20217043
강주민

1.5 SOLUTION SETS OF LINEAR SYSTEM.

- Homogeneous Linear System.

  ↳ written in the form $A\vec{x}=0$.

Homogeneous
① 항상 하나이상의 해를 가짐 ($\vec{x}=0$)
⇒ trivial solution.
② Non-zero vector $\vec{x}$를 가지며, $Ax=0$을 만족하는 경우
⇒ Nontrivial Solution.

Homogeneous Equation이 1개 이상의 Free variable을 가질경우, Nontrivial solution을 가지게 된다.

- Homogeneous Equation $A\vec{x}=0$

$$\vec{x} = s\vec{u} + t\vec{v} \quad (s, t \text{ in } \mathbb{R})$$

$\vec{x}$는 $\vec{u}$와 $\vec{v}$의 선형결합으로 만들수있는 모든 선형결합을 의미.
(Parametric vector form)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .3x_2 + .2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .3x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} .2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_2 \underset{\mathbf{u}}{\begin{bmatrix} .3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_3 \underset{\mathbf{v}}{\begin{bmatrix} .2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad \text{(with } x_2, x_3 \text{ free)}$$

- Solutions of Nonhomogeneous System.

$$A\vec{x} = b.$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

1개이상이 0이아님!

$\vec{x} = p + t\vec{v}$ (t in $\mathbb{R}$) (p는 particular solution
v는 homogeneous Solution.

Nonhomogeneous System의 Solution은
particular solution과 homogeneous solution 합으로 표현된다.

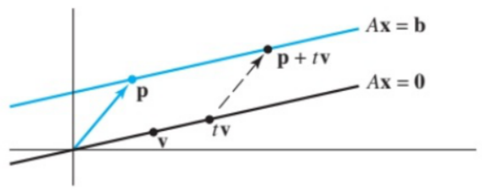


FIGURE 5 Parallel solution sets of $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ and $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Nonhomogeneous Solution set은 Homogeneous Solution set을 p만큼 평행이동 시킨것과 같다.

(Free variable이 1개(직선), 2개(평면)...)

- Homogeneous solution은 $A\vec{x}=0$ 이라 반드시 0을지나는데,
Nonhomogeneous solution은 0을지나지 않는다.

1.5. EXERCISES.

13. Suppose the solution set of a certain system of linear equations can be described as $x_1 = 5 + 4x_3, x_2 = -2 - 7x_3$, with x_3 free. Use vectors to describe this set as a line in $\mathbb{R}^3$.

sol.)
$$x_1 = 5 + 4x_3$$
$$x_2 = -2 - 7x_3$$
x_3 is free.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+4x_3 \\ -2-7x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4x_3 \\ -7x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.7 LINEAR INDEPENDENCE.

벡터 $v_1, v_2, \cdots v_n$ 에대해

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0$$ 에서

$c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n$이 모두 0 이면 벡터 v는 linear independent.

⇒ 해가 유일하다. (trivial solution)

ex)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

solution은 $c_1 = 0$. $c_2 = 0$ 뿐,,

반면, $c_1, c_2, c_3 \cdots c_n$가 0 이아니라면 벡터 v는 linear dependent. (nontrivial solution).

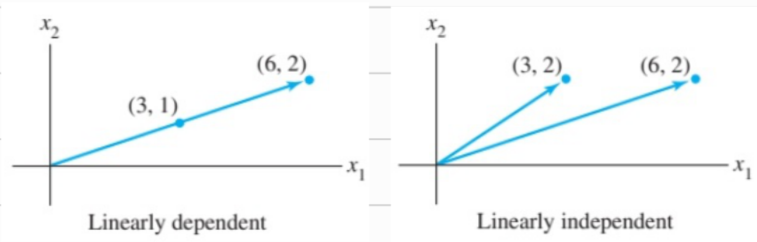
ex) $10v_1 - 5v_2 + 5v_3 = 0$.

벡터 v_1, v_2, v_3앞에있는 $10, -5, 5$가 0이아닌데 결과적으로 식을 만족. → linear dependent,,

$v_1 = 0$ | $v_1 = 2$
$v_2 = 2$ or $v_2 = 4$ ...
$v_3 = -2$ | $v_3 = 0$

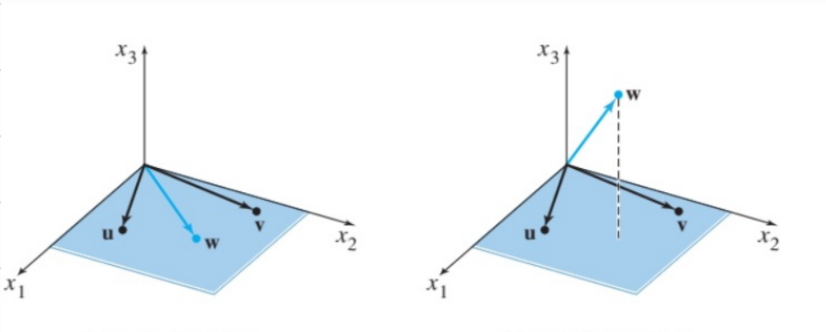
• 집합이 하나의 벡터 v 만 가지며, v가 0이 아닐때
v는 linear independent 함.
왜냐하면 v=0 일경우 $x_1 v = 0$ 에서 x_1이 어떤값이든 식을만족하게 됨 → linear dependent.

• 두 벡터의 집합에서 한 벡터가 다른벡터의 multiplation으로 표현가능하면, linear dependent.



Linearly dependent   Linearly independent

• 벡터집합에서 2개 이상의 벡터가 linearly dependent 하다면, 적어도 1개 이상의 벡터는 다른벡터들의 linear combination으로 나타낼수있다.



Linearly dependent, **w** in Span{**u**, **v**}   Linearly independent, **w** *not* in Span{**u**, **v**}

u와 v가 linearly independent 할때,
{u, v, w}가 linearly dependent 하다면 w는 Span{u, v}.

↓

u와 v의
linear combination으로
표현가능함을 의미.

• n차원공간에 P(> n) 개의 벡터가 있다면 linearly Dependent.

3

2 (⇒ 3 개의 변수 2개의 방정식.

∴ 무조건 1개는 Free Variable.

⇒ 많은 solution

⇒ nontrivial solution

⇒ linear Dependent.

• $\mathbb{R}^n$에서의 Set S가 zero vector를 가진다면 linearly dependent.

$$c_1v_1 + \underbrace{c_2v_2 + c_3v_3 + \cdots + c_nv_n}_{0 \text{ 이라 해놓았을때}} = 0$$

v_1이 0이면 c_1이 어떤값이어도 식이 성립 ⇒ linearly Dependent.

1.7. EXERCISES.

21. Mark each statement True or False.

a. The columns of a matrix A are linearly independent if the equation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has the trivial solution. True.

b. If S is a linearly dependent set, then each vector is a linear combination of the other vectors in S. False.: each(X) at least one

c. The columns of any 4×5 matrix are linearly dependent.

d. If $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are linearly independent, and if $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ is linearly dependent, then $\mathbf{z}$ is in Span $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$.

Sol). a. True

b. False → each(X), at least one.

c. False → $\overline{5})4$, 1개 무조건 Free variable.

d. True.

1.8. INTRODUCTION TO LINEAR TRANSFORMATIONS.

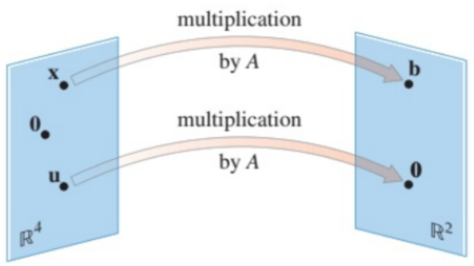


FIGURE 1 Transforming vectors via matrix multiplication.

행렬곱을 이용한 Transforming.
(= mapping)
(= Transformation)

$Ax=b$를 푼다는것?
: 변환된 벡터 b가 있을때,
그에해당하는 원래벡터 x를찾는것.

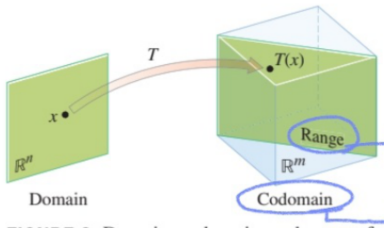


FIGURE 2 Domain, codomain, and range of $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Codomain과 Range가 같을수도있음

Codomain에서 초록색영역

공역이다.

$T(X)$는 X의 image라 부름.

image의 모든 set은
T의 range.

- Matrix Transform. ⇒ $T: R^n \to R^m$
$= x \mapsto Ax$.

R^n 공간의 x을 T를 통해 ($T(X)$ 연산) R^m 공간의 $T(X)$연산값으로,
(AX)

⇒ $T(X) = AX$ //

A transformation (or mapping) T is **linear** if:

(i) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for all $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ in the domain of T;
(ii) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ for all scalars c and all $\mathbf{u}$ in the domain of T.

2개만족하는
Transformation은
linear Transformation임.

1.8 EXERCISES.

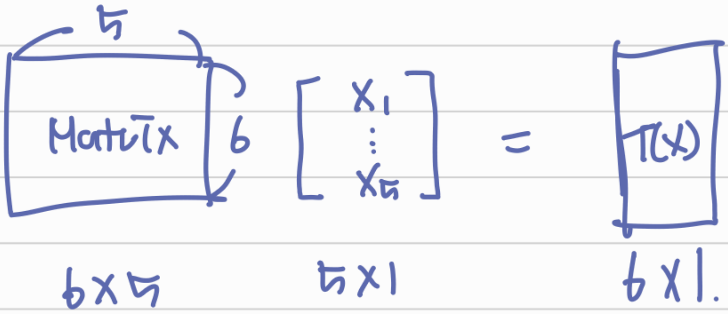
7. Let A be a 6×5 matrix. What must a and b be in order to define $T: \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^b$ by $T(x) = Ax$?

Sol) $A = 6\times 5$ matrix

(행렬곱)

Ax 연산을 위해서 x는 5×1 이어야함.
(5차원벡터).

따라서 $a=5$. $b=6$.



1.9. THE MARIX OF A LINEAR TRANSFORMATION.

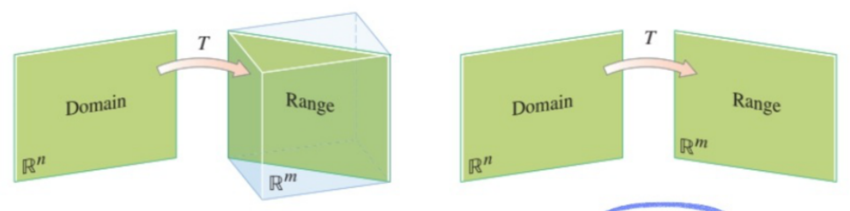
- $T(x) = Ax$ 에서 A는 모를때,
  $n \times n$ identity matrix I의 열 e_1, e_2 의 이미지
  $T(e_1)$, $T(e_2)$를 알면 A를 구할수있다.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(x) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2)$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x.} = Ax.$$

이때 $A = \begin{bmatrix} T(e_1) & \cdots & T(e_n) \end{bmatrix}$ 이라면
A는 standard matrix for the linear transform. T.

- onto. : T의 Range가 모두 Codomain에 있다.
  (Range = Codomain)
  ⇒ $T(x) = b$에서 모든 b에대해 Solution x가 존재.



T is *not* onto $\mathbb{R}^m$ | T is onto $\mathbb{R}^m$

FIGURE 3 Is the range of T all of $\mathbb{R}^m$?

• one-to-one. : 하나의 x는 하나의 b만 갖는다.

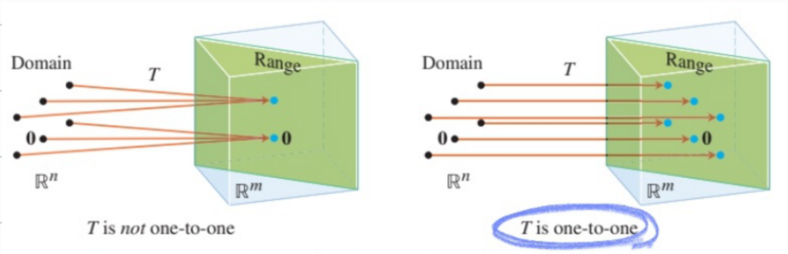


FIGURE 4 Is every **b** the image of at most one vector?

• T가 one-to-one 이면 T(x)=0 은 trivial solution 만 가진다.

⇔ Ax=0 가 trivial solution 밖에 없다.
⇔ Ax=0 가 unique or none
⇔ T(x)=0 가 trivial solution 밖에 없다.
⇔ T가 one-to-one 이다.

Let $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be a linear transformation, and let A be the standard matrix for T. Then:

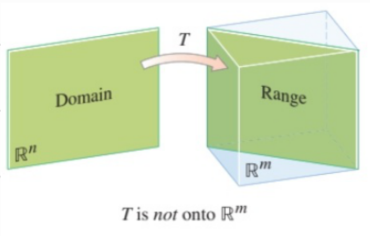
a. T maps $\mathbb{R}^n$ onto $\mathbb{R}^m$ if and only if the columns of A span $\mathbb{R}^m$;
b. T is one-to-one if and only if the columns of A are linearly independent.

1.9. EXERCISES.

35. If a linear transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ maps $\mathbb{R}^n$ *onto* $\mathbb{R}^m$, can you give a relation between m and n? If T is one-to-one, what can you say about m and n?

sol).

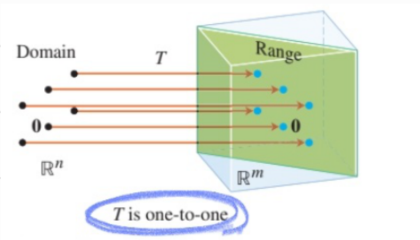
onto는 $\underset{\mathbb{R}^n}{\text{domain}} = \underbrace{\text{Range} = \text{Codomain}}_{\mathbb{R}^m}$. 이 성립해야함.



T is *not* onto $\mathbb{R}^m$

$\therefore n = m$ 차원이 같아야함.

만약, T가 onto가 아닌 one-to-one 이라면,
$m = n$ 이거나 $m \neq n$ 상관없다.



T is one-to-one