

1. Máquinas de Turing

1.1 Considere a máquina de Turing

$$\mathcal{T} = (\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \{a, b\}, \{a, b, \Delta\}, \delta, 0, 8, \Delta)$$

onde a função transição δ é definida pela tabela seguinte:

δ	a	b	Δ
0			$(1, \Delta, D)$
1	$(1, a, D)$	$(1, b, D)$	$(2, \Delta, E)$
2	$(3, \Delta, D)$	$(5, \Delta, D)$	$(8, \Delta, D)$
3			$(4, a, D)$
4	$(4, a, D)$	$(4, b, D)$	$(7, a, E)$
5			$(6, b, D)$
6	$(6, a, D)$	$(6, b, D)$	$(7, b, E)$
7	$(7, a, E)$	$(7, b, E)$	$(2, \Delta, E)$

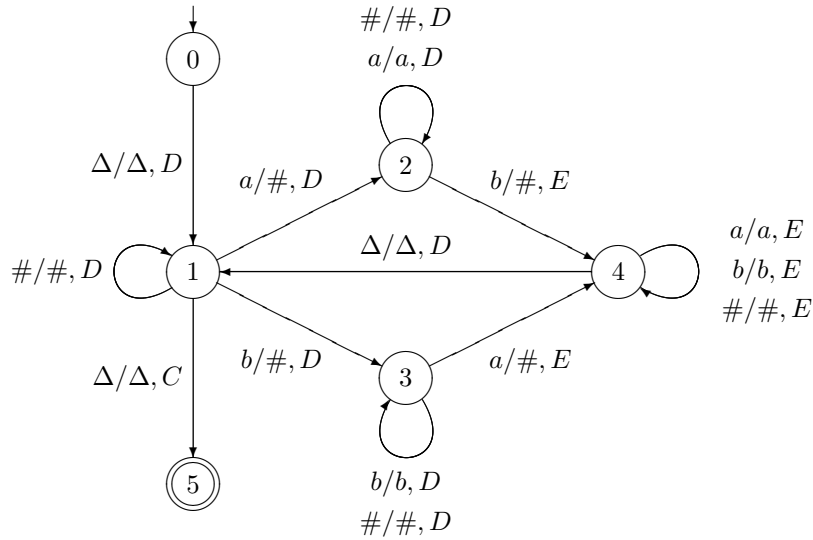
- Represente a máquina de Turing \mathcal{T} através de um grafo.
- Indique a sequência de configurações que podem ser computadas a partir da configuração $(0, \underline{\Delta}ab)$; e a partir da configuração $(0, \underline{\Delta}baa)$?
- Indique informalmente o comportamento de \mathcal{T} , quando a configuração inicial é $(0, \underline{\Delta}u)$, onde u é uma palavra de $\{a, b\}^*$.

1.2 Considere a máquina de Turing $\mathcal{T} = (\{0, 1, 2\}, \{a, b\}, \{a, b, \Delta\}, \delta, 0, 2, \Delta)$, onde a função transição δ é definida pela tabela seguinte:

δ	a	b	Δ
0	$(0, a, C)$	$(0, b, E)$	$(1, \Delta, D)$
1	$(1, a, D)$		$(2, \Delta, C)$

- Indique a sequência de configurações que podem ser computadas a partir de $(0, \underline{\Delta}aab)$.
- Indique uma palavra $u \in \{a, b, \Delta\}^*$ tal que, a partir da configuração $(0, \underline{u})$ pode ser computada uma configuração de:
 - paragem;
 - ciclo;
 - aceitação;
 - rejeição.
- Descreva informalmente o comportamento de \mathcal{T} quando a configuração inicial é $(0, \underline{u})$, onde u é uma palavra sobre $\{a, b, \Delta\}$.
- Calcule a linguagem reconhecida por \mathcal{T} .

1.3 Considere a seguinte máquina de Turing \mathcal{T} de alfabeto de entrada $A = \{a, b\}$,



- Indique a sequência de configurações que podem ser computadas a partir da configuração $(0, \underline{\Delta}abbbabaa)$.
- Identifique a linguagem reconhecida por \mathcal{T} .

1.4 Construa máquinas de Turing que reconheçam cada uma das seguintes linguagens:

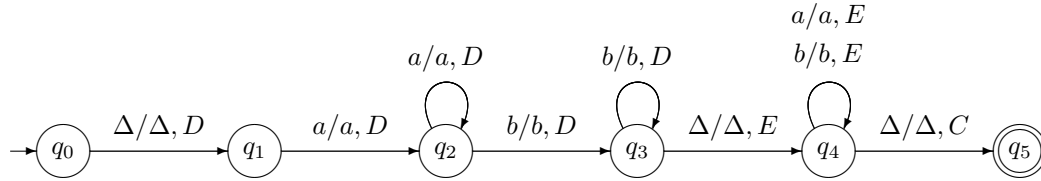
- ab^*a^+ , sobre o alfabeto $\{a, b\}$.
- $\{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, sobre o alfabeto $\{a, b\}$.
- $\{a^n b^{2n} a^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, sobre o alfabeto $\{a, b\}$.
- $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}_0, m < n\}$, sobre o alfabeto $\{a, b\}$.
- $\{a^n b^{mn} \mid m, n \in \mathbb{N}_0\}$, sobre o alfabeto $\{a, b\}$.
- $\{a^m b c^n \mid m + n \text{ é par}\}$, sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$.
- $\{w c w^I \in A^* \mid w \in \{a, b\}^*\}$, sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$.
- $\{abab^2ab^3 \cdots ab^n a \mid n \geq 1\}$, sobre o alfabeto $\{a, b\}$.

1.5 Mostre que, para toda a máquina de Turing $\mathcal{T} = (Q, A, T, \delta, i, f, \Delta)$, existe uma máquina de Turing \mathcal{T}' que reconhece a mesma linguagem que \mathcal{T} , e tal que \mathcal{T}' nunca rejeita uma palavra (ou seja, para qualquer palavra $w \in A^*$, \mathcal{T}' aceita w ou a configuração inicial $(i, \underline{\Delta}w)$ associada a w é uma configuração de ciclo).

1.6 Dada uma máquina de Turing \mathcal{T} , defina uma máquina de Turing \mathcal{T}_{aba} tal que:

$$\mathcal{T} \text{ aceita a palavra vazia } \epsilon \iff \mathcal{T}_{aba} \text{ aceita a palavra } aba.$$

1.7 Considere a seguinte máquina de Turing \mathcal{M} de alfabeto de entrada $A = \{a, b\}$,

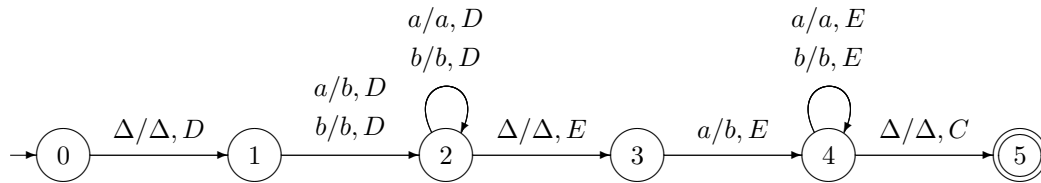


- a) Identifique a linguagem reconhecida pela máquina \mathcal{M} .
- b) Identifique a linguagem reconhecida pela máquina $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}$, onde \mathcal{T} é a máquina de Turing do Exercício 1.3.
- 1.8 Construa uma máquina de Turing $\mathcal{T} = (Q, A, T, \delta, i, f, \Delta)$, com alfabeto de entrada $A = \{a, b\}$, que insira uma letra $x \in A$ na célula onde o cursor está posicionado: ou seja, em rigor, que seja capaz de efetuar a computação

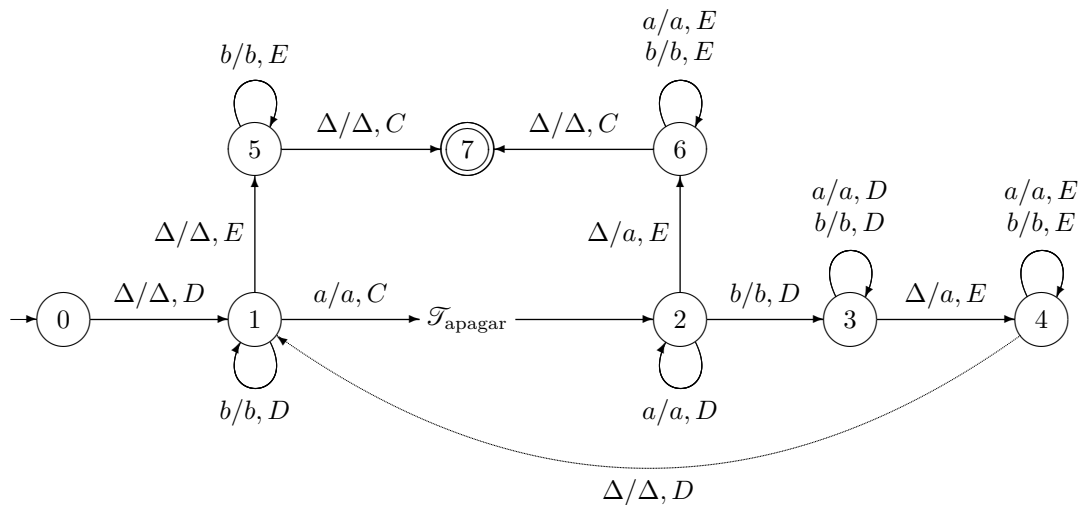
$$(i, u\underline{v}) \xrightarrow{*} (f, u\underline{x}v)$$

para quaisquer palavras $u \in T^*$ e $v \in A^*$.

1.9 Considere a seguinte máquina de Turing \mathcal{T} de alfabeto de entrada $A = \{a, b\}$,



- a) Indique a sequência de configurações que podem ser computadas a partir da configuração $(0, \underline{\Delta}babba)$.
- b) Identifique o domínio D da função parcial $g : A^* \rightarrow A^*$ calculada por \mathcal{T} .
- c) Para cada palavra $u \in D$, determine a palavra $g(u)$.
- 1.10 A seguinte máquina de Turing calcula uma função g de $\{a, b\}^*$ para $\{a, b\}^*$:



Dada uma palavra $u \in \{a, b\}^*$, descreva a palavra $g(u)$.

1.11 Indique máquinas de Turing que calculem cada uma das seguintes funções:

$$\text{a) } g : \{a, b\}^* \longrightarrow \{1\}^* \\ u \longmapsto 1^{|u|_a}$$

$$\text{e) } g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ n \longmapsto 2n$$

$$\text{b) } g : \{a, b\}^* \longrightarrow \{a, b\}^* \\ u \longmapsto u^I$$

$$\text{f) } g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \{0, 1, 2\} \\ n \longmapsto r, \text{ onde } n \equiv r \pmod{3}$$

$$\text{c) } g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ n \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } n = 3 \\ 0 & \text{senão.} \end{cases}$$

$$\text{g) } g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ n \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ n.d. & \text{senão} \end{cases}$$

$$\text{d) } g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ n \longmapsto n + 2$$

$$\text{h) } p_2 : \mathbb{N}_0^3 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ (n_1, n_2, n_3) \longmapsto n_2$$

1.12 Sejam \mathcal{T}_f , \mathcal{T}_g e \mathcal{T}_h máquinas de Turing que calculam funções $f : \mathbb{N}_0^2 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ e $g, h : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ respetivamente. Mostre que as seguintes funções são ainda computáveis:

$$\text{a) } [\text{função composta}] \\ g \circ h : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ n \longmapsto g(h(n))$$

$$\text{d) } [\text{função troca de variáveis}] \\ t : \mathbb{N}_0^2 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ (n, m) \longmapsto f(m, n)$$

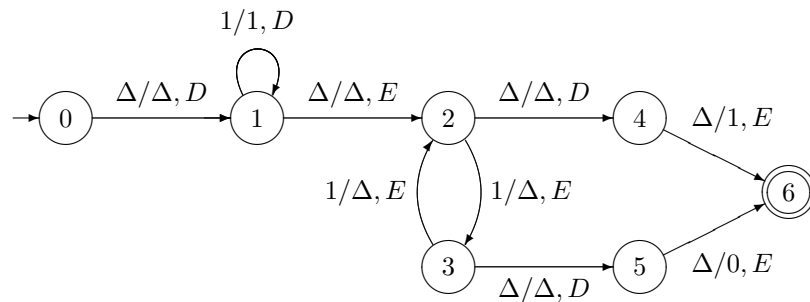
$$\text{b) } [\text{função soma}] \\ g + h : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ n \longmapsto g(n) + h(n)$$

$$\text{e) } [\text{função identificação de variáveis}] \\ i : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ n \longmapsto f(n, n)$$

$$\text{c) } [\text{função mínimo}] \\ \min(g, h) : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ n \longmapsto \min(g(n), h(n))$$

$$\text{f) } [\text{função parametrização da 2ª variável}] \\ f_k : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ n \longmapsto f(n, k), \text{ onde } k \in \mathbb{N}_0$$

1.13 A máquina de Turing \mathcal{T} seguinte, com alfabeto de entrada $A = \{1\}$, calcula a função característica χ_L de uma linguagem L sobre A .

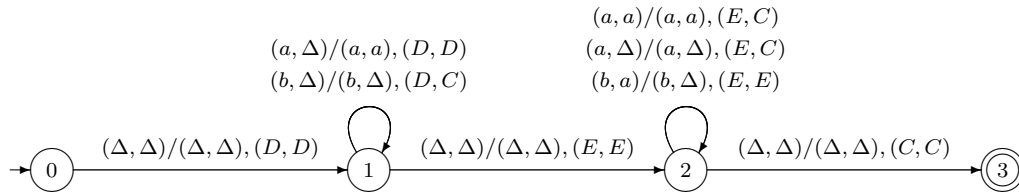


- Indique as configurações de \mathcal{T} que podem ser computadas a partir de $(0, \underline{\Delta}111)$.
- Indique, justificando, o valor de $\chi_L(1111)$.
- Diga qual é a linguagem L . Justifique.
- Diga, justificando, qual é a linguagem reconhecida por \mathcal{T} .
- Modifique a máquina \mathcal{T} de forma a obter uma máquina de Turing que reconheça L .

1.14 Considere a linguagem $L = (ba)^*b^+$ sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$.

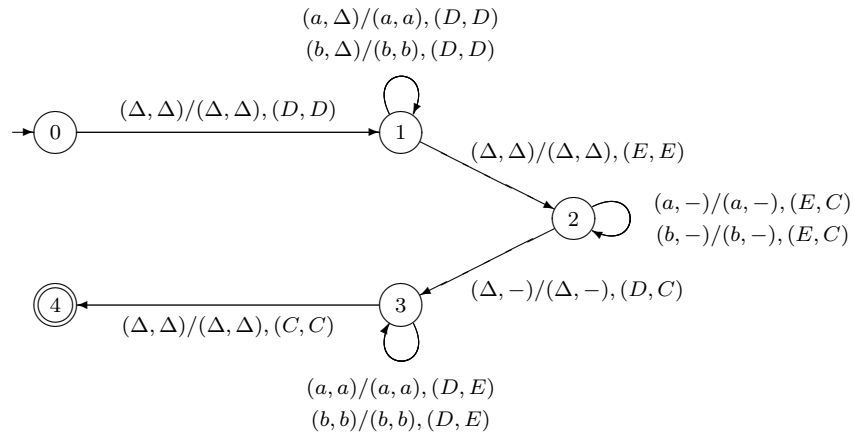
- Construa uma máquina de Turing \mathcal{T} que calcule a função característica χ_L de L .
- Indique a sequência de configurações de \mathcal{T} que podem ser computadas a partir da configuração $(i, \underline{\Delta}bab^3)$, onde i é o estado inicial de \mathcal{T} .
- Qual é a linguagem reconhecida por \mathcal{T} ? Justifique.

1.15 Seja $A = \{a, b\}$ e seja \mathcal{T} a seguinte máquina de Turing sobre A com duas fitas,



- Indique a sequência de configurações que podem ser computadas a partir da configuração $(0, \underline{\Delta}abbaba, \underline{\Delta})$ e diga se a palavra $abbaba$ é aceite por \mathcal{T} .
- Identifique a linguagem reconhecida por \mathcal{T} .

1.16 Seja $A = \{a, b\}$ e seja \mathcal{T} a seguinte máquina de Turing sobre A com duas fitas,



Identifique a linguagem reconhecida por \mathcal{T} .

1.17 Considere a seguinte linguagem sobre o alfabeto $\{a, b\}$,

$$L = \{a^m b^n a^m : 1 \leq n \leq m\}.$$

Construa uma máquina de Turing com duas fitas que reconheça L .

1.18 Construa uma máquina de Turing \mathcal{T} , com duas fitas, que calcule a função

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{N}_0^2 &\longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ (m, n) &\longmapsto 2m + n. \end{aligned}$$

1.19 Considere a máquina de Turing não-determinista

$$\mathcal{T} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{1\}, \{1, \Delta\}, \delta, q_0, q_3, \Delta)$$

onde a função transição δ é definida pela tabela seguinte:

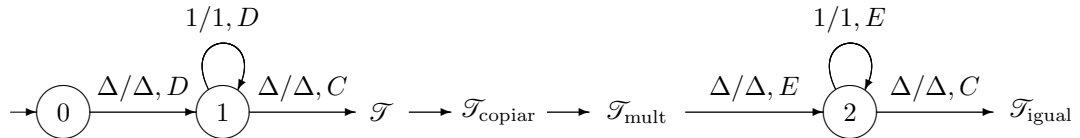
δ	1	Δ
q_0	\emptyset	$\{(q_1, \Delta, D)\}$
q_1	\emptyset	$\{(q_1, 1, D), (q_2, \Delta, E)\}$
q_2	$\{(q_2, 1, E)\}$	$\{(q_3, \Delta, C)\}$

Indique o comportamento de \mathcal{T} a partir da configuração inicial $(q_0, \underline{\Delta}u)$ associada a uma palavra $u \in \{1\}^*$.

1.20 Seja \mathcal{T} a máquina de Turing do exercício anterior e sejam:

- $\mathcal{T}_{\text{copiar}}$ a máquina de Turing capaz de copiar uma palavra, ou seja, de transformar o conteúdo da fita de $\underline{\Delta}u$ em $\underline{\Delta}u\Delta u$;
- $\mathcal{T}_{\text{mult}}$ a máquina de Turing capaz de multiplicar dois números, ou seja, de transformar o conteúdo da fita de $\underline{\Delta}1^m\Delta 1^n$ em $\underline{\Delta}1^{mn}$;
- $\mathcal{T}_{\text{igual}}$ a máquina de Turing capaz de testar a igualdade entre palavras, ou seja, começando com a fita em $\underline{\Delta}u\Delta v$, atinge uma configuração de aceitação se e só se $u = v$.

Considere a seguinte máquina de Turing não-determinista.



Qual é a linguagem que esta máquina de Turing reconhece?

1.21 Seja

$$L = \{1^n : n > 1 \text{ é um natural não primo}\}.$$

Usando a ideia do exercício anterior, construa uma máquina de Turing que reconheça a linguagem L .

1.22 Prove que a linguagem $L = \{wa^n : w \in A^*, n \in \mathbb{N}_0, |w|_b = n\}$ sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$ é recursiva.

1.23 Suponha que L_1, \dots, L_k são linguagens recursivamente enumeráveis que formam uma partição de A^* . Mostre que cada L_i é uma linguagem recursiva.

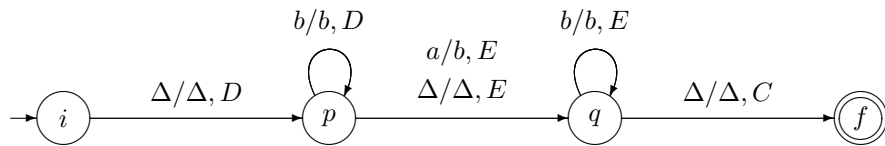
1.24 Esboce uma prova de que, se L_1 e L_2 são linguagens recursivamente enumeráveis, então L_1L_2 e L_1^* são também recursivamente enumeráveis, construindo máquinas de Turing não-deterministas que aceitem estas linguagens.

1.25 Mostre que existe uma linguagem L tal que nem L nem \bar{L} são recursivamente enumeráveis.

1.26 Seja L uma linguagem sobre um alfabeto A . Indique quais das situações seguintes são possíveis e quais são impossíveis.

- a) L e \bar{L} são recursivas.
- b) L e \bar{L} são recursivamente enumeráveis.
- c) L e \bar{L} são recursivamente enumeráveis, mas nenhuma delas é recursiva.
- d) L é recursiva e \bar{L} é recursivamente enumerável mas não recursiva.
- e) L é recursivamente enumerável e \bar{L} não é recursivamente enumerável.

1.27 Seja \mathcal{T} a máquina de Turing



que transforma uma dada palavra sobre o alfabeto $\{a, b\}$ numa outra em que a primeira ocorrência da letra a (caso exista) é substituída por b . Codifique a máquina \mathcal{T} .

1.28 Desenhe a máquina de Turing codificada por:

$$\begin{aligned}
 & x^2 y x^2 y x y x^3 y x y x^3 y^2 \quad x^3 y x^2 y x^3 y x^2 y x^3 y^2 \quad x^3 y x^3 y x^3 y x^3 y^2 \quad x^3 y x y x^4 y x y x^2 y^2 \\
 & x^4 y x^2 y x^5 y x^2 y x^3 y^2 \quad x^4 y x^3 y x^6 y x^3 y x^3 y^2 \quad x^5 y x y x^7 y x^2 y x^2 y^2 \quad x^6 y x y x^7 y x^3 y x^2 y^2 \\
 & x^7 y x^2 y x^7 y x^2 y x^2 y^2 \quad x^7 y x^3 y x^7 y x^3 y x^2 y^2 \quad x^7 y x y x y x y x y^2
 \end{aligned}$$

1.29 Dê exemplos de palavras u sobre $\{x, y\}$ tais que u não é codificação de uma máquina de Turing.

1.30 Desenhe a parte da máquina de Turing universal \mathcal{T}_U que é responsável por modificar as 3 fitas e por recolocar o cursor nas posições adequadas, depois da operação de procura ter identificado o quintuplo correto na fita 1. Por exemplo, a configuração

$$\begin{aligned}
 & \Delta x x y x y x x x y x y x x x y x x x y x x y \underline{x} x x y x x x y x x y \dots \\
 & \Delta x y x x y \underline{x} x y x x x y \Delta \dots \\
 & \Delta \underline{x} x x \Delta \dots
 \end{aligned}$$

seria transformada em

$$\begin{aligned}
 & \Delta \underline{x} x y x y x x x y x y x x x y x x x y x x x y x x x y x x y \dots \\
 & \Delta x y \underline{x} x y x x x y x x x y \Delta \dots \\
 & \Delta \underline{x} x x x \Delta \dots
 \end{aligned}$$