Tema 1 Accés CFGS. Els nombres reals

Juanjo

Índex

Els nombres reals

El conjunt numèric dels nombres reals es pot dividir en dos grups:

- Els nombres racionals $\mathbb{Q}$
- Els nombres irracionals

Els nombres racionals són tots els nombres que es poden escriure en forma de fracció, es a dir com a quocient entre dos nombres enters.

Els nombres irracionals per tant són els que no es poden expressar mitjançant una fració.

Exemples de nombres racionals:

- Els nombres enters són racionals: per exemple $5 = \dfrac{5}{1}$, $1 = \dfrac{1}{1}$, $10 = \dfrac{10}{1}$.
- Els nombres decimals exactes: per exemple $1{,}25 = \dfrac{125}{100}$.
- Els nombres decimals periòdics: tenen un nombre infinit de decimals que es repeteixen. Hi ha dos tipus:
  - *Periòdics purs*, on la part periòdica comença just després de la coma: $2{,}5555\ldots$.
  - *Periòdics mixtos*, on hi ha alguns decimals inicials no periòdics i després comença la repetició: $2{,}4358888\ldots$.

Exemples de nombres irracionals

- Arrels quadrades no exactes: $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ldots$
- El nombre π, obtingut a partir de la relació entre la longitud d'una circumferència i el seu diàmetre.

Potències de nombres reals

Una potència es una forma d'expressar un producte d'un nombre per si mateix un determinat nombre de vegades.

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vegades}}$$

Propietats de les potències

1. $a^0 = 1$
2. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
3. $a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
4. $(a^n)^m = a^{nm}$
5. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
6. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
7. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Radicals

Les arrels es poden expressar mitjançant potències d'exponent fraccionari.

Arrel n-èsima

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Utilitzant les propietats de les potències veiem que es compleix

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}.$$

Propietats

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
2. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Els productes Notables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Exemple:

$$\left(\sqrt{2}+3\right)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 3 + 3^2 = 2 + 6\sqrt{2} + 9 = 11 + 6\sqrt{2}.$$

Exemple:

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1.$$

Extreure factors d'un radical

Per simplificar expressions amb arrels, es formen grups segons l'índex de l'arrel.

Simplifiquem $\sqrt[5]{2^{11}}$. Com que l'índex és 5, i tenim 11 dosos (exponent 11) expressem 2^{11} com $2^5 \cdot 2^5 \cdot 2$. Cada 2^5 surt fora de l'arrel com un 2 ja que l'arrel cinquena de 2^5 és 2

$$\sqrt[5]{2^{11}} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^5 \cdot 2} = \sqrt[5]{(2^5)(2^5) \cdot 2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[5]{2} = 4\sqrt[5]{2}.$$

Veiem ara el cas amb una arrel quadrada

$$\sqrt{80}$$

Si factoritem el 80 tenim que és igual a $2^4 \cdot 5$. aleshores

$$\sqrt{80} = \sqrt{2^4 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 5} = 2 \cdot 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

Suma de radicals

IMPORTANT !

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

No obstant si tenim radicals amb la mateixa arrel si que els podem sumar, per exemple:

$$3\sqrt{5} + 7\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$$

De vegades sembla que tenim radicals diferents però realment si els simplifiquem extreient factors fora dels radicals obtenim les mateixes arrels i si que es poden sumar.

Exemple:

Calculem

$$\sqrt{175}-3\sqrt{343}+\sqrt{28}.$$

Factoritzem:

$$\sqrt{175}=\sqrt{5^2\cdot 7}=5\sqrt{7},\qquad \sqrt{343}=\sqrt{7^3}=\sqrt{7^2\cdot 7}=7\sqrt{7},\qquad \sqrt{28}=\sqrt{2^2\cdot 7}=2\sqrt{7}.$$

Per tant,

$$5\sqrt{7}-3\cdot 7\sqrt{7}+2\sqrt{7}=5\sqrt{7}-21\sqrt{7}+2\sqrt{7}=(5-21+2)\sqrt{7}=-14\sqrt{7}.$$

Multiplicar i divisió de radicals

Podem multiplicar i dividir radicals del mateix tipus, per exemple

$$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{20}=\sqrt[3]{100}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}$$

I què passa quan els índexs són diferents ?

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$$

En aquest cas encara es poden operar perquè hem dit que els radicals són potències amb exponents fraccionaris i les fraccions es poden expressar amb un mateix denominador igual al MCM dels denominadors. Primer calculem els MCM dels índexs

$$MCM(3,4)=12$$

Aquest valor serà l'índex comú. Ara transformem les arrels en arrels amb índex 12

$$\sqrt[12]{2^4}\cdot\sqrt[12]{8^3}$$

Observem que el 2 s'ha d'elevar a 4 que surt de fer 12 : 3 i el 8 a 4 que surt de fer 12 : 3.

Racionalització

Racionalitzar una expressió significa trobar una expressió equivalent sense arrels al denominador.

Cas 1: arrel simple al denominador

$$\frac{3}{\sqrt{5}}\quad \text{multipliquem per } \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\Rightarrow\frac{3\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Cas 2: arrel d'índex n

Per exemple,

$$\frac{6}{\sqrt[5]{21}}$$

multiplicarem numerador i denominador per $\sqrt[5]{21^4}$ (és a dir, elevem 21 a l'exponent que falta per arribar a 5):

$$\frac{6}{\sqrt[5]{21}}\cdot\frac{\sqrt[5]{21^4}}{\sqrt[5]{21^4}}=\frac{6\sqrt[5]{21^4}}{\sqrt[5]{21^5}}=\frac{6\sqrt[5]{21^4}}{21}.$$

Cas 3: denominador binomial amb arrels

Racionalitzem $\frac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ multiplicant pel conjugat:

$$\frac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{5(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} = \frac{5(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}.$$

Les Progressions Aritmètiques

Una progressió aritmètica és una seqüència de nombres on cada nombre es troba sumant un valor constant al valor anterior. Per exemple

$$1, 4, 7, 10, 13, ...$$

En aquest cas comencem a,b el 1 i en cada pas sumem un 3. Podem trobar una expressió per calcular un terme qualsevol de la progressió, aquesta expressió s'anomena terme general i

Terme General d'un progressió aritmètica:

$$a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$$

On a_1 és el primer terme i d és el nombre constant que sumem en cada pas. Si apliquem la fórmula a l'exemple anterior tenim

$$a_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$$

Amb aquesta fórmula ara podem calcular el terme 1000 per exemple

$$a_{1000} = 3000 - 2 = 2998$$

Suma dels n primers termes d'una progressió aritmètica

Suposem que volem calcular la suma dels n primers termes d'una progressió aritmètica

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Per fer això podem trobar una fórmula molt senzilla

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Les Progressions Geomètriques

Una progressió geomètrica és una seqüència de nombres on cada nombre de la seqüència es troba multiplicant el nombre anterior per un valor constant r. Per exemple

$$2, 6, 18, 54, ...$$

Podem trobar una fórmula per calcular qualsevol terme de la progressió

Terme general d'una progressió geomètrica:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

On a_1 és el primer terme i r el nombre constant que multipliquem. Per exemple en el cas anterior la fórmula és

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

Com en el cas anterior podem trobar una fórmula per calcular la suma dels n primers termes

Suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica:

$$S_n = a_1 + ... + a_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

Aquesta fórmula té la particularitat de que si $0 < r < 1$ es pot fer la suma d'infinits termes

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

Els logaritmes

Definim el logaritme en base a d'un nombre x com el valor y que hem de posar en una potència en base a perquè el resultat sigui igual a x.

$$\log_a x = y \text{ Si } a^y = x$$

El logaritme en base 10 s'expressa simplement com log. També hi ha el logaritme neperià ln que és en base e, on e és un nombre irracional com el nombre π.

Exemple

Per calcular logaritmes apliquem la definició i obtenim una petita equació. Per exemple per calcular el logaritme $\log_2 8$ anomenem x al valor del logaritme i plantejem

$$2^x = 8$$

Ara hem d'aconseguir expressar el 8 com una potència de 2. En aquest cas això ho aconseguim simplement factoritzant el 8

$$2^x = 2^3$$

Perquè l'igualtat sigui certa $x = 3$ ja que les bases ja són iguals.

NO EXISTEIX EL LOGARITME DE ZERO NI DE CAP NOMBRE NEGATIU.

Aproximacions i errors

- **Arrodoniment**: Eliminar xifres seguint regles específiques
- **Truncament**: Eliminar xifres sense considerar les següents

Regles d'Arrodoniment

1. **Xifra a eliminar < 5**: Es manté la xifra anterior

$$\text{Exemple: } 3,142 \to 3,14$$

2. **Xifra a eliminar ≥ 5**: S'augmenta en 1 la xifra anterior

$$\text{Exemple: } 3,146 \to 3,15$$

Definició d'Errors

- **Valor real (Vr)**: Valor exacte o més precís
- **Valor aproximat (Va)**: Valor obtingut per aproximació

4. Tipus d'Errors

Error Absolut (Ea)

$$\Delta = |V_r - V_a|$$

Exemple: $V_r = \pi = 3,141592\ldots$, $V_a = 3,14$ $E_a = |3,141592 - 3,14| = 0,001592$

Error Relatiu ε_r

$$\varepsilon_r = \frac{E_a}{|V_r|} = \frac{|V_r - V_a|}{|V_r|}$$

Exemple: $\varepsilon_r = \frac{0,001592}{3,141592} \approx 0,000507$

Notació Científica

La notació científica expressa nombres en la forma:

$$a \times 10^n$$

Regles Bàsiques

- El coeficient a sempre està entre 1 i 10 (inclòs 1, exclòs 10)
- L'exponent n indica el nombre de posicions que es mou la coma
- Positiu: coma cap a la dreta (nombre gran)
- Negatiu: coma cap a l'esquerra (nombre petit)

Conversió a Notació Científica

Nombres Grans (>1)

1. Movem la coma a l'esquerra fins a tenir $1 \leq a < 10$
2. Comptem les posicions: aquest és l'exponent positiu

Exemples:

$$4.560 = 4,56 \times 10^3$$
$$12.300.000 = 1,23 \times 10^7$$
$$789 = 7,89 \times 10^2$$

Nombres Petits (<1)

1. Mou la coma a la dreta fins a tenir $1 \leq a < 10$
2. Compta les posicions: aquest és l'exponent negatiu

Exemples:

$$0,0034 = 3,4 \times 10^{-3}$$
$$0,00000056 = 5,6 \times 10^{-7}$$
$$0,0789 = 7,89 \times 10^{-2}$$

Conversió de Notació Científica a Decimal

Exponent Positiu

Movem la coma a la dreta tantes posicions com indica l'exponent

Exemples:

$$2,5 \times 10^{3} = 2.500$$
$$6,78 \times 10^{4} = 67.800$$
$$1,23 \times 10^{2} = 123$$

Exponent Negatiu

Movem la coma a l'esquerra tantes posicions com indica l'exponent

Exemples:

$$4,5 \times 10^{-3} = 0,0045$$
$$7,89 \times 10^{-5} = 0,0000789$$
$$2,34 \times 10^{-1} = 0,234$$

Operacions amb Notació Científica

Multiplicació

$$(a \times 10^{m}) \times (b \times 10^{n}) = (a \times b) \times 10^{m+n}$$

Exemple:

$$(2,3 \times 10^{4}) \times (4,5 \times 10^{2}) = (2,3 \times 4,5) \times 10^{4+2} = 10,35 \times 10^{6} = 1,035 \times 10^{7}$$

Divisió

$$\frac{a \times 10^{m}}{b \times 10^{n}} = \frac{a}{b} \times 10^{m-n}$$

Exemple:

$$\frac{6,4 \times 10^{8}}{1,6 \times 10^{3}} = \frac{6,4}{1,6} \times 10^{8-3} = 4 \times 10^{5}$$

Suma i Resta

1. Expressem amb el mateix exponent
2. Operem els coeficients
3. Mantenim l'exponent comú

Exemple:

$$\begin{aligned}
&3,2 \times 10^4 + 1,5 \times 10^3 \\
&= 3,2 \times 10^4 + 0,15 \times 10^4 \\
&= (3,2 + 0,15) \times 10^4 \\
&= 3,35 \times 10^4
\end{aligned}$$

Prefixos del Sistema Internacional

Prefix	**Símbol**	**Factor**
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
hecto	h	10^{2}
deca	da	10^{1}
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}