Licenciatura em Ciências da Computação

Computabilidade e Complexidade

0. Revisões

José Carlos Costa

Dep. Matemática
Universidade do Minho
Braga, Portugal
email: jcosta@math.uminho.pt

17 de setembro de 2025

Linguagens (Formais)

Linguagens (Formais)

- **alfabeto** - conjunto finito não vazio A.

Linguagens (Formais)

- **alfabeto** - conjunto finito não vazio A.
- **letra** - elemento de A.

Linguagens (Formais)

- **alfabeto** - conjunto finito não vazio A.
- **letra** - elemento de A.
- **palavra** - sequência finita $a_1 a_2 \cdots a_n$ de elementos de A.

Linguagens (Formais)

- **alfabeto** - conjunto finito não vazio A.
- **letra** - elemento de A.
- **palavra** - sequência finita $a_1 a_2 \cdots a_n$ de elementos de A.
  Por exemplo,
  $$a, \ c, \ ab, \ aabbca, \ cacbccacaaaa$$
  são palavras sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$.

Linguagens (Formais)

- **alfabeto** - conjunto finito não vazio A.
- **letra** - elemento de A.
- **palavra** - sequência finita $a_1a_2\cdots a_n$ de elementos de A.
  Por exemplo,
  $$a,\ \ c,\ \ ab,\ \ aabbca,\ \ cacbccacaaaa$$
  são palavras sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$.
- $A^+ = \{a_1a_2\cdots a_n \mid n \in \mathbb{N}, a_1, a_2, \ldots, a_n \in A\}$ - conjunto das palavras sobre o alfabeto A.

- **produto (de concatenação)** - operação binária $\cdot$ definida, para quaisquer $a_1 a_2 \cdots a_n, b_1 b_2 \cdots b_m \in A^+$, por

$$a_1 a_2 \cdots a_n \cdot b_1 b_2 \cdots b_m = a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m .$$

- **produto (de concatenação)** - operação binária $\cdot$ definida, para quaisquer $a_1 a_2 \cdots a_n, b_1 b_2 \cdots b_m \in A^+$, por

$$a_1 a_2 \cdots a_n \cdot b_1 b_2 \cdots b_m = a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m.$$

Note-se que a operação $\cdot$ é associativa, donde o par

$$(A^+, \cdot) \text{ é um semigrupo,}$$

chamado o **semigrupo livre gerado por A**.

- **produto (de concatenação)** - operação binária $\cdot$ definida, para quaisquer $a_1 a_2 \cdots a_n, b_1 b_2 \cdots b_m \in A^+$, por

$$a_1 a_2 \cdots a_n \cdot b_1 b_2 \cdots b_m = a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m.$$

  Note-se que a operação $\cdot$ é associativa, donde o par

$$(A^+, \cdot) \text{ é um semigrupo,}$$

  chamado o **semigrupo livre gerado por A**.

- $A^* = A^+ \cup \{\epsilon\}$ onde ϵ representa a sequência vazia, chamada a **palavra vazia**.

- **produto (de concatenação)** - operação binária $\cdot$ definida, para quaisquer $a_1 a_2 \cdots a_n, b_1 b_2 \cdots b_m \in A^+$, por

$$a_1 a_2 \cdots a_n \cdot b_1 b_2 \cdots b_m = a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m.$$

Note-se que a operação $\cdot$ é associativa, donde o par

$$(A^+, \cdot) \text{ é um semigrupo,}$$

chamado o **semigrupo livre gerado por A**.

- $A^* = A^+ \cup \{\epsilon\}$ onde ϵ representa a sequência vazia, chamada a **palavra vazia**.

Definindo $\epsilon u = u\epsilon = u$ para todo o $u \in A^*$,

$$(A^*, \cdot) \text{ é um monóide,}$$

chamado o **monóide livre gerado por A**.

- $|u|$ - **comprimento** de uma palavra u.

- $|u|$ - **comprimento** de uma palavra u.
  Por exemplo,

$$|\epsilon| = 0, \ |a| = 1, \ |bacbbc| = 6, \ |bbbb| = 4.$$

- $|u|$ - **comprimento** de uma palavra u.
  Por exemplo,

$$|\epsilon| = 0, \ |a| = 1, \ |bacbbc| = 6, \ |bbbb| = 4.$$

- $|u|_a$ - número de ocorrências da letra a em u.

- $|u|$ - **comprimento** de uma palavra u.
  Por exemplo,
  $$|\epsilon| = 0,\ |a| = 1,\ |bacbbc| = 6,\ |bbbb| = 4.$$

- $|u|_a$ - número de ocorrências da letra a em u.
  Por exemplo,
  $$|bab|_c = 0,\ |acaba|_a = 3,\ |acaba|_b = 1.$$

- $|u|$ - **comprimento** de uma palavra u.
  Por exemplo,
  $$|\epsilon| = 0, \; |a| = 1, \; |bacbbc| = 6, \; |bbbb| = 4.$$

- $|u|_a$ - número de ocorrências da letra a em u.
  Por exemplo,
  $$|bab|_c = 0, \; |acaba|_a = 3, \; |acaba|_b = 1.$$

Sendo A um alfabeto qualquer, $u, v \in A^*$ e $a \in A$ tem-se

$$|uv| = |u| + |v|, \quad |uv|_a = |u|_a + |v|_a, \quad |u| = \sum_{b \in A} |u|_b.$$

Definição

Sejam u e v duas palavras de A^*. Diz-se que

- u é um **fator** de v se existem $x, y \in A^*$ tais que $xuy = v$;

Definição

Sejam u e v duas palavras de A^*. Diz-se que

- u é um **fator** de v se existem $x, y \in A^*$ tais que $xuy = v$;
- u é um **prefixo** de v se existe $y \in A^*$ tal que $uy = v$;

Definição

Sejam u e v duas palavras de A^*. Diz-se que

- u é um **fator** de v se existem $x, y \in A^*$ tais que $xuy = v$;
- u é um **prefixo** de v se existe $y \in A^*$ tal que $uy = v$;
- u é um **sufixo** de v se existe $x \in A^*$ tal que $xu = v$.

Definição

Sejam u e v duas palavras de A^*. Diz-se que

- u é um **fator** de v se existem $x, y \in A^*$ tais que $xuy = v$;
- u é um **prefixo** de v se existe $y \in A^*$ tal que $uy = v$;
- u é um **sufixo** de v se existe $x \in A^*$ tal que $xu = v$.

Por exemplo, sendo $v = abab$:

Definição

Sejam u e v duas palavras de A^*. Diz-se que

- u é um **fator** de v se existem $x, y \in A^*$ tais que $xuy = v$;
- u é um **prefixo** de v se existe $y \in A^*$ tal que $uy = v$;
- u é um **sufixo** de v se existe $x \in A^*$ tal que $xu = v$.

Por exemplo, sendo $v = abab$:

- os fatores de v são ϵ, a, b, ab, ba, aba, bab, v;

Definição

Sejam u e v duas palavras de A^*. Diz-se que

- u é um **fator** de v se existem $x, y \in A^*$ tais que $xuy = v$;
- u é um **prefixo** de v se existe $y \in A^*$ tal que $uy = v$;
- u é um **sufixo** de v se existe $x \in A^*$ tal que $xu = v$.

Por exemplo, sendo $v = abab$:

- os fatores de v são ϵ, a, b, ab, ba, aba, bab, v;
- os prefixos de v são ϵ, a, ab, aba, v;

Definição

Sejam u e v duas palavras de A^*. Diz-se que

- u é um **fator** de v se existem $x, y \in A^*$ tais que $xuy = v$;
- u é um **prefixo** de v se existe $y \in A^*$ tal que $uy = v$;
- u é um **sufixo** de v se existe $x \in A^*$ tal que $xu = v$.

Por exemplo, sendo $v = abab$:

- os fatores de v são ϵ, a, b, ab, ba, aba, bab, v;
- os prefixos de v são ϵ, a, ab, aba, v;
- os sufixos de v são ϵ, b, ab, bab, v.

- **Linguagem** sobre um alfabeto A - subconjunto de A^*.

- **Linguagem** sobre um alfabeto A - subconjunto de A^*.
  Por exemplo,

$$\emptyset,\ \{\epsilon\},\ \{a\},\ A,\ \{aa, aba, bbb, ababa\},\ \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\},\ A^+,\ A^*$$

  são linguagens sobre $A = \{a, b\}$.

- **Linguagem** sobre um alfabeto A - subconjunto de A^*.
  Por exemplo,

  $$\emptyset,\ \{\epsilon\},\ \{a\},\ A,\ \{aa, aba, bbb, ababa\},\ \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\},\ A^+,\ A^*$$

  são linguagens sobre $A = \{a, b\}$.
- $\mathcal{P}(A^*) = \{L \mid L \subseteq A^*\}$ - conjunto de todas as linguagens sobre A.

- **Linguagem** sobre um alfabeto A - subconjunto de A^*.
  Por exemplo,

  $$\emptyset,\ \{\epsilon\},\ \{a\},\ A,\ \{aa, aba, bbb, ababa\},\ \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\},\ A^+,\ A^*$$

  são linguagens sobre $A = \{a, b\}$.
- $\mathcal{P}(A^*) = \{L \mid L \subseteq A^*\}$ - conjunto de todas as linguagens sobre A.
- $LK = \{uv \mid u \in L \text{ e } v \in K\}$ - **produto** das linguagens L e K.

- **Linguagem** sobre um alfabeto A - subconjunto de A^*.
  Por exemplo,

  $$\emptyset,\ \{\epsilon\},\ \{a\},\ A,\ \{aa, aba, bbb, ababa\},\ \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\},\ A^+,\ A^*$$

  são linguagens sobre $A = \{a, b\}$.
- $\mathcal{P}(A^*) = \{L \mid L \subseteq A^*\}$ - conjunto de todas as linguagens sobre A.
- $LK = \{uv \mid u \in L \text{ e } v \in K\}$ - **produto** das linguagens L e K.
  Por exemplo,

  $$\begin{aligned} &\{a, ba, abb\}\{\epsilon, ba\} = \{a, ba, abb, aba, baba, abbba\} \\ &\neq \{a, ba, abb, baa, baba, baabb\} = \{\epsilon, ba\}\{a, ba, abb\} \end{aligned}$$

Note-se que, sendo $u \in A^+$,

$$\begin{aligned} uA^* &= \{ux \mid x \in A^*\}, \\ A^*u &= \{xu \mid x \in A^*\}, \\ A^*uA^* &= \{xuy \mid x, y \in A^*\} \end{aligned}$$

são os conjuntos das palavras sobre A que têm, respetivamente, u como prefixo, como sufixo e como fator.

Note-se que, sendo $u \in A^+$,

$$\begin{aligned} uA^* &= \{ux \mid x \in A^*\}, \\ A^*u &= \{xu \mid x \in A^*\}, \\ A^*uA^* &= \{xuy \mid x, y \in A^*\} \end{aligned}$$

são os conjuntos das palavras sobre A que têm, respetivamente, u como prefixo, como sufixo e como fator.

Exemplo

Para $A = \{a, b, c\}$,

$$(babA^* \cap A^*acA^*) \setminus A^*c$$

representa a linguagem L das palavras que começam por bab, que têm ac como fator e cuja última letra não é um c.

Note-se que, sendo $u \in A^+$,

$$\begin{aligned} uA^* &= \{ux \mid x \in A^*\}, \\ A^*u &= \{xu \mid x \in A^*\}, \\ A^*uA^* &= \{xuy \mid x, y \in A^*\} \end{aligned}$$

são os conjuntos das palavras sobre A que têm, respetivamente, u como prefixo, como sufixo e como fator.

Exemplo

Para $A = \{a, b, c\}$,

$$(babA^* \cap A^*acA^*) \setminus A^*c$$

representa a linguagem L das palavras que começam por bab, que têm ac como fator e cuja última letra não é um c. Por exemplo,

$$babbaca \in L, \quad babcabca \notin L.$$

Seja L uma linguagem. Define-se:

$$
\begin{aligned}
L^0 &= \{\epsilon\} \\
L^k &= L^{k-1}L \quad (k \geq 1)
\end{aligned}
$$

Seja L uma linguagem. Define-se:

$$L^0 = \{\epsilon\}$$

$$L^k = L^{k-1}L \quad (k \geq 1)$$

$$L^+ = \bigcup_{n\geq 1} L^n = \{u_1 \cdots u_n \mid n \in \mathbb{N}, u_1, \ldots, u_n \in L\}$$

[**fecho positivo** de L]

$$L^* = \bigcup_{n\geq 0} L^n = L^+ \cup \{\epsilon\}.$$

[**estrela** ou **fecho (de Kleene)** de L]

Seja L uma linguagem. Define-se:

$$
\begin{aligned}
L^0 &= \{\epsilon\} \\
L^k &= L^{k-1}L \quad (k \geq 1) \\
L^+ &= \bigcup_{n\geq 1} L^n && \text{[\textbf{fecho positivo} de } L\text{]} \\
&= \{u_1 \cdots u_n \mid n \in \mathbb{N}, u_1, \ldots, u_n \in L\} \\
L^* &= \bigcup_{n\geq 0} L^n = L^+ \cup \{\epsilon\}. && \text{[\textbf{estrela} ou \textbf{fecho (de Kleene)} de } L\text{]}
\end{aligned}
$$

Proposição

Seja L uma linguagem. Então,

1. $\emptyset^* = \{\epsilon\}$, $\emptyset^+ = \emptyset$, $\{\epsilon\}^* = \{\epsilon\} = \{\epsilon\}^+$;
2. $L = L^1 \subseteq L^+ \subseteq L^+ \cup \{\epsilon\} = L^*$;
3. $\epsilon \in L^+$ se e só se $\epsilon \in L$;
4. $L^+ = LL^* = L^*L$.

Definição

O conjunto $\mathrm{Reg}(A)$ das **linguagens regulares** sobre um alfabeto A,

Definição

O conjunto $\text{Reg}(A)$ das **linguagens regulares** sobre um alfabeto A, é o menor conjunto de linguagens sobre A tal que:

(i) $\emptyset, \{\epsilon\} \in \text{Reg}(A)$;

Definição

O conjunto Reg(A) das **linguagens regulares** sobre um alfabeto A, é o menor conjunto de linguagens sobre A tal que:

(i) $\emptyset, \{\epsilon\} \in \text{Reg}(A)$;

(ii) $\{a\} \in \text{Reg}(A)$ para todo o $a \in A$;

Definição

O conjunto Reg(A) das **linguagens regulares** sobre um alfabeto A, é o menor conjunto de linguagens sobre A tal que:

(i) $\emptyset, \{\epsilon\} \in \text{Reg}(A)$;

(ii) $\{a\} \in \text{Reg}(A)$ para todo o $a \in A$;

(iii) Reg(A) é fechado para as operações de união, produto e fecho de Kleene. Ou seja, se $L, K \in \text{Reg}(A)$ então $L \cup K,\ LK,\ L^* \in \text{Reg}(A)$.

Definição

O conjunto $\text{Reg}(A)$ das **linguagens regulares** sobre um alfabeto A, é o menor conjunto de linguagens sobre A tal que:

(i) $\emptyset, \{\epsilon\} \in \text{Reg}(A)$;

(ii) $\{a\} \in \text{Reg}(A)$ para todo o $a \in A$;

(iii) $\text{Reg}(A)$ é fechado para as operações de união, produto e fecho de Kleene. Ou seja, se $L, K \in \text{Reg}(A)$ então $L \cup K,\ LK,\ L^* \in \text{Reg}(A)$.

Note-se que, se L é uma linguagem regular sobre um alfabeto A, então $L^+ = L^*L$ também é uma linguagem regular sobre A.

Exemplo

Seja A um alfabeto.

1. A linguagem A é regular pois

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$$

e, portanto, A^* também é regular.

Exemplo

Seja A um alfabeto.

1. A linguagem A é regular pois
$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$$
e, portanto, A^* também é regular.
2. Sendo $u \in A^+$, $\{u\}$ é uma linguagem regular. De facto, $u = a_1 a_2 \cdots a_n$ com $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ e, portanto,
$$\{u\} = \{a_1\}\{a_2\} \cdots \{a_n\}$$
é regular.

Exemplo

Seja A um alfabeto.

1. A linguagem A é regular pois
$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$$
e, portanto, A^* também é regular.
2. Sendo $u \in A^+$, $\{u\}$ é uma linguagem regular. De facto, $u = a_1 a_2 \cdots a_n$ com $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ e, portanto,
$$\{u\} = \{a_1\}\{a_2\} \cdots \{a_n\}$$
é regular.
3. Toda a linguagem finita L é regular. De facto, se $L = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ com $u_i \in A^*$, tem-se
$$L = \{u_1\} \cup \{u_2\} \cup \cdots \cup \{u_k\}.$$

Exemplo

1. Supondo que $A = \{a, b\}$, a linguagem

$$L = (aA^* \cap A^*b) \setminus (A^*aaA^* \cup A^*bbA^*)$$

das palavras sobre A que começam por a, acabam por b e que não têm aa nem bb como fatores, é regular. De facto, L é descrita pela seguinte expressão regular

$$L = (ab)^+.$$

Exemplo

1. Supondo que $A = \{a, b\}$, a linguagem
$$L = (aA^* \cap A^*b) \setminus (A^*aaA^* \cup A^*bbA^*)$$
das palavras sobre A que começam por a, acabam por b e que não têm aa nem bb como fatores, é regular. De facto, L é descrita pela seguinte expressão regular
$$L = (ab)^+.$$

2. Prova-se que as linguagens
   - $\{a^p \mid p > 0 \text{ primo}\}$
   - $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$
   - $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}_0, m \leq n\}$
   - $\{u \in A^* \mid u^I = u\}$

   sobre o alfabeto $\{a, b\}$ **não** são regulares.

Autómatos Finitos

Autómatos Finitos

Definição

Um **autómato (finito)** é um quíntuplo $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, i, F)$ onde

Autómatos Finitos

Definição

Um **autómato (finito)** é um quíntuplo $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, i, F)$ onde

(i) Q é um conjunto finito não vazio, chamado o **conjunto de estados** de $\mathcal{A}$;

Autómatos Finitos

Definição

Um **autómato (finito)** é um quíntuplo $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, i, F)$ onde

(i) Q é um conjunto finito não vazio, chamado o **conjunto de estados** de $\mathcal{A}$;

(ii) A é um alfabeto, chamado o **alfabeto (de entrada)** de $\mathcal{A}$;

Autómatos Finitos

Definição

Um **autómato (finito)** é um quíntuplo $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, i, F)$ onde

(i) Q é um conjunto finito não vazio, chamado o **conjunto de estados** de $\mathcal{A}$;

(ii) A é um alfabeto, chamado o **alfabeto (de entrada)** de $\mathcal{A}$;

(iii) $\delta : Q \times A \to \mathcal{P}(Q)$ é uma função, designada a **função transição** de $\mathcal{A}$.

Autómatos Finitos

Definição

Um **autómato (finito)** é um quíntuplo $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, i, F)$ onde

(i) Q é um conjunto finito não vazio, chamado o **conjunto de estados** de $\mathcal{A}$;

(ii) A é um alfabeto, chamado o **alfabeto (de entrada)** de $\mathcal{A}$;

(iii) $\delta : Q \times A \to \mathcal{P}(Q)$ é uma função, designada a **função transição** de $\mathcal{A}$. Cada triplo (p, a, q), em que $p, q \in Q$ e $a \in A$ são tais que $q \in \delta(p, a)$, diz-se uma **transição** de $\mathcal{A}$;

Autómatos Finitos

Definição

Um **autómato (finito)** é um quíntuplo $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, i, F)$ onde

(i) Q é um conjunto finito não vazio, chamado o **conjunto de estados** de $\mathcal{A}$;

(ii) A é um alfabeto, chamado o **alfabeto (de entrada)** de $\mathcal{A}$;

(iii) $\delta : Q \times A \to \mathcal{P}(Q)$ é uma função, designada a **função transição** de $\mathcal{A}$. Cada triplo (p, a, q), em que $p, q \in Q$ e $a \in A$ são tais que $q \in \delta(p, a)$, diz-se uma **transição** de $\mathcal{A}$;

(iv) $i \in Q$ é dito o **estado inicial** de $\mathcal{A}$;

Autómatos Finitos

Definição

Um **autómato (finito)** é um quíntuplo $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, i, F)$ onde

(i) Q é um conjunto finito não vazio, chamado o **conjunto de estados** de $\mathcal{A}$;

(ii) A é um alfabeto, chamado o **alfabeto (de entrada)** de $\mathcal{A}$;

(iii) $\delta : Q \times A \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ é uma função, designada a **função transição** de $\mathcal{A}$. Cada triplo (p, a, q), em que $p, q \in Q$ e $a \in A$ são tais que $q \in \delta(p, a)$, diz-se uma **transição** de $\mathcal{A}$;

(iv) $i \in Q$ é dito o **estado inicial** de $\mathcal{A}$;

(v) $F \subseteq Q$ é dito o **conjunto de estados finais** de $\mathcal{A}$.

Um autómato é habitualmente representado por um grafo orientado.

Um autómato é habitualmente representado por um grafo orientado.

Exemplo

Seja $\mathcal{A} = (\{1,2\}, \{a,b\}, \delta, 1, \{2\})$ onde δ é a função definida pela tabela seguinte:

δ	1	2
a	$\{1,2\}$	$\emptyset$
b	$\{1\}$	$\{2\}$

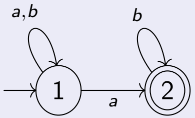
Um autómato é habitualmente representado por um grafo orientado.

Exemplo

Seja $\mathcal{A} = (\{1,2\}, \{a,b\}, \delta, 1, \{2\})$ onde δ é a função definida pela tabela seguinte:

δ	1	2
a	$\{1,2\}$	$\emptyset$
b	$\{1\}$	$\{2\}$

O autómato $\mathcal{A}$ é representado pelo diagrama seguinte:



- **caminho** em $\mathcal{A}$ - sequência finita
$$(q_0, a_1, q_1), (q_1, a_2, q_2), \ldots, (q_{n-1}, a_n, q_n)$$
de transições consecutivas de $\mathcal{A}$, também notado
$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \cdots q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n.$$

- **caminho** em $\mathcal{A}$ - sequência finita
$$(q_0, a_1, q_1), (q_1, a_2, q_2), \ldots, (q_{n-1}, a_n, q_n)$$
de transições consecutivas de $\mathcal{A}$, também notado
$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \cdots q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n.$$
- **origem** do caminho - o estado q_0.

- **caminho** em $\mathcal{A}$ - sequência finita
$$(q_0, a_1, q_1), (q_1, a_2, q_2), \ldots, (q_{n-1}, a_n, q_n)$$
de transições consecutivas de $\mathcal{A}$, também notado
$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \cdots q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n.$$
- **origem** do caminho - o estado q_0.
- **término** do caminho - o estado q_n.

- **caminho** em $\mathcal{A}$ - sequência finita
$$(q_0, a_1, q_1), (q_1, a_2, q_2), \ldots, (q_{n-1}, a_n, q_n)$$
de transições consecutivas de $\mathcal{A}$, também notado
$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \cdots q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n.$$
- **origem** do caminho - o estado q_0.
- **término** do caminho - o estado q_n.
- a palavra $a_1 a_2 \cdots a_n$ - diz-se a **etiqueta** do caminho.

- **caminho** em $\mathcal{A}$ - sequência finita
$$(q_0, a_1, q_1), (q_1, a_2, q_2), \ldots, (q_{n-1}, a_n, q_n)$$
de transições consecutivas de $\mathcal{A}$, também notado
$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \cdots q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n.$$
- **origem** do caminho - o estado q_0.
- **término** do caminho - o estado q_n.
- a palavra $a_1 a_2 \cdots a_n$ - diz-se a **etiqueta** do caminho.
- caminho **bem sucedido** - aquele que sai do estado inicial e chega a um estado final do autómato.

- **caminho** em $\mathcal{A}$ - sequência finita
$$(q_0, a_1, q_1), (q_1, a_2, q_2), \ldots, (q_{n-1}, a_n, q_n)$$
de transições consecutivas de $\mathcal{A}$, também notado
$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \cdots q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n.$$
- **origem** do caminho - o estado q_0.
- **término** do caminho - o estado q_n.
- a palavra $a_1 a_2 \cdots a_n$ - diz-se a **etiqueta** do caminho.
- caminho **bem sucedido** - aquele que sai do estado inicial e chega a um estado final do autómato.
Por exemplo, sendo $\mathcal{A}$ o autómato do exemplo anterior, o caminho
$$1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 2$$
é um caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$, enquanto que o caminho
$$1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 1$$
não é bem sucedido pois não acaba num estado final.

- palavra **aceite** ou **reconhecida** pelo autómato $\mathcal{A}$ - palavra $u \in A^*$ que é etiqueta de pelo menos um caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$.

- palavra **aceite** ou **reconhecida** pelo autómato $\mathcal{A}$ - palavra $u \in A^*$ que é etiqueta de pelo menos um caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$.
- $L(\mathcal{A})$ - conjunto das palavras aceites por $\mathcal{A}$, chamada a **linguagem aceite** ou **reconhecida** pelo autómato $\mathcal{A}$.

- palavra **aceite** ou **reconhecida** pelo autómato $\mathcal{A}$ - palavra $u \in A^*$ que é etiqueta de pelo menos um caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$.
- $L(\mathcal{A})$ - conjunto das palavras aceites por $\mathcal{A}$, chamada a **linguagem aceite** ou **reconhecida** pelo autómato $\mathcal{A}$.

Exemplo

Retomemos o autómato $\mathcal{A}$ do exemplo da página 13. Como vimos acima, a palavra aab é reconhecida por $\mathcal{A}$.

- palavra **aceite** ou **reconhecida** pelo autómato $\mathcal{A}$ - palavra $u \in A^*$ que é etiqueta de pelo menos um caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$.
- $L(\mathcal{A})$ - conjunto das palavras aceites por $\mathcal{A}$, chamada a **linguagem aceite** ou **reconhecida** pelo autómato $\mathcal{A}$.

Exemplo

Retomemos o autómato $\mathcal{A}$ do exemplo da página 13. Como vimos acima, a palavra aab é reconhecida por $\mathcal{A}$. A palavra $aabab$ também é aceite pois

$$1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 2$$

é um caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$ cuja etiqueta é $aabab$.

- palavra **aceite** ou **reconhecida** pelo autómato $\mathcal{A}$ - palavra $u \in A^*$ que é etiqueta de pelo menos um caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$.
- $L(\mathcal{A})$ - conjunto das palavras aceites por $\mathcal{A}$, chamada a **linguagem aceite** ou **reconhecida** pelo autómato $\mathcal{A}$.

Exemplo

Retomemos o autómato $\mathcal{A}$ do exemplo da página 13. Como vimos acima, a palavra aab é reconhecida por $\mathcal{A}$. A palavra $aabab$ também é aceite pois

$$1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 2$$

é um caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$ cuja etiqueta é $aabab$.
Pelo contrário, a palavra bb não é reconhecida por $\mathcal{A}$ pois todo o caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$ tem que usar a transição $1 \xrightarrow{a} 2$ para passar do estado 1 para o estado 2.

- palavra **aceite** ou **reconhecida** pelo autómato $\mathcal{A}$ - palavra $u \in A^*$ que é etiqueta de pelo menos um caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$.
- $L(\mathcal{A})$ - conjunto das palavras aceites por $\mathcal{A}$, chamada a **linguagem aceite** ou **reconhecida** pelo autómato $\mathcal{A}$.

Exemplo

Retomemos o autómato $\mathcal{A}$ do exemplo da página 13. Como vimos acima, a palavra aab é reconhecida por $\mathcal{A}$. A palavra $aabab$ também é aceite pois

$$1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 2$$

é um caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$ cuja etiqueta é $aabab$.
Pelo contrário, a palavra bb não é reconhecida por $\mathcal{A}$ pois todo o caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$ tem que usar a transição $1 \xrightarrow{a} 2$ para passar do estado 1 para o estado 2. Assim, toda a palavra reconhecida por $\mathcal{A}$ tem pelo menos uma ocorrência de a.

- palavra **aceite** ou **reconhecida** pelo autómato $\mathcal{A}$ - palavra $u \in A^*$ que é etiqueta de pelo menos um caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$.
- $L(\mathcal{A})$ - conjunto das palavras aceites por $\mathcal{A}$, chamada a **linguagem aceite** ou **reconhecida** pelo autómato $\mathcal{A}$.

Exemplo

Retomemos o autómato $\mathcal{A}$ do exemplo da página 13. Como vimos acima, a palavra aab é reconhecida por $\mathcal{A}$. A palavra $aabab$ também é aceite pois

$$1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 2$$

é um caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$ cuja etiqueta é $aabab$.
Pelo contrário, a palavra bb não é reconhecida por $\mathcal{A}$ pois todo o caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$ tem que usar a transição $1 \xrightarrow{a} 2$ para passar do estado 1 para o estado 2. Assim, toda a palavra reconhecida por $\mathcal{A}$ tem pelo menos uma ocorrência de a. Note-se que a linguagem reconhecida por $\mathcal{A}$ é $L(\mathcal{A}) = (a+b)^*ab^* = (a+b)^*a(a+b)^*$.

Uma linguagem L diz-se **reconhecível** se existe um autómato $\mathcal{A}$ que reconhece L, ou seja, tal que $L = L(\mathcal{A})$.

Uma linguagem L diz-se **reconhecível** se existe um autómato $\mathcal{A}$ que reconhece L, ou seja, tal que $L = L(\mathcal{A})$.

O mais importante resultado da teoria de autómatos, que é considerado como o fundador da teoria das linguagens regulares e dos autómatos finitos é o seguinte.

Uma linguagem L diz-se **reconhecível** se existe um autómato $\mathcal{A}$ que reconhece L, ou seja, tal que $L = L(\mathcal{A})$.

O mais importante resultado da teoria de autómatos, que é considerado como o fundador da teoria das linguagens regulares e dos autómatos finitos é o seguinte.

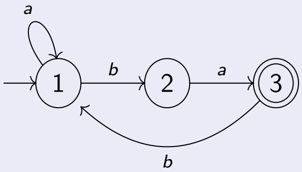
Teorema [Kleene'1954]

Uma linguagem é regular se e só se é reconhecível.

Um autómato $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, i, F)$ diz-se **determinista** ou **determinístico** se, para cada estado $q \in Q$ e cada letra $a \in A$, existe *no máximo* uma transição $q \xrightarrow{a} p$ de origem q e etiqueta a.

Exemplo

O seguinte autómato é determinista



Tem-se, por exemplo, $\delta(1, a) = 1$, $\delta(1, b) = 2$, $\delta(2, aba) = 1$ e $\delta(2, b)$ não está definido.

O próximo resultado mostra que todas as linguagens reconhecíveis são reconhecidas por autómatos deterministas. Ou seja, cada autómato finito admite um autómato determinista equivalente.

O próximo resultado mostra que todas as linguagens reconhecíveis são reconhecidas por autómatos deterministas. Ou seja, cada autómato finito admite um autómato determinista equivalente. O processo que permite passar de um dado autómato a um autómato determinista equivalente é uma das construções clássicas da teoria de autómatos.

O próximo resultado mostra que todas as linguagens reconhecíveis são reconhecidas por autómatos deterministas. Ou seja, cada autómato finito admite um autómato determinista equivalente. O processo que permite passar de um dado autómato a um autómato determinista equivalente é uma das construções clássicas da teoria de autómatos.

Teorema

Uma linguagem $L \subseteq A^*$ é reconhecível se e só se L é reconhecida por um autómato determinista.

Gramáticas

Gramáticas

Definição

Uma **gramática** é um quádruplo

$$\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

onde

Gramáticas

Definição

Uma **gramática** é um quádruplo

$$\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

onde

(i) V é um alfabeto, dito não terminal, cujos elementos são chamados **variáveis** (ou **símbolos não terminais**);

Gramáticas

Definição

Uma **gramática** é um quádruplo

$$\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

onde

(i) V é um alfabeto, dito não terminal, cujos elementos são chamados **variáveis** (ou **símbolos não terminais**);

(ii) A é um alfabeto, dito terminal, cujos elementos são chamados **letras** (ou **símbolos terminais**), tal que $V \cap A = \emptyset$;

Gramáticas

Definição

Uma **gramática** é um quádruplo

$$\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

onde

(i) V é um alfabeto, dito não terminal, cujos elementos são chamados **variáveis** (ou **símbolos não terminais**);

(ii) A é um alfabeto, dito terminal, cujos elementos são chamados **letras** (ou **símbolos terminais**), tal que $V \cap A = \emptyset$;

(iii) $\mathcal{S}$ é um elemento de V, chamado o **símbolo inicial**;

Gramáticas

Definição

Uma **gramática** é um quádruplo

$$\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

onde

(i) V é um alfabeto, dito não terminal, cujos elementos são chamados **variáveis** (ou **símbolos não terminais**);

(ii) A é um alfabeto, dito terminal, cujos elementos são chamados **letras** (ou **símbolos terminais**), tal que $V \cap A = \emptyset$;

(iii) $\mathcal{S}$ é um elemento de V, chamado o **símbolo inicial**;

(iv) P é um subconjunto finito de $\big((V \cup A)^* V (V \cup A)^*\big) \times (V \cup A)^*$.

Gramáticas

Definição

Uma **gramática** é um quádruplo

$$\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

onde

(i) V é um alfabeto, dito não terminal, cujos elementos são chamados **variáveis** (ou **símbolos não terminais**);

(ii) A é um alfabeto, dito terminal, cujos elementos são chamados **letras** (ou **símbolos terminais**), tal que $V \cap A = \emptyset$;

(iii) $\mathcal{S}$ é um elemento de V, chamado o **símbolo inicial**;

(iv) P é um subconjunto finito de $\big((V \cup A)^* V (V \cup A)^*\big) \times (V \cup A)^*$. Os elementos (α, β) de P são chamados **produções** (ou **regras gramaticais**) e representam-se por $\alpha \to \beta$.

Definição

Uma gramática $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ diz-se:

1. **dependente de contexto**

Definição

Uma gramática $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ diz-se:

1. **dependente de contexto** se cada produção é da forma
   - $\alpha\mathcal{X}\beta \to \alpha\sigma\beta$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $\alpha, \beta, \sigma \in (V \cup A)^*$ com $\sigma \neq \epsilon$, ou
   - $\mathcal{S} \to \epsilon$, se $\mathcal{S}$ não ocorre no membro direito de outra produção.

Definição

Uma gramática $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ diz-se:

1. **dependente de contexto** se cada produção é da forma
   - $\alpha\mathcal{X}\beta \to \alpha\sigma\beta$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $\alpha, \beta, \sigma \in (V \cup A)^*$ com $\sigma \neq \epsilon$, ou
   - $\mathcal{S} \to \epsilon$, se $\mathcal{S}$ não ocorre no membro direito de outra produção.
2. **independente de contexto**

Definição

Uma gramática $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ diz-se:

1. **dependente de contexto** se cada produção é da forma
   - $\alpha\mathcal{X}\beta \to \alpha\sigma\beta$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $\alpha, \beta, \sigma \in (V \cup A)^*$ com $\sigma \neq \epsilon$, ou
   - $\mathcal{S} \to \epsilon$, se $\mathcal{S}$ não ocorre no membro direito de outra produção.
2. **independente de contexto** se cada produção é da forma
   - $\mathcal{X} \to \alpha$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $\alpha \in (V \cup A)^*$.

Definição

Uma gramática $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ diz-se:

1. **dependente de contexto** se cada produção é da forma
   - $\alpha\mathcal{X}\beta \to \alpha\sigma\beta$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $\alpha, \beta, \sigma \in (V \cup A)^*$ com $\sigma \neq \epsilon$, ou
   - $\mathcal{S} \to \epsilon$, se $\mathcal{S}$ não ocorre no membro direito de outra produção.
2. **independente de contexto** se cada produção é da forma
   - $\mathcal{X} \to \alpha$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $\alpha \in (V \cup A)^*$.
3. **regular**

Definição

Uma gramática $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ diz-se:

1. **dependente de contexto** se cada produção é da forma
   - $\alpha\mathcal{X}\beta \to \alpha\sigma\beta$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $\alpha, \beta, \sigma \in (V \cup A)^*$ com $\sigma \neq \epsilon$, ou
   - $\mathcal{S} \to \epsilon$, se $\mathcal{S}$ não ocorre no membro direito de outra produção.
2. **independente de contexto** se cada produção é da forma
   - $\mathcal{X} \to \alpha$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $\alpha \in (V \cup A)^*$.
3. **regular** se é

   linear à direita,

Definição

Uma gramática $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ diz-se:

1. **dependente de contexto** se cada produção é da forma
   - $\alpha\mathcal{X}\beta \to \alpha\sigma\beta$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $\alpha, \beta, \sigma \in (V \cup A)^*$ com $\sigma \neq \epsilon$, ou
   - $\mathcal{S} \to \epsilon$, se $\mathcal{S}$ não ocorre no membro direito de outra produção.
2. **independente de contexto** se cada produção é da forma
   - $\mathcal{X} \to \alpha$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $\alpha \in (V \cup A)^*$.
3. **regular** se é

   linear à direita, ou seja, se cada produção é da forma
   - $\mathcal{X} \to u\mathcal{Y}$, onde $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in V$ e $u \in A^*$, ou
   - $\mathcal{X} \to u$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $u \in A^*$;

Definição

Uma gramática $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ diz-se:

1. **dependente de contexto** se cada produção é da forma
   - $\alpha\mathcal{X}\beta \to \alpha\sigma\beta$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $\alpha, \beta, \sigma \in (V \cup A)^*$ com $\sigma \neq \epsilon$, ou
   - $\mathcal{S} \to \epsilon$, se $\mathcal{S}$ não ocorre no membro direito de outra produção.
2. **independente de contexto** se cada produção é da forma
   - $\mathcal{X} \to \alpha$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $\alpha \in (V \cup A)^*$.
3. **regular** se é

   linear à direita, ou seja, se cada produção é da forma
   - $\mathcal{X} \to u\mathcal{Y}$, onde $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in V$ e $u \in A^*$, ou
   - $\mathcal{X} \to u$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $u \in A^*$;

   ou **linear à esquerda**,

Definição

Uma gramática $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ diz-se:

1. **dependente de contexto** se cada produção é da forma
   - $\alpha\mathcal{X}\beta \rightarrow \alpha\sigma\beta$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $\alpha, \beta, \sigma \in (V \cup A)^*$ com $\sigma \neq \epsilon$, ou
   - $\mathcal{S} \rightarrow \epsilon$, se $\mathcal{S}$ não ocorre no membro direito de outra produção.
2. **independente de contexto** se cada produção é da forma
   - $\mathcal{X} \rightarrow \alpha$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $\alpha \in (V \cup A)^*$.
3. **regular** se é

   linear à direita, ou seja, se cada produção é da forma
   - $\mathcal{X} \rightarrow u\mathcal{Y}$, onde $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in V$ e $u \in A^*$, ou
   - $\mathcal{X} \rightarrow u$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $u \in A^*$;

   ou **linear à esquerda**, isto é, se cada produção é da forma
   - $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}u$, onde $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in V$ e $u \in A^*$, ou
   - $\mathcal{X} \rightarrow u$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $u \in A^*$.

Hierarquia de Chomsky	Gerador	Linguagem	Reconhecedor
Tipo 0	Gramática (irrestrita)	Recursivamente enumerável	Máquina de Turing
Tipo 1	GDC	Dependente de contexto	Autómato linear limitado
Tipo 2	GIC	Independente de contexto	Autómato de pilha
Tipo 3	GR	Regular	Autómato finito