Licenciatura em Ciências da Computação

COMPUTABILIDADE E COMPLEXIDADE

1. Máquinas de Turing

José Carlos Costa

Dep. Matemática
Universidade do Minho
Braga, Portugal

1º semestre 2025/2026

Definição

Uma *máquina de Turing* é um septeto $\mathscr{T} = (Q, A, T, \delta, i, f, \Delta)$:

1. Q é um conjunto finito não vazio, dito o *conjunto de estados* de $\mathscr{T}$;
2. A é um alfabeto, chamado o *alfabeto (de entrada)* de $\mathscr{T}$;
3. $T \supseteq A$ é um alfabeto, dito o *alfabeto da fita* de $\mathscr{T}$, tal que $Q \cap T = \emptyset$. O conjunto $T \setminus A$ é chamado o *alfabeto auxiliar* de $\mathscr{T}$;
4. $\delta : Q \times T \to Q \times T \times \{E, C, D\}$ é uma função parcial, dita a *função transição* de $\mathscr{T}$, indefinida em (f, t) para cada $t \in T$.
   Os *movimentos* são:
   E-esquerda; D-direita; C-"centro" (ausência de movimento);
5. $i \in Q$, dito o *estado inicial* de $\mathscr{T}$;
6. $f \in Q$, chamado o *estado final* de $\mathscr{T}$;
7. $\Delta \in T \setminus A$ é um símbolo auxiliar, designado o *símbolo branco*.

Exemplo 1

O septeto

$$\mathscr{T} = (\{1,2,3\}, \{a,b\}, \{a,b,\Delta\}, \delta, 1, 3, \Delta)$$

onde δ é a função parcial de $\{1,2,3\} \times \{a,b\}$ em $\{1,2,3\} \times \{a,b\} \times \{E,C,D\}$ tal que

$$\begin{array}{rcl} \delta(1,\Delta) & = & (2,\Delta,D) \\ \delta(2,b) & = & (2,b,D) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \delta(2,a) & = & (2,a,D) \\ \delta(2,\Delta) & = & (3,\Delta,C) \end{array}$$

é uma máquina de Turing com:

- três estados (1, 2 e 3);
- alfabeto de entrada $\{a,b\}$;
- Δ como único símbolo auxiliar;
- 1 e 3 como estados inicial e final.

Exemplo 1 (continuação)

A função transição δ que, recorde-se, é definida por

$$\begin{array}{rclcrcl} \delta(1,\Delta) & = & (2,\Delta,D) & \qquad & \delta(2,a) & = & (2,a,D) \\ \delta(2,b) & = & (2,b,D) & \qquad & \delta(2,\Delta) & = & (3,\Delta,C) \end{array}$$

pode ser representada pela tabela

δ	a	b	Δ
1			$(2,\Delta,D)$
2	$(2,a,D)$	$(2,b,D)$	$(3,\Delta,C)$

Na tabela omite-se a linha referente ao estado final pois, por definição, numa máquina de Turing não existem transições a sair do estado final.

Uma máquina de Turing

$$\mathscr{T} = (Q, A, T, \delta, i, f, \Delta)$$

é dotada de uma:

1. **fita**
   - dividida em células;
   - infinita à direita;
   - com uma célula inicial à esquerda;
   - cada célula tem uma letra de T;
   - em cada instante o número de células não brancas (ou seja células onde não está escrito o símbolo branco Δ) é finito;
2. **cabeça** ou **cursor** (de leitura e escrita)
   - posicionada em cada momento numa determinada célula da fita;
   - permite ler a letra da célula e substituir essa letra por outra (eventualmente a mesma).

Por exemplo, a figura

a	Δ	b	b	a	Δ	Δ	Δ	$\cdots$
		$\uparrow$						
		q						

representa a fita e a cabeça de uma máquina de Turing em que:

- nas 1ª e 5ª células da fita está escrita a letra a;
- nas 3ª e 4ª células da fita está escrito b;
- todas as outras células da fita estão em branco;
- a seta indica que a cabeça está posicionada na 3ª célula;
- a letra q por baixo da seta indica o estado atual da máquina de Turing.

A cabeça pode efetuar movimentos determinados pela função transição. Assim, a igualdade

$$\delta(q, t) = (q', t', m)$$

significa que, se

- a máquina está no estado q;
- a cabeça está posicionada numa célula da fita onde está escrita a letra t;

então

- a máquina transita para o estado q';
- substitui a letra t pela letra t' na fita;
- a cabeça efetua o movimento m (ou seja, move-se para a esquerda, para a direita ou não se move, conforme m seja E, D ou C).

Exemplo 2

Seja

$$\mathscr{T} = (\{1,2,3\}, \{a,b\}, \{a,b,\Delta\}, \delta, 1, 3, \Delta)$$

a máquina de Turing cuja função transição δ é dada pela tabela

δ	a	b	Δ
1			$(2,\Delta,D)$
2	$(2,a,D)$	$(2,a,D)$	$(3,\Delta,C)$

Num dado momento, uma situação possível de fita e de cursor é

Δ	a	a	a	b	Δ	Δ	$\cdots$

$$\uparrow$$
$$2$$

que indica que a máquina está posicionada no estado 2 e o cursor está posicionado na 4ª célula onde está escrita a letra a.

Exemplo 2 (continuação)

Dado que $\delta(2, a) = (2, a, D)$, no momento seguinte, a situação de fita e de cursor passará a ser

Δ	a	a	a	b	Δ	Δ	$\cdots$
				$\uparrow$			
				2			

ou seja, apenas mudou a posição do cursor que se situa agora na 5ª célula. Dado que $\delta(2, b) = (2, a, D)$, a situação posterior seria então

Δ	a	a	a	a	Δ	Δ	$\cdots$
					$\uparrow$		
					2		

Note-se que neste passo houve uma alteração da letra na 5ª célula da fita mantendo-se ainda a máquina no estado 2.

Exemplo 2 (continuação)

No próximo passo, usando a igualdade

$$\delta(2, \Delta) = (3, \Delta, C)$$

obtém-se

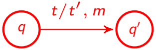
Δ	a	a	a	a	Δ	Δ	$\cdots$

$$\uparrow$$
$$3$$

Como a máquina atingiu o estado 3, que é o estado final da máquina, não é possível efetuar mais passos.

A representação de máquinas de Turing é feita de forma análoga aos autómatos finitos e aos autómatos de pilha. A única diferença é na representação das transições:

$\delta(q,t) = (q', t', m)$ é representada por



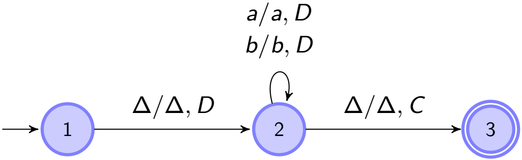
e significa, conforme referido anteriormente, que, se

- a máquina está no estado q;
- o cursor está a ler o símbolo t na fita;

então

- a máquina transita para o estado q';
- na fita, na posição do cursor, a letra t é substituída por t';
- o cursor efetua o movimento m.

Por exemplo, o diagrama



representa a máquina de Turing do Exemplo 1. Esta máquina não é ainda fundamentalmente diferente de um autómato finito pois:

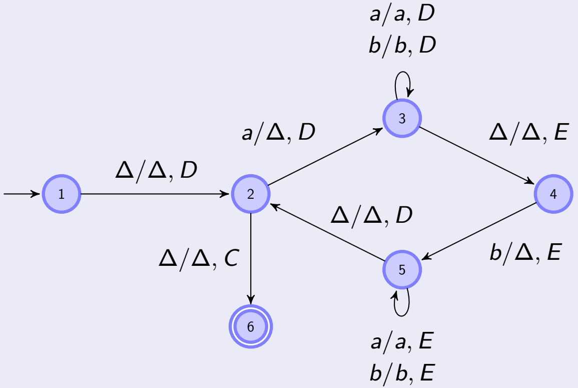
- não substitui letras na fita por outras diferentes;
- com exceção da transição para o estado final, o único movimento que faz é para a direita.

Veremos mais tarde que, de facto, esta máquina reconhece uma linguagem regular, ou seja, reconhece uma linguagem reconhecida por autómato finito.

Uma máquina de Turing mais "sofisticada" é apresentada a seguir.

Exemplo 3

O diagrama



descreve uma MT cujo alfabeto de entrada contém as letras a e b. Como veremos, esta MT reconhece a linguagem não regular $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Problema 1.1

Seja $A = \{a, b\}$ e seja $\mathscr{T} = (\{0, 1, 2, 3, 4\}, A, A \cup \{\Delta\}, \delta, 0, 4, \Delta)$ a máquina de Turing cuja função transição δ é definida pela tabela seguinte:

δ	a	b	Δ
0			$(1, \Delta, D)$
1	$(2, a, D)$	$(2, a, D)$	$(3, \Delta, E)$
2	$(1, b, D)$	$(1, b, D)$	
3	$(3, a, E)$	$(3, b, E)$	$(4, \Delta, C)$

a) Represente $\mathscr{T}$ graficamente.

b) Se num determinado instante a fita e o cursor estiverem na situação

Δ	a	b	b	b	Δ	Δ	$\cdots$
			$\uparrow$ 1				

qual será a sua situação no momento posterior? E depois? E a seguir?

Definição

Seja $\mathscr{T} = (Q, A, T, \delta, i, f, \Delta)$ uma máquina de Turing. Uma *configuração* de $\mathscr{T}$ é um par ordenado $(q, u\underline{t}v)$ onde $q \in Q$, $u, v \in T^*$, $t \in T$ e:

1. q é o estado atual da máquina;
2. a palavra utv está escrita na fita o mais à esquerda possível (i.e., a 1ª letra de utv ocupa a 1ª célula) e todas as células após v estão preenchidas com Δ;
3. a cabeça está posicionada na célula ocupada pela letra t.

- Uma *configuração* representa a situação da fita e do cursor da MT num dado momento.
- Por isso, a configuração $(q, u\underline{t}v)$ pode ser também denotada por $(q, u\underline{t}v\Delta^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

- Por exemplo, a configuração $(2, a\Delta\underline{b}ba)$ representa a situação

a	Δ	b	b	a	Δ	Δ	Δ	$\cdots$

$$\begin{array}{c}\uparrow\\ 2\end{array}$$

- Esta configuração pode também ser denotada por $(2, a\Delta\underline{b}ba\Delta\Delta)$.

Notação

Para uma palavra $v \in T^*$, utilizaremos a notação $(q, u\underline{v})$, onde $q \in Q$ e $u \in T^*$, para representar a configuração:

- $(q, u\underline{t}v')$ se $t \in T$ e $v' \in T^*$ são tais que $v = tv'$;
- $(q, u\underline{\Delta})$ se $v = \epsilon$.

- Assim, no exemplo acima a configuração $(2, a\Delta\underline{b}ba)$ pode ainda ser representada por $(2, a\Delta\underline{bba})$, por $(2, a\Delta\underline{bba\Delta})$, etc.

Definição

Sejam $c_1 = (q_1, u_1\underline{t_1}v_1)$ e $c_2 = (q_2, u_2\underline{t_2}v_2)$ duas configurações de $\mathscr{T}$. Diz-se que:

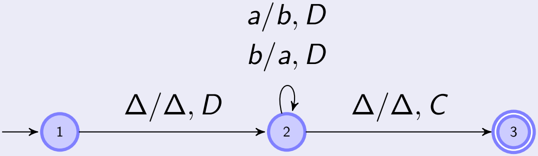
- c_2 é uma *computação direta* a partir de c_1, e escreve-se $c_1 \xrightarrow[\mathscr{T}]{} c_2$, se $\mathscr{T}$ passa da configuração c_1 para a configuração c_2 *num único passo*.

  [Assim, no Exemplo 2, a configuração $(2, \Delta aaa\underline{b})$ é uma computação direta a partir da configuração $(2, \Delta aa\underline{a}b)$ e poderíamos escrever $(2, \Delta aa\underline{a}b) \xrightarrow[\mathscr{T}]{} (2, \Delta aaa\underline{b})$.]
- c_2 é uma *computação* a partir de c_1, e escreve-se $c_1 \xrightarrow[\mathscr{T}]{*} c_2$, se $\mathscr{T}$ passa da configuração c_1 para c_2 *em zero ou mais passos*; ou seja, se $c_1 = c_2$ ou $c_1 = c'_1 \xrightarrow[\mathscr{T}]{} c'_2 \xrightarrow[\mathscr{T}]{} c'_3 \cdots c'_{n-1} \xrightarrow[\mathscr{T}]{} c'_n = c_2$ para configurações $c'_1, c'_2, \ldots, c'_n$.

Quando não houver ambiguidade em relação à máquina de Turing $\mathscr{T}$ que se está a considerar, simplificaremos as notações de $\xrightarrow[\mathscr{T}]{}$ e de $\xrightarrow[\mathscr{T}]{*}$ omitindo a letra $\mathscr{T}$.

Exemplo 4

Seja $\mathscr{T}$ a seguinte máquina de Turing



A partir da configuração $(1, \underline{\Delta}aaaba)$ podem ser efetuadas em $\mathscr{T}$, sucessivamente, as seguintes computações diretas

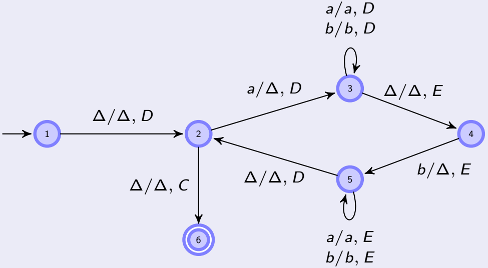
$$(1, \underline{\Delta}aaaba) \longrightarrow (2, \Delta\underline{a}aaba) \longrightarrow (2, \Delta b\underline{a}aba) \longrightarrow (2, \Delta bb\underline{a}ba) \longrightarrow$$

$$(2, \Delta bbb\underline{b}a) \longrightarrow (2, \Delta bbba\underline{a}) \longrightarrow (2, \Delta bbbab\underline{\Delta}) \longrightarrow (3, \Delta bbba\underline{b}\Delta).$$

Portanto $(1, \underline{\Delta}aaaba) \xrightarrow{*} (3, \Delta bbbab\underline{\Delta})$ é uma computação em $\mathscr{T}$.

Problema 1.2

Seja $\mathscr{T}$ a máquina de Turing (do Exemplo 3) representada pelo grafo



Indique a sequência de configurações que podem ser computadas em $\mathscr{T}$ a partir da configuração: (i) $(1, \underline{\Delta}abb)$; (ii) $(1, \underline{\Delta}aabb)$.

(i) $(1, \underline{\Delta}abb) \longrightarrow (2, \Delta\underline{a}bb) \longrightarrow (3, \Delta\Delta\underline{b}b) \longrightarrow (3, \Delta\Delta b\underline{b}) \longrightarrow (3, \Delta\Delta bb\underline{\Delta})$
$\longrightarrow (4, \Delta\Delta b\underline{b}) \longrightarrow (5, \Delta\Delta\underline{b}) \longrightarrow (5, \Delta\underline{\Delta}b) \longrightarrow (2, \Delta\Delta\underline{b})$.

(ii) $(1, \underline{\Delta}aabb) \longrightarrow (2, \Delta\underline{a}abb) \longrightarrow (3, \Delta\Delta\underline{a}bb) \xrightarrow{*} (3, \Delta\Delta abb\underline{\Delta}) \longrightarrow (4, \Delta\Delta ab\underline{b})$
$\longrightarrow (5, \Delta\Delta a\underline{b}) \xrightarrow{*} (5, \Delta\underline{\Delta}ab) \longrightarrow (2, \Delta\Delta\underline{a}b) \longrightarrow (3, \Delta^3\underline{b}) \longrightarrow$
$(3, \Delta^3 b\underline{\Delta}) \longrightarrow (4, \Delta^3\underline{b}) \longrightarrow (5, \Delta^2\underline{\Delta}) \longrightarrow (2, \Delta^3\underline{\Delta}) \longrightarrow (6, \Delta^3\underline{\Delta})$.