



A G H

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE
WYDZIAŁ FIZYKI I INFORMATYKI STOSOWANEJ

KATEDRA INFORMATYKI STOSOWANEJ I FIZYKI KOMPUTEROWEJ

Projekt dyplomowy

Symulacje intensywności sygnału WiFi

Simulations of WiFi signal intensity

Autor: Jan Tomasz Malczewski
Kierunek studiów: Fizyka Techniczna
Opiekun pracy: dr inż. Alina Mreńca-Kolasińska

Kraków, 2021

Spis treści

1 Wstęp	3
1.1 Cel pracy	3
1.2 Przegląd innych stosowanych rozwiązań	3
1.2.1 Path Loss Model	4
1.2.2 Geometrical Optics Model	5
1.2.3 Podsumowanie	6
2 Teoria	7
2.1 Równanie Helmholtza	7
2.2 Metoda Różnic Skończonych	9
3 Obliczenia	11
3.1 Przypadek 1D	12
3.1.1 Częstotliwość 2.4 GHz	14
3.1.2 Częstotliwość 6 GHz	18
3.2 Przypadek 2D	19
3.2.1 Optymalizacja	21
3.2.2 Symulacja rzeczywistych przykładów	24
4 Podsumowanie	28

Rozdział 1

Wstęp

Sieć WiFi stała się niezbędna do efektywnego funkcjonowania w pracy i w domu. Aktualnie zarejestrowano prawie 5,2 miliardów odbiorników sieci LTE oraz około 870 milionów odbiorników sieci 5G. Przewidywania zakładają, że do roku 2028 liczba ta wzrośnie do 5 miliardów dla nowszej technologii [1]. Biorąc pod uwagę powyższe trendy oraz zwiększającą się ilość elektrośmieci, ważne jest, aby transmisja na wyższą częstotliwość odbyła się w przemyślany sposób. Krótsze fale elektromagnetyczne charakteryzują się mniejszym zasięgiem, dlatego optymalne rozmieszczenie nadajników ma jeszcze większe znaczenie.

Na rynku dostępne są liczne programy stawiające sobie za cel symulacje sygnału WiFi. Zastosowane rozwiązania technologiczne niezależnie czy open-source, czy stanowiące tajemnice firm produkujących oprogramowanie tej kategorii, tworzą skomplikowane i ciężkie do prześledzenia modele.

1.1 Cel pracy

Tematem pracy jest symulacja sygnału WiFi za pomocą metody różnic skończonych. Wykorzystano do tego niejednorodne równanie Helmholtza, którego rozwiązanie jest równoznaczne ze znalezieniem wartości natężenia pola elektromagnetycznego. Zastosowane metody są przejrzyste i jednocześnie dokładne. Mam nadzieję, że poniższa lektura pozwoli Czytelnikowi na proste powtórzenie obliczeń, dostosowując tylko niektóre elementy do indywidualnych potrzeb.

1.2 Przegląd innych stosowanych rozwiązań

Problem opisu propagacji fali elektromagnetycznej w zależności od przenikanego medium oraz przebytego dystansu stanowi temat szeroko omawiany w literaturze.

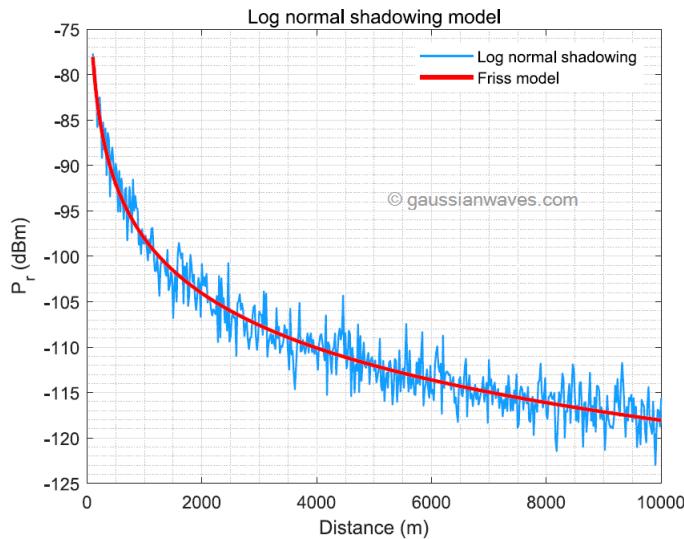
Poniżej przedstawiono wybrane sposoby symulacji mające przedstawić kontekst opisywanego zagadnienia.

1.2.1 Path Loss Model

Jednym z efektywnych modeli, który z powodzeniem jest stosowany do analizy osłabienia sygnału WiFi, stanowi *Log Distance model* [2] lub inaczej *Log Normal Shadowing model*. Jest to rozszerzenie modelu *Friis Free Space Propagation* stosowanego do symulacji w przestrzeni pozabawionej obiektów zakłócających sygnał. Ma on za zadanie zbadać osłabienie siły sygnału w określonych z góry warunkach, takich jak określony typ zabudowania lub droga transmisji. Jest to model empiryczny opisujący jedynie generalnie interesujące nas zagadnienie. Jego zaletą jest prosta forma

$$P_L(d) = P_L(d_0) + 10 n \log_{10} \left(\frac{d}{d_0} \right) + \chi, \quad (1.1)$$

która skraca czas i zmniejsza skomplikowanie obliczeń. W przytoczonym równaniu P_L oznacza *path loss* - osłabienie sygnału przy przebytej drodze, wyrażana w dB. Z kolei n i χ stanowią kolejno, *path loss exponent* - współczynnik osłabienia oraz zmienną losową o rozkładzie Gaussa o zerowej średniej z odchyleniem standardowym σ wyrażoną w dB, używaną tylko wtedy, gdy występuje efekt cieniowania [3].



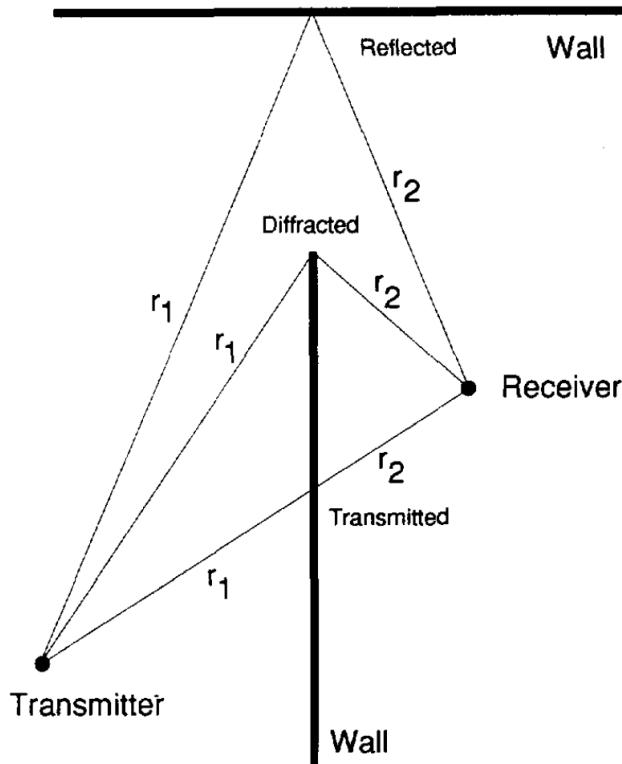
Rysunek 1.1: Wyniki symulacji za pomocą modelu *Log Distance path loss* oraz modelu *Friis Free Space Propagation* zaczerpnięte ze źródła [3]

Jak widać na załączonym powyżej wykresie 1.1, symulacja dobrze sprawdza się do określania osłabienia sygnału nawet dla dużych odległości. Jednak w codziennym zastosowaniu większy nacisk powinien być kładziony na obliczenia w skali kilkun-

stu do kilkudziesięciu metrów, uwzględniające efekty charakterystyczne w propagacji fali elektromagnetycznej jak absorpcja, dyfrakcja, interferencja oraz refleksje od stosowanych materiałów.

1.2.2 Geometrical Optics Model

Przy odpowiednich założeniach z powodzeniem stosuje się przybliżenie fali elektromagnetycznej jako promienia, czyli krzywej dostosowanej do warunków w opisywanym układzie. Należy założyć, że w jednorodnej przestrzeni fala porusza się prostoliniowo, a przy zmianie współczynnika załamania odpowiednio zakrzywia tor lub **rozdziela** dwie części. Tym samym, symulacja uwzględnia refleksje, transmisje i absorpcję fal, ale umyka jej interferencja oraz dyfrakcja. Z tego powodu, do kalkulacji wprowadza się moduły oparte na geometrycznej teorii dyfrakcji, które uzupełniają modele o wspomniane zjawisko. Na obrazie 1.2 zobaczyć można przykładowe efekty. Aby uprościć obliczenia, stosuje się przybliżenie przyosiowe. Dzięki temu równania trygonometryczne zostają uproszczone do obliczeń liniowych i proces śledzenia promieni (ang. *Ray Tracing*) staje się dużo szybszy i prostszy do zaimplementowania.



Rysunek 1.2: Drogi promieni, transmisja, odbicie i dyfrakcja, obraz zaczerpnięty ze źródła [4]

Należy przyłożyć szczególną uwagę do modelu samego symulowanego pomieszczenia. Z racji charakterystyki stosowanego modelu uwzględnia on jedynie duże elementy otoczenia. Zamieszczanie w symulacji przedmiotów o wielkości porównywalnej od długości symulowanej fali wiąże się z przekłamaniem wyników. Z tego powodu modele oparte na tej technologii idealnie nadają się korzystania z planów budynków o standaryzowanym formacie CAD.

1.2.3 Podsumowanie

Powyzsze przykłady klarownie pokazują inne sposoby na budowę modelu propagacji fal. W poniższej pracy skupimy się na rozwiązaniu równania Helmholtza. W odróżnieniu od przytoczonych przykładów otrzymany wynik uwzględniał będzie wszystkie efekty zachodzące w symulowanym obiekcie, nie uciekając się do wzorów empirycznych, które w swojej naturze, ograniczają się do przybliżeń znanych przypadków.

Rozdział 2

Teoria

Aby objąć zjawiska fizyczne uniwersalnym językiem matematycznym, często należy posłużyć się równaniami różniczkowymi. Dzięki narzędziom fizyki teoretycznej jesteśmy w stanie dobrać odpowiednie wyrażenia oraz warunki brzegowe do badanego problemu. W poniższym rozdziale, czerpiącym śmiało z dzieł dr hab., prof. AGH Andrzeja Michała Lendy [5], zasłużonego pracownika naszego wydziału oraz materiałów dydaktycznych prof. Richarda Fitzpatricka z University of Texas w Austin [6]. przybliżone zostanie zagadnienie niezależnego od czasu równania falowego, wykorzystywanego w takich zagadnieniach, jak:

- akustyka,
- sejsmologia,
- fale sprężyste w materiałach,
- fale elektromagnetyczne.

Oczywiście, w kontekście tej pracy, najbardziej interesujące jest ostatnie zastosowanie. Pomimo tego, uzyskane rozwiązania są w swojej naturze uniwersalne.

2.1 Równanie Helmholtza

Równanie **Helmholtza** jest równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu. Stanowi równanie charakterystyczne o operatorach liniowych względem szukanej funkcji ψ . Warunek liniowości operatora \mathcal{L} można zapisać

$$\mathcal{L}(a\psi_1 + b\psi_2) = a\mathcal{L}\psi_1 + b\mathcal{L}\psi_2. \quad (2.1)$$

Warunek ten ma szczególnie duże znaczenie w kontekście tej pracy. Wiemy, że *Przestrzeń rozwiązań równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych jest nieskończonym wielowymiarowa* [5], a ostateczny wynik jest ich sumą. Dlatego istotne

jest określenie odpowiednich warunków brzegowych, uściślających rozwiązanie. Na potrzeby przeprowadzonego poniżej rozumowania założony został warunek zaniku poszukiwanego pola do zera w nieskończoności, który okaże się przydatne w dalszej analizie.

Rozumowanie rozpoczniemy od formy generalnej niejednorodnego równania falowego

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u = v. \quad (2.2)$$

gdzie $u = u(\mathbf{r}, t)$ oznacza szukany potencjał, a $v = v(\mathbf{r}, t)$ znaną funkcję źródła. Założymy, że do obu funkcji możemy zastosować transformacje Fouriera.

$$v(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_{\omega}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2.3)$$

$$u(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\omega}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2.4)$$

Transformacja odwrotna dla powyższych funkcji wyglądać będzie w następujący sposób

$$v_{\omega}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt, \quad (2.5)$$

$$u_{\omega}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt. \quad (2.6)$$

Po transformacji całego równania (2.2) otrzymamy niejednorodne równanie Helmholtza

$$(\Delta + k^2) u_{\omega} = -v_{\omega}, \quad (2.7)$$

gdzie $k = \omega/c$. W dalszym rozdziale rozwiążemy powyższe równanie numerycznie, za pomocą różnic skończonych. W tym miejscu spróbujmy jednak, z racji liniowości równania, znaleźć całkę szczególną techniką funkcji Greena. Założymy funkcje Greena taką, że

$$(\Delta + k^2) G_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.8)$$

Dalej, zaczerpnijmy z literatury [5] rozwiązania równania Poissona $\Delta u_{\omega} = -v_{\omega}$, do którego zredukować można równanie Helmholtza. Oba równania należą do grupy eliptycznych równań różniczkowych cząstkowych.

$$u_{\omega}(\mathbf{r}) = \int_V v_{\omega}(\mathbf{r}') G_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (2.9)$$

Rozwiązanie równania niejednorodnego powinno spełniać warunek radiacyjny Sommerfelda. Zakłada ono, że źródła radiacyjne powinny wysyłać energię w stronę nie-

skończości, zamiast ją odbierać. Ten pozornie prosty warunek zawęża możliwe wyniki do funkcji

$$G_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.10)$$

Jak widzimy, zaproponowana funkcja spełnia również założenie granicy $G_\omega \rightarrow 0$ dla $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$. Po połączeniu równań (2.4), (2.9) oraz (2.10)

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \int \frac{v_\omega(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)\right) d\omega, \quad (2.11)$$

dalej otrzymujemy

$$u(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{v(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.12)$$

Można pokusić się o dalsze rozważania analityczne, tak aby w pełni przedstawić opisywane zagadnienie. Jednak, aby dalsze wyprowadzenie spełniało inżynierski standard, należałoby wprowadzić m.in. odpowiednie harmoniki sferyczne oraz funkcje Hankela. Z racji natury tej pracy, zatrzyma się ono w tym miejscu, odsyłając jednocześnie do lektury wykładów prof. Fitzpatricka [6]. Przytoczone równania skutecznie pokazują fizyczną naturę zagadnienia i nie trywialność rozwiązania analitycznego.

2.2 Metoda Różnic Skończonych

Metoda różnic skończonych (ang. *finite-difference method*) jest stosunkowo prostą metodą numeryczną służącą do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych lub cząstkowych za pomocą rachunku różnicowego. Jej dużą zaletą jest możliwość wykorzystania rachunku macierzowego, który w wielu przypadkach znacznie przyspiesza wykonywanie obliczeń numerycznych. W założeniu metoda ta polega na przybliżeniu pochodnej funkcji dobraną skońzoną różnicą. Odpowiednie wzory wyprowadzić można z rozwinięcia Taylora na siatce stanowiącej dyskretyzację przestrzeni o odległościach dx pomiędzy węzłami

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} dx + \frac{f''(x_0)}{2!} dx^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} dx^n + R_n(dx), \quad (2.13)$$

$$f(x_0 - dx) = f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!} dx + \frac{f''(x_0)}{2!} dx^2 - \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} dx^n + (-1)^n R_n(dx), \quad (2.14)$$

gdzie dla $x_0 < \zeta < x_0 + dx$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} dx^{n+1}. \quad (2.15)$$

Po wybraniu dwóch pierwszych członów w równaniu (2.13) i poczynieniu lekkich przekształceń otrzymujemy schemat różnic zwykłych

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} + O(dx). \quad (2.16)$$

Po wybraniu dwóch pierwszych członów w równaniu (2.14) i poczynieniu lekkich przekształceń otrzymujemy schemat różnic wstecznych

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - dx)}{dx} + O(dx). \quad (2.17)$$

Aby zwiększyć rząd dokładności metody i zmniejszyć rząd niepewności, możemy zastosować centralny iloraz różnicowy poprzez odjęcie od siebie wzorów (2.13) i (2.14) oraz jak poprzednio, wybranie początkowych elementów

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0 - dx)}{2dx} + O(dx^2). \quad (2.18)$$

Dla rozwiązania równania Helmholtza potrzeba przybliżenia drugiej pochodnej. Podążając za analogią, dodajmy od siebie wzory (2.13) i (2.14), tym samym kończąc przekształcenie równań Taylora

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + dx) - 2f(x_0) + f(x_0 - dx)}{dx^2} + O(dx^2). \quad (2.19)$$

W ten sposób otrzymaliśmy narzędzia potrzebne do analizy propagacji funkcji falowej. W obliczeniach pominięty zostanie błąd obcięcia $O(dx^2)$. Jest on zależny w drugiej potędze od długości boku siatki powstałej przy dyskretyzacji przestrzeni. W dalszej części pracy pochylimy się nad zmianą uzyskanych wyników w zależności od wielkości różnicy dx . Ma to szczególne znaczenie, ponieważ od odpowiedniego doboru kroku przestrzennego zależyć będzie rozmiar rozwiązywanych macierzy.

Rozdział 3

Obliczenia

Do obliczenia interesującego nas przypadku należy rozwiązać równanie Helmholtza w każdym punkcie siatki. Dzięki zastosowanej metodzie procesy te są w swojej naturze liniowe. Oznacza to, że możemy je przedstawić w formie równania macierzowego. Rozmiary macierzy opisującej współczynniki równania są podykutowane ilością punktów na stworzonej siatce oraz opisywanym wymiarem.

Korzystając z wyprowadzonego w poprzednim rozdziale równania Helmholtza oraz uwzględniając zmianę liczby falowej k w zależności od przenikanego ośrodka, stosując podejście pracy [7], możemy zapisać

$$\Delta^2 E + k^2 n^2 E = S, \quad (3.1)$$

gdzie $S = S(\mathbf{r})$ stanowi funkcję źródła z uwzględnioną zmianą znaku, a n zespolony współczynnik załamania fali elektromagnetycznej. Zależy on od przenikalności elektrycznej oraz magnetycznej danego ośrodka i, zgodnie z konwencją przyjętą w *International Telecommunication Union* [8]. Według podręcznika prof. Griffina *For most materials μ is very close to μ_0* [9] przybliżona wartość względnej przenikalności magnetycznej $\mu_r = 1$, Dlatego współczynnik opisywany jest równaniem

$$n = \sqrt{\eta' - j\eta''}, \quad (3.2)$$

gdzie część rzeczywista η opisywana jest względną przenikalnością elektryczną

$$\eta' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad (3.3)$$

gdzie ε_0 to przenikalność elektryczna próżni. Z kolei część urojona wyraża się przez

$$\eta'' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}, \quad (3.4)$$

gdzie $\omega = 2\pi f$. Znajomość powyższych zależności pozwala na symulacje dowolnego materiału, czy to nie przewodzące dielektryki, gdzie $\sigma = 0$ i rzeczywisty współczynnik załamania, czy bardziej skomplikowane układy.

Na potrzeby tej pracy użyte zostaną wartości tablicowe powyższych stałych. Wytyczne [8], dla częstotliwości f wyrażonej w GHz określają

$$\eta' = af^b, \quad (3.5)$$

$$\eta'' = 17.98 \frac{\sigma}{f} \quad (3.6)$$

$$\sigma = cf^d. \quad (3.7)$$

Poniżej zamieszczona została tabela z wartościami a , b , c oraz d . W dalszej części pracy skupimy się na wybranych materiałach. Jednak w przypadku potrzeby odtworzenia symulacji wymienione zostały także inne powszechnie używane materiały.

Materiał	a	b	c	d	f [GHz]
Próżnia (powietrze)	1	0	0	0	0.001-100
Beton	5.24	0	0.0462	0.7822	1-100
Cegła	3.91	0	0.0238	0.16	1-40
Płyta gipsowa	2.73	0	0.0085	0.9395	1-100
Drewno	1.99	0	0.0047	1.0718	0.001-100
Szkło	6.31	0	0.0036	1.3394	0.1-100
Szkło	5.79	0	0.0004	1.658	220-450
Gipsowa płyta sufitowa	1.48	0	0.0011	1.0750	1-100
Gipsowa płyta sufitowa	1.52	0	0.0029	1.0029	220-450
Płyta wiórowa	2.58	0	0.0217	0.7800	1-100
Sklejka	2.71	0	0.33	0	1-40
Marmur	7.074	0	0.0055	0.9262	1-60
Panele podłogowe	3.66	0	0.0044	1.3515	50-100
Metal	1	0	10^7	0	1-100
Sucha ziemia	3	0	0.00015	2.52	1-10
Umiarkowanie sucha ziemia	15	-0.1	0.035	1.63	1-10
Mokra ziemia	30	-0.4	0.15	1.3	1-30

Tabela 3.1: Współczynniki a , b , c , d , pozwalające obliczyć zespolony współczynnik załamania fal elektromagnetycznej, wyznaczone dla podanych zakresów. Tabela zaadaptowana ze źródła [8]

3.1 Przypadek 1D

Symulacja w jednym wymiarze stanowi najprostszy przypadek opisywanego problemu. Jednocześnie klarownie pokazuje zachowanie fal na granicy ośrodków. Warto

zaznaczyć, że omawiane równanie jest niezależne od czasu, opisuje przypadek statyczny, po ustabilizowaniu się układu. Dlatego idealnie nadaje się do symulacji rozłożenia sygnału w pomieszczeniach.

Wprowadźmy przybliżenie drugiej pochodnej obliczonej we wzorze (2.19) do równania Helmholtza (3.1) w jednym wymiarze

$$\frac{E(x+dx) - 2E(x) + E(x-dx)}{dx} + k^2 n^2 E(x) = S(x). \quad (3.8)$$

Jeżeli potraktujemy każdy węzeł siatki jako zbiór równań, przyczynków, pochodzących z powyższego równania oraz rozciągniętych na cały zakres wektora \mathbf{E} otrzymamy macierzowy układ równań opisujący rozłożenie natężenia pola elektromagnetycznego w zależności od przyłożonej funkcji źródła. Tak skonstruowane równanie macierzowe możemy wyrazić w następujący sposób

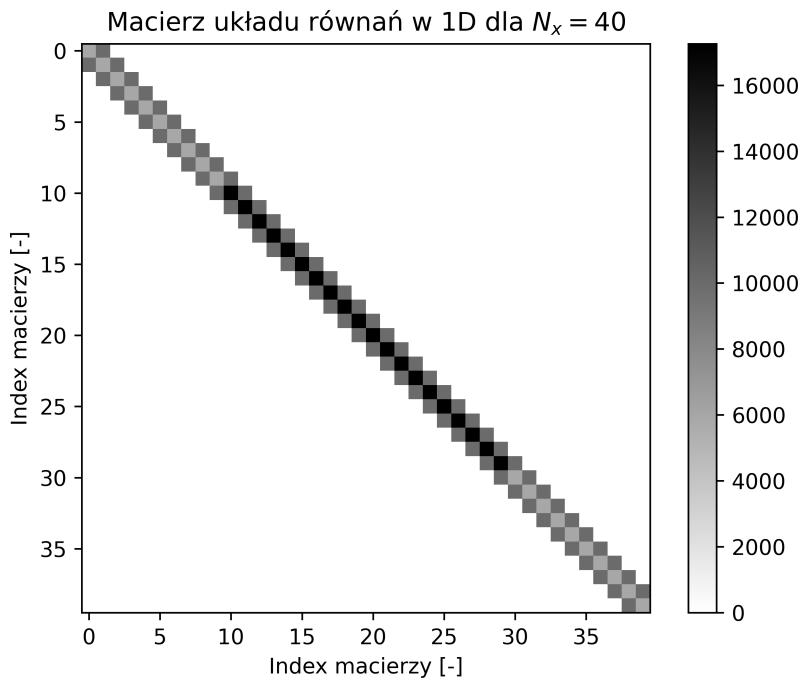
$$\mathbf{AE} = \mathbf{S}, \quad (3.9)$$

gdzie \mathbf{S} oznacza funkcję źródła wypełnioną zerami poza środkowym elementem, gdzie przyjmujemy 10 Vm^{-2} . \mathbf{A} stanowi macierz wypełnioną współczynnikami opisanymi równaniem (3.8) o wymiarach $N_x \times N_x$, gdzie N_x stanowi ilość punktów na, w tym przypadku jednowymiarowej, siatce

$$N_x = \frac{L}{dx}. \quad (3.10)$$

Macierz \mathbf{A} jest w większości pusta, wypełniona na diagonali oraz sąsiadujących polach. Na rysunku 3.1 przedstawiono przykład dla struny ograniczonej na brzegach barierami.

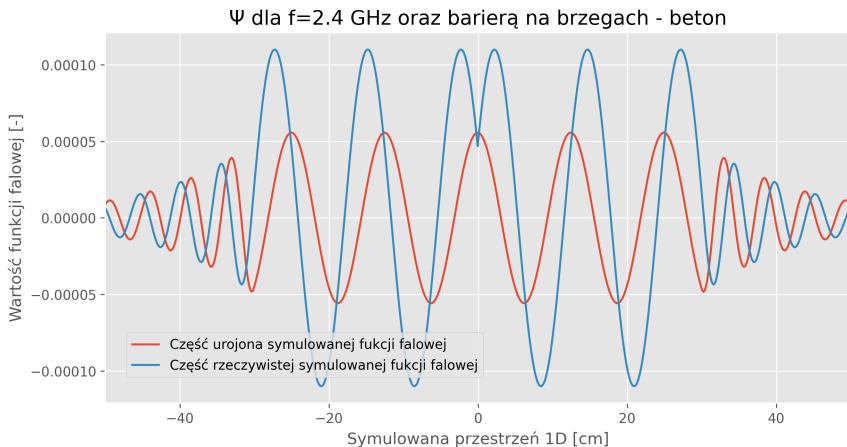
W miejscu należy wspomnieć o warunkach brzegowych. Macierz utworzona powyżej jest w oczywisty sposób ograniczona na krańcach. Sytuacja ta odpowiada warunkowi brzegowemu Dirichleta, gdzie poza obrębem rozważanej przestrzeni wartości elementów \mathbf{A} są równe zeru. Tak określona funkcja falowa "odbije się" od wyznaczonej granicy. Aby uniknąć tego efektu, który w znacznym stopniu zaburza wyniki, należy wprowadzić stosunkowo grubą warstwę materiału skutecznie pochłaniającego fale elektromagnetyczne. Zasymuluje to sytuację, w której fala gaśnie w pustej przestrzeni za barierą.



Rysunek 3.1: Macierz układu równań w przypadku 1D dla struny o długości $L = 40$ cm oraz $dx = 1$ cm

3.1.1 Częstotliwość 2.4 GHz

Na przedstawionych wykresach możemy zaobserwować, jak oddziałuje z barierą, część urojona i rzeczywista symulowanej funkcji. Źródło w formie delty Kroneckera ustawione jest w połowie długości struny. Rozważamy wybrane materiały z tabeli (3.1). Przeszkoda została ustawiona na zakresie $x \in (-5.5, -0.3) \cup x \in (0.3, 5.5)$. Na rysunkach 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 oraz 3.6 widzimy zachowanie fali elektromagnetycznej o częstotliwości 2.4 GHz.

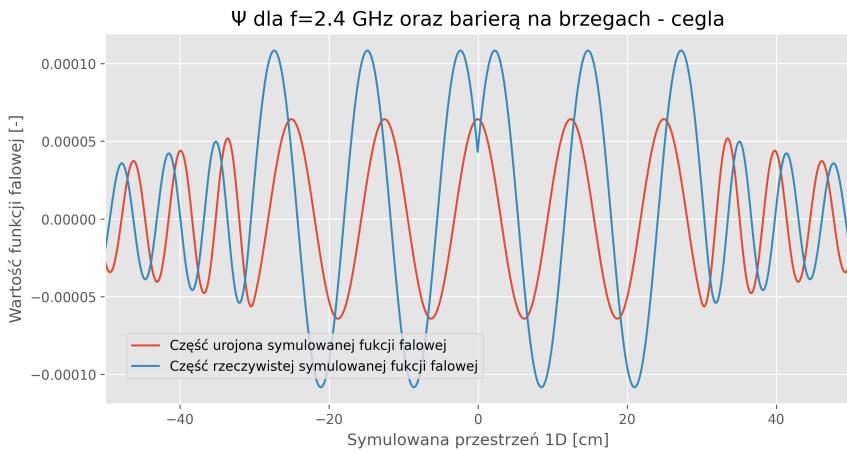


Rysunek 3.2: Wykres zasymulowanej funkcji falowej, wartości rzeczywistej i urojonej, dla przypadku barier z betonu ustawionych na brzegach

Aktualne budownictwo do konstrukcji ścian nośnych szeroko wykorzystuje zbrojony beton. Jak widać na rysunku 3.2, 20 cm tego materiału wystarczy, aby osłabić sygnał o ponad połowę. Jego konduktancja magnetyczna oraz względna przenikalność elektryczna wynoszą

$$\sigma \approx 0.09 \text{ [S/m]} \quad (3.11)$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \approx 5.24 \text{ [-]} \quad (3.12)$$



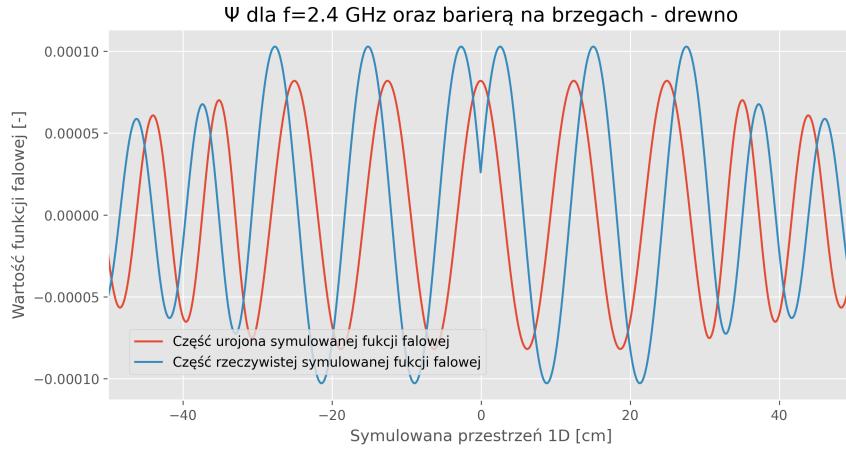
Rysunek 3.3: Wykres zasymulowanej funkcji falowej, wartości rzeczywistej i urojonej, dla przypadku barier z cegły ustawionych na brzegach

Cegła to alternatywny materiał powszechnie wykorzystywany do budowy domów. Na rysunku 3.3 obserwujemy słabsze tłumienie sygnału w porównaniu ze swoim poprzednikiem. Jego konduktancja magnetyczna oraz względna przenikalność elek-

tryczna wynoszą

$$\sigma \approx 0.03 \text{ [S/m]} \quad (3.13)$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \approx 3.91 \text{ [-]} \quad (3.14)$$

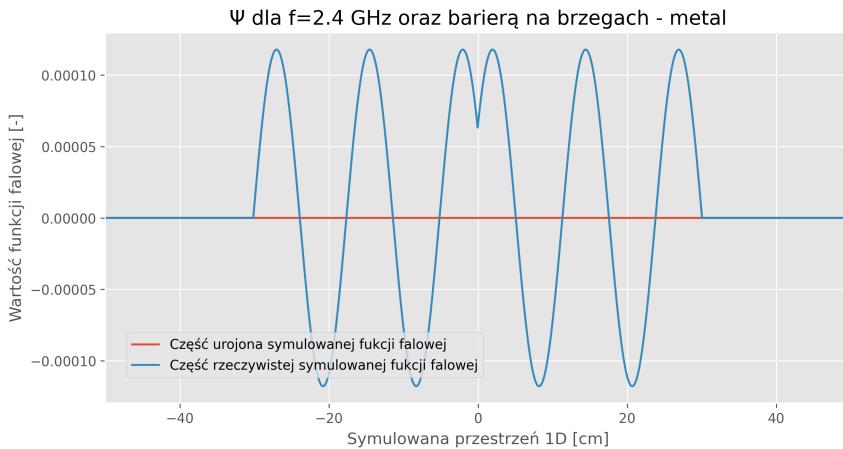


Rysunek 3.4: Wykres zasymulowanej funkcji falowej, wartości rzeczywistej i urojonej, dla przypadku barier z drewna ustawionych na brzegach

Elementy umeblowania domu, często składają się z drewna. Na rysunku 3.4 możemy zauważać, porównując do betonu lub cegły, znaczne osłabienie tłumienia. Ma to szczególne znaczenie podczas projektowania stanowisk pracy lub umiejscowienia źródła sygnału. Konduktancja magnetyczna oraz względna przenikalność elektryczna wynoszą

$$\sigma \approx 0.01 \text{ [S/m]} \quad (3.15)$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \approx 1.99 \text{ [-]} \quad (3.16)$$

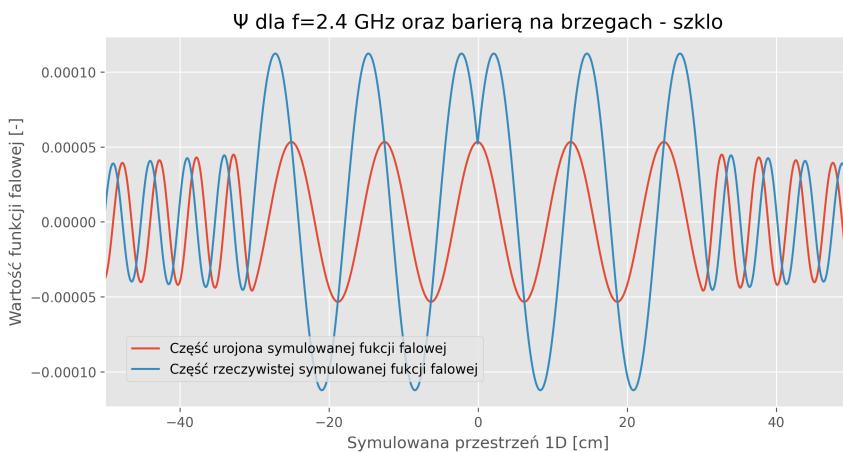


Rysunek 3.5: Wykres zasymulowanej funkcji falowej, wartości rzeczywistej i urojonej, dla przypadku barier z metalu ustawionych na brzegach

Przypadek przedstawiony na rysunku 3.5 przedstawia falę o częstotliwości 2.4 GHz, ograniczoną z dwóch stron metalową barierą. Opowiada on, w gruncie rzeczy, kuchenkom mikrofalowym. Oczywiście wynikiem jest całkowite odbicie od granic "pudełka" i tym samym pełne wygaszenie poza określonym zakresem. Konduktancja magnetyczna oraz względna przenikalność elektryczna wynoszą

$$\sigma \approx 10^7 \text{ [S/m]} \quad (3.17)$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \approx 1.00 \text{ [-]} \quad (3.18)$$



Rysunek 3.6: Wykres zasymulowanej funkcji falowej, wartości rzeczywistej i urojonej, dla przypadku barier ze szkła ustawionych na brzegach

Biorąc pod uwagę, zanieczyszczenie przestrzeni miejskiej tak zwany elektro-

smogiem warto przyjrzeć się, jak warstwa szkła, na przykład w biurowca, wpływa na propagacje fal. Taką sytuację przedstawia rysunek 3.6. Konduktancja magnetyczna oraz względna przenikalność elektryczna wynoszą

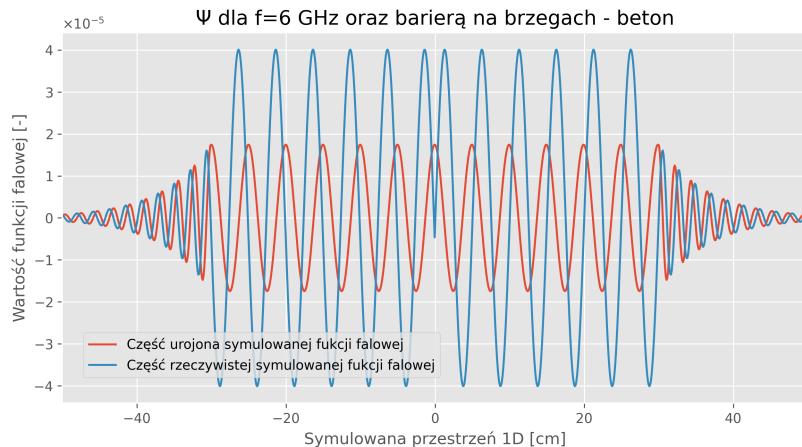
$$\sigma \approx 0.01 \text{ [S/m]} \quad (3.19)$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \approx 6.31 \text{ [-]} \quad (3.20)$$

3.1.2 Częstotliwość 6 GHz

Częstotliwość około 6 GHz odpowiada standardowi Wi-Fi 6E, który pozwala na szybszy przekaz danych i staje się coraz popularniejszy. Niestety wraz ze wzrostem częstotliwości fali zmniejsza się jej długość, $\lambda \approx 5 \text{ cm}$ i mniej. W praktyce oznacza to większą interakcję z przenikającym materiałem oraz wprowadza dodatkowe ograniczenia zastosowanej metody. Z racji stosunkowo małych rozmiarów używanych macierzy w przypadku jednowymiarowym możemy pozwolić sobie na użycie małego, bo aż milimetrowego kroku siatki. W następnym rozdziale, przy modelowaniu przypadku 2D, taki **krok czasowy zużywa** za dużo zasobów obliczeniowych do symulacji na komputerach osobistych.

W poniższych przykładach pominięta została analiza barier ze szkła oraz metalu, ponieważ uzyskane wyniki nie różniły się znaczco do uzyskanych w poprzednim rozdziale.

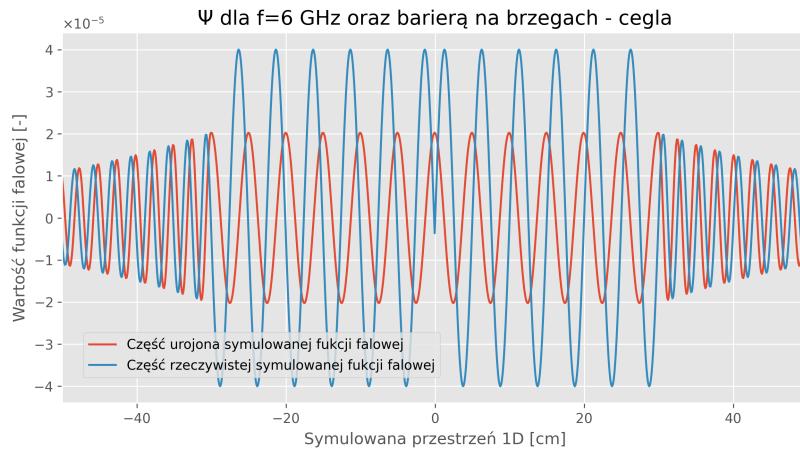


Rysunek 3.7: Wykres zasymulowanej funkcji falowej, wartości rzeczywistej i urojonej, dla przypadku barier z betonu ustawionych na brzegach

Na tym etapie, łatwo można zauważać znaczenie rozmieszczenia źródeł sygnału. Wyższe częstotliwości fal elektromagnetycznych, nowego standardu Wi-Fi 6E powodują szybsze osłabienie w materiale bariery. W przypadku 3.7 osłabienie po

przebyciu 20 cm betonowej ściany stanowi prawie 100% początkowej wartości. Z racji struktury wzoru (3.5) oraz wartości stałej $b = 0$ z tabeli (3.1) wybranych materiałów, wartość względnej przenikalności elektrycznej, a tym samym rzeczywistą część współczynnika załamania n nie zmienia się przy zwiększonej częstotliwości. Z kolei konduktancja magnetyczna wynosi

$$\sigma \approx 0.19 \text{ [S/m].} \quad (3.21)$$



Rysunek 3.8: Wykres zasymulowanej funkcji falowej, wartości rzeczywistej i urojonej, dla przypadku barier z cegły ustawionych na brzegach

Konduktancja magnetyczna cegły (3.8) dla częstotliwości 6 GHz wynosi

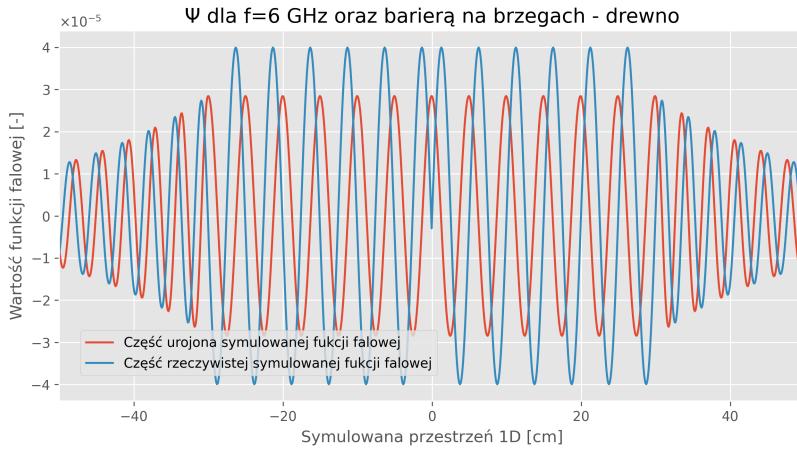
$$\sigma \approx 0.03 \text{ [S/m].} \quad (3.22)$$

Konduktancja magnetyczna drewna (3.9) dla częstotliwości 6 GHz wynosi

$$\sigma \approx 0.03 \text{ [S/m].} \quad (3.23)$$

3.2 Przypadek 2D

Symulacja obejmująca 2 wymiary jest z oczywistych względów bardziej skomplikowana. Już wcześniej do wyznaczenia formy funkcji falowej użyte zostało równanie macierzowe. Na każdy węzeł przestrzennej siatki należy rozwiązać zbiór równań, rozciągnięty według wymiarów \mathbf{E} . W tym przypadku, podążając tokiem rozumowania, powinniśmy zastosować równanie trzywymiarowych tensorów. Aby tego uniknąć, przeprowadzono konwersję z dwuwymiarowej płaszczyzny natężenia pola na jeden dłuższy wektor o odpowiednio zmienionych indeksach.



Rysunek 3.9: Wykres zasymulowanej funkcji falowej, wartości rzeczywistej i urojonej, dla przypadku barier z drewna ustawionych na brzegach

Załóżmy dwuwymiarową przestrzenną siatkę o rozmiarach N_x na N_y i stałych krokach $dx = dy$. Węzły takiego układu mogą zostać ponumerowane za pomocą indeksów (i, j) takich, że $i, j \in \mathbb{N}$, $0 < i \leq N_x$ oraz $0 < j \leq N_y$. Następnie zdefiniować możemy indeks nowego wektora (k) taki, że $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k < N_x \cdot N_y$. Opisujemy go równaniem

$$k = N_y \cdot (i - 1) + j - 1 \quad (3.24)$$

Tak więc sąsiadujące miejsca na siatce $(1,1)$ oraz $(2,1)$ różnić będzie N_y węzłów siatki.

$$\begin{array}{ccc}
 (1, 1) & \rightarrow & 0 \\
 (1, 2) & \rightarrow & 1 \\
 \dots & \dots & \dots \\
 (1, N_y) & \rightarrow & N_y - 1 \\
 (2, 1) & \rightarrow & N_y \\
 \dots & \dots & \dots \\
 (N_x, N_y - 1) & \rightarrow & N_y \cdot N_x - 2 \\
 (N_x, N_y) & \rightarrow & N_y \cdot N_x - 1
 \end{array}$$

Po powyższej konwersji uzyskamy wektor o długości $N_x \cdot N_y$. Oznacza to, że wymiary macierzy \mathbf{A} rosną z $N_x \times N_x$ do $N_x \cdot N_y \times N_x \cdot N_y$. Aby zasymulować metr kwadratowy przestrzeni z krokiem równym 1 mm, należy posłużyć się macierzą o 10^{12} elementach. Razem z tą liczbą rośnie wymaganie do ilości pamięci RAM. Przy zastosowaniu liczb zmiennoprzecinkowych o pojedynczej precyzji, należało by przewidzieć kilkadziesiąt GB pamięci o dostępie swobodnym. Dodatkowo wzrasta ona znaczaco wraz ze wzrostem wymiarów symulowanego obszaru.

3.2.1 Optymalizacja

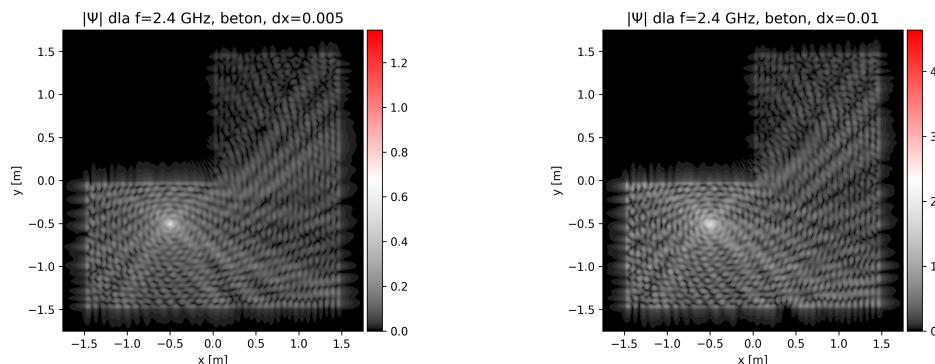
Z powodów opisanych w poprzednim podrozdziale, niezbędne jest znalezienie sposobów na optymalizację wykonywanych obliczeń. W jednym wymiarze porównywalnie łatwo zastosowane zostało przemnożenie równania przez macierz odwrotną \mathbf{A}^{-1} . Wymaga to dużej pamięci i mocy obliczeniowej.

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}. \quad (3.25)$$

Najbardziej oczywistym sposobem na zmniejszenie elementów macierzy jest zwiększenie kroku siatki. Przy symulowaniu mniejszych częstotliwości, w naszym przypadku 2.4 GHz, długość fali wynosi lekko ponad 12 cm, co umożliwia znaczne zwiększenie dx . Jednak przy nowej technologii, która powiązana jest z częstotliwościami ponad 6 GHz, długość fali spada do 5 cm.

Na rysunkach 3.10 oraz 3.11 przedstawione zostały wyniki symulacji modułu funkcji falowej przy zwiększaniu kroku siatki dla częstotliwości 2.4 GHz. W ramach porównania jakości wyniku założono sytuację, w której źródło zostało ustawione stosunkowo blisko betonowej bariery. Dzięki temu zaobserwować można efekty osłabienia sygnału oraz odbicia od naprzeciwległej ściany.

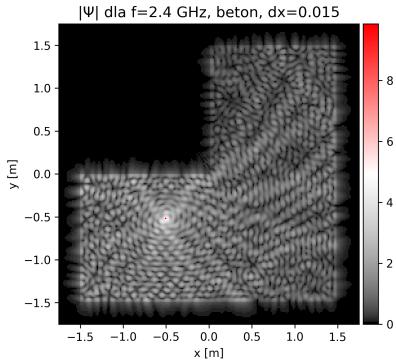
Zakładamy punktowe źródło na wzór delty Kronekera, umieszczone w centrum obszaru o wyższych wartościach pola. Skala kolorystyczna została dobrana do przedstawianych przykładów. Opisywane punkty oznaczone zostały małymi czerwonymi punktami. Wartości ukazane na grafikach posługują się jednostkami arbitralnymi.



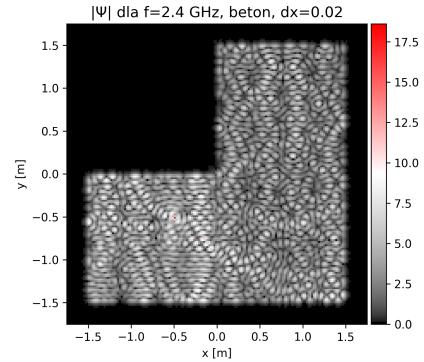
(a) Symulacja źródła ustawionego w pokoju z betonowymi ścianami przy przeszkodzie, częstotliwość $f = 2.4$ GHz, krok przestrzenny siatki $dx = 0.5$ cm

(b) Symulacja źródła ustawionego w pokoju z betonowymi ścianami przy przeszkodzie, częstotliwość $f = 2.4$ GHz, krok przestrzenny siatki $dx = 1$ cm

Rysunek 3.10: Symulacja źródła o częstotliwości $f = 2.4$ GHz, dla 2 różnych przestrzennych korków siatki: 0.5 oraz 1 cm



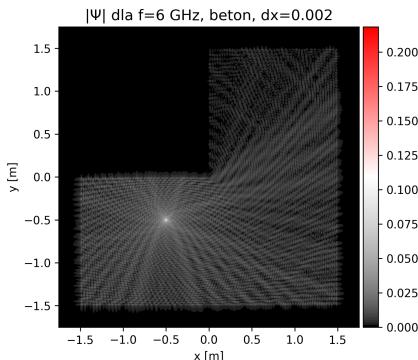
(a) Symulacja źródła ustawionego w pokoju z betonowymi ścianami przy przeszkodzie, częstotliwość $f = 2.4$ GHz, krok przestrzenny siatki $dx = 1.5$ cm



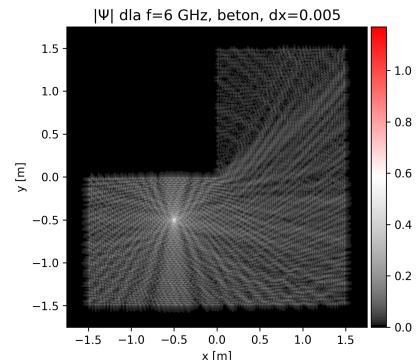
(b) Symulacja źródła ustawionego w pokoju z betonowymi ścianami przy przeszkodzie, częstotliwość $f = 2.4$ GHz, krok przestrzenny siatki $dx = 2$ cm

Rysunek 3.11: Symulacja źródła o częstotliwości $f = 2.4$ GHz, dla 2 różnych przestrzennych korków siatki: 1.5 oraz 2 cm

Na rysunkach 3.12 oraz 3.13 przedstawione zostały wyniki symulacji przy zwiększeniu kroku siatki dla częstotliwości 6 GHz. Sytuacja jest analogiczna do poprzedniego przypadku. Zauważać można, potrzebę znacznego zmniejszenia kroku siatki do dokładnej analizy.



(a) Symulacja źródła ustawionego w pokoju z betonowymi ścianami przy przeszkodzie, częstotliwość $f = 6$ GHz, krok przestrzenny siatki $dx = 0.2$ cm

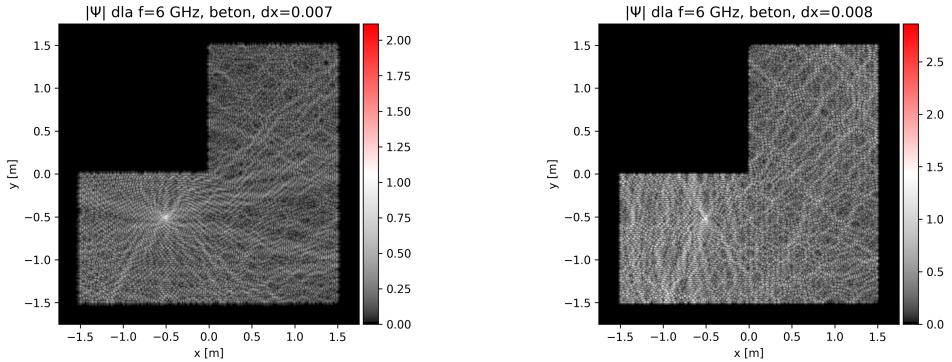


(b) Symulacja źródła ustawionego w pokoju z betonowymi ścianami przy przeszkodzie, częstotliwość $f = 6$ GHz, krok przestrzenny siatki $dx = 0.5$ cm

Rysunek 3.12: Symulacja źródła o częstotliwości $f = 6$ GHz, dla 2 różnych przestrzennych korków siatki: 0.2 oraz 0.5 cm

Na podstawie opracowanych symulacji jesteśmy w stanie ustalić odpowiedni krok przestrzenny, będący pogodzeniem jakości wyników i możliwością obliczeniową dostępnej technologii.



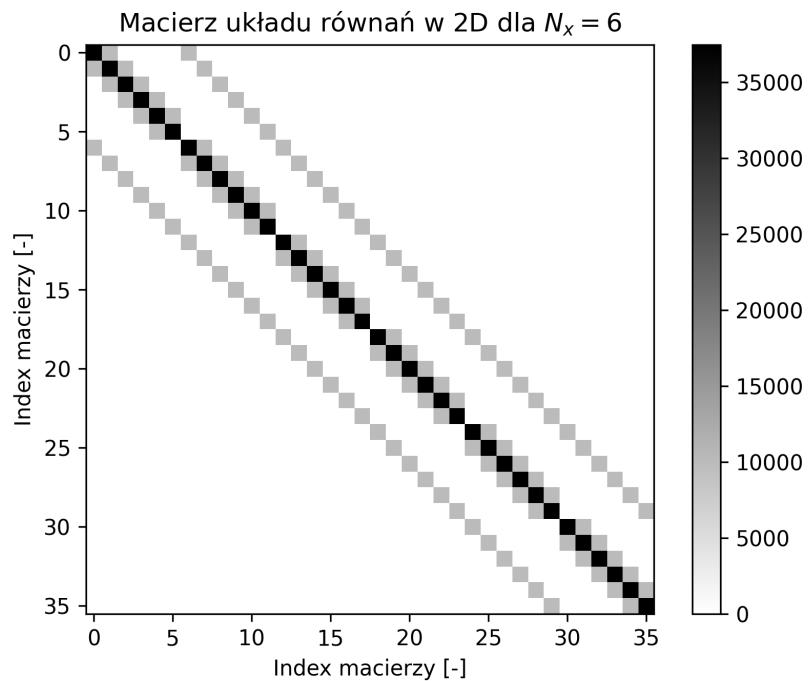


(a) Symulacja źródła ustawionego w pokoju z betonowymi ścianami przy przeszkodzie, częstotliwość $f = 6$ GHz, krok przestrzenny siatki $dx = 0.7$ cm

(b) Symulacja źródła ustawionego w pokoju z betonowymi ścianami przy przeszkodzie, częstotliwość $f = 6$ GHz, krok przestrzenny siatki $dx = 0.8$ cm

Rysunek 3.13: Symulacja źródła o częstotliwości $f = 6$ GHz, dla 2 różnych przestrzennych korków siatki: 0.7 oraz 0.8 cm

Jednak nawet przy zastosowaniu $dx = 1$ cm jesteśmy zmuszeni operować wielkimi macierzami. Zauważać można, że na obrazku 3.1 większość elementów wypełniona jest zerami. Bardzo podobnie wygląda macierz przy symulacji w dwóch wymiarach.

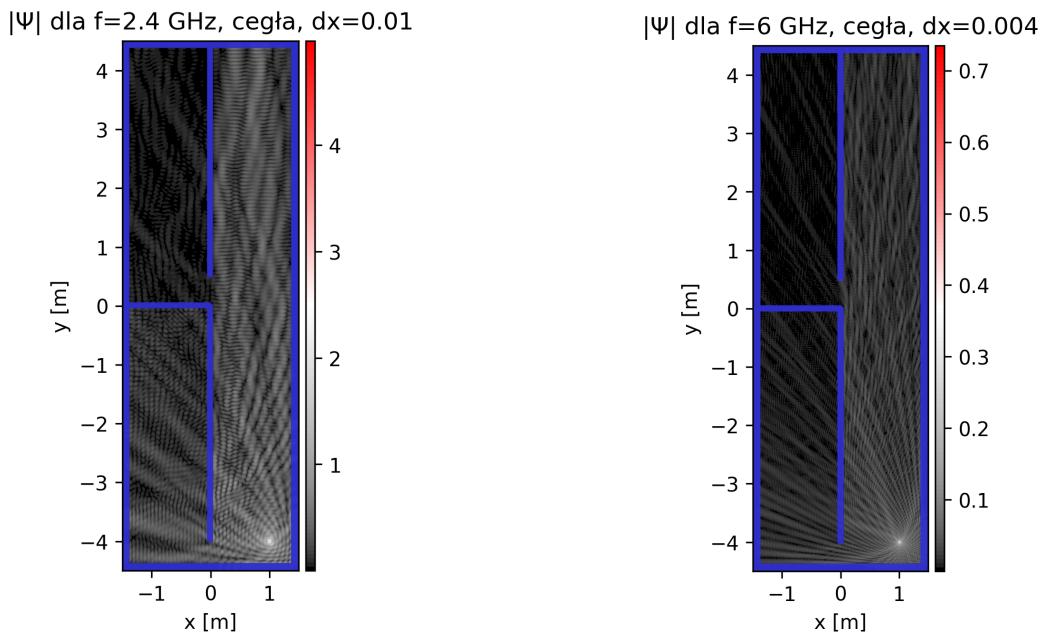


Rysunek 3.14: Macierz układu równań w przypadku 2D dla obiektu o wymiarach $6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ oraz $dx = 1 \text{ cm}$

Rysunek 3.14 przedstawia, jak zmiana indeksowania przestrzeni wpłynęła na rozkład wartości w macierzy. Charakterystyka analizowanego równania powoduje produkcję tak zwanych macierzy rzadkich. Do posługiwania się tymi obiektami, użyta została paczka narzędzi *Sparse matrices* w bibliotece *SciPy*. Zamiast wyliczać odwrotność macierzy, która to nie stanowi macierzy rzadkiej, zastosowano funkcję *spsolve* [10]. Rozwiązuje ona liniowy układ równań, używając przybliżenia *Minimum degree algorithm*. Polega ona na spermutowaniu rzędów oraz kolumn macierzy rzadkiej przed zastosowaniem rozkładu Choleskiego (Banachiewicza) lub metody LU, tak aby zmniejszyć ilość wartości niezerowych podczas przeliczania macierzy trójkątnych danej metody.

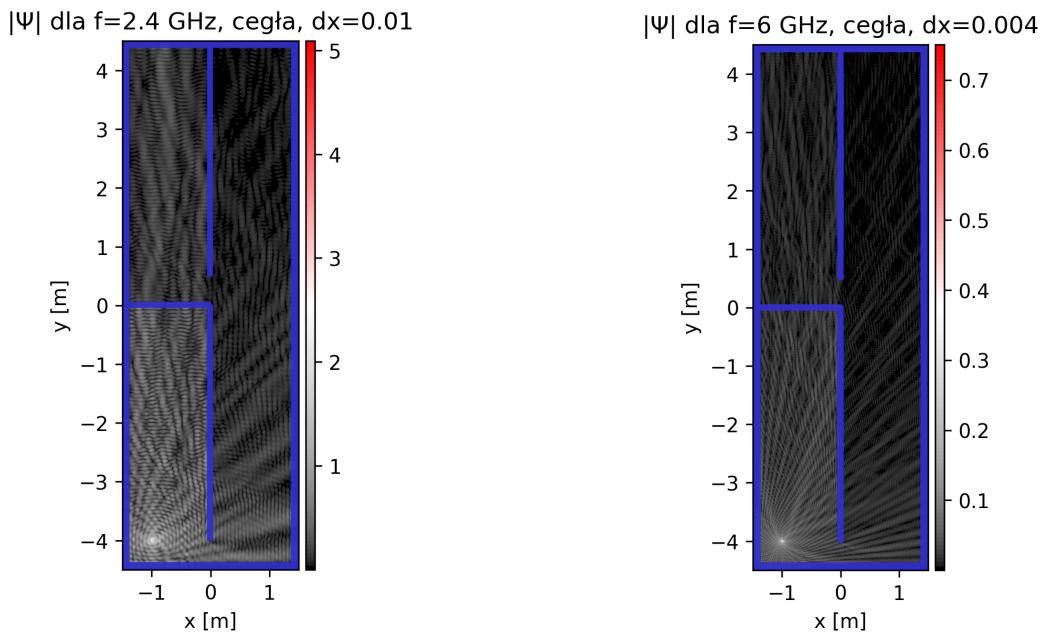
3.2.2 Symulacja rzeczywistych przykładów

Poniżej zamieszczone zostały przykłady realnego zastosowania symulacji. Zgodnie z przewidywaniami, fala elektromagnetyczna o częstotliwości 6 GHz jest mocniej osłabiana przez bariery, tym samym ważniejsze jest odpowiednie umiejscowienie źródła, jak pokazane na rysunkach 3.15, 3.16 oraz 3.17. Dla materiału mocno osłabiającego sygnał, jakim są betonowe ściany, wyraźnie widać przestrzenie gdzie moduł symulowanej funkcji spada, aż do wartości zerowych.



(a) Symulacja rozkładu pola w korytarzu dla $f = 2.4$ GHz $dx = 1$ cm oraz ścian z cegły

(b) Symulacja rozkładu pola w korytarzu dla $f = 6$ GHz $dx = 0.4$ cm oraz ścian z cegły

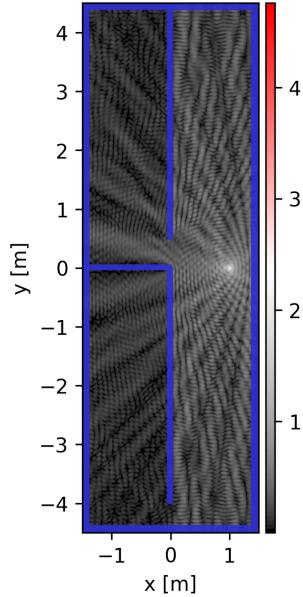


(c) Symulacja rozkładu pola w korytarzu dla $f = 2.4$ GHz $dx = 1$ cm oraz ścian z cegły

(d) Symulacja rozkładu pola w korytarzu dla $f = 6$ GHz $dx = 0.4$ cm oraz ścian z cegły

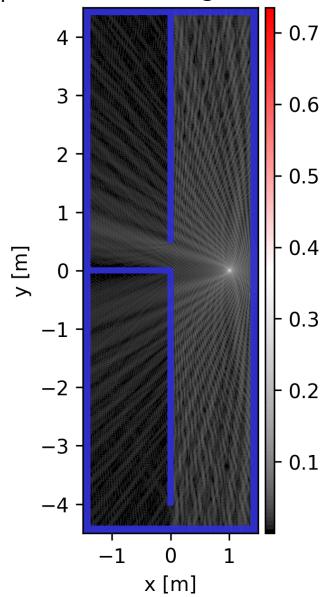
Rysunek 3.15: Symulacje rozłożenia sygnału o częstotliwości 2.4 oraz 6 GHz w korytarzu z wybranych materiałów

$|\Psi|$ dla $f = 2.4$ GHz, cegła, $dx = 0.01$



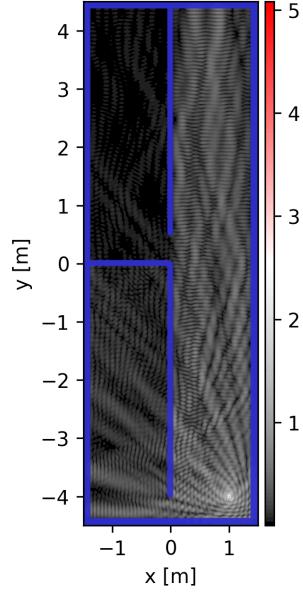
(a) Symulacja rozkładu pola w korytarzu dla $f = 2.4$ GHz $dx = 1$ cm oraz ścian z cegły

$|\Psi|$ dla $f = 6$ GHz, cegła, $dx = 0.004$



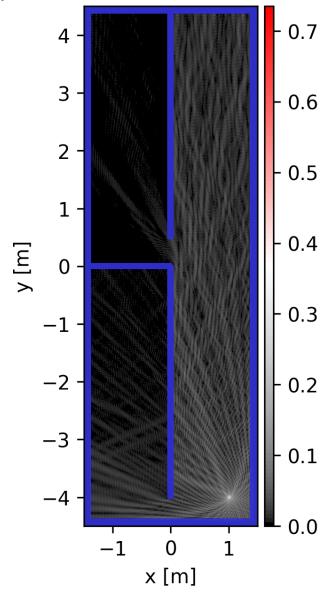
(b) Symulacja rozkładu pola w korytarzu dla $f = 6$ GHz $dx = 0.4$ cm oraz ścian z cegły

$|\Psi|$ dla $f = 2.4$ GHz, beton, $dx = 0.01$



(c) Symulacja rozkładu pola w korytarzu dla $f = 2.4$ GHz $dx = 1$ cm oraz ścian z betonu

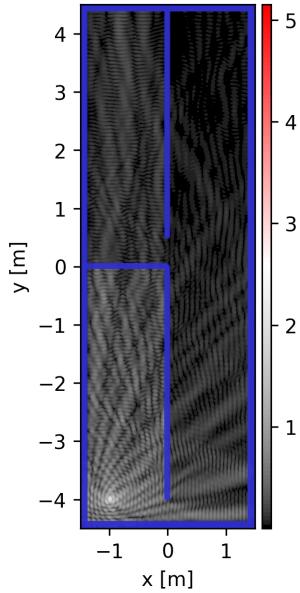
$|\Psi|$ dla $f = 6$ GHz, beton, $dx = 0.004$



(d) Symulacja rozkładu pola w korytarzu dla $f = 6$ GHz $dx = 0.4$ cm oraz ścian z betonu

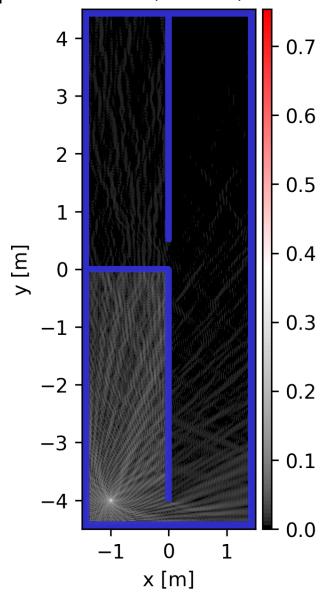
Rysunek 3.16: Symulacje rozłożenia sygnału o częstotliwości 2.4 oraz 6 GHz w korytarzu z wybranych materiałów

$|\Psi|$ dla $f = 2.4$ GHz, beton, $dx = 0.01$



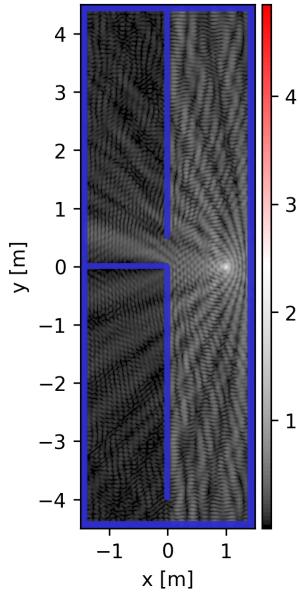
(a) Symulacja rozkładu pola w korytarzu dla $f = 2.4$ GHz $dx = 1$ cm oraz ścian z betonu

$|\Psi|$ dla $f = 6$ GHz, beton, $dx = 0.004$



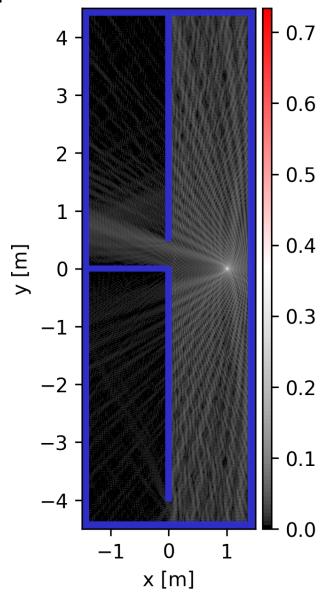
(b) Symulacja rozkładu pola w korytarzu dla $f = 6$ GHz $dx = 0.4$ cm oraz ścian z betonu

$|\Psi|$ dla $f = 2.4$ GHz, beton, $dx = 0.01$



(c) Symulacja rozkładu pola w korytarzu dla $f = 2.4$ GHz $dx = 1$ cm oraz ścian z betonu

$|\Psi|$ dla $f = 6$ GHz, beton, $dx = 0.004$



(d) Symulacja rozkładu pola w korytarzu dla $f = 6$ GHz $dx = 0.4$ cm oraz ścian z betonu

Rysunek 3.17: Symulacje rozłożenia sygnału o częstotliwości 2.4 oraz 6 GHz w korytarzu z wybranych materiałów

Rozdział 4

Podsumowanie

Cel pracy, czyli zasymulowanie sygnału Wi-Fi za pomocą metody różnic skończonych oraz równania Helmholtza został w pełni zrealizowany. Omówione zostały wybrane alternatywne rozwiązania badanego zagadnienia oraz nakreślono problematykę tematu. Wyłożono podstawy matematyczne stojące za rozwiązaniem równania w sposób analityczny, który poprzez swój charakter, skutecznie uzasadnia potrzebę podejścia numerycznego. Podjęto analizę metody różnic skończonych w kontekście równań falowych niezależnych od czasu, włącznie z wyznaniami optymalizacyjnymi i ich możliwymi rozwiązaniami. Wreszcie zasymulowano wybrane przypadki rozchodzenia się fali elektromagnetycznej w jednym oraz dwóch wymiarach. Rozważono różne ośrodki, skutecznie obrazując zachowanie sygnału w kilku konfiguracjach.

Dla zainteresowanych innymi konfiguracjami podobnej symulacji zachęcam do zapoznania się z pracą Jasona Cole [11]. Doskonale pokazuje proces zastosowania przedstawionej metody do własnych potrzeb oraz zaspokaja wspólną dla wszystkich fizyków ciekawość otaczającego świata.

Bibliografia

- [1] *Global 5G growth amid macroeconomic challenges*, Ericsson Mobility Report PRESS RELEASE November 30, 2022
- [2] Muzaiyanah Hidayab, Abdul Halim Ali, Khairul Bariah Abas Azmi *Wifi signal propagation at 2.4 GHz*, 2010 IEEE Symposium on Industrial Electronics and Applications (ISIEA), 10.1109/ISIEA.2010.5679486
- [3] Mathuranathan Viswanathan, *Wireless Communication Systems in Matlab (second edition)*, Czerwiec 2020 ISBN: 979-8648350779
- [4] Scott Y. Seidel, Member, IEEE, and Theodore S. Rappaport, Senior Member, IEEE *Site-Specific Propagation Prediction for Wireless In-Building Personal Communication System Design*, October 2010
- [5] Lenda A. *Wybrane rozdziały matematycznych metod fizyki*, Wydawnictwo AGH, Kraków 2013 ISBN: 978-83-7464-594-2
- [6] Richard Fitzpatrick, Classical Electromagnetism, University of Texas at Austin, Czerwiec 2014, <https://farside.ph.utexas.edu/teaching/jk1/Electromagnetism.pdf>, dostęp: Grudzień 2022
- [7] Oustry, A., Le Tilly, M., Clausen, T., D'Ambrosio, C., Liberti, L., *Optimal deployment of indoor wireless local area networks*, July 2022, DOI: 10.1002/net.22116
- [8] *Effects of building materials and structures on radiowave propagation above about 100 MHz*, Recommendation ITU-R P.2040-2, October 2021
- [9] David J. Griffiths, Reed College, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, New Jersey 1999 ISBN: 0-13-805326-X
- [10] Dokumentacji biblioteki SciPy, <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.sparse.linalg.spsolve.html>, dostęp: Grudzień 2022

- [11] Jason Cole *ALMOST LOOKS LIKE WORK*, *Helmhurts* sierpień 2014,
<https://jasmcole.com/2014/08/25/helmhurts/>, dostęp: Grudzień 2022