Licenciatura em Ciências da Computação

COMPUTABILIDADE E COMPLEXIDADE

3. Funções Parciais Recursivas

José Carlos Costa

Dep. Matemática
Universidade do Minho
Braga, Portugal

1º semestre 2025/2026

- Em 1921/22, o matemático alemão David Hilbert (1862-1943) deu um curso sobre fundações da matemática no qual propõe que estas sejam reformuladas de forma rigorosa, partindo da aritmética.
- O programa de Hilbert era que toda a matemática poderia ser reduzida a um número finito de axiomas a partir dos quais qualquer proposição da matemática poderia ser provada.
- Em 1931, o matemático austríaco Kurt Gödel (1906-1978) provou, através do seu Teorema da incompletude, que esta tarefa é impossível.
- Este teorema diz que em qualquer sistema axiomático contendo a aritmética de Peano, existem afirmações verdadeiras que não podem ser demonstradas a partir dos axiomas.

- As *funções recursivas primitivas* são aquelas que podem ser obtidas de certas *funções básicas* usando os operadores de *composição* e *recursão primitiva*.
- A maior parte das funções "usuais" (tais como *adição*, *multiplicação*, *exponenciação*,...) são recursivas primitivas.
- Em "*On the Infinite*" (1925), Hilbert conjeturou que a (agora chamada) função de Ackermann não é recursiva primitiva, mas esse facto só foi provado em 1928 por um seu aluno, o matemático alemão Wilhelm Ackermann (1896-1962), no artigo "*On Hilbert's construction of the real numbers*".
- Todas as funções recursivas primitivas bem como a função de Ackermann são exemplos de funções computáveis.

- Deve-se notar que na demonstração do Teorema da incompletude, Gödel mostrou que existem funções não computáveis.
- Vimos já que a noção de função computável (ou seja, uma função que pode ser calculada por processos algorítmicos) foi formalizada em 1936, por Alan Turing (1912-1954) em "*On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*".
- Neste artigo, Turing introduziu o conceito de Máquina de Turing, um modelo abstrato de computação, e estabeleceu as bases para as ciências da computação.
- Como vimos, no artigo, Turing propôs ainda a existência de uma Máquina Universal, que poderia executar qualquer cálculo que uma máquina específica pudesse realizar, e respondeu ao "Entscheidungsproblem" (problema da decisão), demonstrando que não existe um algoritmo geral para decidir se qualquer problema matemático pode ser resolvido.

Definição

As funções *iniciais* ou *básicas* são as seguintes:

1. Funções *zero*: para cada inteiro $k \geq 0$, a função *zero* de aridade k é a função
$$\begin{array}{rccl} zero^k : & \mathbb{N}_0^k & \rightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & (x_1, \ldots, x_k) & \mapsto & 0 \end{array}$$
2. Função *sucessor* : é a função
$$\begin{array}{rccl} s : & \mathbb{N}_0 & \rightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & x & \mapsto & x + 1 \end{array}$$
3. Funções *projeção*: para cada natural k e cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, a função de aridade k de *projeção* sobre a componente j é a função
$$\begin{array}{rccl} p_j^k : & \mathbb{N}_0^k & \rightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & (x_1, \ldots, x_k) & \mapsto & x_j \end{array}$$

Definição (operador de composição)

Seja

$$f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$$

uma função k-ária e sejam

$$g_1, \ldots, g_k : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$$

k funções n-árias. A função n-ária

$$h : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$$

definida, para cada $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$, por

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f\left(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)\right)$$

é chamada a *composição* de f com $g_1, \ldots, g_k$, e escreve-se

$$h = f \circ (g_1, \ldots, g_k).$$

Exemplo 1

Seja

$$\begin{aligned} ad : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 &\to \mathbb{N}_0 \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

a função de adição em $\mathbb{N}_0$ e consideremos as funções

$$\begin{aligned} g_1 : \mathbb{N}_0 &\to \mathbb{N}_0 \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} g_2 : \mathbb{N}_0 &\to \mathbb{N}_0 \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}.$$

Então $h = ad \circ (g_1, g_2)$ é a função

$$\begin{aligned} h : \mathbb{N}_0 &\to \mathbb{N}_0 \\ x &\mapsto x^3 + 2x. \end{aligned}$$

Teorema

Se $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ e $g_1, \ldots, g_k : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ são funções computáveis, então a função composição $f \circ (g_1, \ldots, g_k)$ é computável.

Problema 3.1

1. Calcule os valores de:
   - a) $zero^2(1,5)$;
   - b) $p_3^4(0,3,8,2)$;
   - c) $p_2^3(5,s(6),22)$;
   - d) $s \circ s \circ p_1^1(15)$.
2. Considere as funções $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ definidas por

$$g_1(x,y) = x + y, \quad g_2(x,y) = 2xy^2, \quad g_3(x,y) = 5y,$$

   e a função $f : \mathbb{N}_0^3 \to \mathbb{N}_0$ definida por $f(x,y,z) = x + y + z^2$.
   - a) Identifique a função $h = f \circ (g_1, g_2, g_3)$.
   - b) Calcule $h(1,1)$.

Definição (operador de recursão primitiva)

Sejam $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ e $g : \mathbb{N}_0^{k+2} \to \mathbb{N}_0$ duas funções. A função $h : \mathbb{N}_0^{k+1} \to \mathbb{N}_0$ definida, para cada $x_1, \ldots, x_k, y \in \mathbb{N}_0$, por

$$\begin{aligned} h(x_1, \ldots, x_k, 0) &= f(x_1, \ldots, x_k) \\ h(x_1, \ldots, x_k, y+1) &= g\big(x_1, \ldots, x_k, y, h(x_1, \ldots, x_k, y)\big) \end{aligned}$$

é dita a função obtida de f e g por *recursão primitiva* (ou *definida recursivamente* por f e g), e denota-se $h = \mathrm{Rec}(f, g)$.

Teorema

Se $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ e $g : \mathbb{N}_0^{k+2} \to \mathbb{N}_0$ são funções computáveis, então a função $h = \mathrm{Rec}(f, g)$ obtida de f e g por recursão primitiva também é computável.

Exemplo 2

Seja h a função obtida por recursão primitiva das funções $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $x \mapsto x^2$, e $g : \mathbb{N}_0^3 \to \mathbb{N}_0$, $(x, y, z) \mapsto y + z$. Identifiquemos a função h.

Da definição do operador de recursão primitiva resulta que h é a função, de aridade 2, $h : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ definida, para cada $x, y \in \mathbb{N}_0$, por

$$\begin{aligned} h(x,0) &= f(x) \\ h(x,y+1) &= g\big(x,y,h(x,y)\big). \end{aligned}$$

Tem-se, assim,

$$\begin{aligned} h(x,0) &= x^2 \\ h(x,1) &= g(x,0,h(x,0)) = 0 + h(x,0) = x^2, \\ h(x,2) &= g(x,1,h(x,1)) = 1 + h(x,1) = 1 + x^2, \\ h(x,3) &= g(x,2,h(x,2)) = 2 + h(x,2) = 2 + 1 + x^2, \\ h(x,4) &= g(x,3,h(x,3)) = 3 + h(x,3) = 3 + 2 + 1 + x^2, \\ &\vdots \\ h(x,y) &= x^2 + 1 + 2 + \ldots + (y-1) = x^2 + y(y-1)/2 \quad \text{para } y > 1. \end{aligned}$$

Como $y(y-1)/2$ é igual a 0 quando $y = 0$ ou $y = 1$, pode escrever-se

$$h(x,y) = x^2 + y(y-1)/2$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}_0$.

Exemplo 3

Mostremos que a função de adição

$$\begin{aligned} ad : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 &\to \mathbb{N}_0 \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

pode ser obtida por recursão primitiva de funções f e g, ou seja, $ad = \mathrm{Rec}(f, g)$. Para tal f e g têm de verificar

$$\begin{aligned} ad(x, 0) &= f(x) \\ ad(x, y+1) &= g\big(x, y, ad(x, y)\big) \end{aligned}$$

para cada $x, y \in \mathbb{N}_0$. Logo

- $f(x) = ad(x, 0) = x + 0 = x$,
- $g\big(x, y, ad(x, y)\big) = ad(x, y+1) = x + y + 1 = ad(x, y) + 1$,

de onde se deduz que

$$\begin{aligned} f = p_1^1 : \mathbb{N}_0 &\to \mathbb{N}_0 \\ x &\mapsto x \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} g : \mathbb{N}_0^3 &\to \mathbb{N}_0 \\ (x, y, z) &\mapsto z + 1 \end{aligned} .$$

Definição

As *funções recursivas primitivas* são as funções iniciais e todas aquelas que podem ser obtidas das funções iniciais pela aplicação de um número finito de vezes das operações de composição e de recursão primitiva.

Exemplo 4

A função ad, de adição em $\mathbb{N}_0$, é recursiva primitiva. De facto, como vimos no Exemplo 3, $ad = \mathrm{Rec}(f, g)$ é obtida por recursão primitiva das funções

$$f = p_1^1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N}_0 \\ x & \mapsto & x \end{array} \quad \text{e} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0^3 & \to & \mathbb{N}_0 \\ (x, y, z) & \mapsto & z + 1 \end{array} .$$

Ora

- $f = p_1^1$ é uma função inicial;
- $g = s \circ p_3^3$ é a composição de duas funções iniciais.

Logo a adição em $\mathbb{N}_0$ é recursiva primitiva. Podemos decompô-la como

$$ad = \mathrm{Rec}(p_1^1, s \circ p_3^3).$$