Ficha - Condições de otimalidade para problemas sem restrições

1. Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$F(w) = 15 - 12w - 25w^2 + 2w^3.$$
   (a) Use as primeira e segunda derivadas para determinar o máximo local e mínimo local de F.
   (b) Mostre que F não tem nem um máximo global nem um mínimo global.

2. Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$F(w) = 3w^3 + 7w^2 - 15w - 3.$$
Calcule todos os pontos estacionários desta função, e determine se são minimizantes locais e maximizantes locais. Esta função tem um máximo global ou um mínimo global?

3. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$F(w_1, w_2) = \frac{1}{3}w_1^3 + \frac{1}{2}w_1^2 + 2w_1w_2 + \frac{1}{2}w_2^2 - w_2 + 9.$$
Calcule todos os pontos estacionários desta função, e verifique se são minimizantes locais ou maximizantes locais. Esta função tem um máximo global ou um mínimo global?

4. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$F(w_1, w_2) = 8w_1^2 + 3w_1w_2 + 7w_2^2 - 25w_1 + 31w_2 - 29.$$
Calcule todos os pontos estacionários desta função, e verifique se são minimizantes locais e maximizantes locais. Esta função tem um máximo global ou um mínimo global?

5. Mostre que qualquer ponto da reta $w_2 - 2w_1 = 0$ é um minimizante de $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$F(w_1, w_2) = 4w_1^2 - 4w_1w_2 + w_2^2.$$

6. Verifique se o ponto $(0,-1)^T$ é minimizante da função
$$F(w_1, w_2) = w_1 + w_2 + \frac{1}{2}\left(w_1^2 + w_2^2\right) - \frac{w_1 + w_1^2 + w_1^3}{1 + w_1^4}.$$
Justifique.

7. Considere o problema:
$$\text{minimizar } F(w_1, w_2) = \left(w_2 - w_1^2\right)\left(w_2 - 2w_1^2\right).$$
   (a) Mostre que as condições necessárias de otimalidade são satisfeitas no ponto $(0,0)^T$.
   (b) Mostre que a origem é um minimizante local de F para qualquer reta que passe na origem (que é, $w_2 = mw_1$).
   (c) Mostre que a origem não é um minimizante local de F (considere, por exemplo, curvas da forma $w_2 = kw_1^2$). Que conclusões se pode retirar a partir isto?

8. Considere o problema
$$\text{minimizar } F(w_1, w_2) = (w_1 - 2w_2)^2 + w_1^4.$$
Determine o mínimo de F. Verifique que a condição necessária de 2^a ordem para um minimizante local é satisfeita nesse ponto. Verifica a condição suficiente de 2^a ordem? Este ponto é um minimizante local estrito? é um minimizante global?

9. Seja
$$F(w_1, w_2) = 2w_1^2 + w_2^2 - 2w_1w_2 + 2w_1^3 + w_1^4.$$
Determine os minimizantes/maximizantes de F e indique que tipo de mínimos ou máximos são (local, global, estrito, etc).

10. Seja
$$F(w_1, w_2) = cw_1^2 + w_2^2 - 2w_1w_2 - 2w_2$$
onde c é um escalar.

    (a) Determine os pontos estacionários de F para cada valor de c.

    (b) Para que valores de c pode F ter um minimizante? Para que valores de c pode F ter um maximizante? Determine os minimizantes/maximizantes correspondentes a tais valores de c, e indique que tipo de mínimos ou máximos são (local, global, estrito, etc).

11. Para cada valor do escalar c, encontre o conjunto de todos os pontos estacionários da função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por
$$F(w_1, w_2) = w_1^2 + w_2^2 + cw_1w_2 + w_1 + 2w_2.$$
Quais dos pontos estacionários são minimizantes globais?

Recordar: Alguns resultados de convexidade

- Quando a função objetivo F é uma função convexa e a região admissível $\mathcal{D}$ é um conjunto convexo, uma solução local é também global.

- **Teorema** Seja $\mathcal{D}$ um conjunto convexo aberto não vazio e $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ uma função diferençável. Então F é convexa se, e só se, para todo $w, \bar{w} \in D$
$$F(w) \geq F(\bar{w}) + \nabla F(\bar{w})^T (w - \bar{w}).$$

- **Teorema** Seja $\mathcal{D}$ um conjunto convexo aberto não vazio e $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferençável. Então F é uma função convexa se e só se a matriz hessiana $\nabla^2 F(w)$ de F é semi-definida positiva para todo $w \in \mathcal{D}$.