Trần Thị Thu Trang_MSV:11208164

MACHINE LEARNING

HOMEWORK 1

Ex1:

(a) The marginal distributions P(x) and P(y)

	X1	X2	X3	X4	X5	**Total**
Y3	0.1	0.05	0.03	0.05	0.04	**0.27**
Y2	0.05	0.1	0.05	0.07	0.2	**0.47**
Y1	0.01	0.02	0.03	0.1	0.1	**0.26**
Total	**0.16**	**0.17**	**0.11**	**0.22**	**0.34**	**1**

❖ Marginal distribution P(x):

P(x1)= 0.1 + 0.05 + 0.01 = 0.16

P(x2)= 0.05 + 0.1 + 0.02 = 0.17

P(x3)= 0.03 + 0.05 + 0.03 = 0.11

P(x4)= 0.05 + 0.07 + 0.1 = 0.22

P(x5)= 0.04 + 0.2 + 0.1 = 0.34

❖ Marginal distribution P(y):

P(y1)= 0.01 + 0.05 + 0.03 + 0.05 + 0.04 = 0.027

P(y2)= 0.05 + 0.1 + 0.05 + 0.07 + 0.2 = 0.47

P(y3)= 0.01 + 0.02 + 0.03 + 0.1 + 0.1 = 0.26

(b) The conditional distributions P(x|Y=y1)and P(x|Y=y3)

❖ P(x|Y=y1):

P(x=x1|Y=y1)= $\frac{P(x=x1\ and\ Y=y1)}{P(Y=y1)} = \frac{0.01}{0.26} =$ 0.038462

P(x=x2|Y=y1)= $\frac{P(x=x2\ and\ Y=y1)}{P(Y=y1)} = \frac{0.02}{0.26} =$0.076923

P(x=x3|Y=y1)= $\frac{P(x=x3\ and\ Y=y1)}{P(Y=y1)} = \frac{0.03}{0.26} =$ 0.115385

P(x=x4|Y=y1)= $\frac{P(x=4\ and\ Y=y1)}{P(Y=y1)} = \frac{0.1}{0.26} =$ 0.384615

P(x=x5|Y=y1)= $\frac{P(x=5\ and\ Y=y1)}{P(Y=y1)} = \frac{0.1}{0.26} =$ 0.384615

❖ P(x|Y=y3):

P(x=x1|Y=y3)= $\frac{P(x=1 \ and \ Y=y3)}{P(Y=y3)} = \frac{0.1}{0.27} =$ 0.37037

P(x=x2|Y=y3)= $\frac{P(x=2 \ and \ Y=y3)}{P(Y=y3)} = \frac{0.05}{0.27} =$ 0.185185

P(x=x3|Y=y3)= $\frac{P(x=3 \ and \ Y=y3)}{P(Y=y3)} = \frac{0.03}{0.27} =$ 0.111

P(x=x4|Y=y3)= $\frac{P(x=4 \ and \ Y=y3)}{P(Y=y3)} = \frac{0.05}{0.27} =$ 0.185185

P(x=x5|Y=y3)= $\frac{P(x=5 \ and \ Y=y3)}{P(Y=y3)} = \frac{0.04}{0.27} =$ 0.148148

Ex2: Consider two random variables x, y with joint distribution P(x, y). Show that:

$\boldsymbol{E_x[X] = E_Y[E_X[x|y]]}$

Here, $E_x[x|y]$ denotes the expected value of x under the conditional distribution P(x, y)

$P(x,y) = P(y|x).P(x)$ or $P(x,y) = P(x/y).P(y)$

$$E_Y[E_X[x|y]] = \int_{-\infty}^{\infty} E_X[x|y].f_y(y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x.\ f_{x|y}(x|y)dx.f_y(y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf_{x,y}(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)dy.dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x.f_X(x)dx$$

$= E_x(X)$

Hence, it is prove : $E_x[X] = E_Y[E_X[x|y]]$

Ex3:

Đặt A : " người dân trong thành phố dùng sản phẩm X "

B : " người dân trong thành phố dùng sản phẩm Y "

$P(A) = 0.207$

$P(B) = 0.5$

$P(A/B) = 0.365$

a) dùng cả X và Y :

P(AB) = P(B).P(A/B) = 0.5 * 0.365 = 0.1825

b) dùng Y , biết rằng không dùng X:

- $P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.207 = 0.793$
- $P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B) = 1 - 0.365 = 0.635$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B.\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B).P(\bar{A}/B)}{P(\bar{A})} = \frac{0.5 * 0.635}{0.793} = 0.400378$$

Ex4: Prove the relationship: $V_X = E_X[x^2] - (E_X[x])^2$, which relates the standard definition of the variance to the raw-score expression for the variance

The eception: $E_X(x) = \mu$

$$E_X = \sum xf(x)$$

We have:

$$V_X = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$$

$$= E_X(x-\mu)^2 = E_X(x^2 - 2x\mu + \mu^2) = E_X(x^2) - 2\mu E_X(x) + E_X.(\mu^2)$$

$$= E_X(x^2) - 2E_X(x)E_X(x) + E_X.(E_X[x])^2 = E_X(x^2) - 2(E_X[x])^2 + (E_X[x])^2$$

$$V_X = E_X(x^2) - (E_X[x])^2$$

Hence it is proved.

Ex5:

Giả sử ta chọn ô cửa số 1 là ô cửa ban đầu

Đặt X : "biến cố chiếc xe ở ô cửa số 1"

Y : " biến cố Monty mở ô cửa số 2"

- Để cả 2 sự kiện xảy ra cùng nhau: P(XY) = P(X/Y).P(Y)

Hoặc P(XY) = P(Y/X).P(X)

- Giả sử chiếc xe ô tô nằm ở cửa số 1 thì xác suất để Monty mở cửa số 2 là $\frac{1}{2}$ vì Monty chỉ có thể mở cửa số 2 và 3. Vậy xác suất để Monty mở cửa số 2 khi chiếc xe ở cửa số 1 là $P(Y/X) = \frac{1}{2}$
- Vì không thể biết chiếc xe ở đâu trong 3 cửa nên => P(X) = $\frac{1}{3}$
- Còn lại 2 của nên xác suất để Monty mở cửa số 2 => P(Y) = $\frac{1}{2}$

$$P(XY) = P(Y/X).P(X) = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

- Xác suất để chiếc xe ở cửa số 1 khi Monty mở cửa số 2 là:
  $$P\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{P(XY)}{P(Y)} = \frac{1}{6} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

- Giả sử Z: "biến cố chiếc xe ở cửa số 3"

Trong hai cửa 1 và 3 chắc chắn sẽ có xe nên có thể thấy 2 biến cố X, Z xung khắc nhau => P(X) + P(Z) = 1

⇨ P(Z) = 1-P(X) = 1- $\frac{1}{3}$ = $\frac{2}{3}$ = 66.67%

Vì vậy khi Monty hỏi ta có đổi sang cửa số 3 hay giữ lại cửa số 1 thì tốt nhất ta nên đổi sang cửa số 3 vì điều này sẽ làm cho xác suất trúng xe cao hơn.