

Experimento 01 - Pêndulo Composto

Giovani Garuffi	<i>RA: 155559</i>
João Baraldi	<i>RA: 158044</i>
Lauro Cruz	<i>RA: 156175</i>
Lucas Schanner	<i>RA: 156412</i>
Pedro Stringhini	<i>RA: 156983</i>

September 17, 2014

1 Resumo

O experimento é um estudo do pêndulo composto (formado por uma barra de alumínio e outra de ferro acoplada) e seu comportamento. Medidas as massas das barras, é realizada a cronometragem dos períodos de oscilação do pêndulo para diferentes configurações.

São registrados valores dos períodos (T) relacionados às diferentes distâncias entre eixo de rotação e centro de massa (D) do pêndulo, variantes conforme a configuração. Depois, é feito o gráfico T^2D x D^2 , representando a função afim $T^2D = (4\pi^2/g)D^2 + 4\pi^2k^2/g$ e sendo k o raio de giração do pêndulo. Assim, utilizando o método dos mínimos quadrados, foram obtidos os valores do raio de giração $k = (0.465 \pm 0.001)m$ e da aceleração da gravidade $g = (10.34 \pm 0.06)m/s^2$. Tal valor não consta dentro do esperado, considerando que teoricamente $g \approx 9.8m/s^2$, o que não foi abrangido pela margem de erro. Como o momento de inércia do pêndulo em relação ao centro de massa é dado pela fórmula $(M_1 + M_2) * k^2$, foi possível calcular seu valor como $I_{cm} = (0.28 \pm 0.02)Kg.m^2$.

2 Objetivos

Investigar o movimento de um pêndulo e seu comportamento relacionando as grandezas sobre ele atuantes, como centro de massa, raio de giração e momento de inércia.

3 Procedimento Experimental e Coleta de Dados

3.1 Procedimento

Um pêndulo foi montado com uma barra metálica maior de alumínio e outra adicional de ferro colocada em sua extremidade inferior. Depois de devidamente medido (com fita métrica) e pesado (com balança analítica), ele foi fixado em um eixo de suspensão. No ponto mais baixo da trajetória do instrumento, foi acoplado um photogate ligado a um cronômetro inteligente adaptado a medição dos períodos (T) de oscilação do pêndulo. Assim, com o devido cuidado de acionar uma oscilação de ângulo menor que 15 graus para efeitos de aproximação, foram medidos tais períodos 7 vezes em cada uma das 6 configurações escolhidas, diferenciadas pela distância entre o eixo fixo e o centro de massa do pêndulo. As medições foram anotadas e estão inclusas em sua totalidade no relatório. A montagem do experimento pode ser vista nas imagens a seguir.



Figuras 1, 2 e 3: Montagem do experimento.

3.2 Dados Obtidos

As medidas da posição do centro de massa da barra maior de alumínio (x_1) e da menor de ferro (x_2), aproximando-as como corpos homogêneos e fixando a origem na extremidade inferior do pêndulo, são equivalentes à metade do comprimento delas, resultando em:

$$x_1 = (0.0915 \pm 0.0005)M$$

$$x_2 = (0.7420 \pm 0.0005)M$$

E suas respectivas Massas:

$$M_1 = (347.3 \pm 0.1)g$$

$$M_2 = (929.5 \pm 0.1)g$$

As medidas de periodo tomadas estão presentes na seguinte tabela, relacionadas às distâncias do eixo de rotação à extremidade inferior do pêndulo.

Tabela 1: Medidas do Período de oscilação do pêndulo e suas médias aritméticas relacionadas à distância X do eixo de rotação à extremidade inferior do pêndulo

X (metro)	Períodos (s)							Valor Médio (s)
1.0450 ± 0.0005	1.8866	1.8878	1.8881	1.8869	1.8867	1.8862	1.8864	1.8870 ± 0.0003
0.9900 ± 0.0005	1.8877	1.8882	1.888	1.888	1.8851	1.8874	1.8869	1.8873 ± 0.0004
0.9400 ± 0.0005	1.9018	1.9026	1.9020	1.9048	1.902	1.9016	1.8985	1.9019 ± 0.0007
0.8900 ± 0.0005	1.9341	1.9349	1.9345	1.9342	1.9335	1.9335	1.9340	1.9341 ± 0.0002
0.8400 ± 0.0005	1.9956	1.9957	1.9947	1.9947	1.9946	1.9986	1.9935	1.9953 ± 0.0006
0.7915 ± 0.0005	2.1042	2.1027	2.1027	2.1024	2.1026	2.1023	2.1019	2.1027 ± 0.0003

Nota: erro instrumental do cronômetro = 0.0001s.

erro total calculado com base nos erros estatísticos e instrumentais.

4 Análise dos Resultados e Discussões

4.1 Centro de Massa

A posição do do centro de Massa relativo à extremidade inferior pode ser calculado como

$$x_{cm} = \frac{x_1 \cdot M_1 + x_2 \cdot M_2}{M_1 + M_2} = 0.5552m$$

O erro associado a essa medida, propagado a partir dos erros de x_1 , M_1 , x_2 e M_2 é de

$$\sqrt{\Delta m_1^2 \left(\frac{x_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{(m_1 + m_2)^2} \right)^2 + \Delta m_2^2 \left(\frac{x_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{(m_1 + m_2)^2} \right)^2 + \frac{\Delta x_1^2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{\Delta x_2^2 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}} \\ = \pm 0.0003m$$

4.2 Períodos

O período de oscilação do pêndulo, T, para pequenos ângulos de oscilação, é dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{Mgd}}$$

Onde I_0 é o momento de inércia do pendulo em relação ao ponto de suspensão. Utilizando o teorema dos eixos paralelos, e lembrando que $I_{cm} = Mk^2$, sendo k o raio de giração, deduz-se a equação

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{D + \frac{k^2}{D}}{g}}$$

que pode ser reescrita como

$$T^2 D = \frac{4\pi^2}{g} \cdot D^2 + \frac{4\pi^2}{g} \cdot k^2 \quad (1)$$

Sendo que

$$D = X - x_{cm}$$

$$\Delta D = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta x_{cm}^2} = 0.0003m$$

Percebe-se que deve existir uma relação linear entre T^2D e D^2 .

Tabela 2: Periodos de oscilação relativos à distância D do eixo de rotação ao centro de massa do pêndulo

D (M)	T(s)	D^2	T^2D
0.4897 ± 0.0003	1.8870 ± 0.0003	0.2398 ± 0.0003	1.744 ± 0.001
0.4347 ± 0.0003	1.8873 ± 0.0004	0.1890 ± 0.0003	1.549 ± 0.001
0.3847 ± 0.0003	1.9019 ± 0.0007	0.1480 ± 0.0002	1.392 ± 0.001
0.3347 ± 0.0003	1.9341 ± 0.0002	0.1120 ± 0.0002	1.252 ± 0.001
0.2847 ± 0.0003	1.9953 ± 0.0006	0.0810 ± 0.0002	1.134 ± 0.001
0.2362 ± 0.0003	2.1027 ± 0.0003	0.0558 ± 0.0001	1.045 ± 0.001

Nota: Erro em D propagado a partir do erro em X e em x_{cm} .

Erro em T^2D foi propagado a partir do erro em D e em T .

Fazendo a regressão linear de T^2D X D^2 por mínimos quadrados, obtem-se os coeficientes

$$a = 3.82 \pm 0.02$$

$$b = 0.827 \pm 0.003$$

onde a é o coeficiente angular e b é o coeficiente linear. A reta formada pode ser vista no Gráfico 1, sobreposta aos pontos da tabela.

4.3 Gravidade

A interpretação física do coeficiente angular encontrado é, por (1),

$$a = \frac{4\pi^2}{g} = 3.82 \pm 0.02$$

logo podemos encontrar g como

$$g = \frac{4\pi^2}{3.82} = 10.34m/s^2$$

e seu erro associado, propagado a partir do erro em a é

$$\Delta g = \frac{4\pi^2}{a^2} \cdot \Delta a = \pm 0.06m/s^2$$

O valor da gravidade calculado não está de acordo com o valor conhecido de $g \approx 9.8m/s^2$.

4.4 Raio de giração

A interpretação física do coeficiente linear, a partir de (1), é

$$b = \frac{4\pi^2}{g} \cdot k^2 = 0.827 \pm 0.003$$

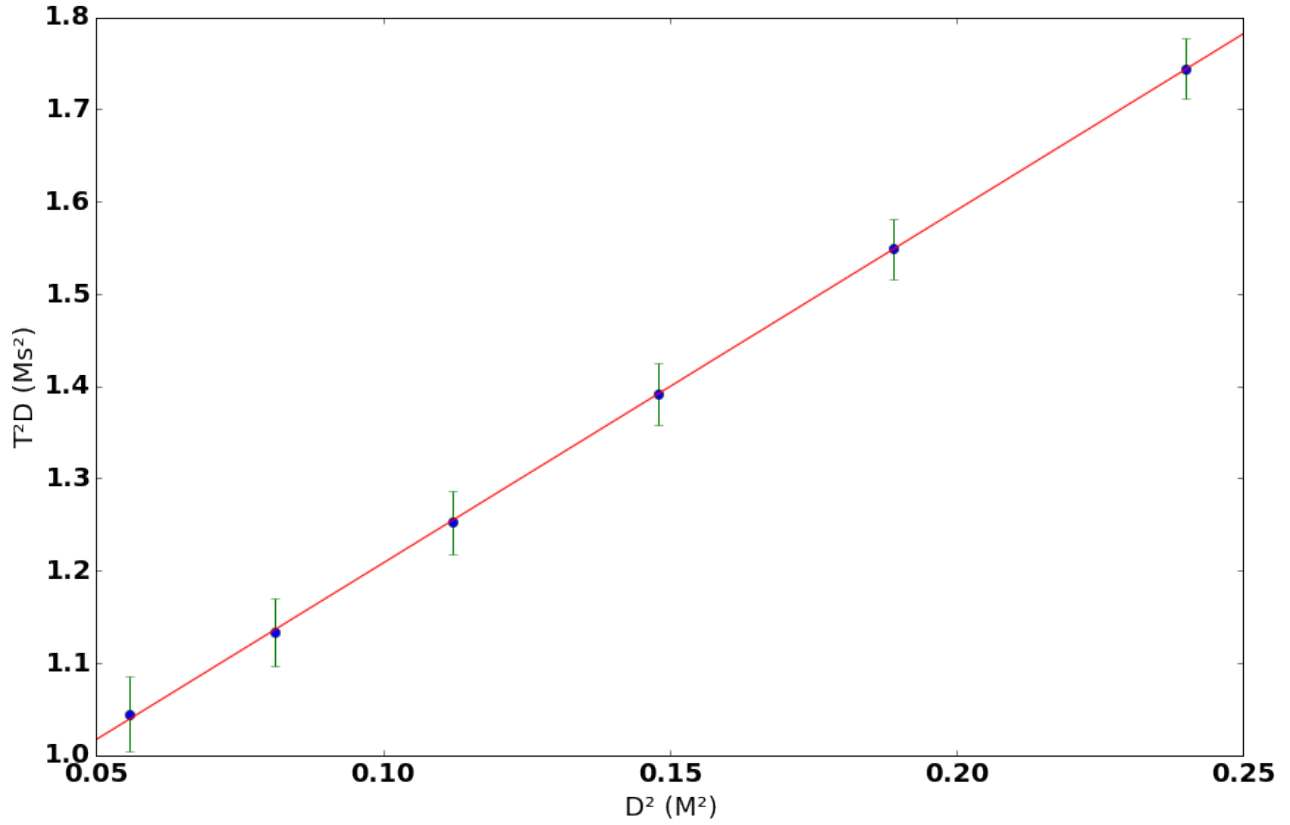


Figura 4: Gráfico 1: T^2D em função de D^2 . Nota-se que os dados coletados se encaixam muito bem em uma projeção linear.

logo, o raio de giração pode ser obtido por:

$$k = \sqrt{\frac{g \cdot b}{4\pi^2}} = 0.465m$$

E seu erro, calculado por:

$$\Delta k = \sqrt{\frac{\Delta b^2 g}{16\pi^2 b} + \frac{\Delta g^2 b}{16\pi^2 g}} = \pm 0.002m$$

4.5 Momento de Inércia

O momento de inércia pode ser descrito em função do raio de giração como

$$I_{cm} = (m_1 + m_2)k^2$$

Substituindo os valores, obtemos:

$$I_{cm} = 0.282(m^2 \cdot Kg)$$

E o erro ΔI_{cm} pode ser calculado a partir da expressão

$$\Delta I_{cm} = \sqrt{(2mk \cdot \Delta k)^2 + (k^2 \cdot \Delta M)^2} = \pm 0.006(m \cdot Kg)$$

5 Conclusões

Como o experimento falhou em encontrar um valor para a gravidade de acordo com a teoria conhecida atualmente, também não há grande confiabilidade nos valores encontrados do Raio de Giração (K) e Momento de Inercia (I), considerando as imprecisões apresentadas.

Esse erro pode ser explicado, ainda que parcialmente pelo erro da aproximação $tg(\theta) = sen(\theta) = \theta$, utilizada para se obter a igualdade $T = 2\pi\sqrt{\frac{D+\frac{k^2}{D}}{g}}$. Buscando maior precisão, o ideal estaria em desconsiderar tal aproximação e utilizar a versão extensa da relação. No entanto, tal versão, supondo uma angulação $\theta = 20^\circ$, corrigiria cerca de 1% do erro, o que não é suficiente em si. Outras fontes de erro são as possíveis imprecisões instrumentais de alguma forma desconsideradas, incluindo o conhecimento apenas superficial do modo "pêndulo" apresentado no photogate/cronômetro inteligente.

Novos estudos precisam ser feitos, de modo que se utilize modelagem mais precisa para obter resultados melhores.