Conceitos Fundamentais

Fernanda Costa

Departamento de Matemática
Universidade do Minho

Outline

Vetores e Matrizes

- Trabalhamos apenas com vetores e matrizes reais. Vetores são denotados por letras minúsculas e matrizes por letras maiúsculas.
- $\mathbb{R}^d$ denota o espaço dos vetores reais de dimensão d e $\mathbb{R}^{m\times d}$ o espaço das matrizes reais $m \times d$.
- Para $w \in \mathbb{R}^d$, w_i representa a i-ésima componente. Assumimos sempre que w é um vetor coluna:

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_d \end{bmatrix}.$$

- A transposta de w é o vetor linha

$$w^T = [\, w_1 \; w_2 \; \cdots \; w_d \,],$$

  e também é frequentemente escrito com parênteses como $w = (w_1, w_2, \ldots, w_d)$.
- A notação $w \geq 0$ (resp. $w > 0$) indica que $w_i \geq 0$ (resp. $w_i > 0$) para todo $i = 1, \ldots, d$.

- Para $w, z \in \mathbb{R}^d$, o produto interno é

$$w^T z = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \ldots + w_d z_d = \sum_{i=1}^{d} w_i z_i.$$

- Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$, a_{ij} denota o elemento da linha i e coluna j.
- A transposta de A, denotada por A^T, é a matriz $d \times m$ obtida trocando linhas por colunas.

$$\underline{\text{Exemplo:}} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- A matriz A diz-se *quadrada de ordem* d se $m = d$.

- Uma matriz quadrada A é *simétrica* se $A = A^T$.

Exemplo: $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & c & 3 \end{bmatrix}$ é simétrica para $a = 1,\ b = 2,\ c = 3.$

- Uma matriz A quadrada $d \times d$ diz-se:
    - *definida positiva* se $s^T A s > 0$ para todo $s \in \mathbb{R}^d,\ s \neq 0$;
    - *semidefinida positiva* se $s^T A s \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}^d$;
    - *definida negativa* se $s^T A s < 0$ para todo $s \in \mathbb{R}^d,\ s \neq 0$;
    - *semidefinida negativa* se $s^T A s \leq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}^d$;
    - *indefinida* se existem $s, z \in \mathbb{R}^d$ tais que $s^T A s > 0$ e $z^T A z < 0$.

Notação: Dizemos que A é *SDP* se A é simétrica e definida positiva, e *SSDP* se A é simétrica e semidefinida positiva. Similarmente, *SDN* e *SSDN* indicam matrizes simétricas definida negativa e semidefinida negativa, respectivamente.

Exemplo: Verifique se a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ é SDP.

Resolução:

Reparar que $A = A^{\mathsf{T}}$, i.e. A é uma matriz simétrica.

Para qualquer $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ e $s \neq 0$,

$$s^{\mathsf{T}}As = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s_1 - s_2, & -s_1 + s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$
$$= 2s_1^2 - s_1 s_2 - s_1 s_2 + s_2^2 = s_1^2 + (s_1 - s_2)^2 \geq 0.$$

Note-se que $s_1^2 + (s_1 - s_2)^2 = 0$ se e só se $s_1 = s_2 = 0$.

Portanto, a matriz A é SDP.

- Uma matriz A simétrica quadrada $d \times d$ é:
  - *definida positiva* se e só se todos os seus valores próprios são positivos;
  - *semidefinida positiva* se e só se todos os seus valores próprios são não negativos;
  - *definida negativa* se e só se todos os seus valores próprios são negativos;
  - *semidefinida negativa* se e só se todos os seus valores próprios são não positivos;
  - *indefinida* se e só se A tem pelo menos um valor próprio positivo e pelo menos um valor próprio negativo.

- A diagonal de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ é formada pelos elementos A_{ii}, com $i = 1, \ldots, \min(m, d)$.

- A matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ é *triangular inferior* se $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

$$\underline{\text{Exemplo:}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

- É *triangular superior* se $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

$$\underline{\text{Exemplo:}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- A matriz A é *diagonal* se $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

$$\underline{\text{Exemplo:}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- A <u>matriz identidade</u>, denotada por I, é uma matriz quadrada diagonal cujos elementos da diagonal são todos iguais a 1.

- Uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é <u>não singular</u> se existir uma matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $AB = BA = I$.
  - Esta matriz B é denotada por A^{-1} e chamada de <u>inversa</u> de A.
  - A inversa de A^T é a transposta de A^{-1}, ou seja, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- Uma matriz quadrada Q é <u>ortogonal</u> se $Q\,Q^T = I$, ou seja, a inversa de uma matriz ortogonal é a sua transposta, $Q^{-1} = Q^T$.

- O <u>determinante</u> de uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, denotado por $\det(A)$ ou $|A|$, é definido por

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11}, & d = 1, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{d} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\widetilde{A}_{1j}), & d \geq 2, \end{cases}$$

onde $\widetilde{A}_{1j}$ é a submatriz obtida eliminando a linha 1 e a coluna j.

Nota:

1. $\det\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right) = a \times d - b \times c$
2. $\det\left(\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\right) =$
$= a \times \det\left(\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}\right) - b \times \det\left(\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}\right) + c \times \det\left(\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}\right)$
$= a \times e \times i - a \times f \times h - b \times d \times i + b \times f \times g + c \times d \times h - c \times e \times g$

- Os menores principais de $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ são os determinantes $\det(A_k)$ das suas submatrizes principais: $A_k = [a_{ij}]_{i,j=1}^{k}$ para $k = 1, \dots d$.

  Exemplo: Calcular os menores principais da matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

  Resolução:

  $\det(A_1) = |-2| = -2;$

  $$\det(A_2) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \times 2 - (-1 \times 1) = -3;$$

  $$\det(A_3) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

  $$= -2\det\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\right) - (-1)\det\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\right) + (-1)\det\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

  $$= -2(-4+1) + (-2+1) - (-1+2) = 6 - 1 - 1 = 4.$$

- **Critério de Sylvester:** Uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ é:
  - *definda positiva* se e só se todos os menores principais forem positivos;
  - *semidefinida positiva* se todos menores principais forem não negativos;
  - *definida negativa* se e só se todos os menores de ordem impar forem negativos e os todos os menores de ordem par forem positivos;
  - *semidefinida negativa* se e só se todos os menores de ordem impar forem não positivos e todos os menores de ordem par forem não negativos.