3.2.1. Spline sujeto

La función para el cálculo del **spline sujeto** queda:

```
function s = SplineSuj (x, y, d_1, d_n)
    n      = length(x) - 1;
    twoes  = 2*ones(1,n+1);
    h      = diff(x);

    mu     = [(h(1:end-1)./(h(1:end-1) + h(2:end))) 1];
    lambda = ones(1,n) - [0 mu(1:end-1)];

    A = diag(mu,-1) + diag(twoes,0) + diag(lambda,1);

    dd1 = diff(y)./h;
    for i=1:(n-1)
        dd2(i)=(dd1(i+1)-dd1(i))/(x(i+2)-x(i));
    end

    gamma(1)  = 6*(dd2(1)-d_1)/(x(2)-x(1));
    gamma(2:n) = 6*dd2(1:n-1);
    gamma(n+1) = 6*(d_n-dd2(n-1))/(x(n+1)-x(n));

    m = A \ gamma';
    s = ppint(ppint(SplineLineal(x, m')));
end
```

### 3.2.2. Spline natural

Para el **spline natural** calculamos la matriz, resolvemos el sistema e integramos añadiendo los datos de las derivadas segundas en los extremos:

```
function s = SplineNat(x, y)
    n = length(x) - 1;

    h = diff(x);      #h_i
    p = diff(y)./h;   #p_i

    twoes = 2*ones(1,n-1);
    mu     = (h(1:end-1)./(h(1:end-1) + h(2:end)));
    lambda = ones(1,n-1) - mu;
    gamma  = diff(p)./(h(1:end-1) + h(2:end));

    if(n < 3)
        A = 2;
    else
        A = diag(twoes) + diag(lambda(1:end-1),1) + diag(mu(2:end),-1)
    end

    m = [0, (A \ (6.*gamma'))', 0];

    for i = 1:n
        p = (-m(i)/6) * poly([x(i+1), x(i+1), x(i+1)]);
        p += (m(i+1)/6) * poly([x(i), x(i), x(i)]);
        p += (y(i)-(m(i)*h(i).^2/6))*[0 0 -1 x(i+1)];
        p += (y(i+1)-(m(i+1)*h(i).^2/6))*[0 0 1 -x(i)];
        p *= 1/h(i);
        B(i,:) = polyaffine(p, [-x(i) 1]);
    end
    s = mkpp(x, B);
end
```

### 3.2.3. Spline periódico

La función del **spline periódico** queda:

```
function s = SplinePer (x, y)
    n     = length(x);
    twoes = 2*ones(1,n);
    h     = diff(x);

    for i=1:(n-2)
        lambda(i+1) = h(i+1)/(h(i+1)+h(i));
    endfor
```

```

for i=1:(n-2)
    mu(i) = h(i)/(h(i+1)+h(i));
endfor

A = diag([mu 0],-1) + diag(twoes) + diag(lambda,1);
A(1,:) = [1 zeros(1,n-2) -1];
A(n,:) = [-2*h(1) -h(1) zeros(1,n-4) -h(n-1) -2*h(n-1)];

dd1 = diff(y)./h; #Primeras derivadas

for i=1:(n-2)
    dd2(i) = (dd1(i+1)-dd1(i))/(x(i+2)-x(i));
endfor

gamma = [0 6*dd2 -6*(dd1(1) - dd1(n-1))];
m      = A\gamma';

for i = 1:n-1
    p = (-m(i)/6) * poly([x(i+1), x(i+1), x(i+1)]);
    p += (m(i+1)/6) * poly([x(i), x(i), x(i)]);
    p += (y(i)-(m(i)*h(i).^2/6))*[0 0 -1 x(i+1)];
    p += (y(i+1)-(m(i+1)*h(i).^2/6))*[0 0 1 -x(i)];
    p *= 1/h(i);
    B(i,:) = polyaffine(p, [-x(i) 1]);
endfor
s = mkpp(x, B);
endfunction

```

## A. Definiciones y notación

**Definición.** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo cerrado y acotado con extremos  $a, b$ :

- Una **partición**  $P$  de  $I$  es un subconjunto finito de  $I$  con  $a, b \in P$ .
- $\mathcal{P}(I)$  es el conjunto de todas las particiones de  $I$ .

**Definición.** Sea  $a \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . La **potencia truncada** en  $a$  de grado  $n$ ,  $(x - a)_+^n$  viene dada por:

$$(x - a)_+^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ (x - a)^n & \text{si } x > a \end{cases}$$

Cualquier potencia truncada de grado  $n$  es de clase  $n - 1$ , y su derivada de orden  $n$  presenta una discontinuidad en  $a$ . La derivada de  $(x - a)_+^n$  en  $x$  es  $n(x - a)_+^{n-1}$ .

Su implementación en Octave es bastante sencilla: dados **a** y **n**, podemos definir la potencia truncada como función anónima de la siguiente forma:

```
pot = @(x) (x > a) * (x - a)^n
```

Como Octave tiene tipos dinámicos convertirá  $(x > a)$  a 1 si  $x > a$  y a 0 en otro caso.

**Definición.** Dado un intervalo  $[a, b]$  y una partición  $\{x_i\}_{i=0 \dots n} \in \mathcal{P}([a, b])$ , se definen, para  $1 \leq i \leq n$ :

- $h_i = x_i - x_{i-1}$
- $p_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$

## B. Bibliografía

- *Quadratic Interpolatory Splines* - W.J.Kammerer, G. W. Reddien, and R.S. Varga
- *Cubic Spline Interpolation* ([https://en.wikiversity.org/wiki/Cubic\\_Spline\\_Interpolation](https://en.wikiversity.org/wiki/Cubic_Spline_Interpolation))
- *Análisis numérico (Novena Edición)* - Richard L. Burden y J. Douglas Faires
- *Analysis of Numerical Methods* - Eugene Isaacson, Herbert Bishop Keller
- *Spline Approximation of Functions and Data* - Universidad de Oslo
- *Optimal Error Bounds for Cubic Spline Interpolation* - Charles A. Hall