Geometria da obm

João, Guilherme

September 11, 2021

Aqui, a categoria 1 será dos problemas 1,4, categoria 2 dos problemas 2,5 e categoria 3 dos problemas 3,6 (todos os problemas do n2, de 2005 à 2020)

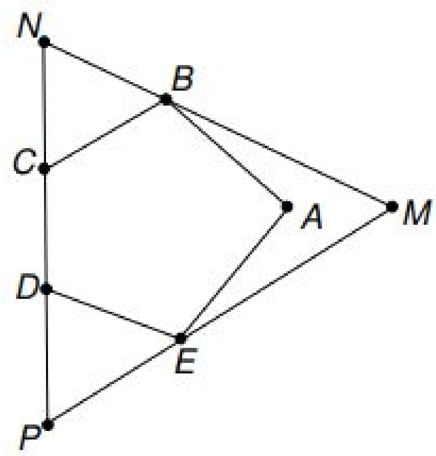
Contents

1 Categoria 1

(OBM 2007/1) Seja ABC um triângulo e O seu circuncentro. Seja ainda P a intersecção das retas BO e AC e S a circunferência circunscrita a AOP. Suponha que BO = AP e que a medida do arco OP em S que não contém A é 40°. Determine a medida do ângulo ∠ OBC.

Obs: A circunferência circunscrita de um triângulo é a circunferência que passa pelos seus vértices e seu centro é chamado de circuncentro.

(OBM 2012/4) A figura abaixo mostra um pentágono regular ABCDE inscrito em um triângulo equilátero MNP. Determine a medida do ângulo CMD.



(OBM 2014/4) Considere um quadrado ABCD centro O. Sejam E, F, G e H pontos no interior dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, tal que AE = BF = CG = DH. Sabe-se que OA intersecta HE no ponto X, OB intersecta EF no ponto Y, OC intersecta FG no ponto Z e OD intersecta GH no ponto O. Dado que área EFGH = 1, calcule:

(área ABCD) x (área XYZW)

(OBM 2016/4) Considere um triangulo escaleno ABC com AB < AC < BC. A mediatriz do lado AB corta o lado BC no ponto K e o prolongamento de AC no ponto U. A mediatriz do lado AC corta o lado BC no ponto O e o prolongamento do lado AB no ponto G. Prove que o quadrilatero GOKU é cíclico, ou seja, que seus quatro vertices estão em uma mesma circunferência.

(OBM 2017/1)Os pontos X,Y,Z estão marcados nos lados, AB, BC e AC do triangulo ABC, respectivamente. Os pontos A', B', C', estão nos lados XZ, XY, YZ do triangulo XYZ, respectivamente, de modo que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = 2$ e $ABB'A', BCC'B', ACC'A'$ são trapézios em que os lados do triangulo ABC sao bases

a) Determine a razão entre a área do trapézio $ABB'A'$ e a área do triangulo $A'B'X$

b) Determine a razao entre a área do triangulo XYZ e a area do triangulo ABC

(OBM 2018/4)

a) Num triangulo XYZ, o incírculo tangencia os lados XY e XZ nos pontos T e W, respectivamente. Prove que

XT = XW = $\frac{XY+XZ-YZ}{2}$

Seja ABC um triangulo e D o pé da altura relativa ao lado A. Sejam I e J os incentros dos triangulos ABD e ACD, respectivamente. Os incírculos de ABD e ACD tangenciam AD nos pontos M e N, respectivamente. Seja P o ponto de tangencia do incírculo inscrito de ABC com o lado AB. O círculo de centro A e raio AP intersecta a altura AD em K.

b) Mostre que os triangulos IMK e KNJ são congruentes.

c) Mostre que o quadrilátero IDJK é inscritível.

(OBM 2019/4) Seja ABC um triângulo acutângulo e D um ponto qualquer sobre o lado BC. Seja E o simétrico de D em relação a AC e seja F o simétrico de D em relação a AB. A reta ED intersecta a reta AB em G, enquanto a reta FD intersecta a reta AC em H. Prove que os pontos A, E, F, G e H estão sobre uma mesma circunferência.

(0BM 2020/1) Seja ABC um triângulo acutângulo, e D um ponto sobre BC tal que AD é perpendicular a BC. A bissetriz do ângulo ∠ DAC intesecta o segmento DC em E. Seja F o ponto sobre a reta AE tal que BF é perpendicular a AE. Se ∠ BAE = 45°, calcule a medida do ângulo ∠ BFC.

2 Categoria 2

(OBM 2005/2) No triângulo retângulo ABC, os catetos AB e BC medem, respectivamente, 3 cm e 4 cm. Seja M o ponto médio da hipotenusa AC e seja D um ponto, distinto de A, tal que BM = MD e AB = BD.

a) Prove que BM é perpendicular a AD.

b) Calcule a área do quadrilátero ABDC.

(OBM 2006/5) Seja ABC um triângulo acutângulo e H o seu ortocentro. Sejam M, N e R os pontos médios de AB, BC e AH, respectivamente. Determine a medida do ângulo ∠ MNR se o ângulo ∠ABC mede 70°.

(OBM 2007/2) Seja ABC um triângulo retângulo isósceles. K e M são pontos sobre hipotenusa AB, com K entre A e M, e o ângulo $\angle$ KCM = 45°.

Prove que $AK^2 + MB^2 = KM^2$.

(OBM 2008/2) Seja P um pentágono convexo com todos os lados iguais. Prove que se dois dos ângulos de P somam 180 graus, então é possível cobrir o plano com P, sem sobreposições.

(OBM 2008/5) Seja ABC um triângulo acutângulo e O, H seu circuncentro, ortocentro, respectivamente. Sabendo que:

$\frac{AB}{\sqrt{2}}$ = BH = OB,

calcule os ângulos do triângulo ABC.

(OBM 2009/2) Seja A um dos pontos de interseção de dois círculos com centros X e Y. As tangentes aos círculos em A intersectam novamente os círculos em B e C. Seja P o ponto de plano tal que PXAY é um paralelogramo. Prove que P é o circuncentro do triângulo ABC.

(OBM 2010/2) Seja ABCD um paralelogramo e Γ a circunferência circunscrita ao triângulo ABD. Se E e F são as interseções de Γ com as retas BC e CD respectivamente, prove que o circuncentro do triângulo CEF está sobre Γ.

(OBM 2010/5) As diagonais de um quadrilátero inscritível ABCD se intersectam em O. Os círculos circunscritos aos triângulos AOB e COD intersectam as retas BC e AD, pela segunda vez, nos pontos M, N, P e Q. Prove que o quadrilátero MNPQ está inscrito em um círculo de centro O.

(OBM 2011/2) Seja ABCD um quadrilátero convexo tal que AD = DC e AC = AB. Se M e N são os pontos médios dos lados AD e AB, prove que o triângulo MNC é isósceles.

(OBM 2013/5) Seja ABC um triângulo escaleno e AM a mediana relativa ao lado BC. A circunferência de diâmetro AM intersecta pela segunda vez os lados AB e AC nos pontos P e Q, respectivamente, ambos diferentes de A. Supondo que PQ é paralelo a BC, determine a medida do ângulo $\angle$ BAC.

(OBM 2014/2) Sejam AB um diâmetro da circunferência Γ e CD uma corda perpendicular a tal diâmetro. Sejam ainda E o ponto de interseção entre CD e AB e P um ponto qualquer sobre a corda CD diferente de E. As retas AP e BP intersectam Γ novamente em F e G, respectivamente. Se O é o circuncírculo do triângulo EFG, mostre que a área do triângulo OCD é sempre a mesma para qualquer que seja o ponto P escolhido.

(OBM 2015/2) Seja ABCD um quadrilátero convexo. As retas AB e CD cortam-se em E e as retas BC e AD cortam-se em F. Sejam P e Q os pés das perpendiculares de E sobre as retas AD e BC, respectivamente, e sejam R e S os pés das perpendiculares de F sobre as retas AB e CD, respectivamente. As retas ER e FS se cortam em T.

a) Mostre que há uma circunferência que passa pelos pontos E, F, P, Q, R e S.

b) Prove que a circunferência que passa pelos vértices do triângulo RST é tangente à circunferência que passa pelos vértices do triângulo QRB.

(OBM 2016/2) As bissetrizes internas dos angulos $\angle$ ABC e $\angle$ ACB do triangulo ABC se encontram no ponto I. A reta paralela a BI que passa pelo ponto A encontra a reta CI no ponto D. A reta paralela a CI por A encontra a reta BI no ponto E. As retas BD e CE se encontram no ponto F. Mostre que F, A e I sao colineares se, e somente se, AB = AC.

(OBM 2017/5) No triangulo ABC, com $AB \neq AC$, seja I seu incentro. Os pontos P e Q sao definidos como os pontos onde o circuncírculo do triangulo BCI intersecta novamente as retas AB e AC, respectivamente. Seja D o ponto de interseção de AI e BC

a) Prove que P, Q e D sao colineares

b) Sendo T, diferente de P, o ponto de encontro dos circuncírculos dos triangulos PDB e QDC, prove que T esta no circuncírculo do triangulo ABC.

Observação: O Incentro de um triangulo é o ponto de intersecção de suas bissetrizes internas e o circuncírculo de um triangulo é a circunferência que passa pelos seus três vértices.

(OBM 2020/5) Seja ABC um triângulo acutângulo de circuncentro O. Seja M o ponto médio de AB e K $\neq$ C o segundo ponto de interseção dos circuncírculos dos triângulos ABC e CMO. As retas CK e OM encontram-se em P. Prove que $\angle$ KAP = $\angle$ MCB

3 Categoria 3

(OBM 2005/6) A medida do ângulo B de um triângulo ABC é 120°. Sejam M um ponto sobre o lado AC e K um ponto sobre o prolongamento do lado AB, tais que BM é a bissetriz interna do ângulo $\angle$ ABC e CK é a bissetriz externa correspondente ao ângulo $\angle$ ACB. O segmento MK intersecta BC no ponto P. Prove que $\angle$ APM = 30°.

(OBM 2009/6) Seja ABC um triângulo e O seu circuncentro. As retas AB e AC cortam o circuncírculo de OBC novamente em $B_1 \neq$ B e $C_1 \neq$ C , respectivamente, as retas BA e BC cortam o circuncírculo de OAC em $A_2 \neq$ A e $C_2 \neq$ C , respectivamente, e as retas CA e CB cortam o circuncírculo de OAB em $A_3 \neq$ A e $B_3 \neq$ B , respectivamente. Prove que as retas A_2A_3, B_1B_3 e C_1C_2 passam por um mesmo ponto.

(OBM 2010/6) Os três lados e a área de um triângulo são números inteiros. Qual é o menor valor da área desse triângulo?

(OBM 2012/3) Seja ABC um triângulo, M o ponto médio do lado AC e o N ponto médio do lado AB. Sejam r e s as reflexões das retas BM e CN sobre a reta BC, respectivamente. Defina também D e E como a interseção das retas r e s com a reta MN, respectivamente. Sejam X e Y os pontos de interseção entre os circuncírculos dos triângulos BDM e CEN, Z a interseção das retas BE e CD e W a interseção entre as retas r e s. Prove que XY, WZ e BC são concorrentes.

(OBM 2013/3) Seja ABC um triângulo. Seja D um ponto na circunferência circunscrita ao triângulo e sejam E e F os pés das perpendiculares de A até DB e DC, respectivamente. Finalmente, seja N o ponto médio de EF. Sendo M o ponto médio do lado BC, prove que as retas NA e NM são perpendiculares.

Observação: Suponha que o ponto N é distinto do ponto M.

(OBM 2015/6) Seja ABC um triângulo escaleno e AD, BE e CF as bissetrizes internas, com D sobre BC, E sobre AC e F sobre AB. É dado que ∠ AFE = ∠ ADC. Calcule a medida do ângulo ∠ BCA.

(OBM 2018/3) Seja ABC um triangulo acutângulo de circuncentro O e ortocentro H. A circunferencia de centro X_A passa pelos pontos A e H e tangencia o circuncírculo do triangulo ABC. Defina de maneira analoga os pontos X_B e X_C. Sejam O_A, O_B e O_C os simetricos de O em relação aos lados BC, CA e AB, respectivamente. Prove que as retas O_AX_A, O_BX_B e O_CX_C são concorrentes

(OBM 2019/3) Seja ABC um triângulo acutângulo inscrito em um círculo Γ de centro O. Seja D o pé da altura relativa ao vértice A. Sejam E e F pontos sobre Γ tais que AE = AD = AF. Sejam P e Q os pontos de interseção da reta EF com os lados AB e AC, respectivamente. Seja X o segundo ponto de interseção de Γ com o círculo circunscrito ao triângulo APQ. Mostre que as retas XD e AO encontram-se em um ponto que está sobre Γ.