2.9. DIMENSION AND RANK.

- Subspace H 에 존재하는 각 vector는 bias vector의 linear combination으로 표현가능.

$B = \{b_1 \cdots b_p\}$.

$x = c_1b_1 + \cdots + c_pb_p$. and $x = d_1b_1 + \cdots + d_pb_p$.

- 어떤 bias가 주어졌을때, 특정 vector를 표현하기 위한 weight는 유일하다.

  ex) bias가 [1,1] 일때 vector [2,2]를 표현하기 위한 weight는 '2' 유일.

- Suppose the set $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\}$ is a basis for a subspace H. For each $\mathbf{x}$ in H, the **coordinates of x relative to the basis** $\mathcal{B}$ are the weights $c_1, \ldots, c_p$ such that $\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_p\mathbf{b}_p$, and the vector in $\mathbb{R}^p$

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

is called the **coordinate vector of x (relative to** $\mathcal{B}$**)** or the $\mathcal{B}$**-coordinate vector of x**.[1]

B에 대한 상대좌표.

- $x \mapsto [x]_B$ 는 one-to-one 이다.

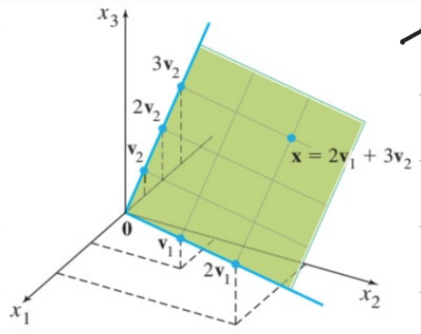
- 

FIGURE 1 A coordinate system on a plane H in $\mathbb{R}^3$.

Bias vector (v_1, v_2)는 R^3에 존재하지만, subspace가 R^2에 존재하는것처럼 작용. 이를 subspace H는 R^2에 Isomorphic 하다고 표현.

- Dimension.

  : nonezero subspace H 의 dimension은 H의 bias의 Vector 개수.

  : zero subspace 의 dimension은 0.

  ex) bias 벡터 2개 2차원 ...

  bias 벡터 3개 3차원 ...

- Null space의 Dimension은 Free variable 개수와 같다.

- Rank.

  : Column space 의 dimension을 의미.

  : rank A = dim Col A.

  = Col A의 bias 수 (dimension 정의이니까)

  = pivot Column의 수.

- **The Rank Theorem**

  If a matrix A has n columns, then $\operatorname{rank} A + \dim \operatorname{Nul} A = n$.

  pivot column의 수 = basic variable 수

  Free variable 수.

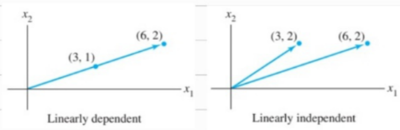
- **The Basis Theorem** dim H=P. $H \subset \mathbb{R}^n$

  Let H be a p-dimensional subspace of $\mathbb{R}^n$. Any linearly independent set of exactly p elements in H is automatically a basis for H. Also, any set of p elements of H that spans H is automatically a basis for H.

↳ H는 R^n의 P차원 subspace.

H에서 p개의 linearly Independent set은 H의 bias.

• 두 벡터의 집합에서 한 벡터가 다른벡터의 multiplation으로 표현가능하면, linear dependent.



그림은 p=2, 2개생각하면 됨.

또한, p개의 vector가 H를 span하면 H의 bias.

(역행렬이랑, 추가버전)

- **The Invertible Matrix Theorem (continued)**

  Let A be an $n \times n$ matrix. Then the following statements are each equivalent to the statement that A is an invertible matrix.

  m. The columns of A form a basis of $\mathbb{R}^n$.
  n. $\text{Col } A = \mathbb{R}^n$
  o. $\dim \text{Col } A = n$
  p. $\text{rank } A = n$
  q. $\text{Nul } A = \{\mathbf{0}\}$
  r. $\dim \text{Nul } A = 0$

역행렬이 가능하려면

free variable이 없고

pivot 수 = n 이니까,,

2.9. EXERCISES.

In Exercises 3–6, the vector $\mathbf{x}$ is in a subspace H with a basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Find the $\mathcal{B}$-coordinate vector of $\mathbf{x}$.

3. $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}$

sol). $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ (row1 x 4) + row2

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$. (row2 x -2) + row1

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$ row2 x -1

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

$\therefore [x]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$

3.1. INTRODUCTION TO DETERMINANT.

· Determinant ≠0 이면 Invertible 함.
모든 row에 pivot 존재.

· matrix가 2x2 일때 Determinant는 아래처럼 구하고,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{Det } A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

matrix가 2x2 이상일때 Determinant는 아래 정의로 구할수있음.

For $n \geq 2$, the **determinant** of an $n \times n$ matrix $A = [a_{ij}]$ is the sum of n terms of the form $\pm a_{1j} \det A_{1j}$, with plus and minus signs alternating, where the entries $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ are from the first row of A. In symbols,

$$\boxed{\begin{aligned} \det A &= a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det A_{1j} \end{aligned}}$$

행렬 A의 (i, j)-cofactor (C_{ij}) 라고함.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Cofact Expansion $\Longrightarrow$ $\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$

· 어떠한 row, col 의 값을 Cofactor로 선정하여 계산하여도 결과는 동일함.

· 위 정의에따라 Determinant 계산은 0 이 많은 행렬일수록 유용(계산이 편리해짐)

⊕ Cofactor expansion 할때 0이 많은 row, col을 기준으로하면, 계산이 엄청간단해짐.

· triangular matrix 의 Determinant는 대각원소들의 곱이다.

3.1. EXERCISES.

37. Let $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Write $5A$. Is $\det 5A = 5 \det A$?

sol)

① det 5A.

$$5A = 5 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 20 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det 5A = 15 \cdot 10 - 5 \cdot 20 = 150 - 100 = 50.$$

② 5 DetA.

$$\operatorname{Det} A = 5 \times (3 \cdot 2 - 1 \cdot 4) = 5 \times (6 - 4)$$

$$= 5 \times 2$$

$$= 10$$

$\therefore \operatorname{Det} 5A \neq 5 \operatorname{Det} A.$

3.2. PROPERTIES OF DETERMINANTS.

THEOREM 3 — Row Operations

Let A be a square matrix.

a. If a multiple of one row of A is added to another row to produce a matrix B, then $\det B = \det A$.

b. If two rows of A are interchanged to produce B, then $\det B = -\det A$.

c. If one row of A is multiplied by k to produce B, then $\det B = k \cdot \det A$.

⇓

a. A의 하나의 row곱이 다른 row에 더해져 새로운 행렬 B가 만들어지면 Det B = Det A.
(row replacement)

b. A의 row가 interchange된 형태인 B는 det B = det -A.
row위치 변경 → det에 − 부호 추가!

c. A의 하나의 row에 k가 곱해져 새로운 B가 만들어지면
det B = k detA.

- Theorm 3을 이용하여 Echelon Form으로 만들고, Determinant를 구하면 편하다.

  ⇒ 이때 Echelon Form은 Triangular matrix이므로 대각원소의 곱으로 Determinant를 구할수있음.

  ⇒ 모든 대각원소가 pivot이어야 (≠0 이여야) det ≠ 0.
  Det ≠ 0 이여야 Invertible.

- A가 n×n matrix 일때, $\det A = \det A^T$

- A와 B가 n×n matrix 일때, $\det AB = (\det A)(\det B)$

  $\det (A+B) \neq \det A + \det B$ 주의.

3.2. EXERCISES.

40. Let A and B be 4×4 matrices, with $\det A = -3$ and $\det B = -1$. Compute:

a. $\det AB$ b. $\det B^5$ c. $\det 2A$

d. $\det A^T BA$ e. $\det B^{-1}AB$

sol).

a. $\det AB = \det A \times \det B$

$= (-3) \times (-1) = 3.$

b. $\det B^5 = \det(B \times B \times B \times B \times B)$

$= \det B \times \det B \times \det B \times \det B \times \det B$

$= -1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1$

$= -1$

c. $\det 2A = 2^4 \times \det A = 16 \times -3 = -48.$

- Determinant is "linear" for each row

<u>3-a</u>

$$det\left(\begin{bmatrix} ta & tb \\ c & d \end{bmatrix}\right) = t\,det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$

Q: find $det(2A)$

If A is n x n ......

A:$det(2A) = 2^n det(A)$

n×n 행렬에서 t가 n×n (개)번 곱해졌으니 t^n

d. $\det A^TBA = \det A^T \times \det B \times \det A$

$= -3 \times -1 \times -3 = 9$

e. $\det B^{-1}AB = \det B^{-1} \times \det A \times \det B$

$= \det B^{-1} \times \det B \times \det A$

$= \det(B^{-1}B) \times \det A$

$= \det(I) \times \det A$

$= 1 \times -3 = -3$