Proposiciones

Una proposición es un enunciado cuyo contenido está sujeto a ser calificado como "verdadero" o "falso", pero no ambas cosas a la vez. Toda proposición tiene una y solamente una alternativa, sea verdadero o falso.

- Tenemos los siguientes ejemplos de proposiciones:

    - Durango es un estado de Canadá (falso).

    - Los estudiantes de la UNAM son aplicados (verdadero).

- Y también tenemos algunos enunciados que **NO** son proposiciones:
    - No corras, el país te necesita.
    - ¿Cómo te llamas?

Formalización de enunciados

Una de las tareas más importantes para poder aplicar la lógica a los diferentes campos del saber humano es la formalización, también conocida como codificación.
De manera muy simple, podemos decir que la formalización es la traducción de proposiciones dadas en lenguaje ordinario a fórmulas lógicas bien formadas.

Una regla empírica para formalizar desde el lenguaje ordinario al simbolismo lógico es: traduzca el sentido, no las palabras.

La finalidad es que la oración-proposición del lenguaje ordinario y la fórmula lógica expresen el mismo sentido, es decir, que la fórmula lógica represente de la manera más fiel posible lo que la oración quiere decir. Es importante apuntar que estamos dando por hecho que todas las oraciones que queremos formalizar son proposiciones, de ahí la denominación oración-proposición.

- **Formalización de proposiciones simples**

Sabemos que toda oración está compuesta por sujeto y predicado.
Por ejemplo, en la oración:

- Napoleón es emperador de Francia
  p: "Napoleón" es el sujeto
  q: "es emperador de Francia" es el predicado.

- Andrés es futbolista,
  p: "Andrés" es el sujeto
  q: "es futbolista" es el predicado

- Juan se enfermó
  p: "Juan" es el sujeto
  q: "se enfermó"

Todas estas oraciones afirman un sólo hecho, es decir, son proposiciones simples.

- **Formalización de proposiciones compuestas**

Aquellas oraciones donde aparece al menos un conectivo lógico implica que se formalizarán como proposiciones compuestas. En este caso, es común representar cada proposición atómica por una letra minúscula, y relacionarlas entre sí por el conectivo adecuado.

Recuerda que los conectivos lógicos son: la negación (no esto, es falso esto), la conjunción (esto y aquello, esto, pero aquello, esto que aquello), la disyunción (esto o lo otro), la implicación (si esto entonces aquello, aquello si esto, aquello sólo si esto) y la doble implicación lógica (esto si y sólo si aquello).

Por ejemplo:

➢ Napoleón no es emperador de Francia.

Sea

p = Napoleón es emperador de Francia.

¬p = Napoleón no es emperador de Francia

➢ Andrés es futbolista y Juan se enfermó.

Sea

p = Andrés es futbolista

q = Juan se enfermó.

La proposición compuesta es: $p \wedge q$.

➢ París está en Francia si el cielo es azul.

Sea

p = París está en Francia

q = el cielo es azul.

Por tanto, esta proposición se codifica como: $q \rightarrow p$.

Conectores lógicos

Los conectores lógicos, también denominados operandos o conectivos lógicos, es una palabra o símbolo utilizado para conectar dos proposiciones o sentencias bien formadas (atómicas o moleculares). De esta forma, el valor de verdad de la fórmula proposicional compuesta dependerá del valor de verdad de las fórmulas que la componen.

Los conectivos lógicos son de tipo *binario,* ya que unen dos fórmulas que son consideradas como los operandos de la fórmula resultante de la forma:

$$p \; \mathsf{C} \; q = r$$

Donde p y q son proposiciones cualesquiera (atómicas o moleculares), C representa a un conector binario cualquiera y r es la proposición resultante de aplicar el conector sobre ambas proposiciones.

Así mismo, un conectivo lógico puede considerarse como *unario* si únicamente requiere un operando, tal que:

$$\cup \, p = q$$

Tablas de verdad

Las Tablas de verdad muestran la relación que existen entre los valores de verdad de dos proposiciones, y son utilizadas tanto para denotar explícitamente esa relación, así como para obtener el valor de verdad de una proposición compuesta por uno o más conectivos lógicos. Su construcción se ejemplifica a continuación introduciendo los 5 conectivos lógicos principales de la lógica proposicional.

Negación

La negación es un operador unario que invierte el valor de verdad de una proposición cualquiera, y se representa de la siguiente forma:

$$\neg p$$

La proposición formada representa la *negación* de p y puede traducirse al lenguaje natural de las siguientes formas: "*No se cumple que p*", "*No es cierto que p*" o "*No se cumple que p*". Por ejemplo, si *p: hoy es jueves*, entonces $\neg p$: *hoy* ***no*** *es jueves.*

De esta forma, al aplicar el operador ¬ a una proposición p cualquiera que es *Verdadera*, su negación tendrá un valor de verdad *Falso,* es decir, invertirá su valor de verdad y viceversa.

La tabla de verdad para la negación es la siguiente:

p	$\neg \boldsymbol{p}$
V	**F**
F	**V**

Las tablas de verdad están compuestas por las proposiciones operando involucradas y el resultado de aplicar el conectivo sobre ellas. Es posible determinar el número de renglones de una tabla de verdad haciendo uso de la siguiente igualdad:

$$n_{renglones} = 2^n$$

Donde n representa el número de proposiciones involucradas en la tabla de verdad. Es verificable que en este caso $n_{renglones} = 2^1 = 2$, y por tanto, la tabla de verdad estará compuesta únicamente de 2 renglones en total.

Conjunción

La conjunción es un conectivo lógico binario que relaciona dos proposiciones cualesquiera de la siguiente forma:

$$p \wedge q$$

La proposición formada puede traducirse al lenguaje natural como "*p y q*", "*p, pero q*", "*p, aunque q*", "*p no obstante q*" o *"p a pesar de q"*. Por ejemplo, si *p: está lloviendo, q: el suelo está mojado,* entonces *p^q: está lloviendo* **y** *el suelo está mojado.*

La tabla de verdad para la conjunción es la siguiente:

p	*q*	***p^q***
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

Disyunción

La disyunción es un conectivo lógico binario que relaciona dos proposiciones cualesquiera como se muestra a continuación:

$$p \vee q$$

Está proposición se traduce al lenguaje natural como "*p o q*. Por ejemplo, si *p: vamos al cine*, *q: vamos a cenar*, entonces *p v q: vamos al cine o vamos a cenar.*

La tabla de verdad para la disyunción es la siguiente:

p	*q*	***p* v *q***
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Condicional

La condicional es un conectivo lógico binario que relaciona dos proposiciones cualesquiera donde una de ellas es consecuencia directa de otra:

$$p \rightarrow q$$

En el lenguaje natural esto se representa como "*p implica q*", "*si p entonces q*" o "*q es necesaria para p*". En este conectivo lógico, a la proposición p se le conoce como la *hipótesis/antecedente* mientras que a q se le denomina como *conclusión/consecuencia/tesis.* De este modo, si *p: está lloviendo*, *q: el piso está mojado*, entonces puede leerse $p \rightarrow q$: *el que esté lloviendo implica que el piso está mojado*.

La tabla de verdad para la condicional es la siguiente:

p	q	$\boldsymbol{p \rightarrow q}$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

Bicondicional

El bicondicional es un conectivo lógico binario derivado de la condicional que relaciona dos proposiciones cualesquiera donde ambas proposiciones guardan una relación tal que una implica a la otra y viceversa, es decir, si $A \rightarrow B$, entonces también debe cumplirse que $B \rightarrow A$:

$$p \leftrightarrow q$$

Frente a la condicional su traducción al lenguaje natural varía, siendo traducida como: "*p si y solo si q*" o "*p es necesario y suficiente para q*". Por ejemplo, si *p: voy de vacaciones*, *q: apruebo todas mis materias*, entonces $p \leftrightarrow q$: *voy de vacaciones si y solo si apruebo todas mis materias*.

La tabla de verdad para el conectivo bicondicional es la siguiente:

p	q	$\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

Tautología

Una *Tautología* es una fórmula proposicional que, al construir su tabla de verdad, su columna resultante o representativa de la fórmula en cuestión únicamente contiene valores **verdaderos**.

Por ejemplo, sea la siguiente fórmula proposicional $(p \rightarrow q) \vee (p \vee q)$, para obtener la tabla de verdad se considera que esta tendrá un total de $2^2 = 4$ renglones en total. Luego, se sigue el siguiente procedimiento:

- *Se colocan las proposiciones atómicas y moleculares que intervienen en la fórmula proposicional y sus posibles valores de verdad en cada posible situación.*

- *Se coloca la fórmula y se resuelve el valor de verdad de cada uno de los miembros de los paréntesis haciendo uso de las respectivas tablas de verdad de cada uno de los conectivos lógicos básicos. Por ejemplo, para* $(p \rightarrow q)$ *se considera la tabla de verdad de la condicional para asignar los valores de verdad a la columna correspondiente a esa proposición.*

- *Finalmente, se operan las moleculares con los conectivos lógicos correspondientes hasta obtener los valores de verdad de la columna que representa a toda la proposición.*

Una posible estrategia para la construcción de la tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q})$	v	$(p \vee q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Así, para obtener el valor de verdad de la fórmula proposicional se obtiene el valor de verdad de las moleculares que intervienen y, finalmente, esas proposiciones se operan con el conectivo lógico central que las une, que en este caso corresponde a una disyunción.

p	q	$(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q})$	v	$(p \vee q)$
V	V	V	**V**	V
V	F	F	**V**	V
F	V	V	**V**	V
F	F	V	**V**	F

Al revisar los valores de verdad de la columna correspondiente al conectivo lógico central, es posible verificar que la fórmula proposicional anterior se trata de una *tautología*. Esta estrategia de construcción no es única y puede realizarse con otra metodología, pero el resultado final será siempre el mismo.

Contradicción

A diferencia del caso anterior, una *Contradicción* se presenta cuando una fórmula proposicional contiene únicamente valores **falsos** en su tabla de verdad en la columna resultante.

Si tenemos la siguiente fórmula proposicional: $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$, para verificar si es una contradicción se construye su tabla de verdad siguiendo el procedimiento descrito con anterioridad.

Si es necesario, se puede optar por escribir en el lado derecho de la tabla proposiciones auxiliares como, por ejemplo, los valores de verdad de una molecular negada en la fórmula proposicional para facilitar el cálculo. En el siguiente ejemplo se escriben los valores de $(p \vee q)$ antes de aplicar la negación sobre ese miembro:

p	q	$(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$	^	$\neg(p \vee q)$	$(p \vee q)$
V	V	V	**F**	F	V
V	F	F	**F**	F	V
F	V	F	**F**	F	V
F	F	F	**F**	V	F

Finalmente, es posible concluir que la fórmula anterior corresponde a una *contradicción*.

Contingencia

Una *contingencia* se presenta cuando una fórmula proposicional tiene valores **verdaderos** y **negativos** en la columna resultante de su tabla de verdad. Es decir, puede ser verdadera en ciertos casos y ser falsa en otros posibles casos.

Si se tiene la siguiente fórmula proposicional: $(p \vee \neg q) \wedge (p \rightarrow q)$, se procede a construir la tabla de verdad para verificar los valores de la columna resultante:

p	q	$(\boldsymbol{p} \vee \neg\boldsymbol{q})$	^	$(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q})$	$\neg\boldsymbol{q}$
V	V	V	**V**	V	F
V	F	V	**F**	F	V

F	V	F	**F**	V	F
F	F	V	**V**	V	V

Fuente complementaria:
https://sites.google.com/site/mathematicasdiscretesolutions/home/proposiciones/conectivas-logicas