2.5 MATRIX FACTORIZATIONS.

· Factorization ⇒ 하나의 Matrix를 두개의 Matrix 곱으로 표현하는것.

· $Ax = b_n$ 방정식을 풀때 ① $x = A^{-1} b_n$ 방법으로 풀수있다.

② LU Factorization

더 효율적.

Upper Triangular Matrix.

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

Low Triangular matrix

FIGURE 1 An LU factorization.

(예시)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = LU$$

· $Ax = b$를 한번에 푸는것보다 $Ly = b$, $Ux = y$ 로 두번푸는게 더 쉽다.

⇒ L과 U가 Triangular 하기때문.

· LU를 구하는 알고리즘.

→ U는 Upper Triangular 인데 echelon form 형태와 같기도함.

→ 따라서 A를 row operation 해줬을때 echelon form 이 U 가됨.

→ 이때 $A = LU$ 식을 참고하면, $L = U^{-1}$: L은 U의 역행렬이여함.

$$E_p \cdots E_1 A = U$$

$$A = (E_p \cdots E_1)^{-1} U = LU$$

$$L = (E_p \cdots E_1)^{-1}$$

→ 구하는 알고리즘은!

A를 U(echelon form)로 변환하는 row operation을 할때 I에 반대부호를 적용하면 L이 나온다.

$[A \mid I]$ → A에 + 연산을 해줬다면 → $[U \mid L]$

I에는 − 연산을!

(혹은 그 반대).

(혹은).

→ A를 U로 row reduce 하는 과정에서 row operation을 하는 column의 pivot 아래 숫자를 pivot으로 나눈게 L의 diagonal 아래에 들어간다.

2.5 EXERCISES.

20. Let $A = LU$ be an LU factorization. Explain why A can be row reduced to U using only replacement operations. (This fact is the converse of what was proved in the text.)

Sol.). < Solving a Linear System >

→ 기본 행 연산 (Elemetary Row Operations, ERO)

↳ Replacement

: 다른 행(another row)에 곱해준 하고, 해당 행(one row)에 더하는것 (혹은 빼는것).

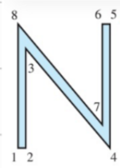
$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

FIGURE 1 An LU factorization.

U는 upper triangular matrix로 pivot 아래가 모두 0이다.

따라서 row replace 연산만으로도 가능.

2.7. APPLICATIONS TO COMPUTER GRAPHICS.



에 어떤 matrix S, D를 곱함으로써  이런형태로 변환!.

= $\boxed{\text{Transformation}}$

컴퓨터 그래픽 분야에서는 행렬곱을 통한 '변환'을 이용하고자하는데, Translation(평행,이동)의 경우 선형적이지 않아 곱셈으로 표현이 어렵다.

· Homogeneous Coordinates ⇒ Translation을 구현할수있다!

: $(x,y) \mapsto (x+h, y+k)$ h, k만큼 Translation 하고싶을때

Homogeneous Coordinate는 $(x,y,1) \mapsto (x+h, y+k, 1)$로 표현.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+h \\ y+k \\ 1 \end{bmatrix}$$

· Homogeneous 3D Coordinates

: (x,y,z)의 Homogeneous 좌표는 (X,Y,Z,H) if $H \neq 0$.

$$x = \frac{X}{H}, \quad y = \frac{Y}{H}, \quad \text{and} \quad z = \frac{Z}{H}$$

2.7. EXERCISES.

16. Are (1, −2, 3, 4) and (10, −20, 30, 40) homogeneous coordinates for the same point in $\mathbb{R}^3$? Why or why not?

Sol) (1, −2, 3, 4)는 Homogeneous 좌표로 바꾸면

$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{3}{4}\right)$

(10, −20, 30, 40)은 Homogeneous 좌표로 바꾸면

$\Rightarrow \left(\frac{10}{40}, \frac{-20}{40}, \frac{30}{40}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{3}{4}\right)$

∴ Homogeneous 좌표가 동일하므로

$\mathbb{R}^3$에서 같은 포인트라 할수있다.

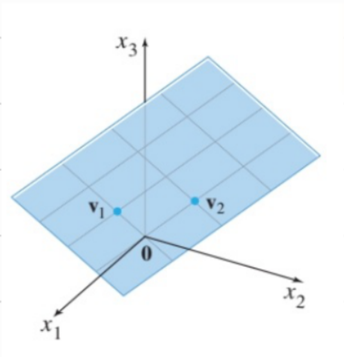
2.8. SUBSPACES OF $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$의 Subspace (= $\mathbb{R}^n$의 어떠한 벡터 set 'H') 란,

① zero vector가 H set에 존재해야한다.

② H에 있는 임의의 벡터 u와 v를 더한 $u+v$가 H set 안에 있어야한다.

③ H에 있는 임의의 벡터 u에 스칼라 c를 곱한 cu가 H set 안에 있어야한다.



⇒ Span{v_1, v_2}는 원점(저 바닥에 있는)을 지나는 평면인 $\mathbb{R}^3$ 공간의 Subspace.

- Column Space.

: 어떤 행렬 A에 대해서 Col A 라고 표현하며,

A의 모든 열들의 linear combination을 의미.

: $\mathbb{R}^m$에서 $A=[a_1 \cdots a_n]$ 일때, Col A는 Span{$a_1 \cdots a_n$} 임.

즉, A의 Column들을 Span 하는 것이 Column Space.

(동시에 $\mathbb{R}^m$의 Subspace).

- Vector b가 A의 Colum space 안에 있다.

⇔ $x_1a_1 + \cdots + x_na_n = b$ 를 만족하는 Vector x가 존재.

⇔ $Ax=b$의 해가 존재한다.

- A가 $m \times n$ matrix 일때 Col $A \subset \mathbb{R}^m$

· **Null space.**

: 어떤 행렬 A에 대해서 Nul A 라고 표현하며,

Homogeneous equation ($Ax=0$)의 모든 해의 집합을 의미.

· A가 $m \times n$ matrix 일때 $\text{Nul } A \subset \mathbb{R}^n$

· $m \times n$ 행렬 A의 null space는 $\mathbb{R}^n$의 subspace.

= n개의 미지수를 가지는 m개의 Homogeneous linear equation

$Ax=0$ 의 모든 해의 집합은 $\mathbb{R}^n$의 subspace.

· **Basis for a Subspace.**

: $\mathbb{R}^n$의 subspace H 의 bias는 H를 span하는

linear Independent set 이다.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} + x_5 \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}}$$

bias.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bias.

→ B의 Column space의 bias 라고 할수있다.

· A와 B가 같은 Homogeneous solution set을 가진다면,

A와 B는 같은 Index 의 Column 들이 bias를 이룬다.

(그냥 Col A = Col B bias 같다는말)

- row operation은 행렬의 Column의 linear dependence relation에 영향을 주지않습니다.

- matrix A의 pivot column은 A의 Column space의 bias이다.

2.8. EXERCISES.

32. If R is a 6×6 matrix and Nul R is *not* the zero subspace, what can you say about Col R?

Sol).

Nul R → zero subspace가 아니다.

⇒ 원점말고도 다른 $Rx=0$ 을 만족시키는해가 존재한다.

그러나 Col R는 R의 열들의 선형결합을 의미하므로

$Ax=0$ 의해 Nul R과 연관이없다