PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 1-2022
Profesores: G. Angulo, S. Vásquez
J. González, G. Méndez,
F. Verástegui, R. Cuadrado

Tarea 2

Fecha de Entrega: Viernes 6 de mayo - 23:59:00

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas podría generar una penalización en la nota de la tarea.

- La Tarea se desarrolla en **parejas** que **no necesariamente** deben pertencer a la misma sección o grupo de proyecto semestral. Cada pareja entrega una sola tarea.

- La entrega de la Tarea se hace online en formato PDF y .py (para la pregunta 1) a través del siguiente formulario: **FORMULARIO DE ENTREGA**. Es decisión del grupo escribirla en computador o a mano, cualquiera sea esta decisión la tarea debe **estar ordenada y legible**. Se recomienda utilizar la aplicación Cam Scanner para generar el archivo entregable en el caso de haberla escrito a mano. El formato de entrega de los archivos es **Apellido11_Apellido12_Apellido21_Apellido22**. Por ejemplo, si la tarea la realiza Pérez Abarca con González Soto, los archivos deben llamarse Perez_Abarca_Gonzalez_Soto. Este formato debe respetarse para la entrega de cada uno de sus archivos, o se aplicarán descuentos.

  Se bonificará con **3 décimas sobre la nota final de la tarea** si la Tarea está escrita en Latex. Se pondrá a disposición de los estudiantes una plantilla tipo y el código de fuente Latex de la Tarea para incentivar este formato. Por otro lado, quedará a criterio del ayudante corrector si aplicar un descuento de **3 décimas sobre la nota final de la tarea** en el caso de que el orden y legibilidad de esta dificulte su proceso de corrección.

- El plazo de entrega vence impostergablemente el día viernes 6 de mayo a las 23:59:00 horas. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**. Es responsabilidad de cada grupo hacer entregas parciales.

- Esta tarea es grupal, y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada con **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[1].

- Cualquier duda sobre el enunciado, deben ser envíadas a través del foro dispuesto en Canvas para la Tarea. De esta forma, todos los alumnos se verán beneficiados de la aclaración que haga el ayudante y se evita responder preguntas duplicadas. Este foro centralizará las dudas de todas las secciones sobre el **enunciado de la tarea**.

  Se intentará responder las preguntas en el foro de la forma más rápida y completa posible. Sin embargo, **2 días antes la entrega se dejarán de responder consultas**.

  Finalmente, cualquier **duda administrativa** debe ser enviada al ayudante coordinador de las tareas José Tomás Grez al mail *jtgrez@uc.cl*.

[1] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (11 puntos)

Considere la siguiente formulación al problema de la pastelería Dulces de la Pregunta 1 de la Tarea 1:

$$\text{máx} \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{e=1}^{exp_i} G_i \cdot f_{ike} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{p\in P}\sum_{e=1}^{exp_p} G_p \cdot r_{pe} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{M}\sum_{h=1}^{D}(C_{ik}\cdot y_{ijhk} + S\cdot x_{ijhk})$$

$$
\begin{array}{llll}
s.a. & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_{ijhk} \leq 1 & \forall j \in \{1,...,M\}\forall h \in \{1,...,D\} & (1) \\
 & & \forall k \in \{1,...,K\} & \\
 & y_{ijhk} \leq t_{ij}\cdot x_{ijhk} & \forall j \in \{1,...,M\}\forall i \in \{1,...,N\} & (2) \\
 & & \forall k \in \{1,...,K\}\forall h \in \{1,...,D\} & \\
 & \displaystyle\sum_{e=1}^{exp_i} f_{ike} = d_{ik} & \forall i \in \{1,...,N\}\forall k \in \{1,...,K\} & (3) \\
 & z_{ike} = z_{i,k-1,e+1} - f_{ike} & \forall i \in \{1,...,N\}\setminus P,\ \forall e \in \{1,...,exp_i - 1\} & (4) \\
 & & \forall k \in \{2,...,K\} & \\
 & z_{ik,exp_i} = \displaystyle\sum_{j=1}^{M}\sum_{h=1}^{D} y_{ijhk} - f_{ik,exp_i} & \forall i \in \{1,...,N\}\setminus P,\ \forall k \in \{1,...,K\} & (5) \\
 & \displaystyle\sum_{e=1}^{exp_p} r_{pe} = Q_p & \forall p \in P & (6) \\
 & z_{pke} = z_{p,k-1,e+1} - f_{pke} - r_{pe} & \forall p \in P, \forall e \in \{1,...,exp_p - 1\} & (7) \\
 & & \forall k \in \{2,...,K\} & \\
 & z_{pk,exp_p} = \displaystyle\sum_{j=1}^{M}\sum_{h=1}^{D} y_{pjhk} - f_{pk,exp_p} - r_{pexp_p} & \forall p \in P, \forall k \in \{1,...,K\} & (8) \\
 & z_{i1e} = 0 & \forall i \in \{1,...,N\},\ \forall e \in \{1,...,exp_i - 1\} & (9) \\
 & x_{ijhk} \leq y_{ijhk} & \forall i \in \{1,...,N\}\forall j \in \{1,...,M\} & (10) \\
 & & \forall h \in \{1,...,D\}\forall k \in \{1,...,K\} & \\
 & x_{ijhk} \in \{0,1\} & & \\
 & y_{ijhk} \geq 0 & & \\
 & f_{ike} \geq 0 & & \\
 & z_{ike} \geq 0 & & \\
 & r_{ie} \geq 0 & &
\end{array}
$$

Dentro de los archivos entregados para esta tarea, hay uno llamado "P1.py", el cual busca modelar el problema y resolverlo usando Python + Gurobi. El archivo ya contiene partes de este problema modelado:

- Tiene todos los conjuntos necesarios para modelar el problema.
- Tiene la inicialización del modelo (m = Model())
- Ya están creadas 3 variables: $x_{ijhk}, f_{ike}, z_{ike}$
- Tiene implementadas las restricciones (1) y (4)

Tu deber es completar el archivo "P1.py"para que el problema quede completamente modelado. Vale decir, debes escribir la función objetivo, junto con las restricciones y variables faltantes para poder correr el modelo en Python + Gurobi. Debes correr este programa y entregar el valor objetivo que toma la solución en el óptimo. **IMPORTANTE**: Recuerda entregar el archivo "$Apellido11\_Apellido12\_Apellido_21\_Apellido22.py$" (**cambienle el nombre al archivo P1.py**) al momento de entregar la tarea, o esta pregunta no recibirá puntaje.

Problema 2. (15 puntos)

Para los siguientes problemas, considere una serie de funciones unidimensionales $f_i(x) = (x - a_i)^i$, con $a_i \in \mathbb{R}$ para $i \in \{1, ..., n\}$ y una función $g(x)$ convexa. Para cada una de las siguientes funciones, dé un argumento que son convexas o dé un contraejemplo que no lo son.

(a) **(3 puntos)** $f_1(x)$

(b) **(3 puntos)** $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$

(c) **(3 puntos)** (Asuma que n es par). $\sum_{i=1}^{n/2} f_{2i}$

(d) **(3 puntos)** $\max_{i \in 1,...,n} f_i(x)$

(e) **(3 puntos)** $f_1(x) \cdot g(x)$

Problema 3. (11 puntos)

(a) Sea el siguiente problema (P):

$$(P) \quad \begin{array}{rcl} Ax & = & b \\ x & \geq 0 & \end{array}$$

Tal que $x \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{mxn}$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, para cualquier función objetivo lineal y para cualquier m y n. Demuestre las que son verdaderas y de un contraejemplo si es falsa.

(I) **(2 puntos)** Toda solución óptima tiene como máximo m componentes distintas de cero.

(II) **(2 puntos)** El conjunto de todas las soluciones óptimas es acotado.

(III) **(2 puntos)** Si hay más de una solución óptima, entonces hay un conjunto infinito de soluciones óptimas.

(IV) **(2 puntos)** Si hay más de una solución óptima, entonces hay al menos dos vértices que hacen óptimo al problema.

(b) **(3 puntos)** Juanito realiza el siguiente pensamiento:

- ◇ Un problema de programación lineal tiene un problema equivalente en forma estándar.
- ◇ Un poliedro no vacío en su forma estándar tiene, por lo menos, un vértice.
- ◇ Concluyo que el dominio del problema original define un poliedro con, al menos, un vértice.

Argumente si la conclusión de Juanito es correcta o incorrecta.

Problema 4. (23 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{array}{lrcl}
 & \text{máx } 3x_1 + 2x_2 & & \\
s.a. & 2x_1 - x_2 & \leq & 1 \\
 & 3x_1 + 2x_2 & \leq & 12 \\
 & x_1 & \geq & 0 \\
 & x_2 & \in & \mathbb{R}
\end{array}
$$

(a) **(2 puntos)** Escriba el problema es su forma estándar.

(b) **(3 puntos)** Indique cuántos vertices tiene el problema, como máximo, en su forma estándar. Enumere 3 de estos vértices, indicando claramente el valor de cada variable, y el valor objetivo del problema en cada uno de ellos.

(c) **(8 puntos)** Encuentre la solución óptima del problema mediante el algoritmo de Simplex, partiendo desde la base dada por x_1 y la variable de holgura de la segunda restricción. Indique claramente la solución óptima y el valor óptimo.

(d) **(2 puntos)** ¿El problema tiene óptimo degenerado? ¿Tiene múltiples soluciones? Si es así, defina al conjunto de estas soluciones.

(e) **(5 puntos)** Grafique el dominio factible del problema original, junto con el gradiente de la función objetivo y la curva de nivel de esta en el óptimo.

(f) **(3 puntos)** Con respecto a la solución básica factible inicial de la parte (c), indique si corresponde a un vértice del problema original. Comente al respecto.