

Marthaler, Jakob, Reuter
Algebra

Hans Marthaler, Benno Jakob, Reto Reuter
Unter Mitarbeit von Matthias P. Burkhardt

Algebra

Mathematik I

Lösungen

Hans Marthaler, Benno Jakob, Reto Reuter
Unter Mitarbeit von Matthias P. Burkhardt
Algebra
Mathematik I

Lösungen zur 7. Auflage

2021
Alle Rechte vorbehalten
© 2021 hep Verlag AG, Bern

hep-verlag.ch

Grundlagen und Grundoperationen

1 Zahlenmengen und Terme

Lösungen zu Übungen 1

1. \mathbb{N} natürliche Zahlen $\{0; 1; 2; \dots; 101; \dots\}$
 \mathbb{Z} ganze Zahlen $\{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$
 \mathbb{Q} rationale Zahlen $\left\{\frac{1}{2}; -0.34; \frac{5}{7}; 13; -\frac{19}{11}; \dots\right\}$
 \mathbb{R} reelle Zahlen $\{\sqrt{2}; -3\pi; 11; \dots\}$
 \mathbb{Z}^- negative, ganze Zahlen $\{-1; -2; -3; \dots\}$
 \mathbb{Q}_0^+ positive, rationale Zahlen und Null $\left\{0; \frac{2}{3}; \frac{203}{11}; 0.4007; \dots\right\}$
 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrationale Zahlen $\{-\sqrt{3}; \pi; e; \dots\}$
2. Grafik
3. Falls n eine Quadratzahl ist, so ist \sqrt{n} rational.
4. rational: Der Dezimalbruch ist endlich oder periodisch unendlich.
 irrational: Der Dezimalbruch ist nicht periodisch unendlich.
5. a) $\mathbb{Z}^-; \mathbb{R}$ b) \mathbb{R} c) $\mathbb{Q}^+; \mathbb{R}$ d) $\mathbb{Q}^+; \mathbb{R}$
 e) $\mathbb{N}; \mathbb{Q}^+; \mathbb{R}$ f) \mathbb{R} g) \mathbb{R} h) \mathbb{R}
6. a) $\frac{9}{10}$ b) $-\frac{26}{25}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{97}{8}$
 e) $\frac{7}{3}$ f) $\frac{4}{9}$
7. a) $\frac{3}{11}$ b) $\frac{71}{33}$ c) $\frac{2}{7}$ d) $\frac{2806}{275}$
 e) $\frac{427}{135}$ f) $\frac{7}{13}$
8. a) $A = \{2; 4; 6; 8; \dots\}$ b) $B = \{1; 3; 5; 7; \dots\}$
 c) $C = \{5; 10; 15; \dots\}$ d) $D = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

Lösungen zu Übungen 2

9. Richtig: (1); (2)
10. a) $b < d < e < c < a$ b) $a < b < e < d < c$
11. a) falsch b) falsch c) richtig d) falsch
 e) falsch f) richtig g) richtig h) richtig
12. Abstand vom Nullpunkt: $|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$
13. a) $]-4; -1]; L = \{-3; -2; -1\}$ b) $[-2; 2]; L = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$
 c) $]-2; 2]; L = \{-1; 0; 1\}$ d) $[4; \infty[; L = \{4; 5; 6; \dots\}$
14. a) 4 b) 4 c) -4 d) 20
 e) -4 f) -1 g) 1 h) 1
15. a) 6 b) 5
16. a) a und b haben das gleiche Vorzeichen b) $a + b \leq 0 \Rightarrow a \leq -b \vee b \leq -a$
 c) für alle $a, b \in \mathbb{R}$ d) a und b haben unterschiedliche Vorzeichen

17. a) $L = \{-4; 4\}$ b) $L = \{ \}$ c) $L = \{4\}$
 d) $L = \{-1\}$ e) $L = \{-1; 9\}$ f) $L = \{1; 7\}$
 18. a) $L = \{ \}$ b) $L = \{-7; 7\}$ c) $L = \mathbb{R}_0^+$
 d) $L = \mathbb{R}_0^-$ e) $L = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$ f) $L = \{-1\}$
 19. a) $65.000 \text{ mm} \leq d_z \leq 65.015 \text{ mm}; 64.945 \text{ mm} \leq d_k \leq 64.960 \text{ mm}$
 (b) $\max(d_z - d_k) = 0.07 \text{ mm}$

Lösungen zu Übungen 3

20. Richtig: (1) (3) (4)
 21. a) Produkt b) Potenz c) Summe d) Differenz
 e) Quotient f) Differenz g) Potenz h) Quotient
 i) Differenz
 22. a) Differenz, 12 b) Produkt, 100 c) Produkt, 125 d) Produkt, 125
 e) Quotient, 5 f) Summe, -40 g) Summe, 65 h) Produkt, 68
 i) Differenz, -185
 23. a) $\frac{33}{33} = 1; \frac{3}{3} + \frac{3}{3} = 2; \frac{3+3+3}{3} = 3; \frac{3 \cdot 3+3}{3} = 4; 3+3-\frac{3}{3} = 5;$
 $(3+3) \cdot \frac{3}{3} = 6; 3+3+\frac{3}{3} = 7; 3 \cdot 3 - \frac{3}{3} = 8; 3 \cdot 3 + 3 - 3 = 9; 3 \cdot 3 + \frac{3}{3} = 10$
 b) $\frac{44}{44} = 1; \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 2; \frac{4+4+4}{4} = 3; 4+4 \cdot (4-4) = 4; \frac{4 \cdot 4+4}{4} = 5;$
 $\frac{4+4}{4} + 4 = 6; 4+4-\frac{4}{4} = 7; 4+4+4-4 = 8; 4+4+\frac{4}{4} = 9; \frac{44-4}{4} = 10$
 c) $\frac{4!+4!-4}{4} = 11; \frac{44+4}{4} = 12; \frac{44}{4} + \sqrt{4} = 13; 4! - 4 - 4 - \sqrt{4} = 14; \frac{44}{4} + 4 = 15$
 $\frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{4} = 16; 4 \cdot 4 + \frac{4}{4} = 17; \frac{44}{\sqrt{4}} - 4 = 18; 4! - 4 - \frac{4}{4} = 19; \frac{44-4}{\sqrt{4}} = 20$
 24. $x = 2; 4; 8; -8; 16; -2$ $x = -1; 1; -1; -2; 4; -2$
 25. $(a; b) = (6; 4): 32; 4; -9; \frac{9}{4}$ $(a; b) = (3; -2): 11; 25; \frac{9}{2}; \frac{9}{4}$ $(a; b) = (-2; -3): 7; 1; \frac{4}{3}; \frac{4}{9}$
 26. a) $T(3) = 0; T(-2) = 15$ b) $T(2) = 34; T(-1) = 16$
 c) $T(1; -1; 2) = 8$ d) $T(1; -1; -2) = 32$
 27. a) $T(2; 1) = 2; T(1; 2) = -3$ b) $T(-2; 1) = -\frac{1}{2}; T(6; 3)$ ist nicht definiert
 28. $V(x) = 24x^3; S(x) = 70x^2; V(2) = 192; V(0.5) = 3; S(2) = 280; S(0.5) = 17.5$
 29. $V(a; b) = 60a^2b; S(a; b) = 36a^2 + 82ab; V(1; 2) = 120; V(0.5; 1) = 15; S(1; 2) = 200;$
 $S(0.5; 1) = 50$

Lösungen zu Übungen 4

30. a) $x^4 - x^2$: Polynom 4. Grades; $a_4 = 1; a_3 = 0; a_2 = -1; a_1 = a_0 = 0$
 b) $x^2 + 2x$: Polynom 2. Grades; $a_2 = 1; a_1 = 2; a_0 = 0$
 c) $\frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^3$: Polynom 5. Grades; $a_5 = \frac{1}{2}; a_3 = -\frac{1}{2}; a_4 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$
 d) $x^3 - x^2 + 2x - 2$: Polynom 3. Grades; $a_3 = 1; a_2 = -1; a_1 = 2; a_0 = -2$
 e) $-\sqrt{5}x^2 - \sqrt{3}x - \sqrt{2}$: Polynom 2. Grades; $a_2 = -\sqrt{5}; a_1 = -\sqrt{3}; a_0 = -\sqrt{2}$
 f) kein Polynom

4. a) $6m + 5$ b) $-m + 1$ c) $-10r + 8$ d) $9p^2 - 3p$
 e) $-e^3 - e^2$ f) $4c^4 + c^3 + 2c^2 + c$
5. a) $v - w + x - y$ b) $v^2 + w^2 - x^2 - y^2$ c) $15u - v$ d) $5\delta + \varphi$
 e) $22a^3 + a + 2$ f) $-b - x - 10$
6. a) $v - w + x - y + z$ b) $v^3 + w^3 - x^3 - y^3 + z^3$ c) $-a - 10$ d) $5p - 1$
 e) 0 f) -14δ g) $7a^2 + 20$ h) $-5z^2 + 5z + 3$
7. a) $T_1 + T_2 = 12a^2b - 22b - 6$; $T_1 - T_2 = -20a^4 + 6a - 24$
 b) $T_1 + T_2 = 4x + 3xy - 2y - 18$; $T_1 - T_2 = 6x^2 + 4x - 7xy + 2y + 4$

Lösungen zu Übungen 7

8. a) $4a + 4b$ b) $6c + 3$ c) $3f^2 - 4fg$ d) $6h^4 - 3h^3$
 e) $-10x - 5y$ f) $z^3 - 4z$ g) $w^2 - 1$ h) $-\alpha\mu - 1$
9. a) $10p + 5q + 5r$ b) $-10p + 5q + 5r$ c) $2x^3y - x^2y^2 + x^2yz$ d) $-2x + y - z$
 e) $-9a^3b^4 + 12a^3b^2 - 6ab^4 + 3ab^2$ f) $2c^6 - 2c^4 + 2c^2 + 2c$
10. a) $6a^2 - 18a - 30$ b) $-6a^2 + 18a + 30$ c) $a^4 - 3a^3 - 5a^2$ d) $-a^5 + 3a^4 + 5a^3$
 e) $4a^3 - 12a^2 - 20a$ f) $-a^2 + 3a + 5$ g) 0 h) $-a^2p + 3ap + 5p$
11. a) $15a + 3b$ b) $3a + b$ c) $c^2 - 4c$ d) $-36d + 6$
 e) $x - 11xz + z^2 - 18z$ f) 0
12. a) $pr + ps + qr + qs$ b) $ac - ad + bc - bd$ c) $20v^2 - 22vw + 2w^2$ d) $ac + ad - bc - bd$
 e) $-ac - ad - bc - bd$ f) $-ac - ad + bc + bd$
13. a) $3x^2 - 43x + 84$ b) $30y^2 - 28yz + 6z^2$ c) $-u^2 - 8u + 33$ d) $p^2 - 11pq + 18q^2$
 e) $m^7 - m^5 - m^4 + m^2$ f) $2n^4 - 9n^2 + 9$
14. a) $12a^3 - 24a^2b^2 + 6ab - 12b^3$ b) $12e^3 + 6ef - 24e^2f^2 - 12f^3$
 c) $ac + ad + ae + bc + bd + be$ d) $ac - ad - ae + bc - bd - be$
 e) $-2r + 2rs - 2rt - s^2 + s + st$ f) $u - 3uw - v + 3vw - 3w^2 + w$
 g) $2x^2 + 3xy - 2xz - 2y^2 + yz$ h) $x^4 - x^3 - x^3y^2 - xy^2 + y^4 + y^2$
15. a) $a^2 - 4ab - 12b^2 + 8bc - c^2$ b) $-a^4 + 4a^3 - 4a^2 + 5a + 2$
 c) $2x^2 - 8x - xy - 6y^2 - 5y + 6$ d) $4x^5 + 5x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 4x - 3$
 e) $c^5 - 2cd^4 + d^5$ f) $4rt - 4ru + 4st - 4su$
16. a) $2r^2 - 10r - 2rs + 10s$ b) $-3y^3 + 3y^2 + 6y$ c) $2y^4 + 2y^3 - 40y^2$
 d) $ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf$ e) $f^3 - 6f^2 + 11f - 6$
 f) $12a - 4ab + abc - 3ac + 8b - 2bc + 6c - 24$
17. a) $a^3 - 2a^2 - 5a + 6$ b) $x^2 - x^2y + y - 1$ c) $z^8 - 81$ d) $-f^2 + 24$
 e) -6 f) $3q^2 + 8$ g) $-2k^3 - k^2 - 1$ h) $2st - 19s - 19t + 181$
18. a) $-140x^4 + 110x^3 + 4x^2 + 2x - 15$ b) $15y$
 c) $-2u^2v - 2uv^2$ d) 1
 e) $-e^5 + e^4 - 2e^3 + 3e^2 - 4e + 5$
19. a) $a^2 + 2ab + b^2$ b) $c^2 + 8c + 16$ c) $4d^2 + 12de + 9e^2$ d) $f^2 - 2fg + g^2$
 e) $z^2 - 6z + 9$ f) $9v^2 - 24vw + 16w^2$ g) $x^2 - y^2$ h) $u^2 - 4$
 i) $g^4 - h^2$
20. a) $16m^2 - 25n^2$ b) $p^6 + 2p^3q^3 + q^6$ c) $y^4 - 1$ d) $h^2 + 2hk + k^2$
 e) $r^4 + 2r^3 + r^2$ f) $4\mu^2 + 2\mu + \frac{1}{4}$ g) $x^6 - 0.2w^3x^3 + 0.01w^6$ h) $\frac{y^4}{16} - \frac{1}{4}$

- i) $-9z^4 + 1$
21. a) $4x^3 + 24x^2 + 36x$ b) $a^3 - 10a^2 + 25a$ c) $-2c^3 + 20c^2 - 50c$
 d) $-10x^6 - 20x^4 - 10x^2$ e) $g^3 + 3g^2h - 4h^3$ f) $\vartheta^3 + 5\vartheta^2 + 7\vartheta + 3$
 g) $q^3 - 7q^2 + 15q - 9$ h) $p^6 - 4p^5 + 5p^4 - 4p^3 + 4p^2$ i) $k^4 + k^2 - 2$
22. a) $4x^3 + 4x^2 - 9x - 9$ b) $16a^4 - 625b^4$
 c) $a^2b^4 - 4a^2 - b^4 + 4$ d) $81u^{16} - 18u^8 + 1$
23. a) $x^2 + 2xy + y^2 - 1$ b) $-\delta^2 + \lambda^2 - 4\lambda + 4$
 c) $k^4 - 2k^3 + k^2 - 1$ d) $-a^2 + 2ab - b^2 + c^4$
24. a) $a^2 - 8a + 81$ b) $-4x^2 - 1$
 c) $-24y^2 - 23y - 4$ d) $c^4 + c^2 - 2c^2d + 2cd^2 + d^4 + d^2$
 e) $40f$ f) $h^4 - h^2 - 4h - 13$
 g) $5n^2 + 10n + 16$ h) $\psi^4 - 12\psi^3 - 16\psi^2 - 3\psi + 4$
25. a) $c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3$ b) $e^3 - 3e^2 + 3e - 1$
 c) $8f^3 + 48f^2g + 96fg^2 + 64g^3$ d) $1000k^3 - 30k^2 + \frac{3}{10}k - \frac{1}{1000}$
 e) $r^2 + 2rs + 2rt + s^2 + 2st + t^2$ f) $p^2 + 4pq + 6pr + 4q^2 + 12qr + 9r^2$
 g) $\alpha^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma + \beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2$ h) $16x^2 - 40xy + 8xz + 25y^2 - 10yz + z^2$
26. a) $15r^2 - 13r + 2$ b) $3s + 2$ c) $-x^2 + 10xy - 4y^2$
27. a) $4a + 52$ b) 18 c) $3d^2e^2 - 3de^3 + 6e^4$ d) $-3c^2 + 18$

Lösungen zu Übungen 8

28. – 29. –
30. a) $a^4 + 8a^3 + 24a^2 + 32a + 16$ b) $x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$
 c) $64x^6 + 192x^5y + 240x^4y^2 + 160x^3y^3 + 60x^2y^4 + 12xy^5 + y^6$
 d) $x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8$
31. –
32. a) $1, 1, 1, 1, \dots$ b) natürliche Zahlen: $1, 2, 3, 4, \dots$
 c) Dreieckszahlen: $1, 3, 6, 10, 15, \dots$
33. a) $1, 4, 10, 20, 35, 56, 84$ b) das vierte Element jeder Zeile
 c) jede vierte Tetraederzahl ist ungerade.
 d) $1 = 1 / 1 + 3 : 4 / 1 + 3 + 6 = 10 / 1 + 3 + 6 + 10 = 20 / 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35 / 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56$
 $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 = 84 / 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 = 120$
 e) $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n + \frac{n(n+1)}{2}$
34. teilbar ohne Rest. $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$
35. a) 2^n b) 0 c) –
36. a) 2^n b) 0 c) 0 d) $(-1)^n \cdot 2^n$

Lösungen zu Übungen 9

37. a) $4(x + y)$ b) $a^2(a - 1)$ c) $5z^9(5z + 1)$ d) $9ac(5b + 2)$
38. a) $4a(4x - 3y - 2z)$ b) $7(7s + 5t - 4u)$ c) $v(v^4 - v^2 + w)$ d) $2\lambda(\lambda^4 - 2\lambda^2 + 4)$
 e) $p^3q^2(-r + p^2 + 1)$ f) $33xyz(xy + 2xz + 3yz)$

39. a) $-1(-a + 5)$ b) $-1(4x + y)$ c) $-1(-2b - 1)$
 d) $-1(2g - 1)$ e) $-1(7h + i + 10k)$ f) $-1(-3\mu^3 + 2\mu^2 + \mu)$
 g) $-1(a_1 - a_2 + a_3)$ h) $-1(w + x - y + z)$ i) $-1(-2p + q + u + 1)$
40. a) $\frac{1}{3}(a + 2b)$ b) $\frac{1}{4}(c - d + 4e - 4)$ c) $\frac{1}{50}(5g - 56h + 100)$
41. a) $(g - h)(k + 2)$ b) $(5a + 1)(2m^2 - n)$
 c) $(ab + a)(a^2 - b^2) = a(a + b)(a - b)(b + 1)$ d) $(v^2 + 1)(x - y - z)$
 e) $(ab - c)(d - 3)$ f) $(m - n)(x + 3y)$
42. a) $-10c(p + q)$ b) $(a - b)(-2x + 4) = -2(a - b)(x - 2)$
 c) $(5a - 5b)(b^2 + 2c) = 5(a - b)(b^2 + 2c)$ d) $(4x + y^2)(-y + z)$
 e) $(e - f)(2g - 5)$
43. a) $(a + 3)(c + d)$ b) $(a + b)(x - y)$
 c) $(x - 1)(x^2 + y^2)$ d) $(r + s)(t + u)$
 e) $(-3x + 6)(y - z) = -3(x - 2)(y - z)$ f) $(k^3 + k^2)(1 - k^2) = -k^2(k + 1)^2(k - 1)$
44. a) $10a(b + c)(x + y)$ b) $5(e - 2)(2f + 1)$
 c) $(p^2 - q^3 + r)(x - y)$ d) $2(a - 5)(e + f - g)$
 e) $(a + b + c)(x + 1)$ f) $(\delta - 1)(\delta - \varphi - \rho)$
45. a) $(c + d)(c - d)$ b) $4(x + 3y)(x - 3y)$
 c) $(5a + 1)(5a - 1)$ d) $(1 + e^5)(1 - e^5)$
 e) $(7t + 3s)(7t - 3s)$ f) $6(x^2y + z^2)(x^2y - z^2)$
 g) geht nicht h) $3(3\phi^2 + 1)(3\phi^2 - 1)$
46. a) $(p + q)^2$ b) geht nicht
 c) $(2e - 1)^2$ d) $(\lambda^2\gamma + 1)^2$
 e) $(5a^3 - 2b)^2$ f) $2(m + 2)^2(m - 2)^2$
 g) $-6(2x + 1)^2$ h) $-r^2(r - s)^2$
47. a) $(7a - 5)(a + 5)$ b) $-g(2e + 2f + g)$
 c) $(v + w + 1)(-v - w + 1)$ d) $(2a + 2b + c)(-2a - 2b + c)$
 e) $(p + 10q + 1)(p - 10q + 1)$ f) $4(m^2 - n + 5)(m^2 + n - 5)$
48. a) $(a + 2)(a + 10)$ b) $(a + 4)(a + 5)$
 c) $(a + 1)(a + 20)$ d) $(a - 2)(a - 10)$
 e) $(a - 4)(a - 5)$ f) $(a - 1)(a - 20)$
 g) $(a + 4)(a - 5)$ h) $(a - 4)(a + 5)$
 i) $(e + 1)(e - 2)$
49. a) $(e + 1)(e + 2)$ b) $(b + 6)(b - 8)$
 c) $(y + 9)(y - 8)$ d) $(a - b)(a - 10b)$
 e) $(\alpha^2 + 15)(\alpha^2 + 30)$ f) $(m^2 + 2u^2)(m^2 - 18u^2)$
 g) $(3z + 1)(2z - 1)$ h) $(k - 1)(4k - 1)$
 i) $(h + 5)(2h + 1)$
50. a) $x^2(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$ b) $3a(a + 2)(a - 5)$
 c) $5e(4g - h)^2$ d) $2x^2(3y + z)^2$
 e) $(c - 3)(c - 11d)$ f) $3(\gamma + 1)(2\gamma - \lambda + 2)$

51. a) $-1(h+1)(h-1)(m+x)$
 c) $3b^3(2b+3)(2b-3)(4b^2+9)$
 e) $2b^2(2c+d)(2d-1)$
- b) geht nicht.
 d) $(y^2-2y-1)(2z-1)$
 f) $(p+2)(p-2)(q+4)(q-3)$

3 Dividieren

Lösungen zu Übungen 10

1. Richtig: (1); (2); (3)
2. a) $\frac{1}{4}; -1$; nicht def. b) $\frac{3}{4}; 0$; nicht def. c) $2; 0$; nicht def. d) $-1; 0; 1$
3. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ b) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ c) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{5}\right\}$ d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
4. a) $x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{5}$ b) $x_1 = -2; x_2 = -1; x_3 = 1$
5. a) $\frac{3}{2g}$ b) $-\frac{3a}{7d}$ c) $-\frac{4x^3y^3}{3}$ d) $\frac{6m}{5n}$
6. a) $c-6$ b) $3d+5$ c) $\frac{9}{4}x$ d) $\frac{2k-4}{2k+9}$
- e) $\frac{x}{y}$ f) $2v$
7. a) $\frac{5}{x+y}$ b) $c(c-1)$ c) $\frac{m+n}{5}$ d) $\frac{3(2e-1)}{4}$
- e) $\frac{p(p-1)}{q}$ f) $\frac{2z-5}{2(2z+5)}$
8. a) $\frac{a+b}{3}$ b) $\frac{s+1}{t+1}$ c) $\frac{4}{6\lambda - \omega}$ d) $\frac{f+2}{f-1}$
- e) $\frac{c-d}{c-d+10}$ f) $\frac{a-c}{5a-b}$
9. a) $\frac{a+8}{a-2}$ b) $\frac{k-2}{k-4}$ c) $\frac{x+5y}{x+3y}$ d) $\frac{w-5}{w+4}$
- e) $\frac{c}{5(a+1)}$ f) $\frac{p+q}{2}$ g) $\frac{b^2+1}{b^2-10}$ h) $\frac{y^2}{y+4}$
- i) $\frac{\phi-11}{\phi-2}$
10. a) -1 b) $-u$ c) $-\frac{a^2}{a+1}$ d) $-\frac{4}{k+5}$
- e) $-\frac{g+4}{g+6}$ f) $-\frac{2\delta - \varepsilon}{2(2\delta + \varepsilon)}$
11. a) $\frac{2k+lm}{2klm}$ b) $\frac{n-1}{5n+2}$ c) $\frac{c+2d+2e}{c-2d-2e}$ d) $\frac{3(x+y+z)}{4}$
- e) $p+q+3$ f) 1
12. a) $\frac{5x+2y}{3(2x+5y)}$ b) $x-y$
13. a) $\frac{k-1}{k+2}$ b) $\frac{a}{-2c-d}$ c) $\frac{x+y-8}{8xy}$ d) $\frac{4 \cdot (m-7)}{n}$
- e) $\frac{(r-s) \cdot (r+2s)}{-t} = \frac{(s-r) \cdot (r+2s)}{t}$ f) $\frac{-e^2+5ef-f^2}{-f^2+3ef-e^2}$
14. a) $\frac{x^2}{x^3}$ b) $\frac{4xz}{4x^2z}$ c) $\frac{2a+b}{2ax+bx}$

15. a) $\frac{6}{3c-3d}$ b) $\frac{2(c-d)}{c^2-2cd+d^2}$ c) $\frac{-2}{d-c}$
 16. a) $\frac{4(a+b)^2}{4a^2-4b^2}$ b) $-\frac{(a+b)^2}{b^2-a^2}$ c) $\frac{(a+b)(a+3b)}{a^2+2ab-3b^2}$
 17. a) $36x^3y^3z$ b) $a(a-b)(a-c)$ c) $2a^2(a-1)$ d) $4(a+1)(a-1)$

Lösungen zu Übungen 11

18. Falsch: (3)

19. a) $\frac{yz}{2xyz}; \frac{4xz}{2xyz}; \frac{6xy}{2xyz}$ b) $\frac{4c^3}{12c^3d^2}; \frac{d^2}{12c^3d^2}$
 c) $\frac{(e-2)}{(e^2-4)}; \frac{(e+1)(e+2)}{(e^2-4)}$ d) $\frac{g}{3-\mu}; \frac{-3}{3-\mu}$
 e) $\frac{1}{x^4-4y^2}; \frac{-x(x^2+2y)}{x^4-4y^2}$ f) $\frac{15}{3a+3b}; \frac{20}{3a+3b}; \frac{18}{3a+3b}$
 20. a) $\frac{21x}{5}$ b) $\frac{5}{4y}$ c) $\frac{7z}{4}$ d) $-\frac{5}{2a}$
 e) 2 f) 1 g) $\frac{-3(m-2)}{2}$ h) $-\frac{1}{r}$
 i) 0
 21. a) $\frac{71x}{12}$ b) $\frac{89y}{55}$ c) $\frac{55z}{192}$ d) $\frac{29a}{15c}$
 e) $\frac{12g-7e}{4efg}$ f) $\frac{26p+pq}{2q^2}$
 22. a) $\frac{12+k}{4}$ b) $\frac{18\beta-5}{3\beta}$ c) $\frac{3w^2-2w+4}{w}$ d) $\frac{2b+74}{7}$
 e) $\frac{45c-d}{8}$ f) $2m-1$
 23. a) $\frac{v(3v-1)}{2(v-1)}$ b) $\frac{-x+y-z}{x(y-z)}$ c) $\frac{r+9s}{(r+s)(r-s)}$ d) $\frac{2a^2+2}{(a+2)(a-3)}$
 e) $\frac{-14b^2-6b+10}{(b^2+1)(b^2-5)}$ f) $\frac{4-3d}{36(2d-e)}$ g) $-\frac{f}{4e(3e+4f)}$ h) $\frac{6(1-u)}{u^2-6}$
 24. a) $-\frac{n}{(m+2n)^2}$ b) $\frac{10b}{(2a-5b)^2(2a+5b)}$ c) $\frac{z}{2y(3y+z)}$ d) $\frac{e^2}{(e+f)(e-f)}$
 e) $\frac{2k}{(k+4)(k-5)}$ f) $\frac{1}{h(h+2)(h-13)}$
 25. a) $\frac{9}{(u+7)(u-2)^2}$ b) $-\frac{3}{4(q-1)}$ c) $\frac{u-9}{2(u+3)(u-3)}$ d) $\frac{2\mu^2-3\varphi^2}{(2\mu+3\varphi)(2\mu-3\varphi)}$
 e) $\frac{v}{v+3}$ f) $\frac{1}{a+b}$
 26. a) $-\frac{ab^2}{(a+4)(a-b)}$ b) $-\frac{h^2+15h}{(h+3)(h-3)(h^2-4)}$
 c) $\frac{3d+2e+1}{5(d+e)(d-e)}$ d) $\frac{x-y+z-1}{(x-1)(y-1)(z-1)}$

Lösungen zu Übungen 12

27. Richtig: (3)

28. a) $-\frac{xy}{z}$ b) $\frac{xy}{z}$ c) $\frac{x^2}{y}$ d) $\frac{y}{x}$
 e) $\frac{ey}{2e-g}$ f) $-\frac{1}{2}$
29. a) $2(5a-b)$ b) 4 c) $\frac{3}{xy^5z}$ d) $-2u$
 e) $-4ef$ f) 3
30. a) $-\frac{y}{xz}$ b) $\frac{x}{yz}$ c) $\frac{xy}{z}$ d) $\frac{a^3}{2}$
 e) $\frac{4e^2}{25f^3g^4}$ f) $\frac{9\delta^3}{2}$ g) $\frac{-3v+2}{w}$ h) $\frac{-3y+4}{22x^2}$
 i) $\frac{b}{2c}$
31. a) $\frac{x^2}{2vy}$ b) 30 c) $-\frac{4(q-1)}{3}$ d) $-\frac{2}{c^2d}$
32. a) $\frac{3v(v-16)}{v+4}$ b) $\frac{(p+q)^3}{p-q}$ c) $\frac{2d}{d+4}$ d) $\frac{\mu-2\omega}{2\mu+\omega}$
 e) $\frac{u+4}{3u^2}$ f) $\frac{2a-b}{6ab}$ g) $-\frac{5(3x^2+2y^2)}{2(3x^2-2y^2)}$ h) $\frac{g(g-h)}{g-2}$
33. a) 1 b) -6 c) $-cd^2$ d) $\frac{56xz}{9y^2}$
 e) $\frac{m^2n^2o^2}{p^4q^2}$ f) $\frac{\delta^{10}}{16}$
34. a) $\frac{-g^2}{h^2}$ b) $\frac{128c^2}{243d^2}$ c) $-14vy$ d) $\frac{56}{81\varepsilon^2\phi}$
35. a) $\frac{3}{77}$ b) $\frac{3(2c+1)}{2(a+b)}$ c) $\frac{y}{3}$ d) $\frac{u+4}{4(4-u)}$
 e) $\frac{a(3d-c)}{20}$ f) $\frac{x^2+1}{x^2+y}$
36. a) $\frac{3b}{8a^2}$ b) $\frac{e+6}{2(e-10)}$ c) $-(m+n)$ d) $\frac{x(x-1)}{3y(2x-y)}$
 e) $\frac{2(k-2)}{k-1}$ f) $\frac{(\delta-1)^2}{5\sigma}$
37. a) a^2-b^2 b) $\frac{6c}{2c+d}$ c) $\frac{f^2(g^2-1)}{g^2}$ d) $\frac{(eh-fg)^2}{f^2h^2}$
 e) $\frac{(p^2+8)^2}{16p^2}$ f) $\frac{-y(2x+y)}{(x+y)^2}$
38. a) $-2ab$ b) $\frac{ef}{3}$ c) $h(k^2-h)$ d) $\frac{rt-s}{rt+s}$
 e) $\frac{2c-1}{c}$ f) $\frac{c+d}{4cd}$
39. a) $-\frac{\varphi(2\varphi+\lambda)(\varphi-\lambda)^2}{(\varphi-2\lambda)^2(\varphi+2\lambda)}$ b) $d-c$ c) $\frac{36y^2+28z^2}{3y-2z}$ d) 0

40. a) $\frac{vy}{wx}$ b) $-\frac{vy}{x}$ c) $-\frac{v}{wx}$ d) $\frac{vy}{wx}$
 e) 8 f) $-\frac{5xy^2}{8}$ g) $\frac{2a^2}{c^4}$ h) $-980\alpha^2\beta^3\gamma^2$
 41. a) $\frac{2p+1}{2p-1}$ b) $\frac{q}{q-1}$ c) $\frac{fg}{f+g}$ d) $-z^2$
 42. a) $\frac{5}{2p}$ b) $\frac{y}{5}$ c) $\frac{-2r}{s}$ d) $\frac{b^3-b+2}{b^3-b-1}$
 e) m f) $-\frac{x+7y}{2}$
 43. a) $\frac{c+2}{c+3}$ b) $x+1$ c) -2
 44. a) $\frac{p}{q} = \frac{5}{7}$ b) $\frac{p}{q} = \frac{11}{17}$
 45. a) $-$ b) Durch Addieren zweier benachbarter Zahlen erhält man die nächstobere.
 c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{30}, \frac{1}{60}, \dots$
 d) Jedes Element ist die Differenz des Elements links (rechts) und oben links (rechts)

Lösungen zu Übungen 13

46. a) $2x^2 + 2x$ b) $2x^3 + 1$ c) $x - y - 1$ d) $b^4 + b^3 + b^2 + b + 1$
 e) $a^3 - b^2$ f) $z^3 + z^2 + z$ g) $-2z^3 + z + 1$ h) $-p^3 + p + 2$
 47. a) $2x + 1$, Rest 1 b) $2z^2 - z + 1$, Rest -2
 c) $2a^3 + a^2$, Rest $4a$ d) $b^2 + 2b$, Rest $b^2 - 1$
 48. a) $a = -3$ b) $a = 4$
 49. a) $2x^2 + 4$ b) $\frac{1}{p+1}$ c) $x - y - 1$ d) $\frac{1}{5f - g + 2h}$

II Rechnen mit Potenzen

4 Potenzieren

Lösungen zu Übungen 14

1. Richtig (2); (3)
2. a) 10^2 b) 10^4 c) 10^1 d) 10^6
3. a) 10000 b) 10000 c) -10000 d) 1000
e) -1000 f) -1000 g) 100 h) 1000000
4. a) 2; 4; 8; 16 b) -1; 1; -1; 1
c) 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001 d) $\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \frac{1}{81}$
5. a) 2^4 b) 3^3 c) 3^4 d) 5^4
6. a) -1 b) 1 c) 1 d) 1
e) -1 f) 1 g) -1 h) -1
7. a) 625 b) 625 c) -625 d) -64
e) -64 f) $\frac{4}{9}$ g) $\frac{1}{32}$ h) -0.03125
8. a) 1 b) -1 c) -1 d) 1
9. a) 6; 27; 114 b) 8; 9000; 0.1875; 2 c) $15; -\frac{83}{27}; 2400; -0.972$ d) -12; -60; -218
10. a) $a_1 = 1; a_2 = 4; a_3 = 9; a_4 = 16; a_5 = 25$, Quadratzahlen
b) $\{a_n\} = n^2$ c) Die Anzahl Punkte der Winkel entsprechen den ungeraden Zahlen.
d) n Winkel e) $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n + 2n + 1$
f) jedes n -te Folgenglied setzt sich aus den ersten eins bis n ungeraden Zahlen zusammen.
11. a) -
b) $b_1 = 1; b_2 = 8; b_3 = 27; b_4 = 64; b_5 = 125; b_6 = 216; b_7 = 343; b_8 = 512$, Kubikzahlen
c) $\{b_n\} = n^3$ d) $s_1 = 1; s_2 = 9; s_3 = 36; s_4 = 100; s_5 = 225$, Quadratzahlen
e) 1, 3, 6, 10, 15, ... f) $\{s_n\} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Lösungen zu Übungen 15

12.

Exponent	3	2	1	0	-1	-2	-3
Potenz	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
Potenzwert	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$

13. Richtig: (1); (2); (4)
14. a) $-\frac{9989}{100} = -99.89$ b) $\frac{1}{1000}; \frac{1}{100}; \frac{1}{10}; 1; 10; 100; 1000$
c) $-\frac{909}{100} = -9.09$ d) $-\frac{9899}{100} = -98.99$

15. a) $\frac{1}{10^4}$ b) $-\frac{1}{10^3}$ c) 10^4 d) 10^2
 16. a) 10^{-4} b) 10^{-1} c) 10^3 d) 10^{-4}
 17. a) $-1; 1; -1; 1; -1; 1; -1$ b) $\frac{1}{64}; \frac{1}{16}; \frac{1}{4}; 1; 4; 16; 64$
 c) $\frac{15}{16}$ d) $\frac{156}{5}$
 18. a) $\frac{27}{1000}$ b) $\frac{1000}{27}$ c) $-\frac{27}{1000}$ d) $-\frac{1000}{27}$
 e) $\frac{81}{16}$ f) $\frac{16}{81}$ g) $-\frac{81}{16}$ h) $\frac{16}{81}$
 19. a) 1 b) -1 c) 1 d) $\frac{1}{4}$
 20. a) $\frac{1}{a^4}$ b) $\frac{1}{(3b)^3} = \frac{1}{27b^3}$ c) $\frac{3}{b^3}$ d) $\frac{1}{(c+d)^3}$
 e) $c + \frac{1}{d^3}$ f) $\frac{1}{c^3} - \frac{1}{d^3}$ g) x h) $-3y^4$
 21. a) $5y^4$ b) $\left(\frac{w}{2v}\right)^4 = \frac{w^4}{16v^4}$ c) $\left(\frac{\sigma}{\varphi}\right)^6 = \frac{\sigma^6}{\varphi^6}$ d) $\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3$
 22. a) a^{-1} b) $b^{-2}c^{-5}$ c) $4b^{-2}c^5$ d) $x \cdot y^{-k}$
 e) y^k f) u^{-m-5} g) $2z^{-1} - 3z^{-3}$ h) $4v^3 + v^{-3}$
 23. a) $eg^{2-n} - fg^{2n-2}$ b) $3x^{-1}(y-z)^{-3}$ c) $r^{-2k}(s+t)^{1-2m}$ d) $(\alpha + \delta + \mu)^{-1}$

Lösungen zu Übungen 16

24. a) $10^4(y-1) = 10000(y-1)$ b) $10^{-7} = \frac{1}{10^7}$
 c) $9.51 \cdot 10^4$ d) $5 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{2000}$
 e) $1.4 \cdot 10^7$ f) $-1.2 \cdot 10^{-8}$
 25. a) $7x^4$ b) $(a-b)z^n$
 c) $1.75k^4 + 0.1k^3 + 0.2k^2$ d) $\frac{11}{20}b^6 + \frac{1}{3}b^4$
 e) $5 \cdot 3^n$ f) $(p^2 - q^2)(p-q)^k$
 26. a) 0 b) $6 \cdot 4^n = 6 \cdot 2^{2n}$
 c) $2 \cdot 8^n = 2 \cdot 2^{3n} = 2^{3n+1}$ d) -2^n

Lösungen zu Übungen 17

27. Falsch: (1); (4)
 28. a) 10^{18} b) 10^4 c) -0.1^{11} d) 10^2
 e) -10^6 f) 10^{-3} g) $10^{-(n+1)}$ h) 10^{a-1}
 29. a) 2^{18} b) $(-2)^6 = 2^6$ c) -0.2^{11}
 d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{17} = \frac{1}{2^{17}}$ e) a^{36} f) b^{n+8}
 30. a) $2u^{5n+1}$ b) d^{3n+8} c) $-p^{18}$ d) q^{17}
 e) r^{17} f) $\alpha^{11} \cdot \beta^5$
 31. a) $3^2 = 9$ b) $5^{-1} = \frac{1}{5}$ c) $-2^{-3} = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8}$ d) $2^{-10} = \frac{1}{2^{10}}$
 e) x^4 f) y^{-n-1}

32. a) z^{-2n-2} b) 1 c) $-b$ d) $-h^{-2k-2}$
 e) $(2k-1)^{-1} = \frac{1}{2k-1}$ f) $-(v-w)^5 = (w-v)^5$
33. a) 3^{13} b) -3 c) $0.1^{25} : 0.5^{13}$ d) -2^5
 e) $-w^{20}$ f) x^{5n} g) $7y^{10}$ h) λ^{2n-4}
34. a) 10^{-6} b) 10^8 c) 10^6 d) $-\frac{1}{10^2}$
 e) 10^{m+1} f) 10^{n-k} g) 10^3 h) 10^{-2}
35. a) 5^{-7} b) 2^6 c) 3^6 d) $-3^{-6} = -\frac{1}{3^6}$
 e) $b^{-5} = \frac{1}{b^5}$ f) $c^{-3} = \frac{1}{c^3}$ g) x^6 h) $y^{-3} = \frac{1}{y^3}$
36. a) z^{m+1} b) v^{n-k} c) w^{4k} d) $r^{-2} = \frac{1}{r^2}$
 e) u^{-2n+8} f) p^{m+5} g) $(\delta - \varepsilon)^{3m-3}$
 h) $r^{-6}(s-2)^{-7} = \frac{1}{r^6(s-2)^7}$
37. a) $10^{-6} = \frac{1}{10^6}$ b) $10^{-6} = \frac{1}{10^6}$ c) 10^6 d) 1
 e) 10^{12} f) 0.000001 g) $\frac{1}{10^6}$ h) 10^{3n}
 i) 10^{4a^2+8a}
38. a) $3^{-6} = \frac{1}{3^6}$ b) $3^{-6} = \frac{1}{3^6}$ c) 3^6 d) 1
 e) a f) a^6 g) $4b^{-6} = \frac{4}{b^6}$ h) $16e^4f^{-8}g^{12}$
 i) $5xy^4$
39. a) 2^{12} b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{1}{2^{12}}$ c) $(\sqrt{5})^{10m} = 5^{5m}$ d) n^{n^2}
 e) m^{3n-3} f) $(p-1)^{k^2+km+m-1}$

Lösungen zu Übungen 18

40. a) 15^7 b) 6^3 c) $2(xy)^6$ d) $-(6k)^a$
 e) 2^{10} f) 20^{2n} g) $2(2a^2)^{n+3}$
 h) $\alpha(\alpha\beta^2\theta^2)^5 = \alpha^6\beta^{10}\theta^{10}$ i) $x(xy^3z)^3 = x^4y^9z^3$
41. a) $6^{-3} = \frac{1}{6^3}$ b) $0.5^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4$ c) $(2uv)^{-3} = \frac{1}{(2uv)^3}$ d) $2(uv)^{-3} = \frac{2}{(uv)^3}$
 e) $a^{-2n} = (a^2)^{-n} = \frac{1}{(a^2)^n} = \frac{1}{a^{2n}}$ f) $(-5\delta\lambda)^{1-k}$
 g) $(f^2 - g^2)^{-m} = \frac{1}{(f^2 - g^2)^m}$ h) $(16y^2 - 9x^2)^{3-4n} = \frac{1}{(16y^2 - 9x^2)^{4n-3}}$
42. a) 2^5 b) 20^{10} c) $\left(\frac{1}{20}\right)^4 = \frac{1}{20^4}$ d) 3^{n+2}
 e) $\left(\frac{5}{2}\right)^4$ f) 2^n g) $16\left(\frac{x}{2y}\right)^3 = \frac{2x^3}{y^3}$ h) $\left(\frac{m^3}{n}\right)^2$
 i) $\left(\frac{p}{q}\right)^3$
43. a) $3^{-3} = \frac{1}{3^3}$ b) $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$ c) $w^{-2k} = (w^2)^{-k} = \frac{1}{(w^2)^k} = \frac{1}{w^{2k}}$
 d) $-\left(\frac{2x}{3y}\right)^{1-4m} = -\left(\frac{3y}{2x}\right)^{4m-1}$ e) $(-3z)^{-3n} = \frac{1}{(-3z)^{3n}}$
 f) $(\beta + \delta)^{2k}$

Lösungen zu Übungen 19

44. a) $x = 26$ b) $x = 2$ c) $x = \frac{33}{4}$ d) $x = 2$
 e) $x = 11$ f) $x = -12$ g) $x = -15$ h) $x = -\frac{2}{3}$
 i) $x = \frac{1}{5}$
45. a) $-20a^{10} + 12a^9 - 12a^8 + 4a^7$ b) $6x^8y^7 + 6x^7y^6 + 4x^6y^8 - 6xy^{11}$
 c) $c^8 - d^8$ d) $u^{2m+2} - u^{2n+2}$
 e) $a^{20} + 2a^{10}b^5 + b^{10}$ f) $x^{-5}y^{-5} - x^5y^5 = \frac{1}{x^5y^5} - x^5y^5$
46. a) $m^{-2} - 2m^{-1}n^{-2} + n^{-4} = \frac{1}{m^2} - \frac{2}{mn^2} + \frac{1}{n^4}$ b) 4
 c) $-2z^{-6} + 2 = -\frac{2}{z^6} + 2$ d) $\frac{2\theta^2}{(\theta+1)(\theta-1)} = \frac{2\theta^2}{\theta^2-1}$
47. a) $a^6(a+1)$ b) $b^3(b+c)^2$ c) $d^n(d-1)$ d) $e^n(3e-1)^2$
 e) $k^8(k^2+1)(k+1)(k-1)$ f) $x^3(x-1)^2$
 g) $y^n(y+1)(y-1)$ h) $(f^n+g^m)(f^n-g^m)$ i) geht nicht
48. a) $a^{10} - a^5$ b) b^7 c) f^8 d) $k^{750} - 1$
 e) $p+1$ f) $\frac{1}{3^{10}}$
49. a) $6ab^2$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{64c^2}{z^2}$ d) $96a^{n-3}x^6$
50. a) $(p-2)^2$ b) $-d^{12n}x$ c) $-\frac{1}{24}\lambda^{20}$ d) $\frac{1}{10}a^{20}$

51. a)

Stadium n	0	1	2	3	4	5	6	7
l_n	1	3^{-1}	3^{-2}	3^{-3}	3^{-4}	3^{-5}	3^{-6}	3^{-7}
s_n	1	4^1	4^2	4^3	4^4	4^5	4^6	4^7
g_n	1	$\left(\frac{4}{3}\right)^1$	$\left(\frac{4}{3}\right)^2$	$\left(\frac{4}{3}\right)^3$	$\left(\frac{4}{3}\right)^4$	$\left(\frac{4}{3}\right)^5$	$\left(\frac{4}{3}\right)^6$	$\left(\frac{4}{3}\right)^7$

b) $\{l_n\} = 3^{-n}; \{s_n\} = 4^n; \{g_n\} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

c)

Stadium n	8	9	10	20	30	50
l_n	3^{-8}	3^{-9}	3^{-10}	3^{-20}	3^{-30}	3^{-50}
s_n	4^8	4^9	4^{10}	4^{20}	4^{30}	4^{50}
g_n	10.0	13.3	17.8	315.3	5560	1765781

d) l_n geht gegen null; s_n und g_n gehen gegen unendlich

Lösungen zu Übungen 20

52. a) 1530000 b) 1530 c) 1.53 d) 0.0153
 e) 0.00000153 f) -450000 g) -0.000045 h) 23

53. a) $5 \cdot 10^4$ b) $1.23456 \cdot 10^5$ c) $2.71828 \cdot 10^{11}$ d) $7 \cdot 10^{-3}$
 e) $1.2345 \cdot 10^{-1}$ f) $2.71828 \cdot 10^{-5}$ g) $1 \cdot 10^6$ h) $1.33 \cdot 10^{13}$
 i) $1.7 \cdot 10^{-2}$
54. a) $1 \cdot 10^{-8} = 10^{-8} = \frac{1}{10^8}$ b) $-1 \cdot 10^{-8} = -10^{-8} = -\frac{1}{10^8}$
 c) $1 \cdot 10^{-1} = 10^{-1} = \frac{1}{10}$ d) $1 \cdot 10^1 = 10$
55. a) $3517 \cdot 10^3, 4 \cdot 10^6, 3.5 \cdot 10^6$ b) $203468 \cdot 10^3, 203 \cdot 10^6, 2.0 \cdot 10^8$
56. a) $7.879 \cdot 10^{-2}$ b) $3.142 \cdot 10^0 = 3.142$ c) $2.455 \cdot 10^7$ d) $5.055 \cdot 10^{-5}$
57. a) $7 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ b) $1.25 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ c) $7 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ d) $1 \cdot 10^{-14} \text{ m}$
 e) $2.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
58. Das Proton ist 1833-mal schwerer als das Elektron.
59. 0.641 km^2
60. a) $5 \cdot 10^{12}$ b) $3 \cdot 10^{13}$ c) $2.25 \cdot 10^8$ d) 900g
 e) $2.4 \cdot 10^{10} - 6 \cdot 10^{10}$ f) $1.4 \cdot 10^{-3} : 1$
61. a) $1.496 \cdot 10^8 \text{ km}$ b) 63 250 AE c) 500 s; 18.96 Jahre
62. a) $1.945 \cdot 10^{10} \text{ km}; 2.260 \cdot 10^{10} \text{ km}$ b) 17.96 Stunden
 c) $1.496 \cdot 10^6 \text{ km / Tag}; 5.361 \cdot 10^8 \text{ km / Jahr}$
63. a) $4 \cdot 10^{-6} \text{ mm} = 4 \text{ Nanometer}$ b) $2.5 \cdot 10^5 \text{ m}^2$ Der ganze See ist mit Öl bedeckt.
64. $1.98 \cdot 10^{10} \text{ Liter}$
65. a) 10^{10} Nullen; 100 Nullen
 b) 16; 19683; $4.295 \cdot 10^9$; $2.98 \cdot 10^{17}$; $1.031 \cdot 10^{28}$; $2.569 \cdot 10^{41}$; $6.277 \cdot 10^{57}$; $1.966 \cdot 10^{77}$; 10^{100}
 c) 4^{256} ; $3^{3^{7.6 \cdot 10^{12}}}$; 2^{65536}
66. a) 10^{100} Nullen b) $3.17 \cdot 10^{92}$ Jahre c) $2^{100} \cdot 5^{100}$ (30 und 69 Stellen)

Lösungen zu Übungen 21

67. a) $[183]_{10}$ b) $[291]_{10}$ c) 25_{10} d) $[37]_{10}$
 68. a) $[9]_{10}$ b) $[16]_{10}$ c) $[1011]_2$ d) $[100100]_2$
 69. a) 0 ; 0 ; 255 b) 136 ; 0 ; 255 c) 255 ; 100 ; 0 d) 86 ; 200 ; 155
- 70.

	64	128	256	255
a)	100 0000	1000 0000	1 0000 0000	1111 1111
b)	100	200	400	377
c)	40	80	100	FF
	1023	189	567	123
a)	11 1111 1111	1011 1101	10 0011 0111	111 1011
b)	1777	275	1067	173
c)	3FF	BD	237	7B

- d) 3 Stellen im Binärsystem entsprechen einer Stelle im Oktalsystem. 4 Stellen im Binärsystem entsprechen einer Stelle im Hexadezimalsystem.
 Es kann gruppenweise umgerechnet werden: $10 \ 011 \ 101 = 235_8$ oder $1001 \ 1101 = 9C_{16}$

71. a)

+	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	10
2	3	4	5	6	7	10	11
3	4	5	6	7	10	11	12
4	5	6	7	10	11	12	13
5	6	7	10	11	12	13	14
6	7	10	11	12	13	14	15
7	10	11	12	13	14	15	16

b)

*	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10	12	14	16
3	3	6	11	14	17	22	25
4	4	10	14	20	24	30	34
5	5	12	17	24	31	36	43
6	6	14	22	30	36	44	52
7	7	16	25	34	43	52	61

c)/d) z. B. „behalte“ bei 8 statt 10.

5 Radizieren

Lösungen zu Übungen 22

1. a) 11 b) 100 c) 8 d) 0.1
 e) $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ f) c^6 g) xy^2z^3 h) $\frac{4}{b^5}$
2. a) 0 b) $2\sqrt{n}$ c) $1.4\sqrt{a} + \sqrt{b}$ d) $\frac{3}{8}\sqrt{x} + \frac{5}{8}\sqrt{y}$
3. a) $\sqrt{16} = 4$ b) $\sqrt{30}$ c) $\sqrt{4a}$ d) $\sqrt{9} = 3$
 e) $\sqrt{\frac{b}{9}}$ f) $\frac{a}{b^2}$ g) $4a$ h) $\frac{6}{7}mn^2$
 i) $\sqrt{\beta\gamma}$

4. a) $3\sqrt{3}$ b) $2y\sqrt{2y}$ c) $4\sqrt{x}$ d) $4abc^2\sqrt{3ac}$
 e) $\frac{u}{w}\sqrt{uv}$ f) $\frac{0.01y^2}{9z^4}\sqrt{\frac{y}{z}}$ g) $f\sqrt{f+1}$ h) $-$
 i) $(u-2)\sqrt{5}$
 5. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{11}}{33}$ c) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ d) $\frac{\sqrt{21}}{7}$
 e) $\frac{\sqrt{2y}(\sqrt{3y}-1)}{2xy}$ f) $\sqrt{r}-\sqrt{s}$
 6. a) $\frac{5\sqrt{3}-5}{2}$ b) $\sqrt{a}-1$ c) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$ d) $\sqrt{u}-\sqrt{v}$
 e) $\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}{3}$ f) $\frac{(3-2\sqrt{x})^2}{9-4x}$ g) $\frac{\sqrt{q+3}}{q+3}$ h) $\sqrt{a-b}$
 i) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Lösungen zu Übungen 23

7. Richtig: (1)
 8. a) $121^{\frac{1}{2}} = 11$ b) $27^{\frac{1}{3}} = 3$ c) $32^{\frac{1}{5}} = 2$ d) $1000^{\frac{1}{3}} = 10$
 e) $100000000^{\frac{1}{4}} = 100$ f) $0.000001^{\frac{1}{6}} = 0.1$ g) $\left(\frac{36}{81}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ h) $\left(\frac{243}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{3}{2}$
 9. a) $\sqrt{144} = 12$ b) $\sqrt[3]{125} = 5$ c) $\sqrt[4]{256} = 4$ d) $\sqrt[4]{625} = 5$
 e) $\sqrt[3]{0.000001} = 0.01$ f) $\sqrt[5]{0.00032} = 0.2$ g) $\sqrt[3]{\frac{8}{64}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ h) $\sqrt[5]{\frac{100000}{32}} = \frac{10}{2} = 5$
 10. a) 1.414 b) 2.512 c) 1.259 d) 1.744
 e) 1.152 f) 3.201 g) 1.957 h) 1.029
 11. a) $\sqrt[3]{a}$ b) $\sqrt[4]{b^3} = (\sqrt[4]{b})^3$ c) $\sqrt[5]{c^r} = (\sqrt[5]{c})^r$ d) $\sqrt[5]{m^2} = (\sqrt[5]{m})^2$
 e) $4x\sqrt{y^3} = 4x(\sqrt{y})^3$ f) $\sqrt{64x^3y^3} = 8\sqrt{x^3y^3}$ g) $\sqrt[4]{f} + \sqrt[4]{g}$ h) $\sqrt[3]{\sqrt{\lambda} + \sqrt[3]{\mu^2} + 1}$
 i) $op^{a-1}\sqrt[q]{a+b} = op^{(a-1)\sqrt[q]{a+b}}$
 12. a) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^4}$ b) $\frac{3}{\sqrt[5]{y^4}} = \frac{3}{(\sqrt[5]{y})^4}$ c) $\frac{2}{\sqrt{z^5}}$ d) $\sqrt[4]{a^3}$
 e) $\sqrt[q]{\left(\frac{c}{b}\right)^p}$ f) $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ g) $\sqrt[5]{k^4}$ h) $\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{xy}}} + y$
 i) $\sqrt[6]{\frac{1}{\sqrt{(\alpha-\beta)^3}}} + \phi$
 13. a) $x^{\frac{1}{3}}$ b) $y^{\frac{4}{5}}$ c) $z^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}$ d) $\left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{4}}$
 e) $(cd^2e^4)^{\frac{1}{3}} = c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{2}{3}}e^{\frac{4}{3}}$ f) $m^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{2}}$ g) $(p^2 - q^2)^{\frac{1}{2}}$
 h) $(\psi - 2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(\psi - 2)^{\frac{2}{3}}}$ i) $(v - w^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}}$
 14. a) $3^2 = 9$ b) $5^3 = 125$ c) $2^7 = 128$ d) $5^3 = 125$
 e) $10^{-1} = \frac{1}{10}$ f) $2^{-1} = \frac{1}{2}$ g) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$ h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
 i) $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$

15. a) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$ c) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-2} = 10^2 = 100$ d) $25^{\frac{1}{2}} = 5$
 e) $25^{-\frac{1}{2}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$ f) $32^{\frac{1}{5}} = 2$ g) $32^{-\frac{1}{5}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ h) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = 10$
 i) $\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$

Lösungen zu Übungen 24

16. a) a^2 b) $b^{\frac{1}{30}}$ c) $c^0 = 1$ d) $x^{\frac{ru+st}{su}}$
 e) $y^{\frac{-3m+2n}{2n}}$ f) $z^{\frac{-p^2-2}{p}}$
 17. a) $c^{\frac{1}{4}}$ b) $d^{\frac{19}{12}}$ c) $e^{\frac{2}{7}}$ d) $x^{\frac{uw-tv}{vw}}$
 e) $y^{\frac{3m-n}{n}}$ f) $\mu^{\frac{p+2q}{pq}}$
 18. a) $a^{\frac{7}{4}}$ b) $b^{\frac{1}{8}}$ c) $c^{\frac{n}{m}}$
 19. a) 6 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 1
 e) b f) cd g) $\left(\frac{pq}{2}\right)^{\frac{r}{5}}$ h) $\frac{\varphi^4}{\lambda^2}$
 i) $\left(\frac{n}{v}\right)^{\frac{1}{3}}$
 20. a) $12^{\frac{1}{4}}$ b) $\frac{1}{5^5} = \frac{1}{3125}$ c) $\frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ d) $25^{\frac{1}{2}} = 5$
 e) $3y$ f) $z^{\frac{9}{2}}$ g) $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{4}{3}}$ h) $(r+s)^{\frac{p}{q}}$
 i) $\left(\frac{\delta}{\psi}\right)^{\frac{1}{2}}$
 21. a) 9 b) $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ c) 9 d) $5^3 = 125$
 e) w f) $x_{s^2}^r$
 22. a) $y^{\frac{1}{3}}$ b) $2z^3$ c) $\frac{1}{7a}$ d) $\frac{5}{\sqrt{b}}$
 e) $\frac{5\varepsilon^5}{4\lambda^2}$ f) $\frac{4}{25}u^{\frac{1}{3}}$
 23. a) $\frac{4}{3}$ b) $x^{\frac{4}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}} + y^{-\frac{4}{3}}$
 c) $z^{\frac{6}{5}} - 2z + z^{\frac{4}{5}}$ d) $m - n^{-1} = m - \frac{1}{n}$
 e) $\frac{(p+q)^2}{pq}$ f) $-a - a^{\frac{1}{2}} - 1$
 g) $\frac{1}{b^3 + 2b^2 + b}$ h) $\frac{1}{\varepsilon^{-\frac{4}{3}} - 2\varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-\frac{2}{3}}}$
 24. a) $(d-1)^{\frac{1}{3}}$ b) $(e-f)^{\frac{1}{6}}$
 c) $\frac{1}{c^2} - d^{\frac{1}{2}}$ d) $x^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{1}{5}}$
 e) $x^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{3}}$ f) $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(c^{\frac{1}{4}} + d^{\frac{1}{4}})$

Lösungen zu Übungen 25

25. a) $-2^4\sqrt{a} = -2a^{\frac{1}{4}}$ b) $3 \cdot \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt{b}$
 c) $\sqrt[6]{z} + \sqrt[5]{z} - \sqrt[3]{z} + \sqrt{z}$ d) $(a+b)^{10}\sqrt{x} - (c+d)^4\sqrt{x}$
 e) $\sqrt[3]{b} + \sqrt{b} = b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{2}}$ f) $\frac{7}{8}\sqrt[3]{x-y} = \frac{7}{8}(x-y)^{\frac{1}{3}}$

26. a) $\sqrt{16} = 4$ b) $\sqrt[4]{64} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ c) a^2b d) y^{2p+1}
 e) $4a$ f) $\frac{3f}{g^2h^2}$
27. a) $\frac{6}{7}mn^2$ b) ab^2c^3 c) $\frac{4\mu^2}{\omega^2}$ d) $\frac{rs^2}{t^3}$
 e) 1 f) $\sqrt[5]{q-p}$
28. a) $\sqrt{4a}$ b) $\sqrt[5]{32b}$ c) $\sqrt[4]{\frac{1}{9}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ d) $\sqrt[3]{0.027a}$
 e) $\sqrt[3]{64c}$ f) $\sqrt[3]{\frac{b}{125}}$
29. a) $\sqrt[3]{32x^5}$ b) $\sqrt[4]{81c^5}$ c) $\sqrt[m]{p^3q^{m-1}}$ d) 1
 e) $\sqrt[4]{v^{15}w^5}$ f) $\sqrt[n]{\varphi^{3n+1} - \varphi^{3n-1}}$
30. a) $3\sqrt{3}$ b) $2\sqrt[3]{3}$ c) $10\sqrt[4]{5}$ d) $5\sqrt[3]{2}$
 e) $2\sqrt[7]{2^3} = 2\sqrt[7]{8}$ f) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{9} \cdot \sqrt[3]{9}$ g) $4\sqrt{x}$ h) $y^2\sqrt[3]{2}$
 i) $3pq\sqrt[4]{p^3}$
31. a) $3ab^3c \cdot \sqrt[3]{2b^2c^2}$ b) $\frac{u^4}{vw^8}\sqrt{\frac{u}{v}}$ c) $\frac{y^2}{900z^4}\sqrt{\frac{y}{z}}$ d) $a^3\sqrt[m]{a^{-1}} = \frac{a^3}{\sqrt[m]{a}}$
 e) $b^3\sqrt[4]{b}$ f) $\frac{1}{c}\sqrt[n]{c^5}$
32. a) $g^2\sqrt[5]{g^5+1}$ b) $k\sqrt[k]{k^{2k}-1}$ c) $\frac{\tau^2}{3\psi}\sqrt[3]{\frac{\tau+1}{\psi}}$ d) $-$
 e) $(u-2)\sqrt{5}$ f) $\alpha\lambda^2\sqrt[3]{\alpha^3+\alpha^2\lambda}$
33. a) 2 b) 12 c) 10 d) 0
 e) 2 f) 2
34. a) $\frac{2^9}{2} = 2^8 = \sqrt[5]{2^4}$ b) $\frac{\sqrt[3]{49}}{14}$ c) $\frac{\sqrt[4]{y^3}}{y}$ d) $\frac{\sqrt[m]{a^{m-1}}}{a}$
 e) $\frac{\sqrt[m]{b^{m-n}}}{b}$ f) $\frac{\sqrt[m+1]{c}}{c}$
35. a) $\sqrt{a}-1$ b) $\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}{4} = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$ c) $\frac{(3-2\sqrt{x})^2}{9-4x} = \frac{4x-12\sqrt{x}+9}{9-4x}$
 d) $\sqrt{u}+\sqrt{v}$ e) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ f) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$
 g) $\frac{\sqrt[3]{(p-2)^2}}{p-2}$ h) $\frac{\sqrt[3]{(2a+b)^2}}{2a+b}$ i) $\sqrt[4]{(\mu-\theta)^3}$
36. a) $\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt{5}+2\sqrt[4]{5}+1$
 c) $\sqrt{2}-2$ d) $\sqrt[5]{25}-2\sqrt[5]{5}\sqrt[10]{2}+\sqrt[5]{2}$
 e) $x^{2k}-2(xy)^k+y^{2k}$ f) $\sqrt[m]{a}+2\sqrt[2m]{a}\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{b^2}$
 g) $\sqrt[3]{\mu^2}+2\cdot\sqrt[3]{\mu\vartheta}+\sqrt[3]{\vartheta^2}$ h) $\sqrt{c}+\sqrt{c^{-1}}+2 = \sqrt{c}+\frac{1}{\sqrt{c}}+2$
37. a) $x = \frac{1}{6}$ b) $x = \frac{3}{2}$ c) $x = -\frac{7}{2}$ d) $x = \frac{1}{a}+3 = \frac{3a+1}{a}$
 e) $x = \frac{3}{20}$ f) $x = -\frac{1}{m}-\frac{2}{n} = -\frac{2m+n}{mn}$ g) $x = \frac{5}{2}$
 h) $x = -\frac{14}{3}$ i) $x = \pm\sqrt{31}$

38. a) $\sqrt[8]{x}$ b) $\sqrt[2ab]{y}$ c) \sqrt{z} d) $\sqrt[6]{e}$
 e) $\sqrt[m]{\alpha^3 \phi^2 \mu}$ f) \sqrt{k} g) $\sqrt[4]{h^3}$ h) $\sqrt[3]{p}$
 i) $\sqrt[4]{\mu}$
39. a) $\sqrt[8]{y^7}$ b) $\sqrt[15]{z^{17}}$ c) 1 d) $\sqrt[5]{f^{-8}} = \frac{1}{\sqrt[5]{f^8}}$
 e) $\sqrt[40]{\theta^{-51}} = \frac{1}{\sqrt[40]{\theta^{51}}}$ f) $\sqrt[72]{k}$ g) $\sqrt[8]{p^{-5}} = \frac{1}{\sqrt[8]{p^5}}$ h) $\sqrt[12]{\mu^{-1}} = \frac{1}{\sqrt[12]{\mu}}$
 i) $\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[8]{b^7}} = \sqrt[8]{\frac{a^6}{b^7}}$
40. a) $\sqrt[5]{x^{13}}$ b) $a^{-6} = \frac{1}{a^6}$ c) $4b^{\frac{5}{12}} = 4 \cdot \sqrt[12]{b^5}$ d) $-\sqrt{y}$
 e) 2 f) $-d^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{d^{-1}} = -\frac{1}{\sqrt{d}}$
41. a) $\sqrt[5]{p-q}$ b) $\frac{\sqrt[3]{v}+1}{\sqrt[3]{v}-1}$ c) $\sqrt{a}(c^4-d^3)$
 d) $y^{\frac{1}{m}} \cdot (x+y)^{\frac{1}{2m}} = \sqrt[m]{y} \cdot \sqrt[2m]{x+y}$ e) $x+y$

Lösungen zu Übungen 26

42. a) $f_1 = 1; f_{50} = 1.259 \cdot 10^{10}; f_{100} = 3.542 \cdot 10^{20}; f_{400} = 1.7602 \cdot 10^{83}$
 b) TR Überlauf ($f_{400} = 4.347 \cdot 10^{208}$)
 c) $f_1 = f_2 = 1; f_3 = 2; f_4 = 3; f_5 = 5; f_6 = 8; f_7 = 13$
 d) Fibonaccifolge
 e) $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}; f_8 = 21; f_9 = 34; f_{10} = 55$
43. a) $b_3 = 1.500; b_4 = 1.6\bar{6}; b_5 = 1.600; b_6 = 1.625; b_7 = 1.61538\dots;$
 $b_8 = 1.61904\dots; b_9 = 1.61764\dots; b_{10} = 1.61818\dots$
 b) $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618033988\dots$
 c) geht n gegen unendlich, so geht f_n gegen Φ .
 $b_{20} = 1.618033998\dots; b_{50} = 1.618033988\dots; b_{100} = 1.618033988\dots$
44. a) Vgl. Nr. 43. Die Folgenglieder sind die Kehrwerte: $1; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \dots$
 b) $\frac{1}{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 0.618033988\dots$
 c) $c_{20} = 0.618033998\dots; c_{50} = 0.618033988\dots; c_{100} = 0.618033988\dots$
45. a) $v_1 = 1; v_2 = 1.4142\dots; v_3 = 1.5537\dots; v_4 = 1.5980\dots; v_5 = 1.61184\dots; v_6 = 1.61612\dots;$
 $v_7 = 1.617442\dots; v_8 = 1.61785\dots; v_9 = 1.61797\dots; v_{10} = 1.61801\dots$
 b) $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618033988\dots$
 c/d) geht n gegen unendlich, so geht v_n gegen $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.
46. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}$
47. a) 1.5; 1.4; 1.41667 b) Differenzen: 0.086; 0.014; 0.0025
 c) $[1; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2] = 3.644 \cdot 10^{-7}$ (Differenz)
48. a) 2; 1.5; 1.6... b) gegen Φ

49.

	Bahnradius a in AE	Umlaufzeit T in Jahren
Merkur	0.3871	0.240843
Venus	0.723186	0.615
Erde	1	1
Mars	1.5237	1.880829
Jupiter	5.201221	11.862
Saturn	9.5371	29.452659
Uranus	19.181710	84.01
Neptun	30.07	164.892211
Pluto	39.438065	247.67

50. a) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \frac{1}{64}; \frac{1}{128}; \frac{1}{256}; \dots$

b) $\{a_n\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad a_0 = 1; a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$

c) $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}; \frac{1}{64}; \frac{1}{256}; \dots \quad \{a_n\} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad a_0 = 1; a_{n+1} = \frac{a_n}{4}$

d) In Metern: $l_0 = 2^{\frac{1}{4}} \approx 1.1892$ (A0); $l_1 = 2^{-\frac{1}{4}} \approx 0.8409$ (A1); $l_2 = 2^{-\frac{3}{4}} \approx 0.5946$ (A2);

$l_3 = 2^{-\frac{5}{4}} \approx 0.4204$ (A2); $l_4 = 2^{-\frac{7}{4}} \approx 0.2973$ (A4); $l_5 = 2^{-\frac{9}{4}} \approx 0.2102$ (A5);

$l_6 = 2^{-\frac{11}{4}} \approx 0.1487$ (A6); $l_7 = 2^{-\frac{13}{4}} \approx 0.1051$ (A7);

e) $l_8 = 2^{-\frac{15}{4}} \approx 0.0743$ (A8);

f) $\{l_n\} = 2^{\frac{1-2n}{4}}; \quad l_0 = 2^{\frac{1}{4}}; l_{n+1} = \frac{l_n}{2^{\frac{1}{2}}}$

g) $\{l_n\} = 2^{\frac{1-4n}{4}}; \quad l_0 = 2^{\frac{1}{4}}; l_{n+1} = \frac{l_n}{2}$

51. a) Zeichnung b) Ecke oben rechts, nein

c) explizit: $d_n = \frac{3}{4(\sqrt[4]{2})^n}$ rekursiv: $d_1 = \frac{3}{4(\sqrt[4]{2})}; \quad d_{n+1} = d_n \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad S_7 = 1.96 \text{ m}$

d) $S_1 = 0.631\dots$

52. a) Zeichnung b) z. B. 3.7013 m und 3.29648 m

6 Logarithmieren

Lösungen zu Übungen 27

1. Richtig: (1) (4)

2. a) $10^x = 10^3; x = 3$

b) $10^x = 10; x = 1$

c) $10^x = 1; x = 0$

d) $10^x = 10^{-8}; x = -8$

e) $10^x = 10^{-2}; x = -2$

f) $10^x = 10^{-1}; x = -1$

g) $10^x = 10^{\frac{1}{2}}; x = \frac{1}{2}$

h) $10^x = 10^{\frac{2}{5}}; x = \frac{2}{5}$

i) $10^x = 10^{-2}; x = -2$

3. a) $x = \log_{10} 10^4 = 4$

b) $x = \log_{10} 10^6 = 6$

c) $x = \log_{10} 1 = \log_{10} 10^0 = 0$

d) $x = \lg 10^{-3} = -3$

e) $x = \lg 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

f) $x = \lg 10^{-\frac{3}{7}} = -\frac{3}{7}$

4. a) $-5; -1; 0; \lg 50; 2; \lg 500; 3; 4; \lg 500000$
 b) $-8; \lg 0.000002; -6; -4; \lg 0.002; -2; \lg 0.2; 0$
5. a) Zeichnung
 b) 2 cm; 3 cm; 5 cm; 7 cm
 c) 2 cm; 2 cm; 4 cm; 6 cm
6. a) $e^y = e^5; y = 5$
 b) $e^y = e^{-3}; y = -3$
 c) $e^y = e^{\frac{1}{2}}; y = \frac{1}{2}$
 d) $e^y = e^1; y = 1$
 e) $e^y = e^{\frac{5}{2}}; y = \frac{5}{2}$
 f) $e^y = e^0; y = 0$
7. a) $y = \ln e^k = k$
 b) $y = \ln e^{-k-1} = -k-1$
 c) $y = \ln e^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k}$
 d) $y = \ln e^{\frac{4}{k}} = \frac{4}{k}$
 e) $y = \ln e^{-\frac{3}{k+1}} = -\frac{3}{k+1}$
 f) $y = \ln 0$; nicht definiert
8. a) $2^z = 2^3; z = 3$
 b) $3^z = 3^4; z = 4$
 c) $2^z = 2^{-4}; z = -4$
 d) $3^z = 3^{-3}; z = -3$
 e) $5^z = 5^{-4}; z = -4$
 f) $2^{2z} = 2^1; z = \frac{1}{2}$
 g) $10^{4z} = 10^1; z = \frac{1}{4}$
 h) $2^{\frac{z}{2}} = 2^{-3}; z = -6$
 i) $5^{-z} = 5^{-2}; z = 2$
9. a) $w = \log_2 2^4 = 4$
 b) $x = \log_2 2^{-6} = -6$
 c) $y = \log_2 2^1 = 1$
 d) $z = \log_2 2^0 = 0$
 e) $v = \log_2 2^{-1} = -1$
 f) $x = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$
10. a) $y = \log_3 3^2 = 2$
 b) $x = \log_3 3^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}$
 c) $x = \log_3 3^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}$
 d) $p = \lg 10 = 1$
 e) $q = \ln e^{-\frac{5}{4}} = -\frac{5}{4}$
 f) $r = \log_5 5^{-3} = -3$
11. a) 2; $\ln 10$; $\log_2 5$; 3; 4; 5; $\log_4 1234$; 6
 b) $-6; -5; \log_5 0.001; \log_2 \frac{1}{18}; -4; -3; \log_3 \frac{1}{10}; -2$
12. a) 7
 b) 30
 c) 20
 d) $\frac{1000}{k}$
 e) 70000
 f) $\frac{e}{2}$
 g) 96
 h) $\frac{9}{2}$
13. a) 3
 b) 1
 c) 0
 d) -2
 e) -3
 f) 3
 g) $\frac{1}{3}$
 h) 4
14. a) $\frac{1}{4}$
 b) $\frac{3}{2}$
 c) $\frac{2}{3}$
 d) $\frac{1}{2}$
 e) $\frac{3}{2}$
 f) $\frac{7}{2}$
 g) $\frac{1}{4}$
 h) $-\frac{2}{3}$
15. a) $x = 3$
 b) $x = 2$
 c) $x = \frac{1}{2}$
 d) $x = 4$
 e) $x = 5$
 f) $x = \frac{1}{3}$
16. a) $x = 8$
 b) $x = 256$
 c) $x = 1$
 d) $x = \frac{1}{9}$
 e) $x = 2$
 f) $x = \frac{1}{4}$
17. a) $x = 1$
 b) $x = 0$
 c) $x = 2$
 d) $x = n-3$
 e) $x = \frac{1}{2}$
 f) $x = -1$
 g) $x = -\frac{1}{4}$
 h) $x = \frac{6}{5}$
 i) $x = \frac{5}{2}$
18. a) $D =]-4; \infty[; x = -3$
 b) $D =]2; \infty[; x = 12$
 c) $D =]\frac{1}{11}; \infty[; x = \frac{101}{11}$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}; x_1 = 1 + 10^{\frac{3}{2}}, x_2 = 1 - 10^{\frac{3}{2}}$
 e) $D =]\frac{5}{2}; \infty[; x = \frac{15}{2}$
 f) $D =]\frac{3}{2}; \infty[; x = \frac{13}{2}$
 g) $D =]-1; \infty[; x = e^2 - 1$
 h) $D =]0; \infty[; x = e$
 i) $D =]0; \infty[; x = \frac{1}{e^2} = e^2$
19. a) 2.083
 b) 0.4878
 c) 1.000
 d) 2.303
 e) 10.02
 f) -5.298
 g) -1.917
 h) nicht definiert

Lösungen zu Übungen 28

20. Richtig: (2)
21. a) $\log_x a + \log_x b$ b) $\log_x 3 + \log_x y + 1$ c) $\ln 4 + \ln u + \ln(v + 3)$
 d) $4 \log_a p + \log_a(4p^2 + 1) + \log_a(2p + 1) + \log_a(2p - 1)$
 e) $\lg c - \lg 5$ f) $-\lg p - \lg q$ g) $\ln a + \ln b + \ln c - \ln v - \ln w$
 h) $\log_a y - \log_a(z + 1) - \log_a(z - 10)$ i) $\log_a(a + 1) - \log_a(x - 4y) - \log_a(x - 4y)$
22. a) $2 \log_a m + 3 \log_a n$ b) $\log_a 5 + 2 \log_a b + 5 \log_a c$
 c) $(y + 3) \log_a x + \frac{1}{2} \log_a z$ d) $4 \ln f - 3 \ln g$
 e) $b \ln(a + 1) - (c - 1) \ln a$ f) $\frac{3}{2} + \log_k 3$
23. a) $\frac{5}{6} - \log_p 4$ b) $-12 \lg a - 4 \lg b$ c) $30 \lg s - 40 \lg r$ d) $\frac{1}{2} \lg(\lambda + 2) - \frac{3}{4} \lg \sigma$
 e) $2 \log_2(y - 4) - \log_2 x - 6$ f) $\frac{4}{3} + \log_a 2 + \frac{1}{6} \log_a p - \frac{5}{3} \log_a b - \frac{7}{3} \log_a q$
24. a) $\log_a(a + b + c)$ b) $\frac{2}{5} \log_a(a + b + c)$ c) $\frac{1}{3} \log_a(c + d) + \frac{1}{3} \log_a(c - d)$
 d) $\frac{1}{a} \lg(m^3 + n^2)$ e) $\frac{2}{p - q} \lg(x - y)$ f) $\frac{1}{x - y} \log_b(h - 4) + \frac{1}{x - y} \log_b(h - 2)$
 g) $\log_b(u + 1) - \log_b u = \log_b\left(1 + \frac{1}{u}\right)$ h) $-\log_a v - \frac{1}{2} \log_a(v + 1)$
 i) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_a(\varphi - 1)$
25. a) $\ln(2a)$ b) $\lg\left(\frac{b}{c}\right)$ c) $\ln\left(\frac{y^7}{z^5}\right)$ d) $\lg(v + w)$
 e) $\lg\left(-\frac{2}{n + 3}\right)$ f) $\ln(\sqrt[4]{e}(e + 1)) = \ln(e^{\frac{5}{4}} + e^{\frac{1}{4}})$
26. a) $\log_a x$ b) $\ln \frac{1}{\sqrt[3]{a^4}}$ c) $\ln \frac{ab}{b - c}$ d) $\ln \frac{\sqrt{p}}{\sqrt[3]{q^2}}$
 e) $\log_b \frac{k(k + 1)}{-k + 1}$ f) $\ln \frac{x^m z^{m+2}}{y^{m-1}}$
27. a) $\lg(10\alpha\tau^2)$ b) $\lg(u \cdot \sqrt[3]{10})$ c) $\log_5 \frac{x^2}{(x - y)^3}$ d) $\log_5 \delta^{m-9}$
 e) $\lg(p^a \cdot \sqrt[p]{p^2 - 4q^2})$ f) $\log_d\left(\sqrt[3]{a^b} \cdot \sqrt[q]{\frac{c^b}{(b - 3)^c}}\right)$
28. a) 1 b) 5 c) $\log_x \alpha^5$

Lösungen zu Übungen 29

29. a) 2.322 b) 2.123 c) 1.431 d) 0.4653
 e) -11.29 f) -5.140 g) 4.966 h) -28.22
30. a) $\frac{\ln 7}{\ln 2}$ b) $\frac{\log_2 11}{\log_2 3}$ c) $\frac{\lg \sqrt[3]{10}}{\lg 5} = \frac{1}{3 \lg 5}$ d) $\frac{\log_d 3}{\log_d a}$
 e) $\frac{\ln \sqrt{c}}{\ln a}$ f) $\frac{\lg 3 c^5}{\lg a}$
31. a) $3.734 \cdot 10^{488}$ b) $3.487 \cdot 10^9$ c) $701 \cdot 10^{297121486764}$ d) $1.020 \cdot 10^{126}$
 e) $9.231 \cdot 10^{1119}$ f) $5.449 \cdot 10^{2062}$
32. a) $\frac{\log_2 \frac{x^2 - y^2}{x^3}}{\log_2 3}$ b) $\frac{\log_2 \frac{\lambda^8(\varphi - \lambda)}{\varphi^2}}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \log_2 \frac{\lambda^8(\varphi - \lambda)}{\varphi^2}$ c) $\frac{\log_2 \left(\frac{(y + 4)^2}{z^6}\right)}{\log_2(5)}$
33. a) 5 b) $\frac{2(\ln 4 - \ln 5)}{\ln 2} \approx -0.6439$
34. a) $4.371 \cdot 10^{2098959} - 1$ b) $9.249 \cdot 10^{4053945} - 1$ c) $1.260 \cdot 10^{6320429} - 1$ d) $2.994 \cdot 10^{7235732} - 1$

Lösungen zu Übungen 30

35. a) $h = 5500 \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{710}{1013}\right) \approx 2820 \text{ m}$

b) Matterhorn: 576 hPa; Mont Blanc: 553 hPa; Mount Everest: 332.15 hPa; Totes Meer: 1065 hPa

36. a) $M = 4.84$ b) $r = 0.02004 \text{ pc}$

37. a) 1: 11.11 %; 2: 11.11 %; 3: 11.11 %; ... b) –

c) 1: 30.10 %; 2: 17.61 %; 3: 12.49 %; 4: 9.69 %; 5: 7.92 %; 6: 6.70 %; 7: 5.80 %; 8: 5.11 %; 9: 4.58 %

38. pH von : Magensäure 2, Coca Cola 2, hautneutrale Seife 5.5, reines Wasser 7, Meerwasser 8, Bleichmittel 12.5.

39. a) $M = 6.3$ b) $M_2 = M_1 + 1$

40. a) $M = 2.6$ b) $M = 4.8$ c) $M = 9.3$

III Gleichungen

7 Allgemeine Einführung

Lösungen zu Übungen 31

1. Aussagen: a); b); c); e) wahre Aussagen: a); c); e)
2. Aussagen: a); b); d); e) wahre Aussagen: a); d)
3. a) Paris b) 200 c) z. B. CH, D, ...
d) Rhein, Rhone e) -
4. a) $x = -5$
b) $x_1 = 15; x_2 = -15$
c) 10; 11; 12; 13; 20; 21; 22; 30; 31; 40
d) 25; 26; 27; 28

Lösungen zu Übungen 32

5. richtig: (1); (2); (4)
6. falsch: (1), (2); (3); (5)
7. a) $x = -2$ b) - c) $x \in \{4; 2.5; 0; -2\}$
d) $x \in \{4; 2.5\}$ e) $x = 4$ f) $x \in \{0; -2\}$
8. a) $L = \{-4\}$ b) $L = \{2.5\}$
c) $L = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \frac{5}{3}\right\}$ d) $L = \{7\}$
9. a) $L = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{4}{5}\right\}$ b) $L = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{25}{2}\right\}$
c) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\sqrt{15} \vee x \geq \sqrt{15}\}$
d) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 10\}$

8 Lineare Gleichungen

Lösungen zu Übungen 33

1. Falsch: (2); (3); (4)
2. a) $L = \{1\}$ b) $L = \{1\}$ c) $L = \{11\}$ d) $L = \{0\}$
e) $L = \{0\}$ f) $L = \{3\}$ g) $L = \mathbb{R}$ h) $L = \{\}$
3. a) $L = \{20\}$ b) $L = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$ c) $L = \{1\}$ d) $L = \left\{-\frac{1}{8}\right\}$
e) $L = \{0\}$ f) $L = \{2\}$ g) $L = \{4\}$ h) $L = \left\{\frac{3}{2}\right\}$
4. a) $L = \{\}$ b) $L = \{12\}$ c) $L = \mathbb{R}$ d) $L = \{\}$
e) $L = \mathbb{R}$ f) $L = \left\{\frac{3}{8}\right\}$
5. a) $L = \{-2; -3; -4; \dots\}, L = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{3}{2}\right\}$ b) $L = \{7; 8; 9; \dots\}, L = \{u \in \mathbb{R} \mid u \geq 7\}$
c) $L = \{1; 0; -1; -2; \dots\}, L = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3}{2}\right\}$ d) $L = \{5; 6; 7; \dots\}, L = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y > \frac{33}{8}\right\}$
e) $L = \mathbb{Z}, L = \mathbb{R}$ f) $L = \{1; 2; 3; \dots\}, L = \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0\}$

6. a) $L = \{15\}$ b) $L = \{2\}$
 c) $L = \{-22\}$ d) $L = \{0\}$
 e) $L = \mathbb{R}$ f) $L = \{\}$

Lösungen zu Übungen 34

7. a) $x = 1 - a, a \neq 0$ b) $x = 4b$ c) $x = \frac{3c-2d}{c-d}, c \neq d$ d) $x = p+2, p \neq 2$
 e) $x = \frac{1-k}{k+1}, k \neq -1$ f) $x = \mu + \lambda, \lambda \neq \mu$
 8. a) $L = \{4a^2\}$ b) $L = \left\{\frac{bc}{a+c}\right\}, a \neq -c$ c) $L = \{\alpha - \delta\}, \alpha \neq -\delta$ d) $L = \left\{\frac{h-1}{2}\right\}, h \neq 1$
 e) $L = \{q\}, -2p \neq q$ f) $L = \{m-n\}, m \neq n$
 9. a) $r = \frac{M}{\pi s}, s = \frac{M}{\pi r}$ b) $e = \frac{2A}{f}, f = \frac{2A}{e}$
 c) $b = \frac{S-2ac}{2(a+c)}, c = \frac{S-2ab}{2(a+b)}$ d) $\alpha = \frac{360^\circ A}{\pi r^2}$
 e) $K = \frac{100Z}{p}, p = \frac{100Z}{K}$ f) $p = 100\left(\frac{K_1}{K_0} - 1\right), K_0 = \frac{100K_1}{p+100}$
 g) $K = \frac{100 \cdot 360 \cdot Z}{p \cdot t}, t = \frac{100 \cdot 360 \cdot Z}{K \cdot p}$ h) $K_0 = \frac{100 \cdot 360 \cdot K_1}{100 \cdot 360 + p \cdot t}, t = \frac{100 \cdot 360 \cdot (K_1 - K_0)}{K_0 \cdot p}$
 10. a) $L = \{6\}; L = \{\}; L = \left\{\frac{7}{2}\right\}$ b) $L = \{0\}; L = \{\}; L = \left\{\frac{5}{9}\right\}$
 c) $L = \{\}; L = \{0\}; L = \left\{\frac{8}{13}\right\}$ d) $L = \mathbb{R}; L = \{\}; L = \{2\}$
 e) $L = \mathbb{R}; L = \{5\}$ f) $L = \{-1\}; L = \mathbb{R}; L = \mathbb{R}$
 11. a) $a \neq 0: x = -\frac{25}{a}, a = 0: L = \{\}$ b) $b \neq 4: x = 0, b = 4: L = \mathbb{R}$
 c) $a \neq -1: x = \frac{3}{a+1}, a = -1: L = \{\}$ d) $d \neq 2: x = \frac{d+2}{d-2}, d = 2: L = \{\}$
 e) $u \neq 10: x = 1, u = 10: L = \mathbb{R}$
 f) $v \neq -9 \wedge v \neq 0: x = \frac{v-9}{v}, v = -9: L = \mathbb{R}, v = 0: L = \{\}$
 12. a) $k \neq 2 \wedge k \neq -3: x = \frac{1}{k+3}, k = 2: L = \mathbb{R}, k = -3: L = \{\}$
 b) $w \neq 3: x = \frac{w+4}{3-w}, w = 3: L = \{\}$
 c) $a \neq -b: x = \frac{a^2}{a+b}, L = \left\{\frac{a^2}{a+b}\right\} a = -b \neq 0: L = \{\}, a = b = 0: L = \mathbb{R}$
 d) $r \neq -s: x = r-s, r = -s: L = \mathbb{R}$
 e) $m \neq n \vee m \neq -n: x = \frac{1}{m-n}, m = n \neq 0: L = \{\}, m = n \vee m = -n \neq 0: L = \mathbb{R}$
 f) $\lambda \neq 0 \wedge \theta \neq -5: x = \frac{\lambda+\theta}{\lambda(\theta+5)}, \theta = -5 \wedge \lambda \neq 5 \vee \lambda = 0 \wedge \theta \neq 0: x = \frac{3}{a+1}: L = \{\},$
 $\theta = -5 \wedge \lambda = 5 \vee \lambda = 0 \wedge \theta = 0: L = \mathbb{R}$

Lösungen zu Übungen 35

13. Richtig: (1); (2); (3); (4)

14. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, L = \left\{-\frac{11}{2}\right\}$ b) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; 0\right\}, L = \{-1\}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right\}, L = \left\{-\frac{9}{2}\right\}$ d) $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}, L = \left\{-\frac{3}{5}\right\}$
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}, L = \left\{-\frac{23}{7}\right\}$ f) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{9}{2}; \frac{9}{2}\right\}, L = \left\{\frac{27}{110}\right\}$
 g) $D = \mathbb{R} \setminus \{3; 5\}, L = \left\{\frac{8}{5}\right\}$ h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 2\}, L = \{1\}$

15. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}, L = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1; 6; 7\}, L = \{13\}$
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right\}, L = \{2\}$
16. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}, L = \mathbb{R} \setminus \{4\}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}, L = \{0\}$
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 5\}, L = \mathbb{R} \setminus \{0; 5\}$
17. a) $L = \left\{-\frac{mn}{m-n}\right\}$ b) $L = \left\{\frac{3b}{4}\right\}$
 e) $L = \{0\}$ f) $L = \left\{\frac{c-d}{3}\right\}$
18. a) $z = \frac{p}{1-p^2}$ b) $z = m$
19. a) $y = \frac{m^2+n^2}{2n}$ b) $y = a+1$ c) $y = -\frac{d^2}{2c^2-d}$ d) $y = \frac{\beta^2}{\beta-2\mu^2}$
20. a) $m = \frac{2E}{v^2}$ b) $G = \frac{F_G \cdot r^2}{m_1 \cdot m_2}, m_1 = \frac{F_G \cdot r^2}{G \cdot m_2}$
 c) $d = \frac{2(s_n - a_1 n)}{n(n-1)}, a_1 = \frac{2s_n - n(n-1)d}{2n}$ d) $f = \frac{bg}{b+g}, g = \frac{bf}{b-f}$
 e) $R_1 = \frac{R \cdot R_2 \cdot R_3}{R_2 \cdot R_3 - R(R_2 + R_3)}, R_3 = \frac{R \cdot R_1 \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 - R \cdot (R_1 + R_2)}$
 f) $z = \frac{M \cdot Q}{m \cdot F}, F = \frac{M \cdot Q}{m \cdot z}$
21. a) $x \neq 2$ $m \neq -1: x = \frac{2(m-1)}{m+1}, m = -1: L = \{\}$
 b) $x \in \mathbb{R}$ $n \neq 1: x = -n^2 + n + 1, n = 1: L = \{\}$
 c) $x \neq 0 \wedge x \neq 10$ $c \neq 9: x = \frac{10}{c-9}, c = 9: L = \{\}$
 d) $x \neq 0 \wedge x \neq \varphi$ $\lambda \neq \varphi: x = \frac{\lambda \varphi}{\lambda - \varphi}, \lambda = \varphi \neq 0: L = \{\}, \lambda = \varphi = 0: L = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 e) $x \neq 0$ $k \neq -5 \wedge k \neq 4: x = \frac{1}{k+5}, k = -5: L = \{\}, k = 4: L = \mathbb{R}$
 f) $x \in \mathbb{R}$ $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge b \neq 2: x = \frac{a-c}{a(b-2)},$
 $a = 0 \vee b = 0 \vee b = 2 \wedge a \neq c: L = \{\},$
 $b = 2 \wedge a = c: L = \mathbb{R}$

Lösungen zu Übungen 36

22. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}; L =]1; \frac{3}{2}[$ b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}; L =]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]1; \infty[$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{2}\right\}; L =]-\frac{5}{2}; 4]$ d) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}; L =]2; \frac{9}{2}[$
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}; L =]-\infty; 0[\cup]5; \infty[$ f) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}; L =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup \left[\frac{5}{4}; \infty\right[$
23. a) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{5}\right\}; L =]-\infty; \frac{1}{5}[\cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right[$ b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}; L =]-2; 0[\cup]0; 2[$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 3\}; L =]-4; -3.85[\cup]1.85; 3[$ d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-11; 11\}; L =]-11; 11[$

Lösungen zu Übungen 37

24. $\frac{55}{4} = 13.75$ 25. 38
 26. 840; 841; ...; 845 27. 29; 19; ...; 77
 28. 84; 15 29. 27; 167

30. 47 Gäste
 32. 1. Sorte: 29.091 kg, 2. Sorte: 50.909 kg
 34. a) 16 cl
 35. 67.7 % Alkohol
 37. 145.83 l
 39. 59.1 l
 41. Kupfer: 7.844 kg, Zink: 4.156 kg
 43. $p = 3.5\%$
 45. $p = 4.5\%$
 47. $A = 27.3 \text{ cm}^2$
 49. $l = 18 \text{ cm}, b = 5 \text{ cm}$
 51. $n = 18$
 53. 24 Ecken
 55. 2.28 m
 56. a) $r = \frac{a}{6} = \frac{5}{3} \text{ cm}$
 57. a) 18:16:22
 c) 12-mal. Immer nach 65.45 Minuten liegen die Zeiger wieder übereinander.
 $x = \frac{720a}{11}; a = 0, 1, 2, 3, \dots; 11$
 58. 45.111 km
 60. 200.3 km/h
 62. 113.6 km/h
 64. 21 km/h
31. 25 Gäste
 33. 30 kg
 b) 6.6 cl
 36. 1. Sorte: 80.3 l, 2. Sorte: 129.7 l
 38. 653.33 l
 40. 29.6 kg
 42. CHF 9615.38
 44. CHF 7000.–
 46. $K_1 = \text{CHF } 31\,500.-, K_2 = \text{CHF } 13\,500.-$
 48. $l = 100 \text{ cm}, b = 25 \text{ cm}$
 50. $s = 20 \text{ cm}$
 52. $n = 24$
 54. 1.80 m
 b) $r = \frac{3a}{8} = \frac{15}{4} \text{ cm}$
 b) 18:32:44
 59. 18 min 52 s
 61. nach 9 min 46 s, nach 24.429 km (32.571 km)
 63. 7 Uhr 51

9 Gleichungssysteme

Lösungen zu Übungen 38

1. Richtig: (1)
 2. a) linear; Grundform: $\begin{cases} 3x + 0y = 1 \\ 2x - 4y = 10 \end{cases}$
 c) nicht linear
 3. a) $L = \{(1; 1)\}$
 4. a) $L = \{(-1; -5); (0; 0); (1; 5)\}$
 b) $L = \{(-9; 0); (-6; -1); (-3; -2); (0; -3); (3; -4); (6; -5); (9; -6)\}$
 5. a) $L = \left\{ (x; y) \mid y \in \mathbb{R} \wedge x = -\frac{3y+2}{2} \right\}$
 b) $L = \left\{ (x; y) \mid y \in \mathbb{R} \wedge x = \frac{-y+10}{4} \right\}$
 b) nicht linear
 d) linear; Grundform: $\begin{cases} \sqrt{2}c - \sqrt{2}d = -4 \\ -\pi c + \sqrt{5}d = -\sqrt{3} \end{cases}$
 b) $L = \{(0; 4); (5; 8)\}$

Lösungen zu Übungen 39

6. Falsch: (1)
 7. a) $L = \{(4; -6)\}$
 b) $L = \left\{ \left(\frac{5}{2}; -\frac{15}{2} \right) \right\}$
 c) $L = \{(-7; -4)\}$
 d) $L = \left\{ \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{4} \right) \right\}$
 e) $L = \{(5; 1)\}$
 f) $L = \left\{ \left(\frac{1}{23}; -\frac{41}{92} \right) \right\}$
 g) $L = \left\{ \left(\frac{42}{61}; \frac{60}{61} \right) \right\}$
 h) $L = \{(-6; 5)\}$

8. a) $L = \{(2; 6)\}$ b) $L = \{(-2; 2)\}$ c) $L = \{(3; 2)\}$ d) $L = \{(1; 5)\}$
 e) $L = \left\{\left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{5}\right)\right\}$ f) $L = \left\{\left(-1; -\frac{1}{5}\right)\right\}$ g) $L = \left\{\left(-\frac{5}{2}; 0\right)\right\}$ h) $L = \{(5; -4)\}$
9. a) $L = \{(-3; 0)\}$ b) $L = \{(1; 6)\}$ c) $L = \{(-115; -49)\}$ d) $L = \left\{\left(-3; -\frac{1}{3}\right)\right\}$
 e) $L = \{(3; 3)\}$ f) $L = \{(2\sqrt{2}; \sqrt{2})\}$ g) $L = \{(-\sqrt{2}; \sqrt{2})\}$ h) $L = \{(-2; -10)\}$
10. a) $x = \frac{-2a}{5}; y = \frac{-3a}{5}$ b) $x = -3b + 4c; y = 4b - 3c$
 c) $x = \frac{m+n}{2}; y = \frac{m-n}{2}$ d) $x = -2u + v; y = -u + v$
 e) $x = 1; y = 1$ f) $x = a + b; y = a - b$
11. a) $x = 1; y = 0$ b) $x = s; y = -1$
 c) $x = \frac{a}{a-b}; y = -\frac{a}{a-b}$ d) $x = \frac{\mu + \varphi}{\varphi}; y = \frac{\mu - \varphi}{\mu}$
 e) $x = \frac{4m}{3}; y = m - n$ f) $x = \frac{u+v}{w}; y = \frac{u-v}{w}$

Lösungen zu Übungen 40

12. a) $L = \left\{\left(-1; -\frac{3}{11}\right)\right\}$ b) $L = \left\{\left(-2; \frac{5}{4}\right)\right\}$ c) $L = \left\{\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)\right\}$ d) $L = \left\{\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{5}\right)\right\}$
 13. a) $L = \left\{\left(\frac{19}{156}; \frac{7}{156}\right)\right\}$ b) $L = \left\{\left(-\frac{2761}{2752}; \frac{2313}{2752}\right)\right\}$ c) $L = \{(6; 5)\}$ d) $L = \{(5; 2)\}$

Lösungen zu Übungen 41

14. a) $D = 14$ b) $D = 30$ c) $D = 0$
 d) $D = 0.96$ e) $D = 0$ f) $D = 11$
 g) $D = -\frac{5}{6}$ h) $D = -\frac{1}{2}$ i) $D = 0$
 15. a) $a = \frac{3}{2}$ b) $a_1 = -1; a_2 = 2$ c) $a_1 = 0; a_2 = -8$

Lösungen zu Übungen 42

16. a) $D = -1, D_x = -2, D_y = 1; L = \{(2; -1)\}$ b) $D = -5, D_x = -35, D_y = 25; L = \{(7; -5)\}$
 c) $D = -11, D_x = -\frac{11}{2}, D_y = \frac{11}{3}; L = \left\{\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)\right\}$ d) $D = 3, D_x = 6, D_y = \frac{3}{2}; L = \left\{\left(2; \frac{1}{2}\right)\right\}$
 17. -

Lösungen zu Übungen 43

18. a) $L = \{ \}$ b) $L = \{(x; y) \mid y \in \mathbb{R} \wedge x = \frac{3}{2}y + \frac{3}{4}\}$ c) $L = \left\{\left(3; \frac{3}{2}\right)\right\}$
 d) $L = \{(x; y) \mid y \in \mathbb{R} \wedge x = 2y - 6\}$ e) $L = \{ \}$ f) $L = \{(-14; 14)\}$
19. a) $a \neq -\frac{5}{2}: L = \{ \}; a = -\frac{5}{2}: L = \{(x; y) \mid y \in \mathbb{R} \wedge x = \frac{3y+5}{4}\}$
 b) $k = -\frac{9}{5} \wedge m \neq -\frac{21}{5}: L = \{ \}; k = -\frac{9}{5} \wedge m = -\frac{21}{5}: L = \{(x; y) \mid y \in \mathbb{R} \wedge x = \frac{2y+21}{9}\}$
 c) $p = -4: L = \{ \}; p = 4: L = \{(x; y) \mid y \in \mathbb{R} \wedge x = -2y + 4\}$ d) $u = -3: L = \{ \}$
20. a) $a \neq 2: x = \frac{-4a+2}{a-2}, y = \frac{2a^2-2}{a-2}; a = 2: L = \{ \}$
 b) $f \neq 4: x = -\frac{g+5}{f-4}, y = -\frac{5f+4g}{f-4}$
 c) $\vartheta \neq -6: L = \{ \}; \vartheta = -6: L = \{(x; y) \mid y \in \mathbb{R} \wedge x = 1.25y - 1\}$

- d) $\delta \neq 3: x = \frac{1}{\delta-3}, y = -\frac{\delta+3}{\delta-3}; \delta = 3: L = \{ \}$
 e) $m \neq \pm 1: x = 0; y = 0; m = \pm 1: L = \{(x; y) | y \in \mathbb{R} \wedge x = -y\}, L = \{(x; y) | y \in \mathbb{R} \wedge x = y\}$
 f) $x = 0, y = 0$ für alle n

Lösungen zu Übungen 44

21. a) $L = \{(-15; -1; 18)\}$ b) $L = \{(18; -1; 4)\}$
 c) $L = \{(9; -2; 16)\}$ d) $L = \{(40; -31; 24)\}$
 e) $L = \{(2; 3; 2)\}$ f) $L = \left\{ \left(-2; 2; -\frac{5}{3} \right) \right\}$
 22. a) $L = \left\{ \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; -2 \right) \right\}$ b) $L = \left\{ \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6} \right) \right\}$
 23. a) $x = -a + b; y = a - b; z = a + b$ b) $x = \frac{r}{2}; y = \frac{s}{2}; z = \frac{r+s}{2}$
 24. a) $L = \left\{ (x; y; z) \mid z \in \mathbb{R} \wedge x = \frac{z+19}{7} \wedge y = \frac{4z-8}{7} \right\}$
 b) $L = \{(0; -12; -19)\}$ c) $L = \{ \}$
 d) $L = \left\{ (x; y; z) \mid z \in \mathbb{R} \wedge x = -\frac{5z+7}{16} \wedge y = \frac{z+35}{8} \right\}$
 25. a) $m \in \{ \} (m \neq 8: \text{keine Lösung}; m = 8: \text{unendlich viele Lösungen})$
 b) $m \neq 1: x = y = z = 0 (m = 1: \text{unendlich viele Lösungen})$
 26. a) $L = \{(-20; -22; 11; -12)\}$ b) $L = \{(-12; 2; 2; 20)\}$
 c) $L = \{(1; 3; 2; 5)\}$ d) $L = \{(346; -582; -82; -12; 144)\}$

Lösungen zu Übungen 45

27. $\frac{1345}{9}; \frac{2152}{9}$ und $-\frac{1345}{9}; -\frac{2152}{9}$ 28. $\frac{8}{13}$
 29. 4; 12; 24 30. 6; 32; 162
 31. 46 32. 29 oder 92
 33. 864; 468 34. 123
 35. 331 36. 333
 37. 159 g; 91 g 38. CHF 24. – pro kg; CHF 15. – pro kg
 39. Sorte 45 %: 6.25 l; Sorte 85 %: 3.75 l 40. 49.74 %; 73.16 %
 41. 39 %; 78 l 42. CHF 12 000. –; CHF 45 000. –
 43. CHF 460 000. –; 3 % 44. CHF 15 750. –; CHF 15 600. –
 45. CHF 15 400. –; CHF 12 500. – 46. CHF 14 400. –; 5 %
 47. CHF 18 300. –; CHF 17 200. –; CHF 15 100. – 48. 2.5 %; 4 %; 4.5 %
 49. $l = \frac{17}{2}$ cm; $b = 5$ cm 50. $\alpha = 30^\circ; \beta = 45^\circ$
 51. 2 cm und 9.9 cm 52. $100^\circ; 120^\circ; 140^\circ$
 53. $a = 3$ cm; $b = 5$ cm; $c = 4$ cm 54. $x = 9$ cm, $y = 60$ cm
 55. $a = 6$ cm, $b = 6$ cm, $c = 3$ cm; $a = 4$ cm, $b = 4$ cm, $c = 7$ cm
 56. $d = 17.5$ cm; $h = 7.5$ cm; $l = 19.04$ cm 57. $a = 3.67$ cm; $b = 1.58$ cm; $c = 4.74$ cm
 58. 4 cm; 5 cm; 6 cm 59. Autobahn: 35 km; Rest: 85 km
 60. 8.036 km; 42.86 km/h 61. $t = 1.35$ h; $s = 82.350$ km
 62. $v_A = 70$ km/h; $v_B = 80$ km/h 63. $v_A = 96$ km/h; $v_B = 84$ km/h

64. $v_F = 750 \text{ km/h}$; $v_W = 50 \text{ km/h}$ 65. $v_A = 21.605 \text{ km/h}$; $v_B = 23.605 \text{ km/h}$
 66. $v_A = 12.22 \text{ m/s}$; $v_B = 10 \text{ m/s}$ 67. $s_1 = 28 \text{ km}$; $s_2 = 60 \text{ km}$; $s_3 = 12 \text{ km}$
 68. $v_1 = 3.985 \text{ km/h}$, $t_1 = 57 \text{ min } 13 \text{ s}$; $v_2 = 13.947 \text{ km/h}$, $t_2 = 3 \text{ h } 01 \text{ min } 32 \text{ s}$;
 $v_3 = 39.850 \text{ km/h}$, $t_3 = 4 \text{ h } 31 \text{ min } 01 \text{ s}$
 69. 9 h; 18 h
 70. 4 h 36 min 55 s
 71. $30 \text{ m}^3/\text{min}$; $20 \text{ m}^3/\text{min}$
 72. 30 h; 120 h
 73. 20 cm; 45 cm
 74. 5t: 28 Fahrten; 6t: 30 Fahrten; 10t: 25 Fahrten
 75. 57 Set; 106 PCs; 34 Drucker
 76. 22 Set; 11 Boards; 6 Bindungen
 77. a) 3 Stück von Packung 1; 4 Stück von Packung 2; 7 Stück von Packung 3
 b) eindeutige Lösung $\frac{25}{14}$; $-\frac{10}{7}$; $\frac{20}{7}$ gibt keine sinnvolle Antwort auf die Fragestellung, da negative und rationale Zahlen in der Lösung vorkommen.
 Z. B. 1 Stück von Packung 1 und 2 Stück von Packung 3, oder 3 Stück von Packung 3.
 78. $I_1 = 3 \text{ A}$; $I_2 = 2 \text{ A}$; $I_3 = 1 \text{ A}$
 79. $I_0 = 4.903 \text{ mA}$; $I_1 = 1.729 \text{ mA}$; $I_2 = 3.174 \text{ mA}$; $I_3 = 2.648 \text{ mA}$; $I_4 = 0.526 \text{ mA}$; $I_5 = 2.255 \text{ mA}$
 80. b) $a + 13 + 10 + d = a + 11 + 9 + c = b + 11 + 13 + e = b + 9 + 12 + d = c + 12 + 10 + d$
 c) 10 Gleichungen d) $a + 23 + d = a + 20 + c = b + 24 + e = b + 21 + d = c + 22 + d$
 e)
$$\left| \begin{array}{l} c - d = 3 \\ d - e = 3 \\ a - e = 2 \end{array} \right| \wedge \left| \begin{array}{l} b - a = 2 \\ c - b = 2 \\ a + b + c + d + e = 20 \end{array} \right| ; a = 3; b = 5; c = 7; d = 4; e = 1$$

 81. –
 82. a) $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$; $s_9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ b) $45 : 3 = 15$
 c) $1 + 5 + 9 = 1 + 6 + 8 = 2 + 4 + 9 = 2 + 5 + 8 = 2 + 6 + 7 = 3 + 4 + 8 = 3 + 5 + 7 = 4 + 5 + 6 = 15$
 8 Möglichkeiten: 1, 3, 7, 9 kommen 2-mal vor; 2, 4, 6, 8 kommen 3-mal vor; 5 kommt 4-mal vor.
 5 in die Mitte, 1, 3, 7, 9 in die Seitenmitten, 2, 4, 6, 8 in die Ecken
 d)
$$\left| \begin{array}{l} a + b + c = 15 \\ d + f = 10 \\ a + d + g = 15 \\ b + h = 10 \end{array} \right| \wedge \left| \begin{array}{l} c + f + i = 15 \\ a + i = 10 \\ c + g = 10 \end{array} \right|$$

 e) in den reellen Zahlen unendlich viele, mit den Ziffern eins bis neun 8 Lösungen.
 $l = 2$; $h = 7$

8	3	4
1	5	9
6	7	2

83. a) z. B. 1. Zeile: $a - b + a + b + c + a - c = 3a$; 2. Spalte: $a + b + c + a + a - b - c = 3a$;
 Diagonale: $a - b + a + a + b = 3a$

b)

4	9	1
3	5	7
8	7	6

c) z. B. $+d$

1. Zeile: $a - b + d + b + c + d + a - c + d = 3a + 3d = 3(a + d)$;

2. Spalte: $a + b + c + d + a + d + a - b - c + d = 3a + 3d = 3(a + d)$;

Diagonale: $a - b + d + a + d + a + b + d = 3a + 3d = 3(a + d)$

d) $a = 12$; $3 = 4$; $d = -1$ e) $d = -5$

3	8	1
2	4	6
7	0	5

-1	4	-3
-2	0	2
3	-4	1

f) $d = 5$

9	14	7
8	10	12
13	6	11

g) für die erste Zeile:

$Q_1: a - b + a + b + c + a - c = 3a$, $Q_2: d - e + d + e + f + d - f = 3d$

$Q_1 + Q_2: a - b + d - e + a + b + c + d + e + f + a - c + d - f = 3a + 3d = 3(a + b)$

h)

2^4	2^9	2^2
2^3	2^5	2^7
2^8	2^1	2^6

Zeilenweise, spaltenweise und diagonal gebildete Produkte sind gleich 2^{15} .

i) 1. Zeile: $2^{a-b} \cdot 2^{a+b+c} \cdot 2^{a-c} = 2^{a-b+a+b+c+a-c} = 2^{3a}$. Wenn $a = 5$ ist $3a = 15$ oder...

$$\log_2 2^{a-b} + \log_2 2^{a+b+c} + \log_2 2^{a-c} = (a-b)\log_2 2 + (a+b+c)\log_2 2 + (a-c)\log_2 2 = a-b+a+b+c+a-c = 3a$$

10 Quadratische Gleichungen

Lösungen zu Übungen 46

1. Richtig: (2); (3); (4)
2. a) quadratisch b) nicht quadratisch c) quadratisch d) nicht quadratisch
3. a) $L = \{-7; 7\}$ b) $L = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$ c) $L = \{\}$ d) $L = \left\{-\frac{9}{4}; \frac{9}{4}\right\}$
- e) $L = \{\}$ f) $L = \left\{-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$ g) $L = \{0\}$ h) $L = \{-3; 3\}$
- i) $L = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$

Lösungen zu Übungen 47

4. a) $x_1 = -3, x_2 = 13$ b) $x_1 = -17, x_2 = 5$ c) $x = 11$ d) $L = \{\}$
- e) $x_1 = 4 - \sqrt{2}, x_2 = 4 + \sqrt{2}$ f) $x_1 = 13 - \sqrt{5}, x_2 = 13 + \sqrt{5}$
5. a) $x_1 = -4, x_2 = -2$ b) $x_1 = -1, x_2 = 9$ c) $L = \{\}$ d) $x_1 = -8, x_2 = 7$
- e) $L = \{\}$ f) $x_1 = -8, x_2 = -1$
6. a) $x_1 = 1 - \sqrt{2}, x_2 = 1 + \sqrt{2}$ b) $x_1 = 3 - \sqrt{5}, x_2 = 3 + \sqrt{5}$
- c) $x_1 = -3(\sqrt{6} + 2), x_2 = 3(\sqrt{6} - 2)$ d) $x_1 = -3, x_2 = \frac{1}{2}$
- e) $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = 2$ f) $x_1 = -5, x_2 = -\frac{1}{4}$
7. a) $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 3$ b) $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{5}$ c) $x_1 = 2 - \sqrt{3}, x_2 = 2 + \sqrt{3}$
- d) $x_1 = 0, x_2 = \frac{11}{15}$ e) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{2}$ f) $x_1 = -\frac{m}{3}, x_2 = \frac{n}{2}$

Lösungen zu Übungen 48

8. a) $L = \left\{-\frac{1}{2}; 4\right\}$ b) $L = \left\{-\frac{1}{4}; 3\right\}$ c) $L = \left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$ d) $L = \left\{-\frac{5}{3}; -1\right\}$
- e) $L = \left\{-2; \frac{3}{4}\right\}$ f) $L = \left\{-\frac{7}{5}; \frac{1}{2}\right\}$ g) $L = \left\{\frac{5}{2}; 12\right\}$ h) $L = \{\}$
- i) $L = \left\{-1; \frac{3}{5}\right\}$

9. a) $L = \{2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}\}$ b) $L = \{1 - 2\sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}\}$
 c) $L = \left\{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$ d) $L = \{\}$
 e) $L = \left\{-\frac{2\sqrt{2}-1}{2}; \frac{2\sqrt{2}+1}{2}\right\}$ f) $L = \left\{-\frac{\sqrt{10}+3}{6}; \frac{\sqrt{10}-3}{6}\right\}$
 g) $L = \left\{-\frac{\sqrt{7}-3}{5}; \frac{\sqrt{7}+3}{5}\right\}$ h) $L = \{-5\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$
 i) $L = \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}\right\}$
10. a) $L = \{2.472; 5.528\}$ b) $L = \{-0.692; 2.892\}$ c) $L = \{-1.676; 4.176\}$
 d) $L = \{-2.868; -0.274\}$ e) $L = \{-2.667; 1.588\}$ f) $L = \{0.125; 1.063\}$
11. a) zwei b) keine c) zwei
 d) eine e) eine f) keine
12. a) $L = \left\{0; \frac{7}{6}\right\}$ b) $L = \left\{-\frac{8}{5}; 4\right\}$ c) $L = \{0\}$ d) $L = \{0; 1\}$
 e) $L = \left\{-\frac{65}{11}; \frac{2}{5}\right\}$ f) $L = \left\{-\frac{4}{3}; \frac{2}{5}\right\}$ g) $L = \{7\}$

Lösungen zu Übungen 49

13. a) $x_1 = k-1, x_2 = k+1$ b) $x_1 = -m, x_2 = m+1$ c) $x_1 = -1, x_2 = n-1$
 d) $x_1 = -d, x_2 = \frac{c}{d}$ e) $x_1 = pq, x_2 = \frac{\mu q}{p}$ f) $x_1 = \frac{1}{a}, x_2 = \frac{a}{b}$
14. a) $x_1 = -\frac{c}{a}, x_2 = \frac{d}{b}$ b) $x_1 = \frac{v-1}{u}, x_2 = \frac{v+1}{u}$ c) $x_1 = 2r, x_2 = 3s$
 d) $x_1 = a, x_2 = \frac{c}{bd}$ e) $x_1 = 3m+n, x_2 = m+3n$ f) $x_1 = -\frac{1}{\psi}, x_2 = \frac{6}{\psi}$
15. a) $x_1 = -2\sqrt{3}\varphi, x_2 = 2\sqrt{3}\varphi$ b) $x_1 = \frac{c+d}{c-d}, x_2 = \frac{c-d}{c+d}$ c) $x_1 = k-1, x_2 = k+1$
 d) $x_1 = 1, x_2 = \frac{m+n}{m-n}$
16. a) $a = \frac{1}{36}$ b) $b_1 = -1, b_2 = 2$ c) $m = -\frac{4}{3}$ d) -
17. a) $a > 1: L = \{\}; a = 1: L = \{-1\}; a < 1: L = \{-1 - \sqrt{1-a}; -1 + \sqrt{1-a}\}$
 b) $t > \frac{25}{16}: L = \{\}; t = \frac{25}{16}: L = \left\{\frac{8}{5}\right\}; t < \frac{25}{16}: L = \left\{\frac{5 - \sqrt{25-16t}}{2t}; \frac{5 + \sqrt{25-16t}}{2t}\right\}$
 c) $-6 < u < 6: L = \{\}; u = -6: L = \{3\}; u = 6: L = \{-3\}; u < -6 \vee u > 6:$
 $L = \left\{\frac{-u - \sqrt{u^2-36}}{2}; \frac{-u + \sqrt{u^2-36}}{2}\right\}$
 d) $m = -\frac{n}{2}: L = \left\{\frac{n}{2}\right\}; m \neq -\frac{n}{2}: L = \{-m; m+n\}$

Lösungen zu Übungen 50

18. Herleitung 19. $x_1 + x_2 = -p; x_1 \cdot x_2 = q$
20. a) $q = -10; x_2 = -2$ b) $c = -12; x_2 = -12$ c) $p = 9; x_2 = 4$ d) $\varphi = 1; x_2 = -\frac{2}{3}$
21. $k_1 = -90: x_1 = -\frac{1}{5}, x_2 = \frac{19}{5}; k_2 = 90: x_1 = -\frac{19}{5}, x_2 = \frac{1}{5}$
22. $u = 0; x_1 = -2, x_2 = 2$
23. $\lambda = 8; x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}$
24. $w_1 = -343: x_1 = -\frac{7}{2}, x_2 = \frac{49}{4}; w_2 = 125: x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = \frac{25}{4}$

25. Der Term $ax^2 + bx + c$ ist genau dann in ein Produkt aus Linearfaktoren zerlegbar, wenn die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ Lösungen hat. Sind x_1 und x_2 die Lösungen von $ax^2 + bx + c = 0$, dann ist der Term $ax^2 + bx + c$ in das Produkt $a(x - x_1)(x - x_2)$ zerlegbar.

26. a) $(x - 24)(x + 64)$ b) $2\left(x - \frac{15}{2}\right)(x + 9)$ c) nicht zerlegbar d) $25\left(x + \frac{18}{5}\right)^2$

27. a) $L = \{-3; 2; 5\}$ b) $L = \left\{-\frac{3}{2}; -\frac{5}{6}; 4\right\}$

Lösungen zu Übungen 51

28. a) $L = \{-3; -2; 2; 3\}$ b) $L = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ c) $L = \{-2; 2\}$ d) $L = \{2; 3\}$

29. a) $L = \left\{\frac{35}{3}; 6\right\}$ b) $L = \left\{-\frac{\sqrt{34}}{2}; -2\sqrt{2}; \frac{\sqrt{34}}{2}; 2\sqrt{2}\right\}$

c) $L = \left\{-\frac{12}{5}; 2\right\}$ d) $L = \left\{\frac{62}{9}; \frac{91}{8}\right\}$

30. a) $x_1 = -\frac{17}{4}; x_2 = \frac{43}{4}$ b) $x_1 = -\frac{5}{4}; x_2 = \frac{1}{4}$ c) $x_1 = 2b - a; x_2 = -\frac{a}{6} - \frac{4b}{3}$

31. a) $x^2 - 7x - 18 = 0$ b) $15x^2 - 13x + 2 = 0$ c) $6y^2 + 5y = 0$

d) $z^2 + (3 - \sqrt{2})z - 3\sqrt{2} = 0$

e) $m^2 - 4m - 1 = 0$

f) $10\psi^2 + (3\sqrt{3} - 7)\psi - 2 = 0$

Lösungen zu Übungen 52

32. a) $L =]-\infty; -2] \cup [3; \infty[$

b) $L =]-5; -3[$

c) $L =]0; 1[$

d) $L = [0; 3]$

e) $L =]-\infty; -2] \cup [3; 5]$

f) $L =]-\infty; -2] \cup [3; 4]$

33. a) $L =]\infty; -2[\cup]\frac{3}{2}; 2[$

b) $L =]\infty; -2[\cup]-1; 1[\cup]2; \infty[$

c) $L =]-1; 1[$

d) $L = \left[-\frac{5}{2}; 6\right]$

34. $4.00 \text{ m} \leq x \leq 5.33 \text{ m}$

Lösungen zu Übungen 53

35. $31; 32, -2; -1$

36. $\frac{1}{5}, \frac{-11}{-7}$

37. 113

38. $22; 78, \frac{975}{7}, \frac{-275}{7}$

39. $\sqrt{2} + 1, -\sqrt{2} + 1$

40. 41

41. 65

42. 252

43. 24 Personen

44. $a = 72 \text{ cm}; b = 65 \text{ cm}$

45. $a = 56 \text{ cm}; b = 33 \text{ cm}$

46. $s = 2.19 \text{ cm}$
 47. $n = 36$
 48. $n = 12$
 49. 20 Geraden
 50. $b_1 = 12.65 \text{ cm}; b_2 = 37.95 \text{ cm}$
 51. $r = 1 \text{ m}$
 52. $s = 18.48 \text{ cm}$
 53. $a = 10 \text{ cm}$
 54. $x = 0.160 \cdot b \approx 16 \text{ cm}$
 55. a) 80 cm b) 18 dm c) 24 cm d) $b = \frac{a}{5}$
 56. 6.62 cm
 57. $b = 0.38197 \text{ m}; l = 0.61803 \text{ m}$
 58. $b = 18.83 \text{ m}; l = 79.67 \text{ m}$
 59. 5 cm
 60. $a = 27.85 \text{ cm}; b = 22.85 \text{ cm}$
 61. a) $l : b = \phi : 1 \approx 1.6618 : 1$ b) $\{s_n\} = \frac{1}{\phi^n}; \{l_n\} = \frac{\phi}{\phi^n} = \frac{1}{\phi^{n-1}}$
 c) $A = 1 + \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^4} + \frac{1}{\phi^6} + \dots$
 62. a) $l : b = \sqrt{2} : 1 \approx 1.414 : 1$ b) $\{f_n\} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2^n}; \{l_n\} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}^n}$
 c) $x = \sqrt[4]{2} \approx 1.189 \text{ m}; b = \frac{l}{\sqrt{2}}$

	$l \text{ (m)}$	$b = \frac{l}{\sqrt{2}} \text{ (m)}$
A0	1.189	0.841
A1	0.841	0.595
A2	0.595	0.420
A3	0.420	0.297
A4	0.297	0.210
A5	0.210	0.149
A6	0.149	0.105

63. a)/b) $l : b = (\sqrt{2} + 1) : 1 \approx 2.414 : 1$
 64. –
 65. a) 14 cm b) 13.93 cm
 66. a) gleichmässige Steigung b) Zeichnung c) $l \approx 27.05 \text{ cm}$
 d) $|\overline{BC}| = \frac{l}{4} = 6.76 \text{ cm}$ e) $|\overline{AC}| = 9.78 \text{ cm}$ f) $m \approx 0.398; \alpha \approx 21.6^\circ$
 67. a) $m = \sqrt{\frac{1-kr}{kr}}; m = \frac{1 \pm \sqrt{1-r^2 w^2}}{2rw}$ b) $w \approx 0.172 \text{ cm}; k \approx 0.432 \text{ cm}; r_k \approx 2.830 \text{ cm}$
 c) $m = 1$

68. 13 Minuten 31 Sekunden
 69. G: 149.8 km/h; P: 199.8 km/h
 70. 976.3 km/h
 71. 225 km/h
 72. 35.8 s
 73. a) 60.7 km/h b) 18 m c) 40 m d) 88 m
 e) 180 m
 74. 73.6 s (43.6 s)
 75. $g = 59.36 \text{ cm}$
 76. $R = 83.64 \Omega$
 77. $F_1 = 25.74 \text{ N}; F_2 = 75.74 \text{ N}$
 78. 45 min
 79. 11.52 h

11 Wurzelgleichungen

Lösungen zu Übungen 54

1. Richtig (3)
 2. a) $2x = 9$ Äquivalenzumformung, $L_A = L_N = \{4.5\}$
 b) $x = 25$ Äquivalenzumformung, $L_A = L_N = \{25\}$
 c) $x = 25$ Gewinnumformung, $L_A = \{\}, L_N = \{25\}$ (Scheinlösung)
 d) $x = \frac{12}{5}$ Äquivalenzumformung, $L_A = L_N = \left\{\frac{12}{5}\right\}$
 e) $4x + 1 = 2x + 7$ Äquivalenzumformung, $L_A = L_N = \{3\}$
 f) $x - 2 = 0$ Verlustumformung, $L_A = \{-2; 2\}, L_N = \{2\}$ (eine Lösung geht verloren)
 3. a) $D = \mathbb{R}_0^+; L = \{121\}$ b) $D = \mathbb{R}_0^+; L = \{\}$
 c) $D = \mathbb{R}_0^+; L = \{\}$ d) $D = \mathbb{R}_0^+; L = \{121\}$
 e) $D = \mathbb{R}_0^-; L = \{-121\}$ f) $D = \mathbb{R}_0^-; L = \{\}$
 g) $D = \{w \in \mathbb{R} | w \leq 5\}; L = \left\{\frac{11}{4}\right\}$ h) $D = \{b \in \mathbb{R} | b \geq -4\}; L = \{-3\}$
 i) $D = \{h \in \mathbb{R} | h \leq 3\}; L = \{\}, SL h = -1$
 4. a) $L = \{18\}$ b) $L = \{\}, SL \lambda = 12$
 c) $L = \{21\}$ d) $L = \{-3\}$
 e) $L = \left\{\frac{81}{4}\right\}$ f) $L = \{\}, SL m = -4$
 5. a) $L = \{19\}$ b) $L = \{-7\}$
 c) $L = \{-5\}$ d) $L = \{10\}$
 e) $L = \{6\}, SL x = 0$ f) $L = \left\{-\frac{1}{7}; 1\right\}$
 g) $L = \{25\}$ h) $L = \{10\}$
 6. a) $L = \{81\}$ b) $L = \{\}$
 c) $L = \{\}, SL a = 23$ d) $L = \{13\}$
 e) $L = \left\{\frac{101}{4}\right\}$ f) $L = \{1\}, SL x = -\frac{25}{3}$
 g) $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 4\}; L = \{5\}, SL x = \frac{3}{7}$

7. a) $D = \{q \in \mathbb{R} | q > 2\}; L = \{11\}, SL\ q = -62$ b) $L = \left\{\frac{3}{2}\right\}$
 c) $L = \{\}, SL\ x_1 = -28; x_2 = 6$ d) $L = \{-2 - \sqrt{5}\}$
 8. a) $L = \{0; 16\}$ b) $L = \{-3; 3\}$
 c) $L = \left\{\frac{9}{16}; 15\right\}$ d) $L = \{\}, SL\ x_1 = -4 \vee x_2 = 4$
 9. a) $x = a^2 n + b$ b) $x = \frac{(m+n)^2}{4}$
 c) $x = \frac{m^4}{4n^2}$ d) $x = e$
 e) $x = \frac{ef}{2e+2f}$ f) $x = 4a^2 - 4b^2$
 g) $x_1 = 1 - \sqrt{a}; x_2 = \sqrt{a}$ h) $x_1 = m; x_2 = n$
 10. a) $h_2 = 7.40\text{ m}$ b) 22.2 m
 c) $s = \sqrt{h_1(2r+h_1)} + \sqrt{h_2(2r+h_2)}; +h_{1,2}$ vernachlässigbar wegen grossem r
 11. a) $m_G \approx 4.93; m_A = 7.67; m_G < m_A$ b) $m_G \approx 7.6\dots; m_A = 28.19; m_G < m_A$
 c) $m_G \leq m_A$ d) $-$
 e) $x_2 \approx 10.125$ f) $x_2 \approx 23.22$
 g) $x_3 \approx 1.053; p \approx 5.3\%$
 12. 5402 Stimmen
 13. a) $\sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{27}} = \sqrt{\frac{4}{81}} = \frac{2}{9}; \sqrt{2 \cdot \frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ b) $\{a_n\} = \frac{2}{3^n}$

12 Exponential- und logarithmische Gleichungen

Lösungen zu Übungen 55

1. Richtig: (1); (4)
 2. a) $x = 4$ b) $x = -3$ c) $x = -6$ d) $x = -4$
 e) $x = 1$ f) $x = \frac{4}{5}$ g) $x = -\frac{7}{8}$ h) $x = -\frac{19}{9}$
 i) $x = \frac{3}{7}$
 3. a) $x = \log_3 8 = \frac{3\ln 2}{\ln 3} \approx 1.893$ b) $x = \log_8 3 = \frac{\ln 3}{3\ln 2} \approx 0.528$
 c) $y = \log_4 100 + 5 = \frac{\ln 100}{\ln 4} + 5 \approx 8.322$ d) $x = \lg \frac{1}{2} + 1 = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln 10} + 1 \approx 0.699$
 e) $x = \frac{1 + \ln 3}{1 + \ln 3} \approx 1.900$ f) $z = 0$
 4. a) $x = \frac{\ln 3 + 3\ln 10}{\ln 10 + 2\ln 3} = 1.779$ b) $y = 0 \vee y = \left(\frac{\ln 4}{\ln 5}\right)^2 \approx 0.7419$
 c) $k = \frac{3\ln 5}{5\ln 3} \approx 0.8790$ d) $x = \frac{\ln 5}{\ln 2 - \ln 3} \approx -3.969$
 e) $x = \frac{\ln 7 - \ln 3}{2\ln 5 - \ln 3} \approx 0.3996$ f) $p = \frac{4\ln 5}{\ln 2 - 2\ln 5} \approx -2.549$
 g) $x = \frac{\ln 5}{\ln 5 - 3\ln 2 - 2\ln 3} \approx -0.6034$ h) $x = \frac{\ln 2}{4\ln 2 - 4\ln 3 - \ln 5} \approx -0.2145$
 i) $q = \frac{\ln 3 - 2\ln 5}{\ln 2 + 2\ln 5 - 2} = -1.109$

Lösungen zu Übungen 56

5. a) $x = \log_3 5 = \frac{\ln 5}{\ln 3} \approx 1.465$
 c) $x \in \{\}$
 e) $x = \frac{2\ln 2 - \ln 3}{3\ln 2 - \ln 3} \approx 0.293$
 g) $x = \frac{\ln 370 - 4\ln 3}{2\ln 2 - \ln 3} \approx 5.280$
6. a) $L = \left\{ \log_3 \frac{1}{4} = \frac{\ln \frac{1}{4}}{\ln 3} \approx -1.262 \right\}$
 c) $L = \left\{ \ln \frac{1}{3} \approx -1.099 \right\}$
 e) $L = \left\{ 1; \lg 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10} \approx 0.301 \right\}$
 g) $L = \{\}$
7. a) $x = 4$ b) $x_1 = -7; x_2 = 1$ c) $x = \frac{5}{3}$ d) $x_1 = 0; x_2 = p + q$
 e) $x = \frac{p - q}{p + q}$ f) $x = -\log_n(n^2 + n + 1)$ g) $x = \frac{d \ln c}{\ln a - s \ln b}$ h) $x = 11$
8. a) $x \in \{\}$ b) $x = 0$
 c) $x = \frac{\ln(\ln 4) - \ln(\ln 3)}{\ln 4 - \ln 3} = 0.8085$ d) $x = \frac{\ln 2}{\ln 5 - \ln 4} \approx 3.106$
 e) $x = -\frac{2\ln 4 + 5\ln 5}{3\ln 4 + \ln 5} \approx -1.876$ f) $x = \frac{4\ln 2 + 5\ln 3}{10\ln 3 - 4\ln 2} = 1.006$
 g) $x_1 = 0; x_2 = \frac{2}{3}$ h) $x_1 = -1; x_2 = \log_2 \frac{1}{5} = \frac{\ln \frac{1}{5}}{\ln 2} = -2.322$
9. a) CHF 28649.70 b) 7.05 Jahre c) 15.75 Jahre
 10. a) 80 %; b) 17.29 Tage c) 21.29 Tage
 11. a) CHF 7206.39 b) 2.79 Jahre c) 5.11 Jahre
 12. 16.61 Tage

Lösungen zu Übungen 57

13. Falsch: (3)
14. a) $x = 10^4$ b) $x = \frac{1}{e}$ c) $x = \frac{21}{4}$ d) $x = \frac{1}{2}$
 e) $x = 97$ f) $x = 1001$ g) $x = 531434$ h) $x = 3$
 i) $x = \sqrt[3]{2^4}$
15. a) $L = \{\sqrt[5]{9}\}$ b) $L = \{80\}$ c) $L = \left\{ \frac{e^3}{2} \right\}$ d) $L = \{4\}$
 e) $L = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ f) $L = \{5\}$
16. a) $x = \sqrt[3]{2^4} + 1 = 2\sqrt[3]{2} + 1$ b) $x = 2$
 c) $x = 25$ d) $x = \frac{e^2 + 1 + \sqrt{e^4 + 6e^2 + 1}}{2e} \approx 3.382$
 e) $x = \pm 5$ f) $x_1 = -\frac{1}{e}; x_2 = \frac{1}{e}$
 17. a) $x = me^n$ b) $x = \frac{1}{10a^3}$ c) $x = \sqrt{e^b + 1}$ d) $x = c^c$

18. a) $x = 10^5$ b) $x = 10^{10}$ c) $x_1 = 12; x_2 = 4$ d) $x_1 = \frac{1}{1000}; x_2 = 10$
 e) $x_1 = \frac{1}{100}; x_2 = \sqrt{10}$ f) $y_1 = \frac{1}{300}; y_2 = 10$ g) $m = 2$
 h) $x = e^{\frac{2\ln 3}{1+\ln 3}} \approx 2.849$
19. a) 1065 hPa b) 947 hPa c) 653 hPa d) 553 hPa
 e) 332 hPa
20. a) $6.31 \cdot 10^1$ t TNT b) $7.94 \cdot 10^6$ t TNT c) $5.01 \cdot 10^5$ t TNT d) $7.08 \cdot 10^{11}$ t TNT
 e) das 31.6-fache
21. a) $r \approx 0.020045$ Parasec ≈ 0.072 Lichtjahre ≈ 4134.5 Astronomische Einheiten
 b) $r \approx 2.642409$ Parasec ≈ 9.5 Lichtjahre $\approx 5.45 \cdot 10^5$ Astronomische Einheiten
 c) $M \approx 4.9$
 d) $M \approx -3.4$

IV Funktionen

13 Grundlagen

Lösungen zu Übungen 58

1. a) $\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(-1; -2), (-1; 0), (-1; 2), (4; -2), (4; 0), (4; 2)\}$
 b) $\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(1; -3), (1; -2), (1; -1), (1; 0), (2; -3), (2; -2), (2; -1), (2; 0), (3; -3), (3; -2), (3; -1), (3; 0)\}$
2. a) $\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(0; 0), (1123; 0), (35; -1), (1; -1), \dots\}$ b) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(17; 5), (5; 17), (10^{12}; 10^7), (1; 1), \dots\}$
 c) $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{R} = \left\{ \left(\frac{1}{2}; \sqrt{2} \right), \left(\frac{25}{4}; \pi \right), (1020; -10\sqrt{5}), (0.1\bar{6}; 1.010010001\dots), \dots \right\}$
 d) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \left\{ \left(-\frac{1}{4}; \frac{12}{5} \right), \left(\frac{101}{100}; -7 \right), (-0.125; -10.\bar{3}), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right), \dots \right\}$
3. a) 1. Q: B; 2. Q: D; 3. Q: F; 4. Q: H A, C, E und G liegen auf den Koordinatenachsen
 b) Graph
 c) $\overline{AB} = 4.5e; \overline{BD} = 4e; \overline{BF} = 5.7e; \overline{CF} = 8.2e$
4. a) $a = 6.32e; b = 6.08e; c = 4.4e$ b) $M_a = (4; 4); M_b = \left(-\frac{1}{2}; 2 \right); M_c = (3; 1)$
 c) $M = \left(\frac{p_1 + q_1}{2}; \frac{p_2 + q_2}{2} \right)$
5. a) Graph
 b) $\overline{AB} = 8.6e; \overline{BC} = 9.06e; \overline{AC} = 4.47e$
 c) $M_{\overline{AB}} = (6.5; 4.5); M_{\overline{BC}} = (5.5; 6.5); M_{\overline{AC}} = (2; 4); s_a = 5.15e; s_b = 8.54e; s_c = 5.7e$
 d) $A' = (-3; -2); B' = (-10; -7); C' = (-1; -6)$
 e) $A'' = (1; 0); B'' = (-4; -7); C'' = (-3; 2)$
6. P: 8.944 km Rohrlänge; Q: 8.991 km Rohrlänge; R: 8.819 km Rohrlänge
7. a) i: (2; 3), (2; 4), (3; 2), (3; 3), (3; 4)
 b: (-1; 2), (0; 2), (1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 1), (2; 2), (2; 5), (3; 1), (3; 5)
 (4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 4), (4; 5), (5; 4), (5; 5)
 b) $A = i + \frac{b}{2} - 1$ $i = 5; b = 19: A = 5 + \frac{19}{2} - 1 = 13.5$
 c) Graph, $A = 7 + \frac{10}{2} - 1 = 11$; z. B. $A = 7 + \frac{1 \cdot 3}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2} + 1 = 11$
 d) Graph

Lösungen zu Übungen 59

8. a) $A \in G, B \in G$ b) $A \in G, B \notin G$
 c) $A \in G, B \in G$
9. a) $P' = (4; -5), Q' = (1; 3),$ b) $P'' = (-4; 5), Q'' = (-1; -3)$
 c) $P''' = (-4; -5), Q''' = (-1; 3)$
10. a) $A = (-3; 0), B = (6; 3), C = (1; -2)$
 b) $(-y)^2 = x + 3 \Rightarrow y^2 = x + 3$: symmetrisch zur x-Achse
 c) Graph

11. a) $A = (2; 0), B = (0; 1), C = (\sqrt{3}; 0.5)$
 b) $(-x)^2 + 4(-y)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 4$: symmetrisch zum Ursprung.
 c) Graph
12. a) $A = (0; 0), B = (1; 0.25), C = (2; 8)$
 b) $y = \frac{1}{4}(-x)^4 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^4$: symmetrisch zur y-Achse
 c) Graph
13. a) $A = (0; 0), B = (8; 2), C = (1; 1)$
 b) $(-y)^3 - (-x) = 0 \Rightarrow y^3 - x = 0$: symmetrisch zum Ursprung.
 c) Graph
14. a) $A = (0; 0), B = (2; 0), C = (3; \sqrt{5})$
 b) $(-x)^2 - (-y)^2 = 4 \Rightarrow x^2 - y^2 = 4$: symmetrisch zum Ursprung.
 c) Graph

Lösungen zu Übungen 60

15. a) $U = 2r\pi$; u.V. r ; a.V. U
 b) $\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$; u.V. n ; a.V. α
 c) $d = \sqrt{2} \cdot s$; u.V. s ; a.V. d
 d) $V = \frac{4\pi}{3}r^3$; u.V. r ; a.V. V
 e) $I = \frac{U}{R}$; u.V. U ; a.V. I
 f) $W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$; u.V. v ; a.V. W
16. a) $y = f(x) = 3x - 2$
 b) $y = f(x) = x^2 + 1$
 c) $y = f(x) = -\frac{1}{x}$
17. a) $y \in \{8; 4; 2; -1; -7\}$
 b) $x \in \left\{3; \frac{2}{3}; \frac{7}{18}; -\frac{1}{3}; -10\right\}$
 c) $y_1 = 5; y_2 = 14.6; y_3 = -31$
 d) $x_1 = \frac{10}{3}; x_2 = \frac{1}{4}$
 e) $D = W = \mathbb{R}$
 f) Graph
18. a) $y \in \left\{\frac{1}{6}; \frac{3}{10}; \frac{1}{3}; -1\right\}; -3 \notin D$
 b) $x \in \left\{-\frac{16}{5}; -\frac{7}{2}; 0; -2\right\}; 0 \notin W$
 c) $y_1 = \frac{1}{2}; y_2 = \frac{4}{7}; y_3 = \frac{2}{7}$
 d) $x_1 = -4; x_2 = 7$
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}; W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 f) Graph
19. a) $y \in \left\{49; 4; \frac{81}{25}; \frac{9}{4}; 1; 0\right\}$
 b) $x \in \left\{6; -2; 3; 1; \frac{11}{5}; \frac{9}{5}; 2\right\}; -4 \notin W$
 c) $y_1 = 1; y_2 = 9; y_3 = \frac{9}{16}$
 d) $x_{11} = \frac{19}{9}; x_{12} = \frac{17}{9}; x_{21} = 2 - \sqrt{2}; x_{22} = 2 + \sqrt{2}; -1 \notin W$
 e) $D = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}_0^+$
 f) Graph

Lösungen zu Übungen 61

20. Funktionen: (a); (c); (e); (h)
21. Funktionen sind b) und d). Keine Funktionen (Relationen) sind a) und c).
22. Funktionen sind b), d) und f). Keine Funktionen (Relationen) sind a), c) und e)

23. a) $f(2005) = 149\,000$; $f(2007) = 109\,000$; $f(2014) = 137\,000$
 b) $g(2005) = 3.8\%$; $g(2007) = 2.8\%$; $g(2014) = 3.2\%$
 c) f : maximaler Wert im Jahr 2010, minimaler Wert im Jahr 2008
 g : maximaler Wert im Jahr 2005, minimaler Wert im Jahr 2008
 d) f : D: 10 Elemente; W: 9 Elemente
 g : D: 10 Elemente; W: 8 Elemente
 e) f : im Durchschnitt 131 300; g : im Durchschnitt 3.18 %
 f) Graph
24. (a) BMI: 24 und 30 (b) $y = f(x) = \frac{75}{x^2}$ oder $BMI(h) = \frac{75}{h^2}$; Graph
 (c) $y = f(x) = \frac{4}{9}x$ oder $BMI(m) = \frac{4}{9}m$; Graph
25. a) $f(1997) = 6$; $f(2005) = 0$; $f(2015) = 3$
 b) $y = 6$: 1997; 2007; 2009 / $y = 4$: 2003 / $y = 1$: 2011; 2013
 c) D: 11 Elemente; W: 7 Elemente
26. a) $f(\text{Januar}) = 8.15$; $f(\text{März}) = 7.09$; $f(\text{Juni}) = 4.38$; $f(2011) = 1$; $f(\text{Oktober}) = 6.29$; $f(\text{Dezember}) = 7.55$
 b) $y = 5.14$: Mai / $y = 4.39$: Juli / $y = 7.13$: November
 c) $y = 17.33$: Februar / $y = 19.40$: Mai / $y = 19.10$: September
 d) 1. Tag des Monats \rightarrow Tageslänge (h, min.)
 e) Graph
27. a) $f(70) = 1$; $f(240) = 1.3$; $f(400) = 2$; $f(950) = 4$
 b) $0 < x \leq 100$; $250 < x \leq 500$; $500 < x \leq 1000$
 c) $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \leq 1000\}$; $D = \{1; 1.3; 2; 4\}$
 d) nein
 e) Graph
28. a) $f(70) = 6$; $f(240) = 6.3$; $f(400) = 7$; $f(950) = 9$
 b) $0 < x \leq 100$; $100 < x \leq 250$
 c) $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \leq 1000\}$; $D = \{6; 6.3; 7; 9\}$
 d) nein
 e) Graph

14 Lineare Funktionen

Lösungen zu Übungen 62

- 1 Richtig: (1); (4)
2. a) linear b) nicht linear c) nicht linear d) linear
 e) nicht linear f) linear g) linear h) linear
 i) nicht linear
3. a) nicht linear b) linear c) nicht linear d) linear
 e) nicht linear f) linear g) nicht linear h) nicht linear
 i) linear
4. a) linear b) nicht linear c) nicht linear d) linear
 e) linear f) nicht linear g) linear

5. a) $y_1 = -1; y_2 = -3; m = 2; y_1 = -5; y_2 = -7; m = 2$
 b) $x_1 = \frac{4}{3}; x_2 = \frac{8}{3}; m = -\frac{3}{4}; x_1 = 3; x_2 = \frac{20}{9}; m = -\frac{3}{4}$
6. a) Graph b) Graph
7. a) $m = -\frac{2}{3}; q = 4$; Graph b) $m = \frac{2}{5}; q = -3$; Graph
 c) $m = 0; q = -2$; Graph d) $m = 0; q = \frac{5}{4}$; Graph
 e) $m = -\frac{1}{8}; q = \frac{1}{2}$; Graph f) $m = -\frac{3}{4}; q = 1$; Graph
8. a) $y = f(x) = \frac{3}{4}x$ b) $y = f(x) = x$ c) $y = f(x) = -\frac{8}{5}x$ d) $y = f(x) = 0$
 e) $y = f(x) = \frac{6}{11}x$ f) $x = 0$ (keine Funktion) g) $y = f(x) = -\frac{18}{11}x$ h) $y = f(x) = -5x$
 i) $y = f(x) = \frac{\sqrt{6}}{8}x$
9. rot: $f_1(x) = 2x$; dunkelblau: $f_2(x) = x$; grün: $f_3(x) = \frac{1}{3}x$; violett: $f_4(x) = -\frac{1}{5}x$;
 hellblau: $f_5(x) = -\frac{3}{5}x$; olive: $f_6(x) = -\frac{4}{3}x$
10. grün: $f_1(x) = -\frac{1}{4}x + 3$; rot: $f_2(x) = -\frac{2}{3}x + 2$; olive: $f_3(x) = -\frac{1}{5}x - 1$
 violett: $f_4(x) = -4$; dunkelviolet: $f_5(x) = 2x + 4$; hellblau: $f_6(x) = \frac{3}{5}x - 3$
11. olive: $x = -5$ (keine Funktion); hellblau: $f_2(x) = -\frac{8}{3}x - \frac{28}{3}$; grün: $f_3(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$
 dunkelviolet: $f_4(x) = -\frac{4}{9}x - \frac{11}{9}$; rot: $f_5(x) = \frac{1}{4}x - \frac{9}{4}$; hellviolett: $f_6(x) = 8x - 28$
12. a) $x = 1; y = -4$ b) $x = -2; y = 3$ c) $x = 0; y = \frac{1}{2}$ d) $x = -6.3; y = 0$
13. a) $y = f(x) = -2x - 4$ b) $y = f(x) = \frac{3}{10}x + \frac{9}{2}$ c) $y = f(x) = \frac{7}{12}x - \frac{5}{6}$
 d) $y = f(x) = -0.4x - 1.84$
14. a) $y = f(x) = \frac{2}{3}x + 3$ b) $y = f(x) = -\frac{6}{5}x - 4$ c) $y = f(x) = -8x + \frac{32}{3}$
 d) $y = f(x) = 0.3x - 10.4$
15. a) $y = f(x) = 3x + 4$ b) $y = f(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ c) $y = f(x) = -\frac{6}{5}x + 2$
 d) $y = 6$
16. a) $A \in g; B \notin g; C \in g$ b) $A \in g; B \in g; C \notin g$
17. a) Punkte liegen auf einer Geraden b) Punkte bilden ein Dreieck
18. a) $x_p = -15$ b) $y_p = 91$ c) $x_p = -8$
19. $n(p) = \frac{5}{24}p + 1$; Graph
20. a) $p(t) = -0.15t + 2$ b) um 08:00; um 10:00; um 13:20
21. Temperatur in Grad Celsius: T ; Temperatur in Kelvin: γ ; Temperatur in Fahrenheit: φ
 $\gamma = T + 273.16; \gamma = \frac{5}{9}\varphi + 255.4; T = \frac{5}{9}\varphi - \frac{160}{9}; T = \gamma - 273.16; \varphi = \frac{9}{5}\gamma - 459.68; \varphi = \frac{9}{5}T + 32$
22. a) $s(t) = 150t + 100$ b) bei Kilometer 137.5 c) um 15:10

Lösungen zu Übungen 63

23. a) $S_y = (0; 3); S_x = \left(\frac{3}{5}; 0\right)$ b) $S_y = \left(0; -\frac{15}{4}\right); S_x = (-6; 0)$
 c) $S_y = \left(0; -\frac{5}{24}\right); S_x = \left(-\frac{5}{2}; 0\right)$ d) $S_y = (0; -55); S_x = \left(\frac{11}{19}; 0\right)$
 e) $S_y = (0; 3); S_x = \left(-\frac{3}{5}; 0\right)$ f) $S_y = (0; s); S_x = \left(-\frac{s}{r}; 0\right)$
 24. a) $S = (-24; -116)$ b) $S = \left(\frac{8}{5}; \frac{1}{5}\right)$ c) $S = (0.4; 8.4)$
 d) kein Schnittpunkt (parallele Geraden)
 25. a) $S = \left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ b) kein Schnittpunkt (parallele Geraden)
 c) $S = (3; 1)$
 26. a) $A = 21.6 \text{ cm}^2$ b) $A = 20 \text{ cm}^2$ c) $A = 8 \text{ cm}^2$
 27. $A = 17.63 \text{ cm}^2$
 28. a) $y = g_1(x) = -1.2x + 19.6$ b) $y = g_2(x) = -1.8x + 4.5$
 29. a) Graph; $L = \{(-2; 5)\}$ b) Graph; $L = \{(\)\}$
 c) Graph; $L = \{(x; y) \mid y \in \mathbb{R} \wedge x = 2y + 3\}$ d) Graph; $L = \{(2; 3)\}$
 30. a) $y = f(x) = \frac{1}{250}x; y = f(x) = -\frac{3}{500}x + 400$; Graph
 b) in 40 000 Jahren c) 1.5 m d) in 66 667 Jahren
 31. a) (a) $A: s_1(t) = 120\left(t - \frac{1}{4}\right); P: s_2(t) = 160\left(t - \frac{5}{12}\right) - 15$
 b) Graph c) um 1:17:30, 125 km entfernt
 32. a) A340: $s_1(t) = 850t$; FA18: $s_2(t) = -1912.32\left(t - \frac{1}{2}\right) + 6400$ b) Graph
 c) nach 2 h 39 min 47 s Flugzeit (Airbus), 2263.581 km von New York entfernt.

Lösungen zu Übungen 64

33. a) $g(x) \perp h(x)$ b) $g(x) \perp h(x)$ c) $g(x) \perp h(x)$ d) $g(x) \perp h(x)$
 34. a) $g_1(x) = -\frac{2}{11}x + \frac{69}{11}; g_2(x) = \frac{1}{6}x - 6; g_3(x) = -\frac{11}{7}x + \frac{82}{7}$
 b) $h_1(x) = -\frac{2}{11}x + \frac{39}{11}; h_2(x) = \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}; h_3(x) = -\frac{11}{7}x + \frac{47}{7}$
 c) $k_1(x) = \frac{11}{2}x + 49; k_2(x) = -6x - 19; k_3(x) = \frac{7}{11}x + \frac{1}{11}$
 35. a) $g(x) = \frac{3}{2}x - 3$ b) $g(x) = -\frac{4}{5}x - \frac{84}{25}$ c) $g(x) = -4x + 4\sqrt{2}$
 36. a) $h(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$ b) $h(x) = \frac{5}{4}x + \frac{13}{2}$ c) $h(x) = 50x + 28.5$
 d) $h(x) = -\frac{1}{m}x + \frac{a}{m} + b$
 37. a) $Q_1 = (3; 4)$ b) $Q_2 = \left(\frac{3}{10}; -\frac{41}{10}\right)$
 38. a) $H = \left(\frac{13}{4}; \frac{3}{4}\right)$ b) $U = \left(\frac{15}{8}; \frac{17}{8}\right)$
 39. a) $P_1' = \left(\frac{40}{17}; -\frac{160}{17}\right)$ b) $P_2' = \left(\frac{52}{17}; -\frac{327}{17}\right)$

Lösungen zu Übungen 65

40. $n(f) = -\frac{5}{20}f + 6$; Graph
41. a) $y = 4x + 8, y = 4.25x + 6$
 b) 8 Minuten, 40 Fr.
 c) $y = 4x + 8 + 36 = 4x + 44, y = 4.25x + 6 + 31 = 4.25x + 37$; 28 Minuten; 156 Fr.
42. a) $f_1(x) = 2.40$ für $0 < x \leq 60$; $f_2(x) = \text{Ganzzahl}\left(\frac{x - 45.01}{15}\right) \cdot 0.5 + 2.4$ für $x \geq 60$; Graph
 b) ab 11 h 45 min c) ab 19 h 45 min
43. a) e: $y = 100$; m: $y = 0.28x + 15$; s: $y = 0.25(x - 30) + 35 = 0.25x + 27.5$
 b) e: $y = 100$; m: $y = 0.1x + 15$; s: $y = 0.1(x - 500) + 35 = 0.1x - 15$
44. a) m-e: 303.6 Minuten (100 Fr.); s-e: 290 Minuten (100 Fr.); e-s: 416.7 Minuten (131.70 Fr.)
 b) m-e: 850 MB (100 Fr.); s-e: 1150 MB (100 Fr.); e-s: 200 MB (35 Fr.)
45. $\overline{AB}: p = 0.7\%; y = f(x) = 0.0068x + 0.72$ $\overline{BC}: p = 4.9\%; y = f(x) = 0.049x + 0.14$
 $\overline{CD}: p = -6.5\%; y = f(x) = -0.065x + 4.27$ $\overline{DE}: p = 7.5\%; y = f(x) = 0.075x - 3.94$
 $\overline{EF}: p = -5.7\%; y = f(x) = -0.057x + 6.48$ $\overline{FG}: p = -0.3\%; y = f(x) = -0.003x + 0.68$
46. $\overline{AB}: p = -0.03\%; y = f(x) = -0.00034x + 1.78$ $\overline{BC}: p = 2.9\%; y = f(x) = 0.029x + 1.60$
 $\overline{CD}: p = -6.5\%; y = f(x) = -0.065x + 3.70$ $\overline{DE}: p = -2.9\%; y = f(x) = -0.029x + 2.19$
47. a) - f): Graph
48. a) $q = -2; x_1 = 4; x_2 = -1$ b) $q = -3; x = -3$
 c) $q = 3$; keine Nullstellen d) $q = -3; x_1 = 6; x_2 = -6$
49. a) $L = \{-1; 7\}$ b) $L = \{-5; -1\}$
 c) $L = \{-1.\overline{6}; 1.\overline{6}\}$ d) $L = \{-2.1; 3.3\}$
50. a) $L = [-2; 2]$ b) $L =]-\infty; -3[\cup [3; \infty[$
 c) $L = [-6; 8]$ d) $L =]-\infty; 1[\cup]5; \infty[$
 e) $L =]-\infty; -2[$ f) $L =]-5; \infty[$
51. a) Keine Lösung $q < -\frac{10}{3}$; eine Lösung: $q = -\frac{10}{3}$; zwei Lösungen: $q > -\frac{10}{3}$
 b) eine Lösung für $q \in \mathbb{R}$
 c) Keine Lösung $q < -3$; eine Lösung: $q = -3$; zwei Lösungen: $q > -3$
52. a) eine Lösung: $m \geq |0.5|$; zwei Lösungen: $m \leq |0.5|$
 b) $q = -\frac{5}{2}; m = -\frac{1}{2}; q = -\frac{7}{2}; m = \frac{1}{2}$

15 Quadratische Funktionen

Lösungen zu Übungen 66

1. a) nicht quadratisch b) nicht quadratisch
 c) quadratisch d) nicht quadratisch
 e) quadratisch f) nicht quadratisch

2. a) nicht quadratisch
c) quadratisch
e) nicht quadratisch
g) nicht quadratisch
i) nicht quadratisch
3. a) $y = f(x) = 2x^2 + 6x - 10$
c) $y = f(x) = -x^2 - x - 1$
4. hellblau: $y = x^2 + 6x + 9$; grün: $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$
violett: $y = -x^2 + 3$; rot: $y = 2x^2 - 16x + 28$
- b) quadratisch
d) nicht quadratisch
f) quadratisch
h) quadratisch
- b) $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x + 3$
d) $y = f(x) = -5x^2 + \frac{5}{2}x - 5$

Lösungen zu Übungen 67

5. a) Graph
6. a) Graph
7. a) Graph
8. a) Graph
9. a) Graph
10. a) $y = 5(x - 3)^2 - 2$
c) $y = -\frac{1}{100}x^2 + 11$
11. Richtig: (1); (4)
12. Richtig: (3); (4); (5)
13. a) Graph
- b) siehe Theorieteil
b) siehe Theorieteil
b) siehe Theorieteil
b) Graph
b) Graph
b) $y = -10(x + 6)^2$
d) $y = \frac{1}{4}(x + 4)^2 + 10$
b) Graph

Lösungen zu Übungen 68

14. Richtig: (2); (3)
15. Richtig: (1); (2); (5)
16. a) $f(x) = -2x^2 + 6x - 8$
c) $f(x) = 10(x + 1)^2 - 12$
17. a) $S = (2; -1)$; Graph
c) $S = (-1; -2)$; Graph
18. a) steigend: $x > -6$; fallend: $x < -6$
c) steigend: $x > 10$; fallend: $x < 10$
- b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{4}$
d) $f(x) = -\frac{3}{4}(x - 4)^2 + 3$
b) $S = (3; 2)$; Graph
d) $S = (-3; 0)$; Graph
b) steigend: $x < \frac{1}{4}$; fallend: $x > \frac{1}{4}$
d) steigend: $x < \frac{7}{5}$; fallend: $x > \frac{7}{5}$

19. a) Spiegelung an der x -Achse
 b) Translation (Verschiebung) um 2 Einheiten nach rechts und 6 Einheiten nach oben
 c) Streckung in y -Richtung mit Faktor 3
 Translation um 3 Einheiten nach links und 4 Einheiten nach unten
 d) Spiegelung an der x -Achse
 Streckung in y -Richtung mit Faktor $\frac{1}{4}$
 Translation um 4 Einheiten nach rechts und $\frac{15}{4}$ Einheiten nach oben
 e) Streckung in y -Richtung mit Faktor 10
 Translation um 2 Einheiten nach rechts und 8 Einheiten nach oben
 f) Spiegelung x -Achse
 Streckung in y -Richtung mit Faktor $\frac{1}{5}$
 Translation um $\frac{5}{2}$ Einheiten nach links und $\frac{9}{2}$ Einheiten nach oben
20. a) $y = f(x) = -3(x - 3)^2 = -3x^2 + 18x - 27$ b) $y = f(x) = -3(x + 1)^2 + 4 = -3x^2 - 6x + 1$
 c) $y = f(x) = -3(x - 10)^2 - 1 = -3x^2 + 60x - 301$ d) $y = f(x) = -3\left(x + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{50} = -3x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{1}{25}$
21. violett: $y = (x + 3)^2 - 2 = x^2 + 6x + 7$; hellblau: $y = (x + 1)^2 - 3 = x^2 + 2x - 2$
 rot: $y = (x - 3)^2 - 3 = x^2 - 6x + 6$; grün: $y = (x - 3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 10$
22. hellblau: $y = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$; grün: $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 2 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$
 violett: $y = -x^2 + 3$; rot: $y = 2(x - 4)^2 - 4 = 2x^2 - 16x + 28$
23. a) $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 4 = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ b) $y = \frac{5}{4}(x + 2)^2 - 5 = \frac{5}{4}x^2 + 5x$
 c) $y = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 3x^2 - 3x - \frac{1}{2}$ d) $y = 4(x - 3)^2 - \frac{7}{4} = 4x^2 - 24x + \frac{137}{4}$
24. a) $y = f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$ b) $y = f(x) = 2(x + 3)^2 + 2 = 2x^2 + 12x + 20$
 c) $y = f(x) = x^2 - 6$
25. a) $y = f(x) = -x^2 - 6x - 12$ b) $y = f(x) = x^2 + 4x + 8$
 c) $y = f(x) = -x^2 + 4x - 5$
26. a) $y = f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 12x - 36$ b) $y = f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 12x - 6$
 c) $y = f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 8x + 48$ d) $y = f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 18x - 236$
27. um $-\frac{b}{2a}$ parallel zur x -Achse; um $\frac{4ac - b^2}{4a}$ parallel zur y -Achse

Lösungen zu Übungen 69

28. a) $x_1 = -3; x_2 = 2; c = 12$ b) $x_1 = -\frac{3}{4}; x_2 = 3; c = \frac{3}{4}$
 c) $x_1 = -\sqrt{2}; x_2 = \sqrt{2}; c = -10$ d) $x_1 = -2\sqrt{3}; x_2 = \sqrt{3}; c = -3$

29. a) $S = (1; -4); x_1 = -1; x_2 = 3; c = -3$; Graph
 b) $S = (1; -\frac{9}{2}); x_1 = -2; x_2 = 4; c = -4$; Graph
 c) $S = (1; -3); x_1 \in \{ \}; x_2 \in \{ \}; c = -6$; Graph
 d) $S = (\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}); x_1 = 1; x_2 = 2; c = 4$; Graph
 e) $S = (-2; 8); x_1 = -6; x_2 = 2; c = 6$; Graph
 f) $S = (2; 1); x_1 \in \{ \}; x_2 \in \{ \}; c = \frac{7}{2}$
 30. a) $\lambda = -9; x = 3$
 b) $\lambda_1 = -4; \lambda_2 = 4; x_1 = 2; x_2 = -2$
 c) $\lambda_1 = -4; \lambda_2 = 4; x = 5$
 d) $\lambda \in \{ \}$, immer zwei Nullstellen da $D = 4$
 31. a) $t > \frac{4}{3}$: keine Lösung; $t = \frac{4}{3}$: eine Lösung; $t < \frac{4}{3}$: zwei Lösungen
 b) $t > \frac{25}{8}$: keine Lösung; $t = \frac{25}{8}$: eine Lösung; $t < \frac{25}{8}$: zwei Lösungen
 c) $-2 < t < 6$: keine Lösung; $t = 6 \vee t = -2$: eine Lösung; $t > 6 \vee t < -2$: zwei Lösungen ($t \neq 0$)
 d) $2 < t < 8$: keine Lösung; $t = 2 \vee t = 8$: eine Lösung; $t > 8 \vee t < 2$: zwei Lösungen ($t \neq 0$)
 32. a) $\mu = -\frac{8}{3}$
 b) $\mu_1 = -2; \mu_2 = 2$
 c) $\mu_1 = -\sqrt{5}; \mu_2 = \sqrt{5}$
 d) $\mu \in \{ \}$
 e) $\mu \in \{ \}$
 f) $\mu_1 = -2; \mu_2 = \frac{2}{3}$
 33. $u = -2; y = f(x) = -2x^2 - 8x + 24$
 34. a) $u = -\frac{1}{4} = -0.25$
 b) $u = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2.12$
 c) $u = -\frac{2}{5}; v = 0$
 d) $u = \frac{7}{20}; v = \frac{9}{400}$
 35. a) $u = \frac{7}{2}; y = f(x) = -2x^2 + 14x - 20$
 b) $u = -0.25; y = f(x) = 1.096x^2 + 0.548x - 1.644$

Lösungen zu Übungen 70

36. a) $P = (-1; 0)$
 b) $P = (1; 12); Q = (-2; -3)$
 37. a) $P = (-\frac{1}{2}; \frac{11}{4})$
 b) $P = (\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}); Q = (5; -44)$
 38. a) $P = (-\sqrt{3} - 2; 2\sqrt{3} + 6); Q = (\sqrt{3} - 2; -2\sqrt{3} + 6)$
 b) kein Schnittpunkt
 c) $P = (-2; 5); Q = (4; 5)$
 d) $P = (1 - \sqrt{3}; 3); Q = (1 + \sqrt{3}; 3)$
 39. a) $P = (-\frac{2}{3}; \frac{4}{9}); Q = (-2; 4)$
 b) $P = (-4; 6)$
 c) $P = (-1; \frac{3}{2}); Q = (2; -12)$
 d) kein Schnittpunkt
 40. a) $P = (-1; -4); Q = (-\frac{1}{2}; -\frac{13}{4})$
 b) $P = (\frac{1}{6}; \frac{49}{12}); Q = (\frac{1}{3}; 4)$
 c) $P = (\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}); Q = (-\frac{5}{4}; -\frac{67}{16})$
 41. a) $s = 15.540e; A = 29.65e^2$
 b) kein Schnittpunkt
 c) $s = 5.154e; A = 3.75e^2$
 42. a) $m_1 = -1; m_2 = \frac{1}{3}$
 b) $m_1 = \frac{1}{5}; m_2 = 1$
 43. a) $q = -5$
 b) $q = \frac{25}{8}$
 c) $q = n - \frac{1}{4}m^2$
 d) $q = \frac{4ac - b^2}{4a}$

44. a) $t_1(x) = 22x - 121$; $t_2(x) = -2x - 1$ b) $t_1(x) = 2x - 1$; $t_2(x) = -3x - \frac{9}{4}$
 c) $t_1(x) = 0$; $t_2(x) = 6x - 9$ d) $t(x) = 6x - 9$
45. a) Gerade $y = f(x) = \frac{1}{2}x - 4$ b) Parabel $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 12$
46. a) Graph b) $h = 11.47$ m; $t = 1.53$ s
47. a) Graph b) $h(4) = 129.52$ m; $t_2 = 6.6$ s
 c) $h = 137.82$ m; $t = 5.3$ s d) $t_1 = 1.07$ s; $t_2 = 9.53$ s
48. a) $s = 501.69$ m b) $h_0 = 63.57$ m
49. $s = 1.81$ m
50. a) trocken: $s_1 = 18$ m; $s_2 = 40$ m; $s_3 = 88$ m; $s_4 = 180$ m
 nass: $s_1 = 27$ m; $s_2 = 65$ m; $s_3 = 152$ m; $s_4 = 324$ m
 Schnee: $s_1 = 45$ m; $s_2 = 115$ m; $s_3 = 280$ m; ($s_4 = 612$ m)
 (Eis: $s_1 = 99$ m; $s_2 = 265$ m; $s_3 = 664$ m; $s_4 = 1476$ m)
- b) trocken: $s(v) = \frac{3}{10}v + \frac{1}{100}v^2$; nass: $s(v) = \frac{3}{10}v + \frac{1}{50}v^2$
 Schnee: $s(v) = \frac{3}{10}v + \frac{1}{25}v^2$; Eis: $s(v) = \frac{3}{10}v + \frac{1}{10}v^2$
- c) trocken: $s(v) = \frac{1}{10}v + \frac{1}{100}v^2$; $s_1 = 12$ m; $s_2 = 30$ m; $s_3 = 72$ m; $s_4 = 156$ m
 nass: $s(v) = \frac{1}{10}v + \frac{1}{50}v^2$; $s_1 = 21$ m; $s_2 = 55$ m; $s_3 = 136$ m; $s_4 = 300$ m
 Schnee: $s(v) = \frac{1}{10}v + \frac{1}{25}v^2$; $s_1 = 39$ m; $s_2 = 105$ m; $s_3 = 265$ m; ($s_4 = 588$ m)
 Eis: $s(v) = \frac{1}{10}v + \frac{1}{10}v^2$; ($s_1 = 93$ m; $s_2 = 255$ m; $s_3 = 648$ m; $s_4 = 1452$ m)
51. $y = f(x) = -0.0167x^2 + 15.5$
52. $h_1 = 84$ m; $h_2 = 227$ m
53. Parabel mit $y = f(x) = -0.0087x^2 + 73$. Die Werte von a schwanken zwischen -0.0082 und -0.0088 .
54. a) Graph
 b) $y = f(x) = \frac{2}{5}x^2$ keine Parabel: $y_2 = 0.4 \neq 0.25$; $y_3 = 1.6 \neq 1.1$; $y_4 = 3.6 \neq 2.7$; $y_5 = 6.4 \neq 5.4$

Lösungen zu Übungen 71

55. a) $k = -\frac{11}{3}$; $T(k) = 8.3 \dots$ b) $k = 0$; $T(k) = -32$
 c) $k = -4$; $T(k) = 8$
56. a) $m = 6.2$; $T(m) = -192.2$ b) $m = 6$; $T(m) = -192$
 c) $m = -1$; $T(m) = 67$
57. a) 12.5 m und 25 m b) 25 m und 25 m (Quadrat)
 c) 14 m und 28 m
58. $x = 12.5$ cm
59. $x = 41.38$ cm
60. $x = 30$ cm; $y = 20$ cm; 50 %
61. $x = 0.6$ m; $h = 0.686$ m; 60.5 %
62. $a = 4$ m; $b = 1.75$ m

16 Umkehrfunktionen

Lösungen zu Übungen 72

1. Richtig: (1); (3); (4)
2. a) injektiv
c) bijektiv
3. a) bijektiv (injektiv, surjektiv)
c) –
e) injektiv
g) bijektiv (injektiv, surjektiv)
4. a) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$
5. a) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5\}$
6. umkehrbar: (a); (d)
8. a) (2); (4); (5); (6); (6)
9. a) (1); (2); (3)
10. Umkehrfunktionen besitzen: a); c); g); h)
- b) –
d) surjektiv
b) injektiv
d) surjektiv
f) bijektiv (injektiv, surjektiv)
h) bijektiv (injektiv, surjektiv)
b) $B = \mathbb{R}_0^+$
b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ oder $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$
7. umkehrbar: (c); (e)
b) (4); (5)
b) (1); (3)

Lösungen zu Übungen 73

11. a) $y = g(x) = -\frac{1}{2}x$
c) $y = g(x) = -x + 4$
e) $y = g(x) = x - 4$
g) $y = g(x) = 5x - 2.5$
i) $y = g(x) = -\frac{5}{6}x + \frac{5}{6}$
- b) $y = g(x) = \frac{4}{5}x$
d) $y = g(x) = -x - 1$
f) $y = g(x) = 2x + 6$
h) $y = g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$
12. a) Graph; $f: D = [-2; 12], W = [-5; 11]$; $g: D = [-5; 11], W = [-2; 12]$
b) Graph; $f: D = [-8; 2], W = [0; 7]$; g : existiert nicht für $D_f = [-8; 2]$, Graph einer Relation!
13. a) $f^{-1}: y = \frac{1}{3}x + 2$
c) $h^{-1}: y = \sqrt[3]{x}$
e) $l^{-1}: y = \frac{x+3}{2-x}$ mit $x \neq 2$
- b) $g^{-1}: y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$
d) $k^{-1}: y = \frac{2x+3}{x-1}$ mit $x \neq 1$
f) $m^{-1}: y = x^2 - 2$ mit $x \geq 0$
14. a) $y = g(x) = \frac{1}{x-1}; D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
c) $y = g(x) = \frac{5}{x}; D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
e) $y = g(x) = x^2; D_g = \mathbb{R}_0^+$
g) $y = g(x) = x^2 + 2; D_g = \mathbb{R}_0^+$
i) $y = g(x) = \frac{x-2}{2x-1}; D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$
- b) $y = g(x) = \frac{1}{x} - 3; D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
d) $y = g(x) = 4x^2; D_g = \mathbb{R}_0^+$
f) $y = g(x) = x^2 + 4x + 4; D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$
h) $y = g(x) = \frac{x}{x+1}; D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

15. a) umkehrbar in \mathbb{R}_0^+ ; Graph mit $y = g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2x-6}$
 b) umkehrbar in \mathbb{R}_0^+ ; Graph mit $y = g(x) = \sqrt{x} - 4$
 c) umkehrbar in \mathbb{R}_0^+ ; Graph mit $y = g(x) = \sqrt{2x+8} - 2$
16. a) $D = [-10; \infty[; W = [-3; \infty[; y = g(x) = \sqrt{x+10} - 3$
 b) $D =]-\infty; 3]; W = [1; \infty[; y = g(x) = \sqrt{6-2x} + 1$
 c) $D = [0; \infty[; W = [-\frac{3}{2}; \infty[; y = g(x) = \sqrt{5x} - \frac{3}{2}$
17. a) $\lambda = 1; \mu = 0$ oder $\lambda = -1; \mu \in \mathbb{R}$
 b) $\mu = 1; \lambda \neq 1$
 c) $\lambda = -\mu$ mit $\mu \in \mathbb{R}$

17 Potenz- und Wurzelfunktionen

Lösungen zu Übungen 74

1. (a) $D = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}$
 (b) $(-1; -1); (0; 0); (1; 1)$
 (c) Punktsymmetrie zum Ursprung
2. (a) $D = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}_0^+$
 (b) $(-1; 1); (0; 0); (1; 1)$
 (c) Achsensymmetrie zur y-Achse
3. Gemeinsamkeiten: Punkte $(0; 0); (1; 1)$ und $D = \mathbb{R}$.
 Unterschiede: Symmetrien und Wertemenge ($W = \mathbb{R}, W = \mathbb{R}_0^+$)
4. Richtig: (1); (3); (5); (6)
5. a) $y = \frac{1}{2}x^4 + 5$ b) $y = \frac{1}{2}(x-3)^4 = \frac{1}{2}x^4 - 6x^3 + 27x^2 - 54x + \frac{81}{2}$
 c) $y = -\frac{1}{2}x^4$ d) $y = \frac{1}{2}x^4$ e) $y = x^4$
6. a) $y = \frac{1}{5}(x+4)^5 - 2 = \frac{1}{5}x^5 + 4x^4 + 32x^3 + 128x^2 + 256x + \frac{1014}{5}$ b) $y = -\frac{1}{5}x^5 - 5$
 c) $y = \frac{1}{5}(-x-2)^5 + 1 = -\frac{1}{5}(x+2)^5 + 1 = -\frac{1}{5}x^5 - 2x^4 - 8x^3 - 16x^2 - 16x - \frac{27}{5}$
 d) $y = \frac{3}{5}(x-1)^5 - 10 = \frac{3}{5}x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 3x - \frac{53}{5}$
7. a) $b = \frac{1}{2}$ b) $b = 2$ c) $b = \frac{1}{\sqrt[4]{27}} \approx 0.4387$ d) $b = \sqrt{2} \approx 1.414$
8. a) $a = \frac{1}{16}$ b) $a = 1048576$ c) $a = \frac{1}{256}$ d) $a = 27$
9. a) Translation (Verschiebung) um 3 Einheiten nach unten
 b) Spiegelung an der x-Achse; Translation um 2 Einheiten nach oben
 c) Streckung in y-Richtung mit Faktor 0.5
 d) Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{1}{4}$; Translation um 3 Einheiten nach unten
 e) Spiegelung an der x-Achse; Streckung in y-Richtung mit Faktor 2; Translation um 6 Einheiten nach oben
 f) Spiegelung an der x-Achse; Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{1}{5}$; Translation um 2 Einheiten nach oben

10. a) Translation um 5 Einheiten nach rechts
 b) Translation um 4 Einheiten nach links
 c) Spiegelung an der x-Achse; Translation um 3 Einheiten nach links
 d) Translation um 1 Einheit nach rechts und 4 Einheiten nach unten
 e) Streckung y-Richtung mit Faktor $\frac{1}{4}$; Translation um 2 Einheiten nach rechts und 4 Einheiten nach unten
 f) Spiegelung an der x-Achse; Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$;
 Translation um 5 Einheiten nach links und 6 Einheiten nach oben
11. a) $n = 3; y = f(x) = x^3$ b) $n = 5; y = f(x) = x^5$
 c) $n = 4; y = f(x) = x^4$ d) $n = 6; y = f(x) = x^6$
12. blau: $y = -2(x + 3)^4 - 1$; rot: $y = (x - 2)^3$; grün: $y = -\frac{7}{16}(x + 1)^4 + 4$
13. a) $a = 2; n = 3; y = f(x) = 2x^3$ b) $a = -\frac{3}{4}; n = 3; y = f(x) = -\frac{3}{4}x^3$
 c) $a = \frac{1}{3}; n = 4; y = f(x) = \frac{1}{3}x^4$ d) $a = \frac{1}{81}; n = 5; y = f(x) = \frac{1}{81}x^5$
14. a) $y_0 = -7; x_0 \approx 2.357$ b) $y_0 = \frac{13}{4}; x_0 \approx -2.644$
 c) $y_0 \approx 2.184; x_1 \approx 1.004; x_2 \approx -0.254$ d) $y_0 \approx 1.500; x_1 \approx 1.355; x_2 \approx -1.855$
15. a) Graph; $L = \{-2; 0; 2\}$ b) Graph; $L = \{-1.5\}$ c) Graph; $L = \{1.3\}$
 d) Graph; $L = \{1; -1.4\}$ e) Graph; $L = \{\}$ f) Graph; $L = \{-1.2; 1.2\}$
16. a) Graph; $L =]-3.71; \infty[$ b) Graph; $L = [1.59; 4.41]$
 c) Graph; $L = \mathbb{R} \setminus [-2.18; 0.33]$ d) Graph; $L =]-\infty; 1[\cup]1.48; 3.29[$
17. a) $V_w(a) = 8a^3$ b) Graph c) $V_k(a) = \frac{4}{3}\pi a^3$
 d) $\frac{V_w(a)}{V_k(a)} = \frac{6}{\pi}$ oder $V_w(a):V_k(a) = 1:\frac{6}{\pi} = 1:1.9099$ e) $r = 1.2407 \text{ m}$
18. a) $V(t) = \frac{4^4\pi}{3}t^3$ b) 33510.322 cm^3 c) 8.24 Sekunden

Lösungen zu Übungen 75

19. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ b) $(-1; -1); (1; 1)$
 c) Punktsymmetrie zum Ursprung
20. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, W = \mathbb{R}^+$ b) $(-1; 1); (1; 1)$
 c) Achsensymmetrie zur y-Achse
21. Gemeinsamkeiten: Punkt $(1; 1)$; $D = \mathbb{R}$; Verhalten für $x \rightarrow +0$ und $x \rightarrow +\infty$
 Unterschiede: Symmetrien; Wertemenge ($W = \mathbb{R} \setminus \{0\}, W = \mathbb{R}^+$); Verhalten für $x \rightarrow -0$ und $x \rightarrow -\infty$
22. Richtig: (2)
23. a) $y = f(x) = \frac{2}{x^3} + 1$ b) $y = f(x) = \frac{2}{(x+3)^3}$ c) $y = f(x) = -\frac{2}{x^3}$ d) $y = f(x) = -\frac{2}{x^3}$
 e) $y = f(x) = \frac{6}{x^3}$

24. a) $y = f(x) = \frac{1}{x-2} - 3$ b) $y = f(x) = \frac{1}{x+1} + 5$ c) $y = f(x) = -\frac{1}{x} + 5$ d) $y = f(x) = \frac{1}{2-x} - 1$
 e) $y = f(x) = -\frac{3}{2x}$ f) $y = f(x) = \frac{2}{x+5} + 4$
25. a) $u = -\frac{7}{2}$ b) $u_1 = -2; u_2 = 6$ c) $u = -\frac{14}{3}$ d) $u_1 = -1; u_2 = 0$
26. a) $p = 2; q = 3$ b) $p_1 = 64; q_1 = 5; p_2 = \frac{64}{9}; q_2 = -\frac{1}{3}$ c) geht nicht
27. a) $x_0 = \frac{3}{4}$ b) $x_0 = -\frac{5}{3}$ c) $x_1 \approx -4.41; x_2 \approx -1.59$
 d) $x_0 \approx -1.74$ e) keine f) $x_1 \approx -0.60; x_2 \approx 0.60$
28. a) $x = 0; y = 0$ b) $x = 0; y = 2$ c) $x = 0; y = 3$ d) $x = 0; y = 15$
 e) $x = -2; y = 0$ f) $x = 5; y = 0$
29. a) $x = -1; y = 4$ b) $x = 2; y = -1$ c) $x = -2; y = 3$ d) $x = 2; y = 4$
 e) $x = -\frac{5}{2}; y = \frac{1}{2}$ f) $x = -4; y = 1$
30. a) Graph; $L =]-\infty; -2.58[\cup]-2; \infty[$ b) Graph; $L =]-\infty; 2.29] \cup [3.71; \infty[$
 c) Graph; $L =]-\infty; -6] \cup [-1.83; -0.23] \setminus \{-1\}$ d) Graph; $L =]2; \infty[$
31. $a(b) = \frac{500}{b}$; Hyperbel
32. $h(a) = \frac{1000}{a^2}$; Hyperbel
33. a) $S(r) = 2\left(\pi r^2 + \frac{355}{r}\right)$ b) $r > 0$; Graph
 c) $f(r) = \underbrace{\frac{g(r)}{2\pi r^2}}_{\text{Parabel}} + \underbrace{\frac{h(r)}{\frac{710}{r}}}_{\text{Hyperbel}}$ d) $r_{\min} = 3.84 \text{ cm}; h_{\min} = 7.66 \text{ cm}; S = 277.55 \text{ cm}^2$
34. a) $R(R_1) = \frac{R_1 \cdot 2.2}{R_1 + 2.2}$ b) $R(R_1) = \underbrace{2.2 \cdot R_1}_{\text{Gerade}} \cdot \underbrace{\frac{1}{R_1 + 2.2}}_{\text{Hyperbel}}$
 c) $R_1 = 4.714 \text{ k}\Omega$ d) kommt auf das Gleiche heraus

Lösungen zu Übungen 76

35. a) – c) Graph
36. Graph; alle Graphen gehen durch die Punkte (0; 0) und (1; 1).
 Je grösser der Wurzelexponent, desto flacher verläuft die Kurve für $x \geq 1$.
37. Graph; alle Graphen gehen durch die Punkte (0; 0), (1; 1) (und (-1; -1)).
 Je grösser der Wurzelexponent, desto flacher verläuft die Kurve für $x \geq 1$.
38. a) Spiegelung an der x-Achse; Streckung in y-Richtung mit Faktor 2;
 Translation (Verschiebung) um 3 Einheiten nach links
 Nullstelle $x = -3$; Graph
 b) Translation um 5 Einheiten nach rechts und 3 Einheiten nach unten
 Nullstelle $x = 14$; Graph

- c) Translation um 2 Einheiten nach links und 4 Einheiten nach oben
Nullstelle keine; Graph
- d) Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$; Spiegelung an der x-Achse; Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$;
Translation um 2 Einheiten nach rechts
Nullstelle $x = 2$; Graph
39. a) Spiegelung an der x-Achse; Streckung in y-Richtung mit Faktor 2;
Translation um 3 Einheiten nach rechts und 3 Einheiten nach oben
Nullstelle $x = \frac{51}{8}$; Graph
- b) Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{3}$; Streckung in y-Richtung mit Faktor 2;
Translation um $\frac{5}{3}$ Einheiten nach rechts
Nullstelle $x = \frac{5}{3}$; Graph
- c) Spiegelung an der y-Achse; Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{5}$; Streckung in y-Richtung mit Faktor 3;
Translation um $\frac{2}{5}$ Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach unten
Nullstelle $x = \frac{46}{135}$; Graph
- d) Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$; Spiegelung an der x-Achse;
Translation um 1 Einheit nach rechts und 2 Einheiten nach oben
Nullstelle $x = 5$; Graph
40. rot: $y = f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} + 1$; violett: $y = f(x) = \sqrt{x+2} - 2$
blau: $y = f(x) = -\sqrt{x} + 4$; grün: $y = f(x) = \sqrt{x-1}$
41. a) Graph; $D = [2; \infty[$; $W = \mathbb{R}_0^+$ b) Graph; $D = [-5; \infty[$; $W = [-1; \infty[$
c) Graph; $D = [-2; \infty[$; $W = [-1; \infty[$ d) Graph; $D = [-1; \infty[$; $W =]-\infty; 3]$
e) Graph; $D = [-3; \infty[$; $W = \mathbb{R}_0^+$ f) Graph; $D = \left[-\frac{1}{2}; \infty\right[$; $W =]-\infty; 2]$
g) Graph; $D = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$; $W =]-\infty; 1]$ h) Graph; $D = [-4; \infty[$; $W = [2; \infty[$
42. a) $a = 2$; $n = 3$; $y = f(x) = 2\sqrt[3]{x}$ b) $a = -\frac{1}{4}$; $n = 2$; $y = f(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{x}$
c) $a = 3$; $n = 5$; $y = f(x) = 3\sqrt[5]{x}$ d) $a = -\frac{1}{10}$; $n = 4$; $y = f(x) = -\frac{1}{10}\sqrt[4]{x}$
43. a) Graph; $x = 34$ b) Graph; $x = \frac{5}{2}$
c) Graph; $x \in \{\}$ d) Graph; $x = \frac{9}{2}$
e) Graph; $x_1 = -2\sqrt{7}$; $x_2 = 2\sqrt{7}$ f) Graph; $x \approx 2.618$
g) Graph; $x_1 = 5$; $x_2 = 10$ h) Graph; $x_1 = 4$; $x_2 \approx 6.063$
44. a) Graph; $x > 33$ b) Graph; $x \leq -\frac{9}{8}$
c) Graph; $x \in]-1.304; 1.304[$ d) Graph; $x \in \left]\frac{4}{3}; 15.571\right[$
45. a) $u \in \left]-\infty; \frac{1}{4}\right]$ b) $v \in \mathbb{R}$ c) $w \in]-\infty; \approx 2.3]$

46. a) $M(r) = \pi r \sqrt{r^2 + 441}$; Graph b) $r = 2.335$ cm
47. $r(h) = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$ mit $V = 380$; Graph
48. a) $s \approx 15.12$ m b) $t \approx 4.809$ s
49. $x_{\max} = 5.657$ m; Graph
50. a) wegen $\sqrt{9.81} \approx \pi$; Graph b) 0.6344 s; 2.006 s; 6.344 s
- c) $l(T) = \frac{9.81}{4\pi^2} T^2$: 9.940 mm; 62.12 mm; 24.85 cm; 99.40 cm; 6.212 m
- d) Mond: 4.967 s; Mars: 3.240 s; Jupiter: 1.232 s; Saturn: 1.877s
- e) Richtig: (4)
51. a) 2.8 m/s; 5.6 m/s; 8.8 m/s; 12.5 m/s; 28 m/s b) 2 d 9 h 23 min
- c) $0 < x \leq 300$ m: $v(x) = 1.25 \sqrt{x}$; Graph
52. a) im Bogenmass: $V(\alpha) = \frac{1}{3} \left(\frac{m\alpha}{2\pi} \right)^2 \cdot \sqrt{m^2 - \left(\frac{m\alpha}{2\pi} \right)^2}$ b) $\alpha_{\max} = 5.130$ rad oder $\alpha_{\max} = 293.9^\circ$
53. a) Laufwettbewerbe: je kleiner die gemessene Zeit, desto höher die Punktzahl
Wurfwettbewerbe: je grösser die gemessene Weite (Höhe), desto höher die Punktzahl
- b) 100 m: $p(l) = 25.435 \cdot (18 - l)^{1.81}$; Graph
1500 m: $p(l) = 0.038 \cdot (480 - l)^{1.85}$; Graph
Weit: $p(l) = 0.144 \cdot (l - 220)^{1.40}$; Graph
Kugel: $p(l) = 51.39 \cdot (l - 1.5)^{1.05}$; Graph
- c) 100 m: 10.40 Sekunden
1500 m: 233.87 Sekunden
Weit: 775.8 Zentimeter
Kugel: 18.39 Meter
54. a) 100 m: $p(l) = 7.080303 \cdot (21.50 - l)^{2.10}$
1500 m: $p(l) = 0.0024384 \cdot (509.65 - l)^{2.30}$
Weit: $p(l) = 136.081575 \cdot (l - 1.30)^{1.10}$ (Meter)
Kugel: $p(l) = 82.491673 \cdot (l - 1.78)^{0.90}$

b)

	IAAF	SWISSA	Leistungsdifferenz
100 m	10.40 s	10.94 s	0.54 s
1500 m	233.87 s	233.98 s	0.11 s
Weit (Meter)	7.76 m	7.43 m	0.33 m
Kugel (Meter)	18.39 m	17.78 m	0.61 m

18 Polynomfunktionen

Lösungen zu Übungen 77

1. (1); (3)
2. a) Polynomfunktion 1. Grades, Grundform: $y = f(x) = -0.5x + 10$
 b) Polynomfunktion 8. Grades, Grundform: $y = f(x) = x^8$
 c) –
 d) –
 e) Polynomfunktion 3. Grades, Grundform: $y = f(x) = -\frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{10}x$
 f) –
 g) –
 h) Polynomfunktion 0. Grades (konstante Funktion), Grundform: $y = f(x) = 5$
 i) –
3. a) ungerade
 b) ungerade
 c) –
 d) gerade
 e) gerade
 f) –
 g) ungerade
 h) ungerade
 i) –
4. a) Achsensymmetrie zur y-Achse
 b) keine Symmetrie
 c) Achsensymmetrie zur y-Achse, gerade
 d) keine Symmetrie bezüglich Ursprung oder y-Achse; Punktsymmetrie zu (0; 1)
 e) Punktsymmetrie zum Ursprung, ungerade
 f) Punktsymmetrie zum Ursprung, ungerade
 g) Achsensymmetrie zur y-Achse, gerade
 h) Achsensymmetrie zur y-Achse, gerade
 i) keine Symmetrie
5. a) $y = f(x) = x^3 + 5x^2 - 6$
 b) $y = f(x) = x^3 + 20x^2 + 125x + 248$
 c) $y = f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 3$
 d) $y = f(x) = -x^3 - 5x^2 + 2$
 e) $y = f(x) = -x^3 + 5x^2 - 2$
 f) $y = f(x) = 4x^3 + 20x^2 - 8$
 g) $y = f(x) = 8x^3 + 20x^2 - 2$
6. a) $y = f(x) = -x^4 + 12x^3 - 52x^2 + 96x - 57$
 b) $y = f(x) = -x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 1$
 c) $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$
 d) $y = f(x) = -x^4 + 8x^3 - 22x^2 + 24x - 5$
 e) $y = f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 8$
 f) $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - 4x^3 - 11x^2 - 12x + \frac{1}{2}$
7. a) $y = f(x) = -\frac{6}{5}x + 12$
 b) $y = f(x) = -\frac{1}{10}x^2 + \frac{3}{10}x - \frac{7}{10}$
 c) $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$
 d) $y = f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 4x - 5$
 e) $y = f(x) = \frac{4}{3}x^4 - \frac{7}{3}x^3 - \frac{25}{3}x^2 + \frac{16}{3}x + 3$

8. a) $y = f(x) = 2x^2 + 2x - 24$ b) $y = f(x) = 2x^2 - 8x + 8$
 c) $y = f(x) = 5x^3 - 15x^2 - 30x + 40$ d) $y = f(x) = x^{2n} - 1 \quad n \in \mathbb{N}^*$
 e) $y = f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$
9. a) $x_1 = 2; x_2 = 3$; Graph b) $x_1 = -2; x_2 = \frac{2}{3}$; Graph
 c) $x_1 = -3; x_2 = 0; x_3 = 3$; Graph d) $x = 1$; Graph
 e) $x_1 = -\sqrt{\frac{5}{2}}; x_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}$; Graph f) $x \in \{\};$ Graph
10. a) Nullstellen: $x_1 = -1.414; x_2 = 1; x_3 = 1.414$; lokale Extremalstellen: $x_{\max} \approx -0.549; x_{\min} \approx 1.215$
 b) Nullstellen: $x_1 = -1.732; x_2 = 1.732; x_3 = 2$; lokale Extremalstellen: $x_{\max} \approx -0.535; x_{\min} = 1.869$
 c) Nullstellen: $x = 11$; lokale Extremalstellen: $x_{\max} \approx 0.046; x_{\min} \approx 7.288$
 d) Nullstellen: $x_1 \approx -4.971; x_2 \approx -0.09725; x_3 \approx 2.068$; lokale Extremalstellen: $x_{\max} \approx -3.082; x_{\min} \approx 1.082$
 e) Nullstellen: $x_1 = -2; x_2 = 3; x_{\max} = \frac{1}{2}; x_{\min} = -2; x_{\min} = 3$
 f) Nullstellen: $x_1 \approx -1.911; x_2 \approx 0.1535; x_3 \approx 2.615$; lokale Extremalstellen: $x_{\max} \approx -1.245; x_{\min} \approx 1.869$
11. a) $-9.481 < p < 0$: 3 Lösungen; $p_1 = -9.481, p_2 = 0$: 2 Lösungen; sonst 1 Lösung
 b) $0 > p < -75.85$: 3 Lösungen; sonst 1 Lösung
 c) $-1.040 < p < 1.040$: 3 Lösungen; $p_1 = -1.04, p_2 = 1.04$: 2 Lösungen; sonst 1 Lösung
 d) $p > -16.98$: 2 Lösungen; sonst keine Lösung
12. a) $V(x) = 4x^3 - 70x^2 + 300x$ b) $x_{\max} = 2.829 \text{ cm}$
 c) $V_{\max} = 379.0 \text{ cm}^3$
13. a) $h_{\max} = 2.667 \text{ dm}$ b) $r_{\max} = 1.886 \text{ dm}$
14. a) nach 300 Tagen, 460 Truthähne b) Abnahme, z.B. wegen Futtermangel usw.
15. a) Graph
 b) $D = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 24\}; W = \{\vartheta \in \mathbb{R} \mid 8.1^\circ \leq \vartheta \leq 23.1^\circ\}$
 c) $t_{\max} = 14:47, \vartheta_{\max} = 23.1^\circ; t_{\min} = 5:13, \vartheta_{\min} = 8.1^\circ$
 d) um 11:17 und um 19:00
16. a) $V(x) = \frac{4}{3}\pi x^3 + x^2\pi(4.2 - 2x)$ b) Graph
 c) $0 < x \leq 2.1 \text{ m}$ d) 1.59 cm
 e) $x_{\max} = 2.1 \text{ m}; V_{\max} = 38.792 \text{ m}^2$
17. a) $A(x) = -2x^3 + 8x$ b) $I = 2x \approx 2.309 e$ (exakt mit Analysis: $I = \frac{4\sqrt{3}}{3} e$)
 c) $A_{\max} \approx 6.158 e^2$ (exakt mit Analysis: $A_{\max} = \frac{32\sqrt{3}}{9} e^2$)
18. a) $A(x) = x^3 - 4.6x^2 + 4.93x$ b) $a_{\max} \approx 0.6920 e$ (exakt mit Analysis: $a_{\max} = \frac{46 - 7\sqrt{13}}{30} e$)
 c) $A_{\max} \approx 1.540 e^2$ (exakt mit Analysis: $A_{\max} = \frac{4459\sqrt{13} + 4715}{13500} e^2$)

19 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Lösungen zu Übungen 78

1. Richtig: (1); (3); (4)
2. (1) $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; (2) $a = \frac{1}{4}$; (3) $a = \frac{1}{5}$; (4) $a > 1$
3. a) – b) Exponentialfunktion
c) Exponentialfunktion d) –
e) – f) Exponentialfunktion
g) Exponentialfunktion h) –
i) Exponentialfunktion
4. a) Graph; gemeinsamer Punkt: (0; 1); Asymptote x-Achse ($x \rightarrow -\infty$); $D = \mathbb{R}, W = \mathbb{R}^+$
b) Graph; gemeinsamer Punkt: (0; 1); die beiden Kurven sind symmetrisch zur y-Achse; Asymptote x-Achse; $D = \mathbb{R}, W = \mathbb{R}^+$
c) Graph; gemeinsamer Punkt: (0; 1); die beiden Kurven sind symmetrisch zur y-Achse; Asymptote x-Achse; $D = \mathbb{R}, W = \mathbb{R}^+$
d) Graph; gemeinsamer Punkt: (0; 1); Asymptote x-Achse ($x \rightarrow \infty$); $D = \mathbb{R}, W = \mathbb{R}^+$
5. Graph; Spiegelung an der y-Achse; Spiegelung an der y-Achse; Spiegelung am Ursprung
6. Graph; Spiegelung an der y-Achse; Spiegelung an der y-Achse; Spiegelung am Ursprung
7. a) Graph
b) $(1) + 2; + 2x + 1; \cdot 2 / (2) + 6; + 6x + 9; \cdot 8 / (3) \cdot 2; \cdot 4$; quadrieren / $(4) : 2; : 4$; Wurzel ziehen
8. a) $y = g_1(x) = 10 \cdot 10^x$ b) $y = g_2(x) = \frac{1}{10} \cdot 10^x$
c) $y = g_3(x) = 100 \cdot 10^x$ d) $y = g_4(x) = \frac{1}{1000} \cdot 10^x$
9. a) $y = g_1(x) = 25^x$ b) $y = g_2(x) = 125^x$
c) $y = g_3(x) = (\sqrt{5})^x$ d) $y = g_4(x) = (\sqrt[4]{5})^x$
10. a) $a = \frac{1}{4}$ b) $a = 4$
c) $a = \frac{2}{5}$ d) $a = \sqrt{5}$
e) $a = \pi$ f) $a = e^2$
11. a) $a = \frac{9}{10}$ b) $a = \frac{10}{11}$
c) $a = \frac{4}{5}$ d) $a = \frac{5}{4}$
e) $a = \sqrt[4]{3}$ f) $a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
12. a) $f(x_1) = 2; f(x_2) \approx 2.5937; f(x_3) \approx 2.7048; f(x_4) \approx 2.70169;$
 $f(x_5) \approx 2.71828047; f(x_6) \approx 2.71828183$
($e \approx 2.7182818285$)
b) $x \rightarrow \infty; f(x) \rightarrow e$
13. a) – d) Graph

Lösungen zu Übungen 79

14. a) $y = f(x) = 2^{x+4.5}$

c) $y = f(x) = -2^x + 4.8$

e) $y = f(x) = -2^{-x+1.5}$

g) $y = f(x) = 2^{\frac{x}{2.8}} - 5$

b) $y = f(x) = 2^x - 10.7$

d) $y = f(x) = -2^{-x} = -\frac{1}{2^x}$

f) $y = f(x) = 0.6 \cdot 2^x$

h) $y = f(x) = -2 \cdot 2^{-x-3} + 5$

15. a) $f(x) \rightarrow g(x)$: Streckung in y-Richtung mit Faktor 2 $f(x) \rightarrow h(x)$: Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$ $f(x) \rightarrow k(x)$: Spiegelung an der x-Achse und Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{1}{3}$ b) $f(x) \rightarrow g(x)$: Translation (Verschiebung) um 1 Einheit nach rechts $f(x) \rightarrow h(x)$: Translation um 2 Einheiten nach links $f(x) \rightarrow k(x)$: Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$ c) $f(x) \rightarrow g(x)$: Translation um 1.5 Einheiten nach unten $f(x) \rightarrow h(x)$: Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{1}{3}$ $f(x) \rightarrow k(x)$: Spiegelung am Ursprung und Streckung in y-Richtung mit Faktor 4

16. a) Translation um 3 Einheiten nach unten

b) Streckung in y-Richtung mit Faktor 3

c) Translation um 3 Einheiten nach rechts

d) Spiegelung an der x-Achse und Spiegelung an der y-Achse (oder Spiegelung am Ursprung)

e) Translation um 1 Einheit nach links und um 5 Einheiten nach oben

f) Spiegelung an der x-Achse; Streckung in y-Richtung mit Faktor 2;

Translation um 2 Einheiten nach links und um eine Einheit nach unten

17. a) $f_1(x) = 9^x$

c) $f_3(x) = 5^x$

e) $f_5(x) = 4^x$

18. a) $h(x) = 4^{x-2}$

c) $h(x) = 9^{x-\frac{1}{2}}$

b) $f_2(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^x$

d) $f_4(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

f) $f_6(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^x$

b) $h(x) = 3^{x+3}$

d) $h(x) = e^{x + \ln \frac{5}{3}} = e^x + \ln 5 - \ln 3$

19. a) $y_2(x) = 9 \cdot 3^x$

c) $y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 10^x$

20. a) $f(x) = h(x)$

c) $g(x) = h(x)$

21. a) – f) Graph

22. a) $f(x) = 27 \cdot 3^x; g(x) = 27^x; h(x) = 3 \cdot 3^x$

c) $f \cap h = \left(\frac{1}{2}; 3\sqrt{3}\right)$

b) $y_2(x) = \frac{1}{8} \cdot 2^x$

d) $y_2(x) = \frac{1}{100^\pi} \cdot 10^x$

b) $f(x) = g(x)$

d) $f(x) = g(x)$

b) $f \cap g = \left(\frac{3}{2}; 81\sqrt{3}\right)$

23. a) $a = 8; k = \frac{1}{4}$ b) $a = 2; k = 3$
 c) $a = \frac{1}{2}; k = -4$ d) $a = \sqrt{2}; k = -\frac{1}{5}$
24. grün: $y = -3^{x-3} + 2$; rot: $y = 3^x$; blau: $y = 3^x - 5$; violett: $y = -2 \cdot 3^{-x}$
25. a) $y_0 = -4; x_0 = \ln 5$ b) $y_0 = \frac{4}{3}; x_0 = 1$
 c) $y_0 = -\frac{23}{4}; x_0 = \frac{\ln 24}{3}$ d) $y_0 = -\frac{13}{8}$; keine Nullstelle
26. a) Graph; $x_1 \approx 0.3792; x_2 \approx 1.794$ b) Graph; $x \approx -0.6860$
 c) Graph; $x \approx 1.272$ d) Graph; $x \approx -0.6170$
27. a) Graph; $D = \mathbb{R}; D = \mathbb{R}$; keine Extremalstellen
 b) Graph; $D = \mathbb{R}; W = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{1}{2} \right\}$; Minimum: $\left(0; \frac{1}{2}\right)$
 c) Graph; $D = \mathbb{R}; W = \{y \in \mathbb{R} \mid y > -0.3349\}$; Minimum: $(-0.9102; -0.3349)$
 d) Graph; $D = \mathbb{R}; W = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{1}{e} \right\}$; Maximum: $\left(1; \frac{1}{e} \approx 0.368\right)$
 e) Graph; $D = \mathbb{R}; W = \{y \in \mathbb{R} \mid -0.5151 < y < 0.5151\}$; Minimum: $(-0.849; -0.515)$; Maximum: $(-0.8493; -0.5151)$
 f) Graph; $D = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}$; keine Extremalstellen
28. a) 3780B; 4762B; 6000B; 768000B; $2.162 \cdot 10^{20}$ B
 b) $G(t) = 3000 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$ c) nach 55 h 02 min 23 s
29. a) 35 mm; 24.50 mm; 17.15 mm; 8.40 mm; 1.41 mm
 b) $h(t) = h_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^t = 50 \cdot 0.7^t$ c) Graph
 d) $h(15) = 0.2374$ mm e) nach 1 min 57 s

Lösungen zu Übungen 80

30. Richtig: (2); (3); (5)
31. a) – d) Graph
32. a) Graph; gemeinsamer Punkt, Nullstelle: (1; 0); monoton steigend; $D = \mathbb{R}^+, W = \mathbb{R}$; Asymptote $y = 0$
 b) Graph; gemeinsamer Punkt, Nullstelle: (1; 0); $D = \mathbb{R}^+, W = \mathbb{R}$; Asymptote $y = 0$; Die beiden Kurven sind symmetrisch zur x -Achse
 c) Graph; gemeinsamer Punkt, Nullstelle: (1; 0); $D = \mathbb{R}^+, W = \mathbb{R}$; Asymptote $y = 0$; die beiden Kurven sind symmetrisch zur x -Achse
 d) Graph; gemeinsamer Punkt, Nullstelle: (1; 0); monoton fallend; $D = \mathbb{R}^+, W = \mathbb{R}$; Asymptote $y = 0$
33. a) $y = g(x) = \log_2 x$ b) $y = g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$
 c) $y = g(x) = \log_{\frac{3}{2}} x$ d) $y = g(x) = \log_{\frac{2}{5}} x$
34. a) $y = g(x) = \log_4 (3x)$ b) $y = g(x) = \lg x + 5$
 c) $y = g(x) = \frac{1}{4} \ln x = \ln \sqrt[4]{x}$ d) $y = g(x) = 2 \log_3 \frac{x}{2} - 1$
 e) $y = g(x) = \sqrt{\lg x} - 1$ oder $y = g(x) = -\sqrt{\lg x} - 1$ f) $y = g(x) = \frac{1}{3} \ln(2x) - 2 = \ln \sqrt[3]{2x} - 2$

35. a) $y = g(x) = 10^x - 3$

c) $y = g(x) = \frac{1}{2} 3^x$

e) $y = g(x) = -10^{4x} + 1$

36. $y = \log_a x = \frac{1}{\lg a} \cdot \lg x$

37. a) $y = \frac{3}{\lg 2} \cdot \lg x$

c) $y = \frac{5}{\lg 4} \cdot \lg x$

38. a) $y = g(x) = \log_2(x + 1)$; Graph

c) $y = g(x) = 2 \cdot 4^x = 2^{2x+1}$; Graph

39. a) $P_1 = (-1.690; -1.690)$; $P_2 = (2; 2)$

40. a) Graph; $x_1 \approx 0.1586$; $x_2 \approx 3.146$

c) Graph; $x_1 = -4$; $x_2 \approx -1.249$; $x_3 \approx 1.136$

41. a) $k = 3$

b) $b = \frac{20}{9}$

c) $a = 5^{\frac{5}{3}}$; $b = 5^{-\frac{13}{3}}$

b) $y = g(x) = e^{\frac{3x}{4}}$

d) $y = g(x) = 3^{2x}$

f) $y = g(x) = e^{\frac{x}{5}} - 4$

b) $y = -\frac{1}{2 \lg 3} \cdot \lg x$

c) $y = -\frac{6}{\lg 5} \cdot \lg x$

b) $y = g(x) = \log_3\left(-\frac{x}{2}\right)$; Graph

b) $P_1 = (-2.961; -2.961)$; $P_2 = (1.335; 1.335)$

b) Graph; $x_1 \approx -2.744$; $x_2 \approx 0.4469$

d) Graph; $x_1 \approx -0.3418$; $x_2 \approx 0.3778$; $x_3 \approx 2.510$

Lösungen zu Übungen 81

42. a) $y = f(x) = \ln x + 2$

c) $y = f(x) = -\ln x$

e) $y = f(x) = -\ln(-x)$

43. a) $y = f(x) = \ln(2.5x)$

c) $y = f(x) = -\ln(-x)$

e) $y = f(x) = 1.5 \ln x - 3$

b) $y = f(x) = \ln(x - 3)$

d) $y = f(x) = \ln(-x)$

f) $y = f(x) = 3 \ln x$

b) $y = f(x) = -\ln(x + 2.5)$

d) $y = f(x) = -\ln(-x) + 10$

f) $y = f(x) = -\ln(3.75 - 1.25x) - 2$

44. a) Translation (Verschiebung) um 1 Einheit nach oben; Nullstelle: $x = \frac{1}{e}$; Graph

b) Translation um 1 Einheit nach links; Nullstelle: $x = 0$; Graph

c) Translation um 2 Einheiten nach rechts; Nullstelle: $x = 3$; Graph

d) Spiegelung an der y-Achse; Nullstelle: $x = -1$; Graph

e) Streckung in y-Richtung mit Faktor 2; Nullstellen: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; Graph

f) Spiegelung an der x-Achse; Streckung in y-Richtung mit Faktor 2; Nullstellen: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; Graph

g) Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$; Translation um 3 Einheiten nach links; Nullstelle: $x = -2$; Graph

h) Spiegelung an der y-Achse; Translation um 2 Einheiten nach rechts; Nullstelle: $x = 1$; Graph

i) Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$; Nullstelle: $x = \frac{1}{2}$; Graph

45. a) Translation um 2 Einheiten nach unten; Nullstelle: $x = 100$; Graph

b) Translation um eine Einheit nach links; Nullstelle $x = 0$

c) Spiegelung an der x-Achse; Nullstelle: $x = 1$; Graph; Graph

d) Spiegelung an der x-Achse; Nullstelle: $x = 1$; Graph

e) Streckung in y-Richtung mit Faktor 3; Nullstelle: $x = 1$; Graph

- f) Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{1}{3}$; Translation um 2 Einheiten nach rechts; Nullstelle: $x = 3$; Graph
- g) Spiegelung an der y-Achse; Translation um 4 Einheiten nach rechts; Nullstelle: $x = 3$; Graph
- h) Streckung in x-Richtung mit Faktor 2; Nullstelle: $x = 2$; Graph
- i) Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$; Translation um $\frac{3}{2}$ Einheiten nach links; Nullstelle: $x = -1$; Graph
46. a) $g(x) = \lg(ax) = \lg x + \lg a = \lg x + v = f(x) + v$
- b) Ja, durch eine Streckung in x-Richtung um den Faktor $\frac{1}{a}$
47. a) $v = 1$ b) $v = -4$
- c) $v = \lg 2 + 2$ d) $v = -\lg 3$
48. $\lambda = a^{-v}$
49. Horizontale Verschiebung um $\frac{1}{\log_a k} \rightarrow y = k \cdot a^x$ entspricht $y = a^{x + \log_a k}$
50. a) kein Ordinatenabschnitt; $x_0 = e$ b) $y_0 = 3.807$; $x_0 = 97$
- c) kein Ordinatenabschnitt; $x_0 = e^3 + 5$ d) kein Ordinatenabschnitt; $x_0 = \frac{4}{5}$
51. a) 0 phon; 10 phon; 20 phon; $10n$ phon
- b) $1 J_0$; $100 J_0$; $10000 J_0$; $10^8 J_0$; $10^{10} J_0$; $10^{13} J_0$
- c) 3.010 phon; 0.4139 phon; 0.04321 phon; $10 \lg \frac{n+1}{n}$ phon

20 Wachstum und Zerfall

Lösungen zu Übungen 82

1. a) $2^0 = 1$; $2^1 = 2$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; . . . ; $2^9 = 512$ Körner b) $G(n) = 2^{n-1}$
- c) $G(64) = 2^{63} = 9.223 \cdot 10^{18}$ Körner d) Graph
- e) 31. Feld f) $2^{64} - 1 \approx 1.845 \cdot 10^{19}$ Körner
- g) $4.612 \cdot 10^{11} \text{ t}$
2. a) 1280 H; 81920 H; $5.243 \cdot 10^6 \text{ H}$; $3.355 \cdot 10^8 \text{ H}$; $20 \cdot 2^{6n} \text{ H}$
- b) $G(t) = 20 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$; $G(n) = 20 \cdot 2^{6n}$, $t = \text{Anzahl Monate}$, $n = \text{Anzahl Jahre}$
- c) nach 2 Monaten; 1.661 Jahren; 3.322 Jahren; 4.983 Jahren; ...; $\frac{n}{6} \log_2 10 = \frac{n}{6} \cdot \frac{\ln 10}{\ln 2}$ Jahren
3. a) 90.00 %; 81.00 %; 72.90 %; 65.61 %; ...; $100 \cdot 0.9^x$ %
- b) $L(x) = 100 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x = 100 \cdot 0.9^x$ c) Graph
- d) $L(20) = 12.16$ % e) $x_H = 6.579 \text{ m}$
4. a) $I(x) = I_0 \cdot a^{\frac{x}{\delta}} = 5 \cdot 10^7 \cdot 0.2^{\frac{x}{16}}$ mit x in km b) $I(x) = 5 \cdot 10^7 \cdot e^{\frac{\ln 0.2}{16} x}$; $\delta = 9.941 \text{ km}$
- c) 1.001 % d) $x_H = 6.891 \text{ km}$
5. a) $m(t) = 50 \cdot 0.834^t$ mit t in Tagen; $T_H = 3.8 \text{ d}$
- b) $m(t) = 10 \cdot 0.8706^{\frac{t}{5}}$ mit t in Minuten; $T_H = 25 \text{ min}$
- c) $m(t) = 125 \cdot 0.771934^{\frac{t}{9000}}$ mit t in Jahren; $T_H = 24100 \text{ a}$

6. a) $T_H = 5757$ a
 c) $t = 6039$ a
 e) $t = 5326$ a
 g) $t = 12754$ a
7. a) 57.58 d
 b) 107.2 d
8. linear: $B_0 \approx 55$; 25 %; $B_{31} \approx 480$
 Bei linearem Wachstum beträgt die täglich Zunahme mit ungefähr 14 (13.7) immer gleich viel. Bezogen auf den **Startwert** von ungefähr 55 (54.8) Fliegen beträgt die tägliche Zuwachsrate ungefähr 25 %. Bezogen auf den Wert des Vortages würde der Prozentwert stets abnehmen (Angabe sinnlos).
 exponentiell: $B_0 \approx 90$; 7.18 %; $B_{31} \approx 775$
 Die tägliche Zunahme nimmt absolut von Tag zu Tag zu, dafür bleibt die tägliche Zuwachsrate in Prozent gleich, da sie sich immer auf den Wert des Vortages bezieht.
9. a) Normalwert: 0.08816 g
 b) 3 %
10. a) $297\,719 \text{ m}^3$
 c) 1.44 %
 b) 11.3 Jahre
11. a) CHF 10 300.–; CHF 10 609.–; CHF 10 927.25; CHF 11 255.10; CHF 11 592.75; ...; $10\,000 \cdot 1.03^n$
 b) $K(n) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = 10\,000 \cdot 1.03^n$
 c) $K_{20} = \text{CHF } 18\,061.10$
 d) Graph
 e) in 13.72 Jahren
 f) in 23.45 Jahren
12. a) $K(n) = 100\,000 \cdot 1.06^n$
 b) $K(10) = \text{CHF } 179\,085.-$
 c) nach 11.9 Jahren
 d) $2K_0 = K_0 \cdot 1.06^n$, mit K_0 kürzen: $2 = 1.06^n$
13. CHF 3421.40
 14. CHF 12 278.30
15. 6.961 %
 16. nach 14.21 Jahren
17. CHF 67 794.80; CHF 20 567.60; 4 %; 11 Jahre
18. a) 35.00 Jahre
 b) 14.21 Jahre
 c) $\log_{p+1} 2$ Jahre
19. a) $1.1^7 = 1.95 \approx 2$
 b) 10.41 %
20. a) $1.07^{10} = 1.97 \approx 2$
 b) 7.177 %
21. $p = (\sqrt[n]{2} - 1) \cdot 100$
22. a) $p = 5.25$ %; $n = 6$
 b) CHF 751.13; CHF 1021.05
23. a) die Zahlung vom 1.1.2008
 b) die Zahlung vom 1.1.2005
24. CHF 32 245.30
 25. nach 10.25 Jahren
26. CHF 191 426.60 und CHF 228 573.40
 27. 3 %; 5.5 %
28. a) CHF 1 200 000.–; CHF 720 000.–; CHF 432 000.–; CHF 259 200.–; CHF 155 520.–; ...; $2\,000\,000 \cdot 0.6^n$
 b) $B(n) = B_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n = 2\,000\,000 \cdot 0.6^n$
 c) Graph
 d) $B_{10} = \text{CHF } 12093.20$
 e) nach 1.357 Jahren
 f) nach 4.508 Jahren
29. a) CHF 11 865.20
 b) CHF 43 749.80
 c) CHF 23 131.10; CHF 1744.50
 d) nach 8.53 Jahren (9 Jahren)
 e) 8 Jahre

30. a) 36.3 %
c) 1.22 Jahre
31. a) 0.30 %
c) 0.73 %
32. a) 1.11 %
c) 2045
33. a) 14.27 Mia.
c) 85.7 Jahre; 74.4 Jahre
e) in 90.3 Jahren
- b) 2 517 176.04 Fr.
b) 0.27 %
b) 0.58 %
b) 0.81 %; 1.75 %
d) 32.9 Jahre, 19.8 Jahre
f) in 26.6 Jahren

Lösungen zu Übungen 83

34. a) $f(t) = 30 \cdot (1 - 0.86 \cdot e^{-\frac{t}{7.623}})$ b) 16.5°
35. a) $T(t) = 5 + 90 \cdot e^{-\frac{t}{6.4101}}$ b) Graph c) 13.7°
d) nach 8 min 13 s
36. a) $T(t) = 20 + 65 \cdot e^{-\frac{t}{9.9836}}$ b) 43.9°C c) 11.8°C
37. a) $f(t) = 32(1 - 0.8125 \cdot e^{-\frac{t}{19.4957}})$ b) 15.07 Minuten
38. a) (1): $U(t) = 4 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{0.0047}})$; (2): $U(t) = 4 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{0.000484}})$; (3): $U(t) = 4 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{0.0022}})$
b) (1): $t = 14.08 \text{ ms}$; (2): $t = 1.450 \text{ ms}$; (3): $t = 6.591 \text{ ms}$
c) (1): $U(t) = 4 \cdot e^{-\frac{t}{0.0047}}$; (2): $U(t) = 4 \cdot e^{-\frac{t}{0.000484}}$; (3): $U(t) = 4 \cdot e^{-\frac{t}{0.0022}}$
d) (1): $t = 10.82 \text{ ms}$; (2): $t = 1.114 \text{ ms}$; (3): $t = 5.066 \text{ ms}$
39. a) $\tau = \frac{T_H}{\ln 2} = 2337 \text{ Jahre}$ b) 0.9573g c) im Jahr 12 661
40. a) $\tau = \frac{T_H}{\ln 2} = 8267 \text{ Jahre}$ b) 17 190 Jahre c) 38 069 Jahre
41. U-235: $T_H = 7.001 \cdot 10^8 \text{ a}$; Abnahme: $9.9 \cdot 10^{-8} \% \text{ a}^{-1}$; $t_{1\%} = 4.652 \cdot 10^9 \text{ a}$
Cs-137: $T_H = 30.18 \text{ a}$; Abnahme: $2.271 \% \text{ a}^{-1}$; $t_{1\%} = 200.5 \text{ a}$
P-32: $T_H = 14.3 \text{ d}$; $\lambda = 0.04855 \text{ d}^{-1}$; $t_{1\%} = 95.1 \text{ d}$
I-131: $T_H = 7.977 \text{ d}$; $\lambda = 0.08689 \text{ d}^{-1}$; Abnahme: $8.322 \% \text{ d}^{-1}$
Rn-220: $\lambda = 0.01247 \text{ s}^{-1}$; Abnahme: $1.24 \% \text{ s}^{-1}$; $t_{1\%} = 369.4 \text{ s}$
42. a) $f(t) = 1 + 165.6 \cdot e^{-\frac{t}{6.6}}$ b) 15.6 Jahre c) 88.5 Jahre
43. a) $f(t) = \frac{4500}{1 + 1254.493 \cdot e^{-\frac{t}{4.1314}}}$ b) 2393 Einwohner
c) nach 29.5 Tagen d) nach 67 Tagen
44. a) $f(t) = \frac{9000}{1 + 749 \cdot e^{-\frac{t}{13.68}}}$ b) 92 Einwohner c) nach 106 Tagen
d) nach 225 Tagen
45. a) $f(t) = \frac{120}{1 + 59 \cdot e^{-\frac{t}{1.27}}}$ b) 33.5 cm; 107.8 cm; nach 11 Wochen

46. a) S1: $y = 2000x + 2000$; S2: $y = 2000 \cdot e^{\frac{x}{1.9969}}$;

S3: $y = 20\,000 \cdot (1 - 0.9e^{-\frac{x}{9.49122}})$; S4: $f(t) = \frac{20\,000}{1 + 9 \cdot e^{-\frac{x}{2.1616}}}$

b) Graph

c) –

V Datenanalyse

Lösungen zu Übungen 84

1. a) 21 Lernende
- b) kleinste Zeit: 2 h, grösste Zeit: 25 h
- c) 14.190 h
- d) 15 h
- e) 6
- f) 28.571 %

Lösungen zu Übungen 85

2. –

3.

		Experiment	Befragung	Beobachtungs- studie	Daten- sammlung
21.1	Smartphone	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21.2	Kniearthrose	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21.3	Warenhaus	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21.4	Kaffee	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21.5	Weitsprung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
21.6	Übergewicht	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21.7	Freiwurf-Contest	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
21.8	Blut	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21.9	Schwertlilien	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21.10	e-Bike	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21.11	1-€-Münze	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21.12	Bierfest	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21.13	Lohn	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

4.

	zufälliger Fehler	systematischer Fehler	Übertragungs- fehler	mutwilliger Fehler
Fall A	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Fall B	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Fall C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Fall D	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Fall E	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Fall F	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Lösungen zu Übungen 86

5. Bei sämtlichen Beispielen muss ein Bias erwartet werden. Die Stichproben werden kaum repräsentativ für die Grundgesamtheit sein.

Beispiel A:

Jede befragte Person aus der Klasse steht bereits für ein Kind in ihrer Familie.

Beispiel B:

Da Zugfahrer keine Parkplätze brauchen, wird ihr Verlangen nach solchen eher gering sein. Würde dieselbe Frage in der Nähe von (besetzten) Parkplätzen gestellt, wäre eine andere Verteilung zu erwarten.

Beispiel C:

Zuschauerinnen eines Volleyballspiels sind oder waren häufig selbst Volleyballspielerinnen. Grosse Spielerinnen haben auf den meisten Positionen auf dem Volleyballfeld Vorteile. Deshalb ist zu erwarten, dass die durchschnittliche Körpergrösse der 150 Zuschauerinnen über derjenigen der Schweizer Frauen liegt.

Beispiel D:

Kampffjets, die Einschusslöcher im Bereich des Cockpits haben, sind wohl nie aus dem Krieg zurückgekehrt.

3.

			nominal	ordinal	diskret	stetig
21.1	Smartphone	Zeit	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
		Geschlecht	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		BMS-Richtung	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		BMS-Lehrgang	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21.2	Kniearthrose	vor	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/> *
		nach_1_Woche	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/> *
		nach_3_Monaten	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/> *
21.3	Warenhaus	Früchte & Gemüse	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		Fleisch & Charcuterie	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21.4	Kaffee	Uhrzeit	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
		Minuten	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
		Stunden	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
21.5	Weitsprung	Gruppe	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		Gruppenrang	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		Weite	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
21.6	Übergewicht	Alter	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
		BMI	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
		Taillenumfang	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
		Hüftumfang	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
		Blutdruck_syst	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
		Blutdruck_diast	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
21.7	Freiwurf-Contest	Trefferanzahl	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21.8	Blut	Blutgruppe	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		Rhesusfaktor	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		Land	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21.9	Schwertlilien	Kelchblattlänge	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
		Kelchblattbreite	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
		Kronblattlänge	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
		Kronblattbreite	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
		Art	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

21.10	e-Bike	Reichweite	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
		Modell	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21.11	1-€-Münze	Masse	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
		Packung	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21.12	Bierfest	Haarlänge	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
		Biermenge	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
		Geschlecht	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21.13	Lohn	Lohn	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
		Geschlecht	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

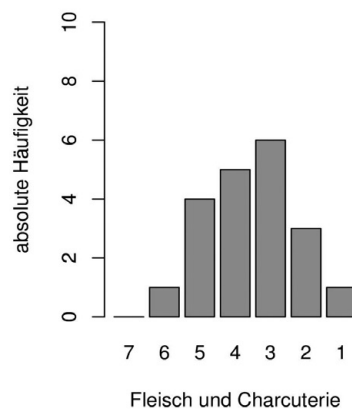
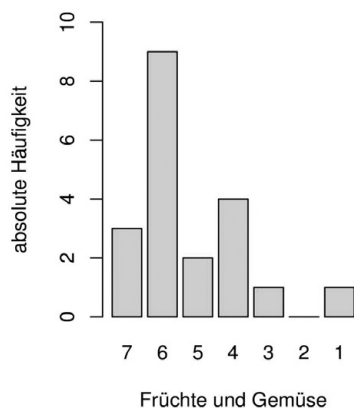
* Solche Skalen kommen in der Medizin und in der Psychologie häufig zur Anwendung. Aus statistischer Sicht ist es jedoch umstritten, ob die Merkmale als stetige Merkmale ausgewertet werden dürfen.

- 7.
- | | |
|--------------|--------------------|
| $x_1 = 36.9$ | $x_{[1]} = 36.2$ |
| $x_2 = 37.4$ | $x_{[2]} = 36.9$ |
| $x_3 = 39.1$ | $x_{[3]} = 37.4$ |
| $x_4 = 40.5$ | $x_{[4.5]} = 39.1$ |
| $x_5 = 39.1$ | $x_{[4.5]} = 39.1$ |
| $x_6 = 36.2$ | $x_{[6]} = 40.5$ |



Lösungen zu Übungen 87

8.



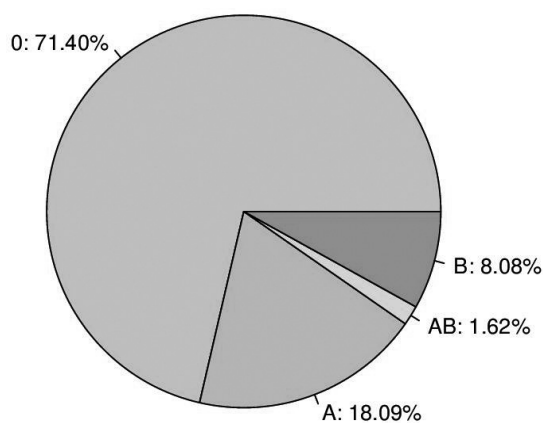
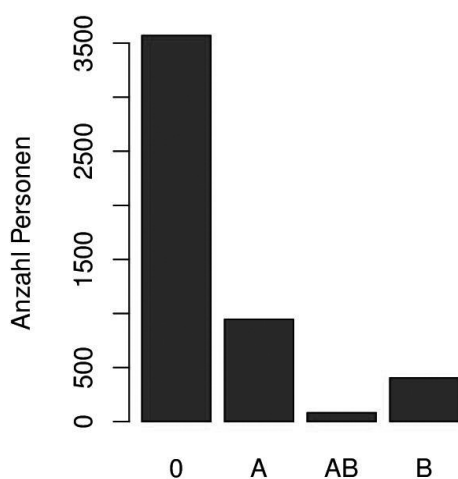
9.

—

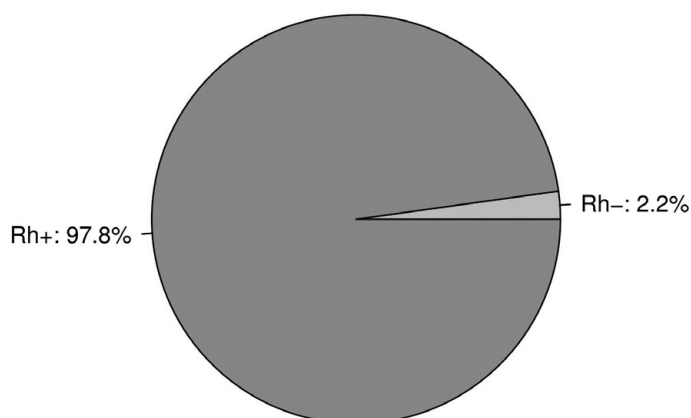
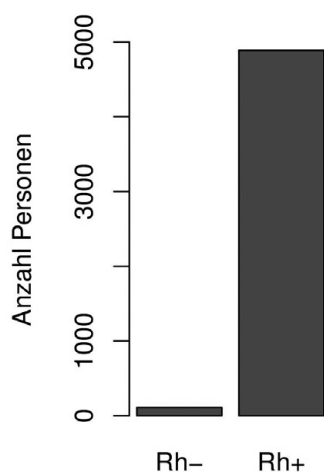
10. Bemerkung: Damit Lernende(r) im Selbststudium das Vorgehen besser kontrollieren können, sind in den Resultaten (zu) viele Ziffern angegeben. Grundsätzlich dürften in den Resultaten nicht so viele Ziffern angegeben werden, da sonst eine zu hohe Genauigkeit vorgetäuscht wird.

	absolute Häufigkeiten h_i	relative Häufigkeiten f_i	Zentriwinkel φ_i
römisch-katholisch	2 544 641	0.382	137.5°
evangelisch-reformiert	1 791 427	0.269	96.8°
übrige	812 434	0.122	43.9°
konfessionslos	1 428 700	0.214	77.2°
unbekannt	85 130	0.013	4.6°

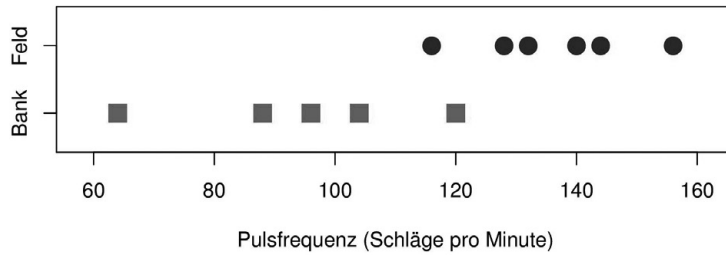
11. Je nach Startwinkel wirken gewisse Kuchenstücke zu gross oder zu klein im Vergleich zur dargestellten relativen Häufigkeit. Dreidimensionale Kuchendiagramme werden nicht selten zu manipulativen Zwecken missbraucht. Kreisdiagramme sind den dreidimensionalen Kuchendiagrammen vorzuziehen.
12. $\varphi_{Rh+} = 306^\circ$, $\varphi_{Rh-} = 54^\circ$
13. Blutgruppen:



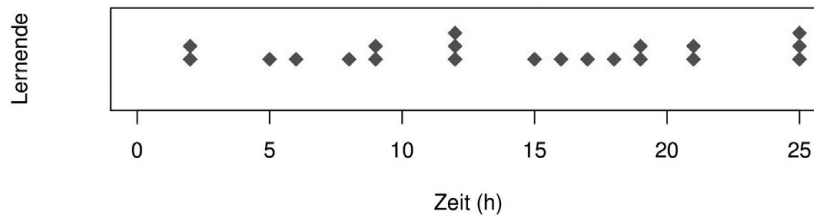
Rhesusfaktoren:



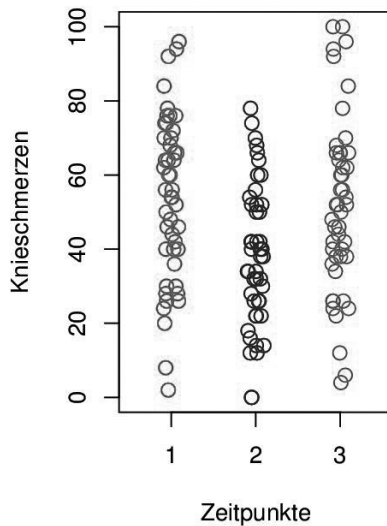
14.



15.



16. a)



b) Die Streifenplots lassen eine kurzfristige, jedoch keine nachhaltige Wirkung vermuten.

17. A: rechtsschief
B: symmetrisch
C: linksschief

18. A: multimodal
B: unimodal
C: bimodal, multimodal

19. **Beispiel**

21.4 Kaffee
21.5 Weitsprung
21.7 Freiwurf-Contest
21.13 Lohn

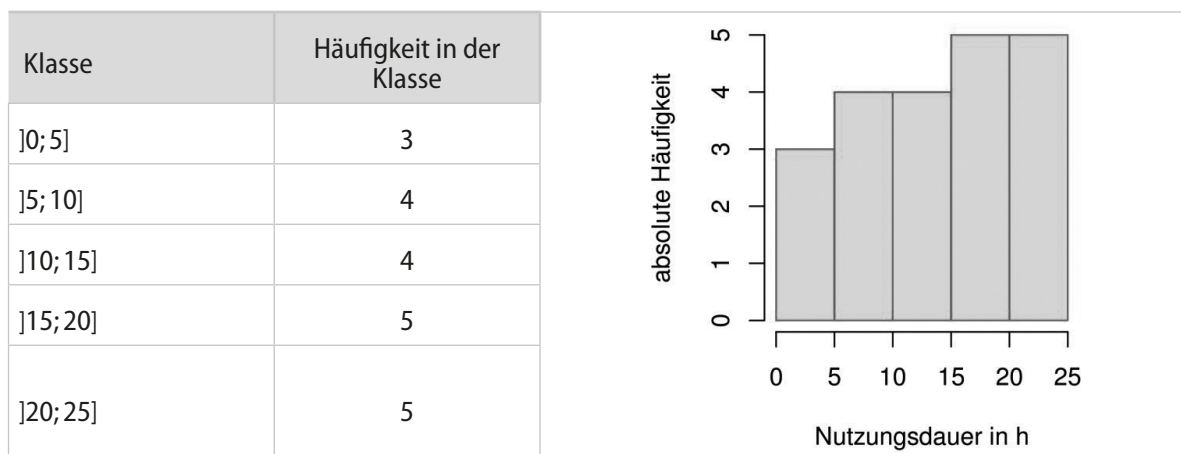
Variable

Stunden
Weite
Trefferanzahl
Lohn

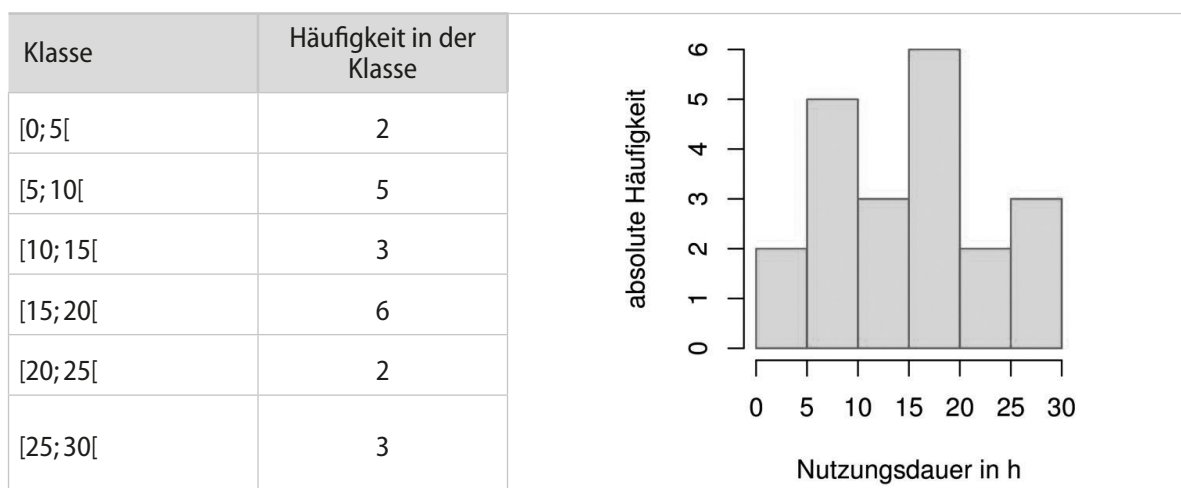
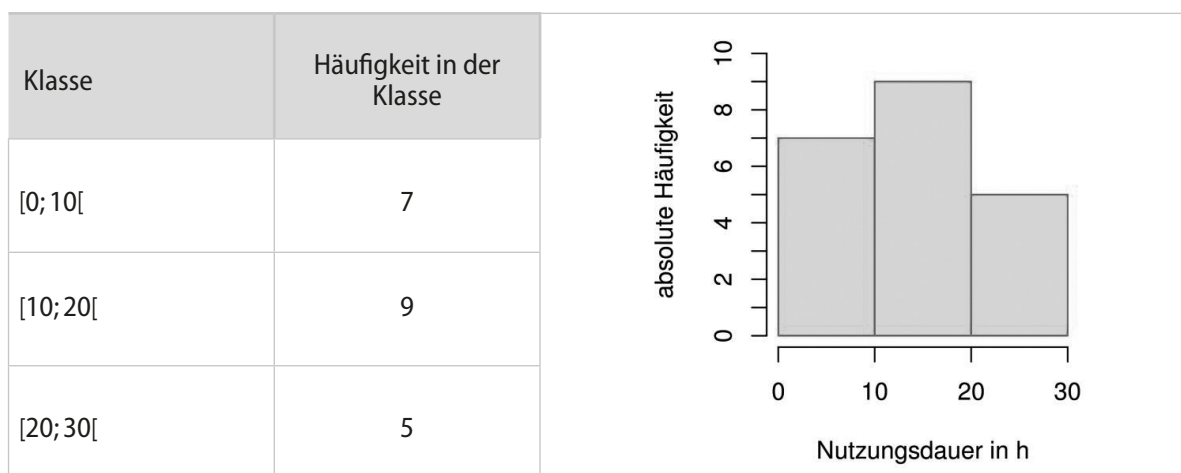
Charakterisierung

bimodal, multimodal
linksschief, unimodal
rechtsschief, unimodal
rechtsschief, unimodal

20. Zum Beispiel:

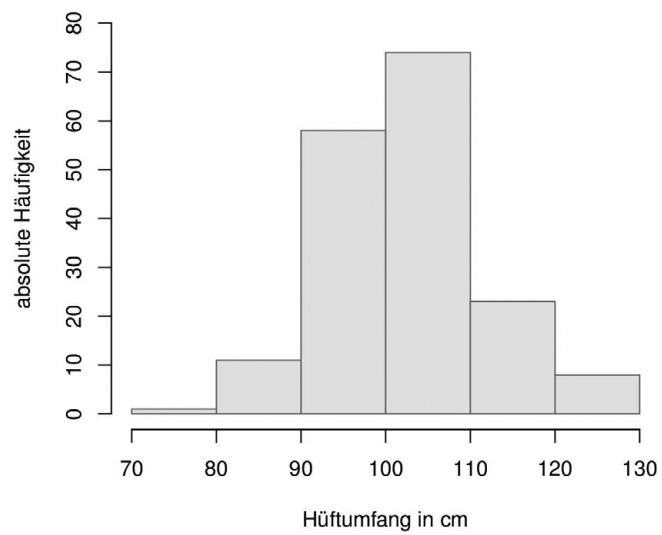
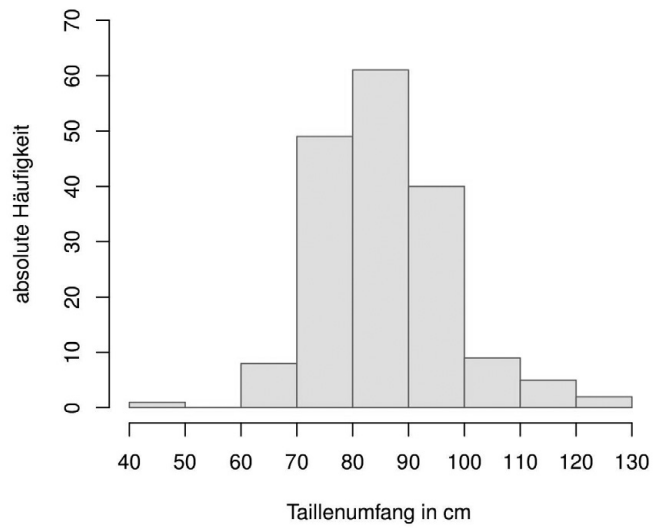


21. Zum Beispiel:



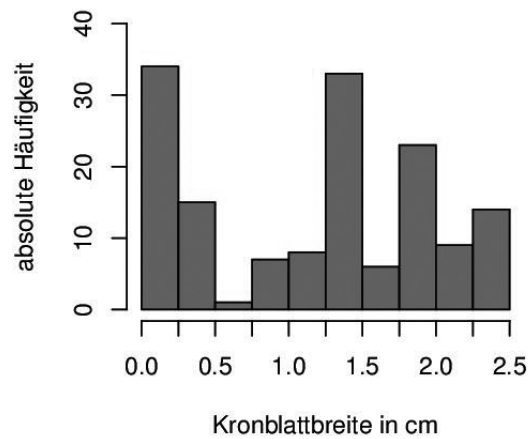
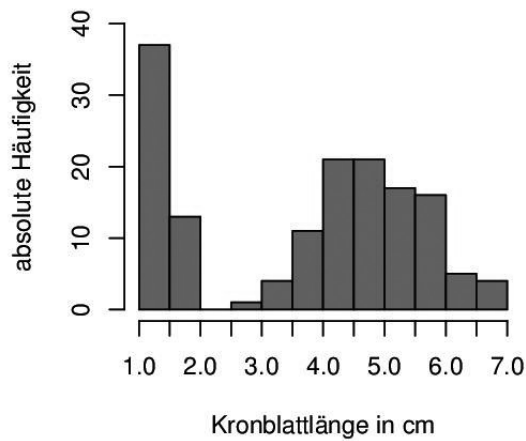
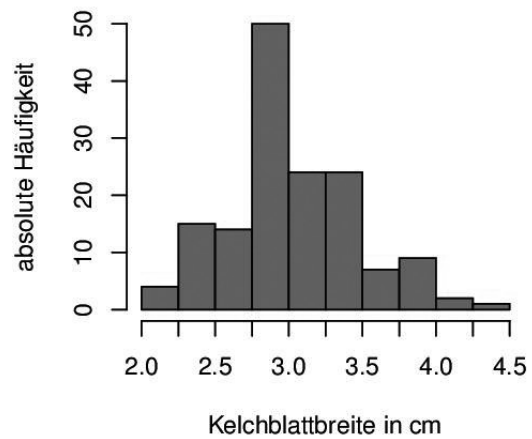
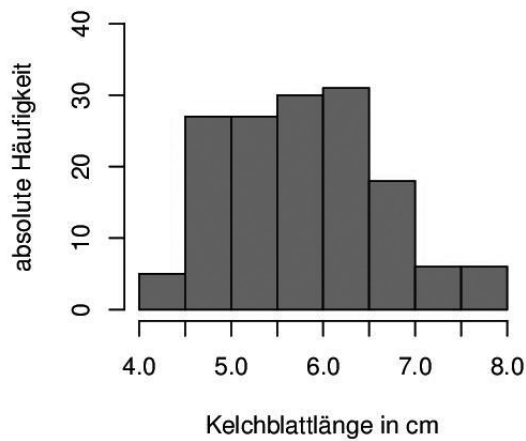
22. A: Die Anzahl Klassen ist zu klein.
 B: Die Klassengrenzen sind zum Lesen etwas unangenehm.
 C: gut
 D: Die Anzahl Klassen ist zu gross.

23.



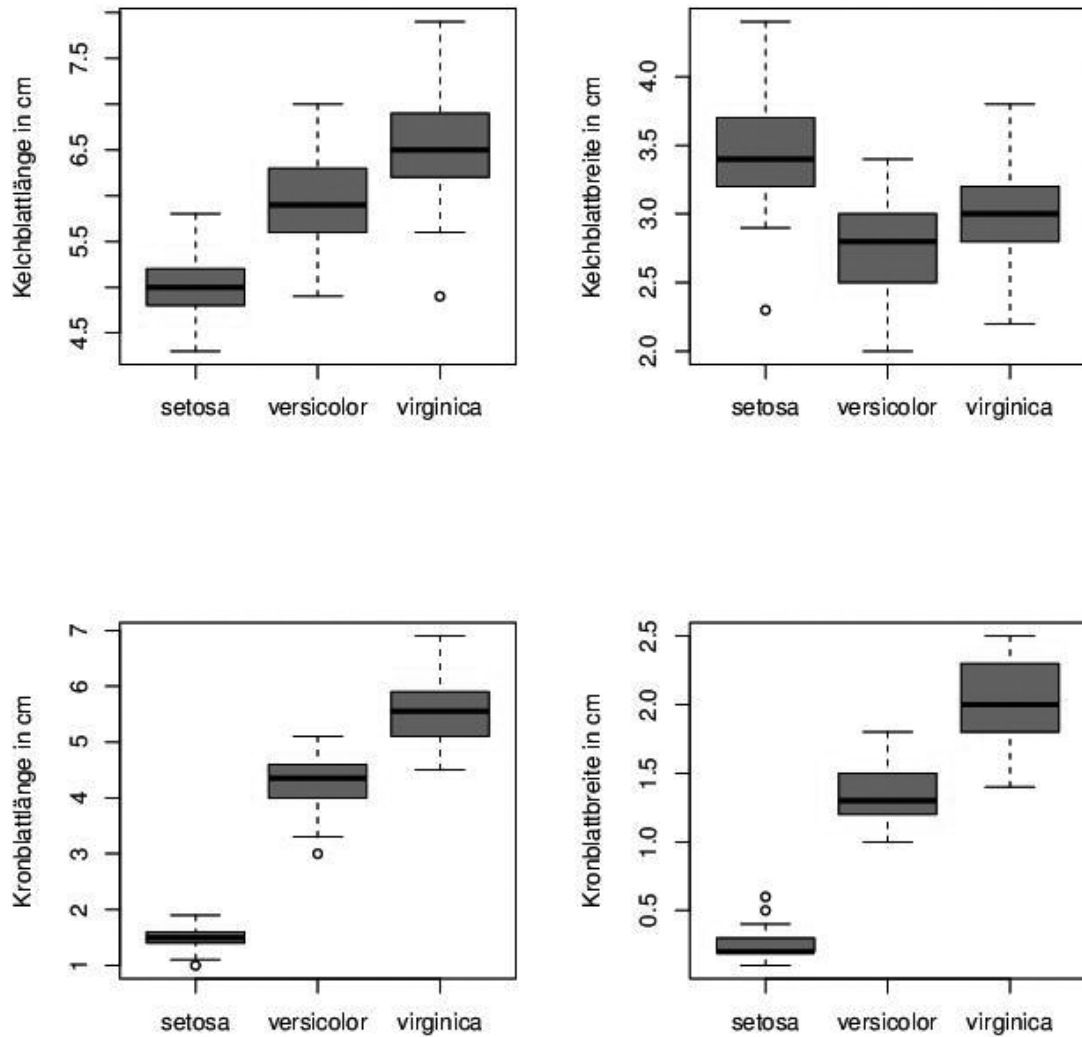
24. -

25. a)



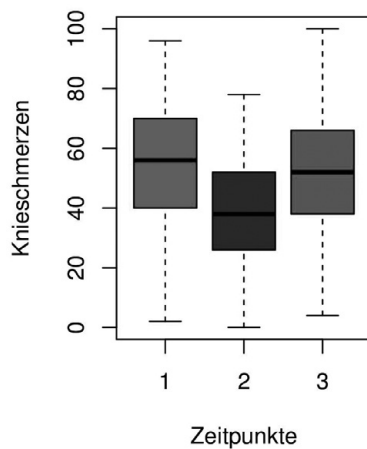
- b) Kelchblattlänge: unimodal
 Kelchblattbreite: unimodal
 Kronblattlänge: bimodal
 Kronblattbreite: multimodal
- c) In den Merkmalen Kronblattlänge und -breite scheint sich je eine Schwertlilienart ziemlich klar von den beiden anderen Arten zu unterscheiden. Im Histogramm zum Merkmal Kronblattbreite lassen sich „mit etwas gutem Willen“ sogar die drei Arten vermuten.

26. a)



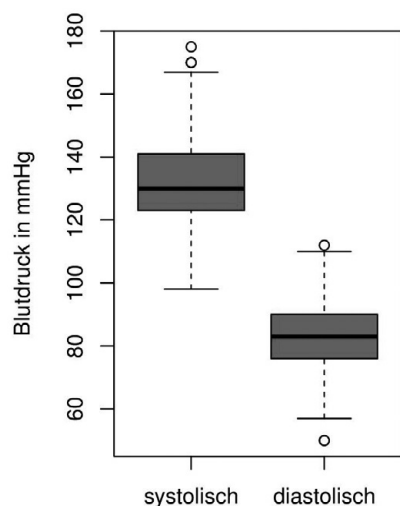
27. b) Der linke Gipfel in den Histogrammen der Merkmale Kronblattlänge und -breite stammt offenbar von der Schwertlilienart *setosa*. Die drei Gipfel im Histogramm zum Merkmal Kronblattbreite lassen sich tatsächlich als die drei Schwertlilienarten interpretieren.

a)



- b) Die Boxplots lassen (wie die Streifenplots) eine kurzfristige, jedoch keine nachhaltige Wirkung vermuten.

28.



29.

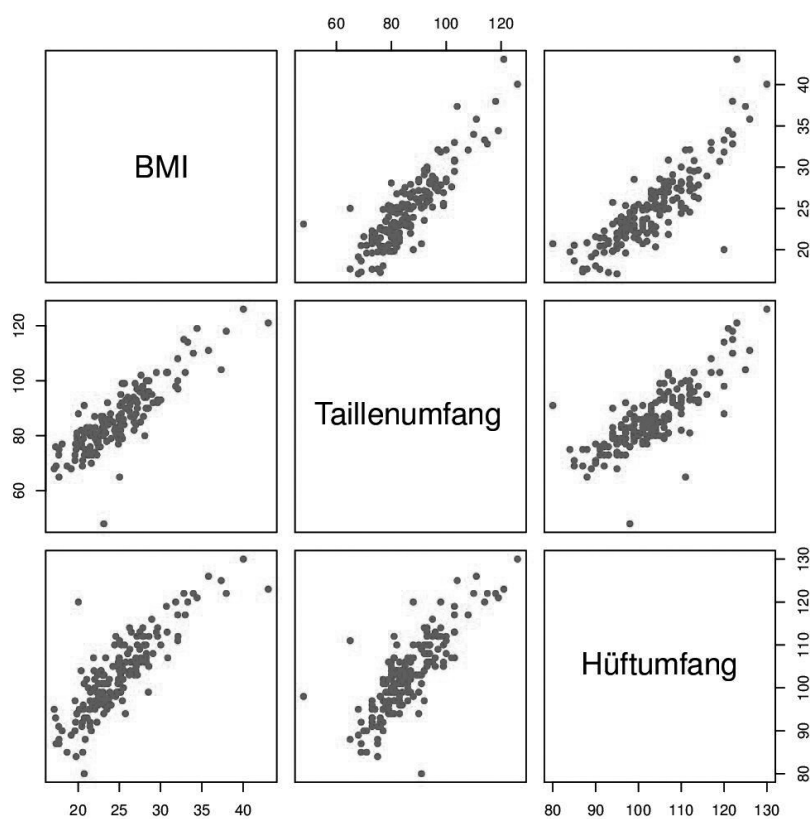
-

30.

- A: keine Korrelation
 B: positive Korrelation
 C: negative Korrelation
 D: positive Korrelation
 E: keine Korrelation
 F: keine Korrelation (evtl. quadratischer Zusammenhang)

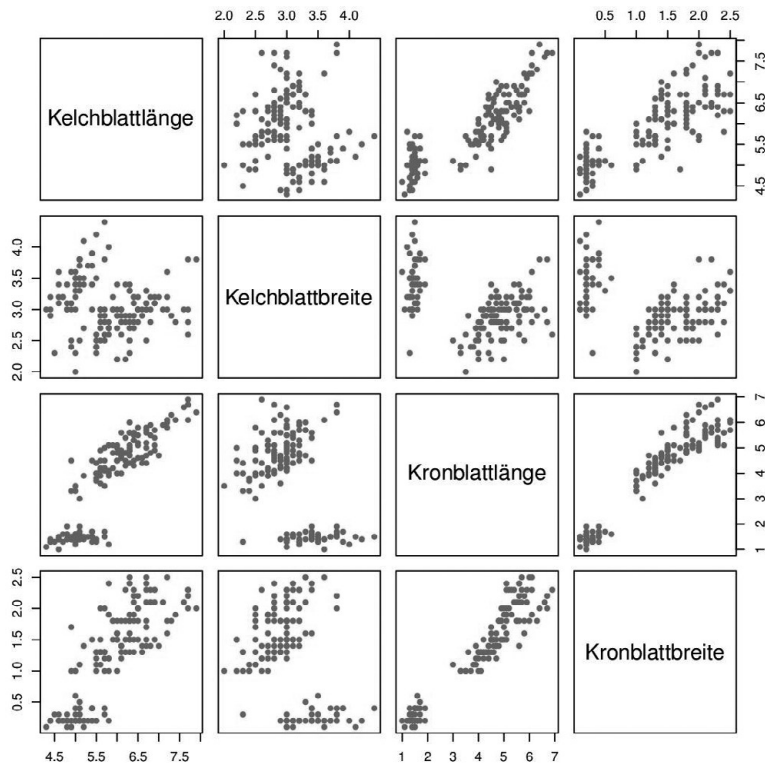
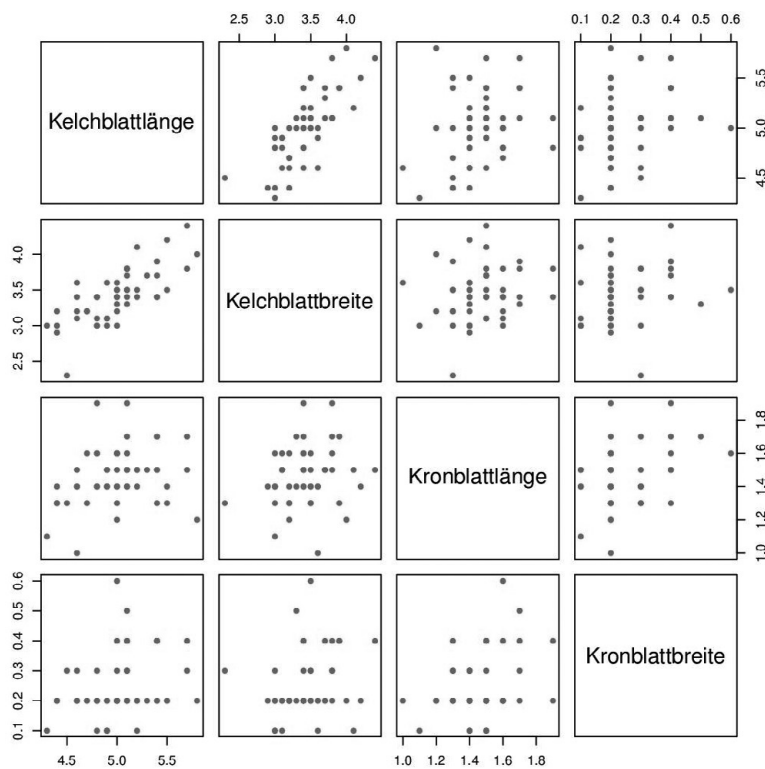
31.

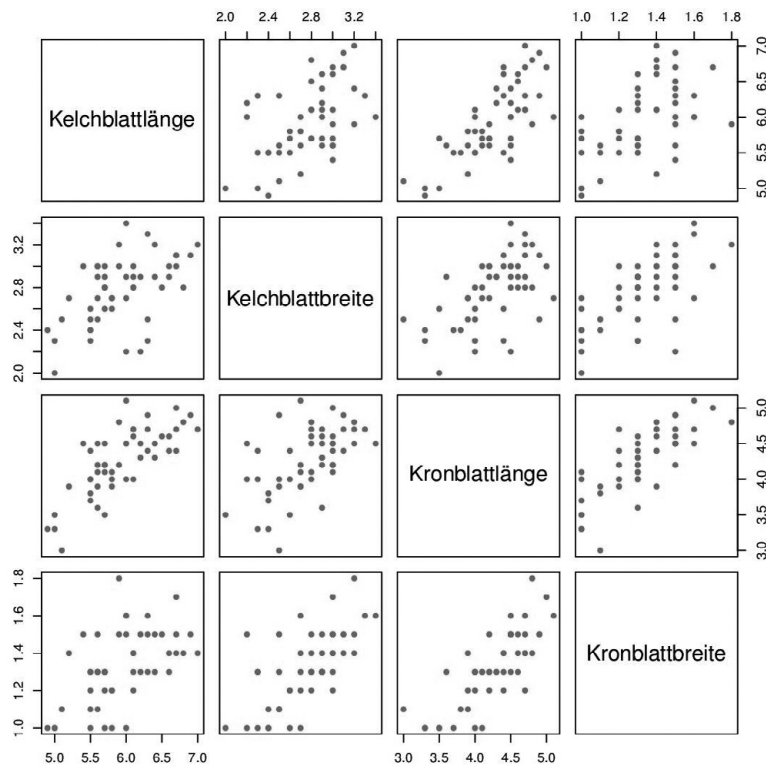
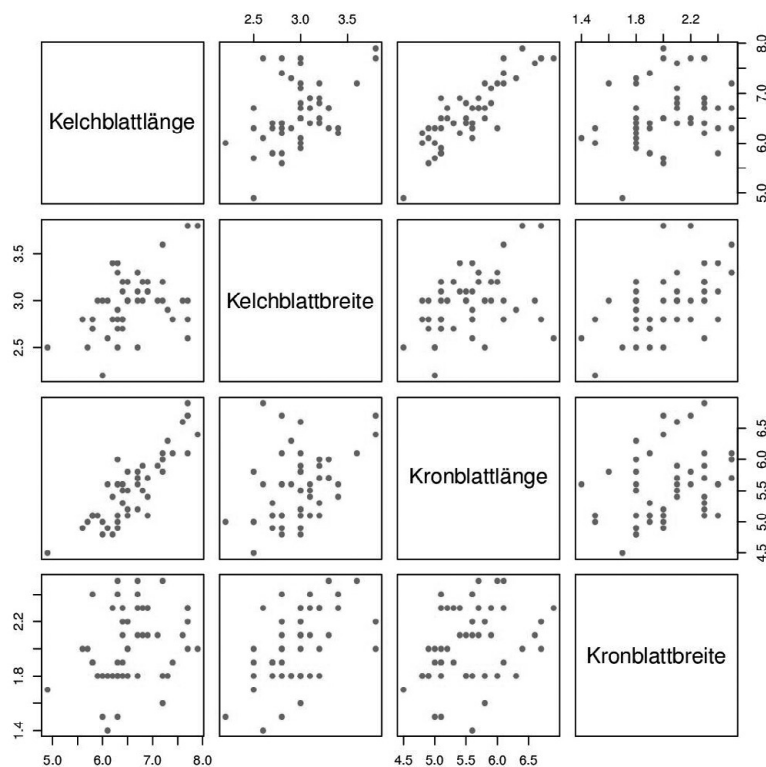
Einheiten: BMI in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$, Taillen-/Hüftumfang in cm



32. Einheit: cm

a)

b) *Iris setosa*

Iris versicolor*Iris virginica*

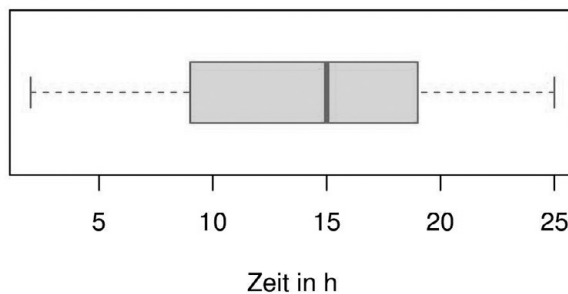
Die Streudiagramme aus Aufgabe a) lassen verschiedene Korrelationen vermuten. Die Streudiagramme aus Aufgabe b) zeigen schliesslich, dass es lediglich um (Schein-)Korrelationen handelt, die durch die Schwertlilienarten hervorgerufen werden. Die Variable Schwertlilienart wirkt als Störfaktor. Innerhalb der Arten sind wenige Korrelationen erkennbar. Z. B. *Iris virginica*: positive Korrelation zwischen Kelchblattlänge und Kronblattlänge.

33. –
34. A: Die Summe aller relativen Häufigkeiten ist nicht 100 %.
 B: Die Einheiten auf der y-Achse sind im oberen Teil gestreckt.
 C: Die y-Achse startet nicht bei der Häufigkeit 0 (= null).
 D: Die Klassen haben unterschiedliche Klassenbreiten.
 E: Die dreidimensionale Darstellung vermittelt ein falsches Bild von den Unterschieden in den Häufigkeiten.

Lösungen zu Übungen 88

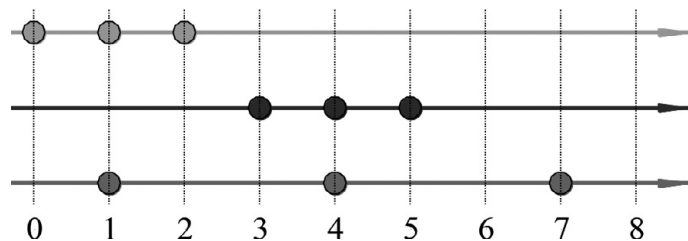
35. 1a) Stichprobenumfang
 1b) Minimum, Maximum
 1c) Mittelwert
 1d) Median
 1e) absolute Häufigkeit in einer Klasse
 1f) relative Häufigkeit in einer Klasse
36. Einheit: Schläge pro Minute
 Feld: $\bar{x} = 136$, $\tilde{x} = 136$, $SD = 13.856$
 Bank: $\bar{x} = 94.4$, $\tilde{x} = 96$, $SD = 20.707$
37. a) Einheit: Stunden
 $x_{\min} = 2$, $x_{\max} = 25$, $\tilde{x} = 15$, $Q_1 = 9$, $Q_3 = 19$

b)



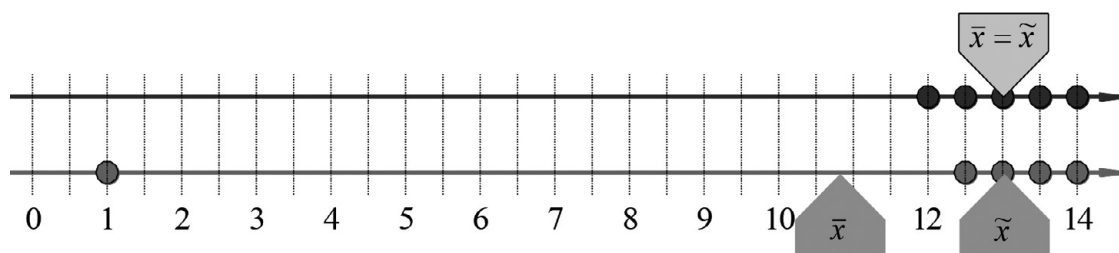
38.

	\bar{x}	SD
grüne Stichprobe	1	1
blaue Stichprobe	4	1
rote Stichprobe	4	3



39. Einheit: °C
- a) Mit Messfehler: $\bar{x} = 37.8$, $\tilde{x} = 37.2$
 Ohne Messfehler: $\bar{x} = 37.3$, $\tilde{x} = 37.2$
- b) Das Beispiel zeigt, dass der Mittelwert anfällig auf Messfehler ist. Der Median ist deutlich robuster als der Mittelwert.

40. a) Blaue Stichprobe: $\bar{x} = 13$, $\tilde{x} = 13$
Rote Stichprobe: $\bar{x} = 10.8$, $\tilde{x} = 13$



- b) Das Beispiel zeigt, dass der Mittelwert anfällig auf Ausreisser ist. Im Gegensatz zum Mittelwert ist der Median eine robuste Kennzahl.

41. Z. B.:

- a) 1, 2, 5 b) 1, 4, 5
c) 1, 3, 5, 9 d) 1, 3, 5, 6

42. Einheit: cm

	\bar{x}	\tilde{x}	x_{\min}	x_{\max}	Q_1	Q_3	SD	IQR	SW
Taillenumfang	86.063	84	48	126	79	93	11.467	14	78
Hüftumfang	102.931	103	80	130	97	108	8.931	11	50

43. Einheit: g

- a)

	\bar{x}	\tilde{x}	x_{\min}	x_{\max}	Q_1	Q_3	SD	IQR	SW
Ganze Stichprobe	7.521	7.520	7.201	7.752	7.498	7.544	0.034	0.046	0.551

- b) Packung 4: $\bar{x} = 7.531$, $\tilde{x} = 7.533$
 Packung 5: $\bar{x} = 7.531$, $\tilde{x} = 7.531$
 Die beiden Packungen sind bezüglich zentraler Lage nahe beieinander. Mittelwert und Median beider Packungen liegen jedoch wesentlich über den Werten der ganzen Stichprobe.
- c) Packung 7: $SD = 0.033$, $IQR = 0.046$
 Packung 8: $SD = 0.036$, $IQR = 0.044$
 Die Standardabweichung der Packung 8 wird durch einen Ausreisser nach oben getrieben.

44. a)

	\bar{x}	\tilde{x}	SD	IQR
Zeitpunkt 1 (vor)	53.873	56	22.159	30
Zeitpunkt 2 (nach_1_Woche)	38.255	38	18.990	26
Zeitpunkt 3 (nach_3_Monaten)	51.660	52	23.684	28

- b) Die Vermutung aus den grafischen Darstellungen wird unterstrichen: Eine kurzfristige jedoch keine nachhaltige Wirkung darf vermutet werden.
- c) Bei grossen Streuungen kann ein (kleiner) Unterschied in der zentralen Lage bedeutungslos sein.

45. Einheit: km

	\bar{x}	\tilde{x}	SD	IQR
Modell A	54.870	55.050	1.690	1.950
Modell B	57.460	53.850	15.401	19.275

Obwohl der Mittelwert von Modell B über demjenigen von Modell A liegt, wäre das Modell A zu bevorzugen. Die deutlich höhere Streuung der Reichweite von Modell B erhöht das Risiko, dass Sie den letzten Streckenteil Ihrer Velotour mit der eigenen Beinarbeit bewältigen müssen.

46. –

	robust	nicht robust
Mittelwert	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Median, Quantile	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Modus	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Minimum, Maximum	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Standardabweichung	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Interquartilsabstand	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Spannweite	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

48. $(A1|B2|H1), (A2|B1|H3), (A3|B3|H2)$

49. Einheit: cm

a) $\frac{1 \cdot 145 + 2 \cdot 155 + 10 \cdot 165 + 23 \cdot 175 + 19 \cdot 185 + 6 \cdot 195}{61} = \underline{\underline{177.3}}$

b) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k f_i \cdot m_i$

wobei n : Stichprobenumfang
 k : Anzahl Klassen
 f_i : absolute Häufigkeit in der i -ten Klasse
 m_i : Klassenmitte der i -ten Klasse