

Probabilidades e Aplicações

1. Disponemos de n caixas, numeradas de 1 a n . Colocamos, ao acaso, n bolas (também numeradas de 1 a n) nas n caixas e de tal modo que em cada caixa fica uma, e uma só, bola. Seja E_i o acontecimento: “a bola numerada com i ficou colocada na caixa i ”, $i \in \{1, \dots, n\}$.
 - (a) Calcule $P(E_i)$, para $i \in \{1, \dots, n\}$.
 - (b) Identifique o acontecimento $(E_i \cap E_j)$ e calcule $P(E_i \cap E_j)$, para $1 \leq i < j \leq n$.
 - (c) Calcule $P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \dots \cap E_{i_k})$, para $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.
 - (d) Identifique o acontecimento $\bigcup_{i=1}^n E_i$ e calcule a sua probabilidade.
 - (e) Seja Z_n o número de bolas, entre as n , que estão colocadas na caixa correspondente ao seu número. Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0) = e^{-1}$.

Obs.: Em (e) pode usar, sem demonstrar, o seguinte resultado: para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2. Considere a experiência aleatória ξ : “lançamento de uma moeda equilibrada $n - 1$ vezes consecutivas”, com $n \geq 3$.
 - (a) Identifique o espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{A}, P) associado a esta experiência.
 - (b) Considere os seguintes n acontecimentos

$$E_j = \begin{cases} \text{“saiu cara no } j\text{-ésimo lançamento”} & \text{se } j \in \{1, \dots, n-1\} \\ \text{“saíram faces distintas nos 2 primeiros lançamentos”} & \text{se } j = n \end{cases}.$$
 - i. Prove que $P(E_i \cap E_j) = P(E_i)P(E_j)$, para todo o $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$.
 - ii. Calcule $P\left(\bigcap_{j=1}^n E_j\right)$.
 - iii. Comente a afirmação: “Uma família finita de acontecimentos independentes 2 a 2 é uma família de acontecimentos independentes.”
3. Sejam A e B acontecimentos de um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{A}, P) . Prove que as seguintes afirmações são equivalentes e generalize-as para uma qualquer família finita de acontecimentos:
 - (a) A e B são independentes
 - (b) A e \overline{B} são independentes
 - (c) \overline{A} e B são independentes
 - (d) \overline{A} e \overline{B} são independentes

Mostre ainda que A é independente de A sse $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

4. Tenho duas moedas normais, e equilibradas, e ainda uma moeda falsa que tem ‘cara’ nas duas faces. Escolho ao acaso uma moeda entre estas três, lanço-a n vezes e observo que saíram n caras. Qual a probabilidade de eu ter escolhido a moeda falsa?

5. Numa dada população, certa doença está presente sob a forma grave em 2% dos indivíduos, sob a forma moderada em 10% e ausente nos restantes 88%. Um exame dá resultado positivo (i.e., diz que o indivíduo tem a doença) em 90% dos casos graves, em 70% dos casos moderados e em 10% dos saudáveis. Um indivíduo é escolhido, ao acaso, na população e é submetido a exame.
- Qual a probabilidade de o exame dar positivo?
 - Se o exame der positivo, qual a probabilidade de o indivíduo ser doente moderado?
 - Se o exame der positivo, qual a probabilidade de o indivíduo ser doente?
 - Se o exame der negativo, qual a probabilidade de o indivíduo ser doente?
 - Os acontecimentos “indivíduo é doente” e “exame deu positivo” são independentes?
6. Uma determinada caixa automática da UM está 5% das vezes fora de serviço. Mesmo quando está em serviço, nem todas as opções estão disponíveis. Em particular sabe-se que, quando a caixa está em serviço, em 10% das vezes não é possível consultar o saldo. Suponha que um aluno da UM, escolhido ao acaso, vai utilizar esta caixa automática.
- Determine a probabilidade de ele conseguir consultar o saldo.
 - Sabendo que ele não conseguiu consultar o saldo, qual a probabilidade de a caixa estar fora de serviço?
 - Os acontecimentos “aluno não conseguiu consultar o saldo” e “o aluno encontrou a máquina fora de serviço” são independentes?
7. Em três lançamentos consecutivos de um dado equilibrado, qual a probabilidade de:
- saírem 3 faces iguais?
 - saírem 2 faces iguais?
 - saírem 3 faces distintas?
 - a soma das faces obtidas nos dois primeiros lançamentos ser igual ao valor do terceiro? (Sugestão: observe que os acontecimentos das alíneas (a) a (c) formam uma partição dos espaço amostral e use raciocínio semelhante ao efetuado na demonstração do T.P.T.).
 - as 3 faces saírem por ordem estritamente crescente?
8. No tratamento de uma certa doença, um médico receita aos doentes pelo menos um de dois medicamentos, A ou B . Em 70% dos casos o médico receita o medicamento A , enquanto que o medicamento B é receitado em 40% dos casos. É introduzido no mercado um novo medicamento, C , para complementar o efeito dos medicamentos já existentes, mas que só pode ser usado com um e um só dos outros dois medicamentos, i.e., não é compatível com a utilização em simultâneo de A e B . O médico receita C a 30% dos doentes que só tomam A e a 60% dos que só tomam B .
- Determine a percentagem de doentes que:

i. toma ambos os medicamentos A e B ;	ii. toma A mas não toma B ;
iii. toma B mas não toma A ;	iv. toma o medicamento C ;
v. só toma o medicamento A ;	vi. só toma um dos medicamentos.
 - Sabendo que o médico não receitou o medicamento C a um doente, qual a probabilidade de este utilizar o medicamento A ?

9. Considere a experiência aleatória que consiste em efetuar dois lançamentos consecutivos de um dado equilibrado.
- Identifique o espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{A}, P) associado a esta experiência aleatória.
 - Identifique, justificando, dois acontecimentos incompatíveis decorrentes desta experiência.
 - Identifique, justificando, dois acontecimentos independentes decorrentes desta experiência.
 - Sabendo que saíram duas faces par nos dois lançamentos, qual a probabilidade de ter saído face seis no primeiro lançamento? Justifique.
 - Sabendo que saiu pelo menos uma face ímpar nos dois lançamentos, qual a probabilidade de ter saído face seis no primeiro lançamento? Justifique.
 - Sabendo que saiu pelo menos uma face ímpar nos dois lançamentos, qual a probabilidade de ter saído ás no primeiro lançamento? Justifique.
10. No país Maravilha decorre uma campanha em que os carros são inspeccionados relativamente ao seu Índice de Poluição (IP). Sabe-se que, dos carros existentes neste país, 20% têm IP alto e os restantes têm um IP baixo. Sabe-se ainda que, dos carros que têm IP alto, 50% têm um IP considerado perigoso para a saúde pública. Os carros que têm IP baixo não são considerados perigosos para a saúde pública. Escolheu-se, ao acaso, um carro neste país.
- Calcule a probabilidade de o carro ter um IP considerado perigoso para a saúde pública.
 - O objetivo da inspeção é declarar inaptos os carros que têm IP alto e declarar aptos os carros que têm IP baixo. No entanto, processo de inspeção tem algumas falhas. Em particular, sabe-se que a inspeção declara:
 - aptos apenas 80% dos carros que têm IP baixo;
 - inaptos apenas 50% dos carros que têm IP alto considerado não perigoso para a saúde;
 - inaptos todos os carros que têm um IP alto considerado perigoso para a saúde.
- Suponha que o carro escolhido vai ser submetido a inspeção.
- Mostre que a probabilidade de o carro ser declarado inapto é de 0.31.
 - Sabendo que o carro foi declarado inapto, qual a probabilidade de ter um IP alto considerado perigoso para a saúde?
 - Sabendo que o carro foi declarado apto, qual a probabilidade de ter IP baixo?
11. Um hospital abriu concurso para uma vaga de enfermeiro e todos os candidatos foram submetidos a duas provas, A e B . Sabe-se que 40% dos candidatos reprovou na prova A , 30% reprovou na B e 10% reprovou em ambas as provas. Depois de efetuar estas provas, alguns candidatos seguem para a fase seguinte, em que são entrevistados, de acordo com o seguinte:
- os candidatos aprovados em ambas as provas seguem para a entrevista;
 - os candidatos que reprovam na prova B são automaticamente excluídos (e não seguem para a entrevista);
 - dos candidatos que só reprovam na prova A , 10% são escolhidos aleatoriamente para seguir para a entrevista.

Escolheu-se, ao acaso, um indivíduo que se candidatou a esta vaga.

- Mostre que a probabilidade de ele ter sido aprovado em ambas as provas é igual a 0.4.
- Mostre que a probabilidade de ele ter reprovado apenas na prova A é igual a 0.3.
- Qual a probabilidade de este indivíduo seguir para a entrevista?
- Sabendo que o indivíduo seguiu para entrevista, qual a probabilidade de ter reprovado A ?
- Diga, justificando, se os seguintes acontecimentos, R_A e R_B , são independentes:
 R_A : “o indivíduo reprovou na prova A ”, R_B : “o indivíduo reprovou na prova B ”.