Tema 1: Els Nombres reals

1. Nombres reals

El conjunt dels nombres reals $\mathbb{R}$ es pot dividir en dos grans subconjunts:

- **Nombres racionals** ($\mathbb{Q}$): són aquells que es poden expressar com a fracció $\dfrac{p}{q}$ amb $p, q \in \mathbb{Z}$ i $q \neq 0$.
- **Nombres irracionals** ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$): són aquells que no es poden expressar en forma de fracció.

Exemples de nombres racionals

- Els nombres enters són racionals: per exemple $5 = \dfrac{5}{1}$, $1 = \dfrac{1}{1}$, $10 = \dfrac{10}{1}$.
- Els nombres decimals exactes: per exemple $1{,}25 = \dfrac{125}{100}$.
- Els nombres decimals periòdics: tenen un nombre infinit de decimals que es repeteixen. Hi ha dos tipus:
  - *Periòdics purs*, on la part periòdica comença just després de la coma: $2{,}5555\ldots$.
  - *Periòdics mixtos*, on hi ha alguns decimals inicials no periòdics i després comença la repetició: $2{,}4358888\ldots$.

Exemples de nombres irracionals

- Arrels quadrades no exactes: $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ldots$
- El nombre π, obtingut a partir de la relació entre la longitud d'una circumferència i el seu diàmetre.
- El nombre e, obtingut com el límit

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{x}\right)^x = e.$$

2. Propietats de les potències amb base real

Siguin $a \in \mathbb{R}$ i $m, n \in \mathbb{Z}$. Les propietats bàsiques són:

Propietat

$$a^0 = 1 \quad \text{si } a \neq 0,$$
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m},$$
$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (\text{per } a \neq 0),$$
$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m},$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (\text{per } a \neq 0).$$

Expressió d'una arrel en forma de potència

Una arrel d'índex n es pot expressar com una potència amb exponent fraccionari:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}.$$

Propietat

Siguin a, b dos nombres reals i n un nombre natural. Aleshores:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,b}, \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Observació

És evident que $\sqrt[n]{a^n} = a$ si $a \geq 0$.

3. Identitats notables

Propietat

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Exemple:

$$\left(\sqrt{2}+3\right)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 3 + 3^2 = 2 + 6\sqrt{2} + 9 = 11 + 6\sqrt{2}.$$

Exemple:

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1.$$

4. Extreure factors d'una arrel

Per simplificar expressions amb arrels, es formen grups segons l'índex de l'arrel.

Exemple

Simplifiquem $\sqrt[5]{2^{11}}$. Com que l'índex és 5, formem grups de 5 factors 2:

$$\sqrt[5]{2^{11}} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^5 \cdot 2} = \sqrt[5]{(2^5)(2^5) \cdot 2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[5]{2} = 4\sqrt[5]{2}.$$

Exemple

Calcular

$$\sqrt{175} - 3\sqrt{343} + \sqrt{28}.$$

Factoritzem:

$$\sqrt{175} = \sqrt{25 \cdot 7} = 5\sqrt{7}, \qquad \sqrt{343} = \sqrt{7^3} = 7\sqrt{7}, \qquad \sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = 2\sqrt{7}.$$

Per tant,

$$5\sqrt{7} - 3 \cdot 7\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = 5\sqrt{7} - 21\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = (5 - 21 + 2)\sqrt{7} = -14\sqrt{7}.$$

5. Racionalització

Racionalitzar una expressió significa trobar una expressió equivalent sense arrels al denominador.

Cas 1: arrel simple al denominador

$$\frac{3}{\sqrt{5}} \quad \text{multipliquem per } \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} : \quad \frac{3\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Cas 2: arrel d'índex n

Per exemple,

$$\frac{6}{\sqrt[5]{21}}$$

multiplicarem numerador i denominador per $\sqrt[5]{21^4}$ (és a dir, elevem 21 a l'exponent que falta per arribar a 5):

$$\frac{6}{\sqrt[5]{21}} \cdot \frac{\sqrt[5]{21^4}}{\sqrt[5]{21^4}} = \frac{6\sqrt[5]{21^4}}{\sqrt[5]{21^5}} = \frac{6\sqrt[5]{21^4}}{21}.$$

Cas 3: denominador binomial amb arrels

Racionalitzem $\dfrac{5}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ multiplicant pel conjugat:

$$\frac{5}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{5(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2} = \frac{5(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{3}.$$

6. Exercicis

1. **Determineu si els nombres següents són racionals o irracionals:**

   (a) 2,777

   (b) 3,14567567567...

(c) $3\pi + 1$

(d) $2{,}45445444544445\ldots$

(e) $\sqrt{7} - 1$

(f) $\sqrt{64}$

2. **Simplifiqueu les expressions següents:**

   (a) $(2^3)^5 \cdot 4 \cdot 2^{-3}$

   (b) $\dfrac{5^2 \cdot 5^3}{5^9 \cdot 5^{-3}}$

   (c) $(-2)^0 \cdot 2^3 \cdot \dfrac{2^{-7}}{8}$

   (d) $3^{-2} \cdot (3^2)^3 \div 3^5$

3. **Simplifiqueu les expressions amb arrels:**

   (a) $\sqrt[3]{45} - 2\sqrt{125} + \sqrt{20}$

   (b) $\sqrt[3]{216} - \sqrt{30} + \sqrt{24}$

4. **Racionalitzeu les expressions següents:**

   (a) $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$

   (b) $\dfrac{8}{7 - \sqrt{3}}$

   (c) $\dfrac{6\sqrt{12} + \sqrt{11}}{4}$