Dynamika punktu materialnego

B. Szafran

24 lutego 2022

Ciało o masie m =1kg porusza się w potencjale

$$V(x) = -\exp(-x^2) - 1.2\exp(-(x-2)^2)[J] \tag{1}$$

W chwili początkowej ciało znajduje się w spoczynku $v = 0$ w punkcie $x = 2.8$m.

Definicja prędkości:

$$\frac{dx}{dt} \equiv v \tag{2}$$

II zasada Newtona:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{m}\frac{dV}{dx} \tag{3}$$

Jawny Schemat Eulera.

Dla $x_n \equiv x(n\Delta t)$, $v_n \equiv (v(n\Delta t))$

$$x_{n+1} = x_n + v_n\Delta t \tag{4}$$

$$v_{n+1} = v_n - \frac{1}{m}\frac{dV}{dx}|_{x_n}\Delta t \tag{5}$$

zadanie 1. całkowanie równań ruchu jawnym schematem Eulera (25 pkt).

Narysować $x(t)$, $v(t)$, energię kinetyczną $E_k(t) = mv(t)^2/2$, potencjalną $V(x(t))$, oraz całkowitą $E_k(t)+V(t)$ dla $t \in (0, 30)$i portret fazowy $(x(t), v(t))$ dla $t \in (0, 100)$ oraz $t \in (0, 1000)$, dla $\Delta t = 0.01$s oraz $\Delta t = 0.001$s

Opory ruchu

Do wzoru (3) dodajemy czynnik oporów ruchu: $\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{m}\frac{dV}{dx} - \alpha v$ z parametrem tłumienia $\alpha > 0$. Schemat (5) przybiera formę

$$v_{n+1} = v_n - \frac{1}{m}\frac{dV}{dx}|_{x_n}\Delta t - \alpha v_n\Delta t. \tag{6}$$

zadanie 2. całkowanie równań z oporami ruchu (25 pkt).

Wstawiamy $\Delta t = 0.01$ s oraz $\alpha = 0.5, 5, 201$. Powtarzamy rachunki z zadania (2).

Całkowanie równań ruchu wzorem trapezów

We wzorze trapezów zmiana położenia i prędkości brana jest na podstawie średniej arytmetycznej z chwil n oraz $n + 1$

- $x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{2}(v_{n+1} + v_n)$

- $v_{n+1} = v_n + \frac{\Delta t}{2}\left(-\frac{1}{m}\frac{dV}{dx}|_{x_{n+1}} - \alpha v_{n+1} - \frac{1}{m}\frac{dV}{dx}|_{x_n} - \alpha v_n\right)$

Ze względu na obecność prędkości z chwili $n+1$ po prawej stronie równania wykonanie kroku czasowego wymaga rozwiązania układu równań nieliniowych $F_1 = 0$ oraz $F_2 = 0$ dla

- $F_1(x_{n+1}, v_{n+1}) = x_{n+1} - x_n - \frac{\Delta t}{2}v_{n+1} - \frac{\Delta t}{2}v_n$
- $F_2(x_{n+1}, v_{n+1}) = v_{n+1} - v_n - \frac{\Delta t}{2}\left(-\frac{1}{m}\frac{dV}{dx}|_{x_{n+1}} - \alpha v_{n+1}\right) - \frac{\Delta t}{2}\left(-\frac{1}{m}\frac{dV}{dx}|_{x_n} - \alpha v_n\right)$

x_{n+1} oraz v_{n+1} wyznaczymy metodą iteracyjną, przy czym x^{μ}_{n+1} oraz v^{μ}_{n+1} oznacza wartości w μ-tej iteracji. Przy tych oznaczeniach przepis metody Newtona dla układu równań ma postać:

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial F_1}{\partial v_{n+1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial F_2}{\partial v_{n+1}} \end{array}\right)_{|x^{\mu}_{n+1}, v^{\mu}_{n+1}} \left(\begin{array}{c} x^{\mu+1}_{n+1} - x^{\mu}_{n+1} \\ v^{\mu+1}_{n+1} - v^{\mu}_{n+1} \end{array}\right) = -\left(\begin{array}{c} F_1(x^{\mu}_{n+1}, v^{\mu}_{n+1}) \\ F_2(x^{\mu}_{n+1}, v^{\mu}_{n+1}) \end{array}\right), \tag{7}$$

która przy naszym układzie równań redukuje się do

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & -\frac{\Delta t}{2} \\ \frac{\Delta t}{2m}\frac{d^2V}{dx^2}|_{x^{\mu}_{n+1}} & 1 + \frac{\Delta t}{2}\alpha \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x^{\mu+1}_{n+1} - x^{\mu}_{n+1} \\ v^{\mu+1}_{n+1} - v^{\mu}_{n+1} \end{array}\right) = -\left(\begin{array}{c} F_1(x^{\mu}_{n+1}, v^{\mu}_{n+1}) \\ F_2(x^{\mu}_{n+1}, v^{\mu}_{n+1}) \end{array}\right) \tag{8}$$

zadanie 3. Iteracja we wzorze trapezów (25 pkt).

Wstawić $\alpha = 0$, $\Delta t = 0.01$s. Iterujemy równanie kilka razy aż osiągniemy $F_1 = F_2 = 0$ z zadowalającą dokładnością. Udokumentować zbieżność dla pierwszego kroku czasowego.

zadanie 4. Całkowanie równań ruchu metodą trapezów (25 pkt).

Powtórzyć zadanie 1 (dla $\alpha = 0$) oraz 2 wzorem trapezów.