

Ampliación de interpolación con Splines

Miguel Anguita Ruiz Pablo Baeyens Fernández Pablo David Medina Sánchez
Ruben Morales Pérez Francisco Javier Morales Piqueras

Índice

1. Splines cuadráticos	2
1.1. Descripción del espacio de splines cuadráticos	2
1.2. Ejemplos	2
2. Splines cúbicos	3
2.1. Construcción a partir de los valores de $s''(x)$ en los nodos $\{x_i\}$	3
2.2. Propiedades de minimización	3
2.2.1. Cota de error en los splines cúbicos	3
2.3. Ejemplos	3
3. Implementación en ordenador: Octave	4
3.1. Spline Lineal	4
3.2. Splines cuadráticos	4

1. Splines cuadráticos

El espacio de splines de clase 2 se nota $S_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Una base sería $\{1, x, x^2, (x - x_1)_+, (x - x_2)_+, \dots, (x - x_n)_+\}$

1.1. Descripción del espacio de splines cuadráticos

El espacio de splines de clase 2 con n nodos se denota $S_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Los splines de clase 2 están constituidos por parábolas, de forma que además de tener una función continua, su derivada también lo es. Por lo tanto, para $i = 1, \dots, n - 1$ tenemos la siguiente condición:

$$\begin{array}{l} s_i(x_i) = s_{i+1}(x_{i+1}) \\ s'_i(x_i) = s'_{i+1}(x_{i+1}) \end{array}$$

Proposición 1 *El conjunto $S_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ satisface las propiedades siguientes:*

1. *Es un espacio vectorial con $\dim(S_2(x_1, x_2, \dots, x_n))$*

1.2. Ejemplos

2. Splines cúbicos

2.1. Construcción a partir de los valores de $s''(x)$ en los nodos $\{x_i\}$

2.2. Propiedades de minimización

2.2.1. Cota de error en los splines cúbicos

Teorema 1 Sea $f \in C^4([a, b])$, $n \in \mathbb{N}$, $P = \{x_i\}_{i=0 \dots n} \in \mathcal{P}([a, b])$ y $s \in S_3^1(P)$ spline para f . Además, sean $h = \max\{x_i - x_{i-1}\}_{i=1 \dots n}$, $M > 0$ cota superior de $|f^{(4)}|$ en $[a, b]$, $E = f - s$, $x \in [a, b]$.

Se verifica:

$$|E(x)| \leq \frac{M}{384} h^4 \quad (1)$$

2.3. Ejemplos

3. Implementación en ordenador: Octave

Hemos implementado las siguientes funciones en Octave:

1. `SplineLineal`: Calcula spline **lineal**. (*Usado en los splines cúbicos*)
2. `Spline31`: Calcula spline de **clase 1**.
3. `SplineNat`: Calcula spline **natural**.
4. `SplinePer`: Calcula spline **periódico**.
5. `SplineSuj`: Calcula spline **sujeto**.
6. `SplineCuad`: Calcula spline **cuadrático** de clase 1.

3.1. Spline Lineal

La función que nos permite calcular un spline lineal es muy

```
function s = SplineLineal(x,y)
    p = diff(y)./diff(x);
    A = [p' y(1:end-1)'];
    s = mkpp(x,A);
end
```

3.2. Splines cuadráticos

Utilizando el sistema que vimos anteriormente, podemos definir fácilmente una función que calcule los coeficientes de un spline cuadrático de clase 1:

```
function s = coefsSplineCuad(x, y, d_k, k)
    # Número de intervalos
    n = length(x) - 1;

    # 1, x, x^2
    A(:,1) = [ones(n+1,1); 0];
    A(:,2) = [x' ; 1];
    A(:,3) = [x'.^2 ; 2.*x(k+1)];

    # Potencias truncadas
    for j = 4 : n + 2
        pot = @(t) (t > x(j-2)) .* (t - x(j-2));
        A(:,j) = [pot(x').^2; 2.*pot(x(k+1))];
    end

    # Resolución del sistema
    s = A \ [y' ; d_k];

end
```

Definimos una función `pot` correspondiente a la potencia truncada en el valor correspondiente: `pot = @(t) (t > x(j-2)) .* (t - x(j-2))`. Como *Octave* tiene tipos dinámicos convertirá `(t > x(j-2))` a 1 o 0. De esta forma, $pot(x) = (x - x_{j-1})_+$.