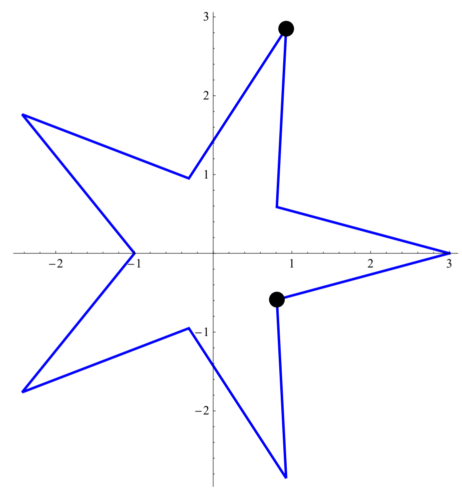
Matemàtiques aplicades a l'art i el disseny digital

Grau en disseny digital i tecnologies creatives

Prova 1. 19 de Novembre de 2020

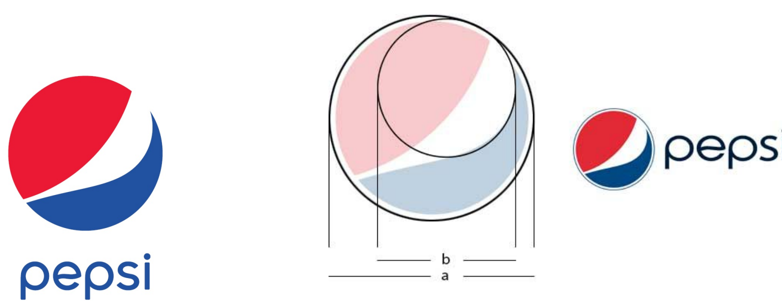
1. (3 *punts*)

   (a) Determina les coordenades cartesianes dels dos vèrtexs marcats de l'estrella regular de cinc puntes i centrada en l'origen següent:



   (b) Realitzem una homotècia de centre el punt $(-1, 0)$ a l'estrella anterior i la reduim a una que té la meitat d'àrea. Dibuixa l'estrella resultant i calcula les coordenades del punt que prové del $(3, 0)$.

2. (3 *punts*) Molts dels logos que veiem habitualment estan dissenyats seguint la proporció àurea. Per exemple, el logos d'Apple, de Tweeter, de Google, d'iCloud, de National Geographic, de la petrolera bp, de Pepsi, ...



Els diàmetres de les dues circumferències del logo estan en proporció àurea.

Imatge de PepsiCo - public domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=39653803

(a) Defineix què significa que dos nombres estan en proporció àurea. Dóna dues definicions diferents i demostra que són equivalents.

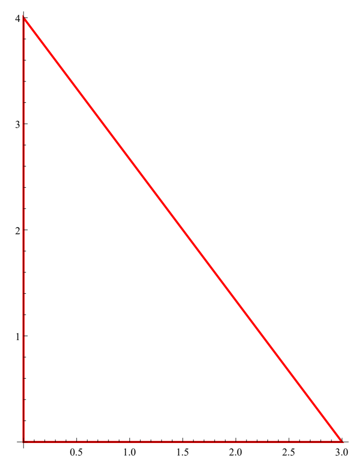
(b) Dóna almenys dos exemples diferents de la natura, l'art o l'arquitectura on aparegui la proporció d'or.

(c) Per què creus que s'usa la proporció àurea en el disseny de logos? Raona la teva resposta.

(d) Dibuixa un logo que segueixi la proporció àurea. Cal que descriguis amb detall com has determinat la proporció àurea en el teu logo. Com es construeix la raó àurea gràficament?

3. (1.5 *punts*) Existeix l'infinit? Raona la resposta a aquesta pregunta usant conceptes com el googol i el googolplex, els diferents tipus d'infinit, la precisió, l'experiència humana, ... i explica l'obra artística de Yayoi Kusama i amb quins mitjans analitza aquesta pregunta.

4. (2.5 *punts*) Construeix una corba d'amplada constant (i diàmetre 6) a partir del triangle de la figura següent.



Cal que descriguis amb detall cadascun dels passos que fas. Per exemple, el primer pas és:

> Punxem el compàs en el punt $(0, 0)$ i fem un arc de circumferència des del punt $(0, 4)$ fins al punt $(4, 0)$.

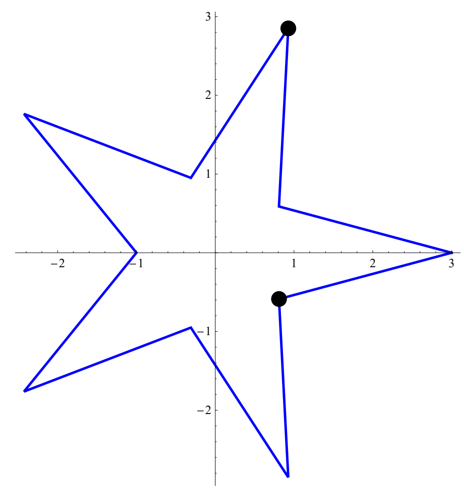
Demostra que el perímetre de la corba que has construït és 6π.

OBSERVACIONS.-

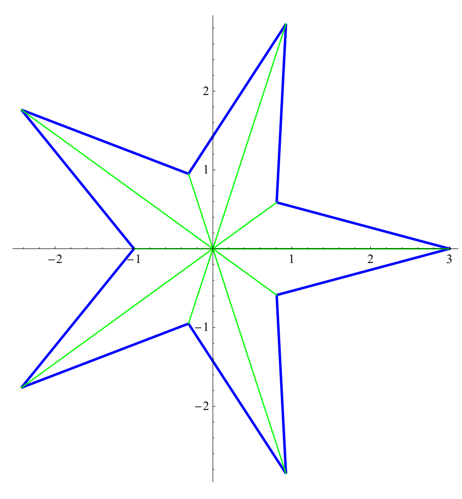
- Recorda d'escriure el teu nom i cognoms i el teu número de DNI en TOTS els fulls de l'examen.
- Disposes d'una hora i mitja per a realitzar aquesta prova.

Resolució de la Prova 1

Problema 1. **(a)** Determina les coordenades cartesianes dels dos vèrtexs marcats de l'estrella regular de cinc puntes i centrada en l'origen següent:



Com que l'estrella és regular i centrada en l'origen de coordenades i té un vèrtex en el punt $(3,0)$ i un altre en el punt $(-1,0)$, deduim que els vèrtexs més allunyats de l'origen estan a distància 3 i els més propers a distància 1. Si unim l'origen de coordenades amb cadascun dels vèrtexs de l'estrella



tenim una volta dividida en 10 angles iguals. Per tant, cadascun d'aquests angles medeix $360^o/10 = 36^o$. Així, el vèrtex marcat en el primer quadrant té coordenades polars $r = 3$ i angle $\theta = 72^o$. Les seves coordenades cartesianes són $x = 3\cos(72) = (3/4)(\sqrt{5}-1) = 0.927\ldots$ i $y = 3\sin(72) = (3/\sqrt{8})(\sqrt{5+\sqrt{5}}) = 2.853\ldots$. I el vèrtex marcat en el quart quadrant té coordenades polars $r = 1$ i angle -36^o. Les seves coordenades cartesianes són $x = \cos(-36^o) = (1/4)(1+\sqrt{5}) =$

$0.809\ldots$ i $y = \sin(-36^o) = (-1/\sqrt{8})(\sqrt{5-\sqrt{5}}) = -0.588\ldots$. Per tant, les coordenades cartesianes dels vèrtexos marcats (en decimals aproximats a tres xifres) són:

$$(0.927,\ 2.853) \quad \text{i} \quad (0.809,\ -0.588).$$

(b) Realitzem una homotècia de centre el punt $(-1, 0)$ a l'estrella anterior i la reduim a una que té la meitat d'àrea. Dibuixa l'estrella resultant i calcula les coordenades del punt que prové del $(3, 0)$.

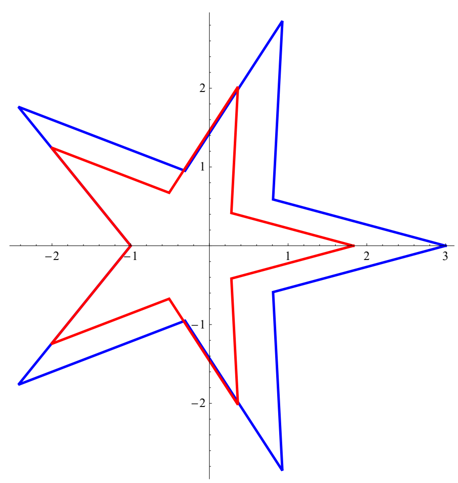
Una homotècia d'escalar λ modifica les longituds multiplicant-les per λ i, per tant, les àrees en λ^2. Si volem la meitat d'àrea cal que $\lambda^2 = 1/2$, pel que $\lambda = 1/\sqrt{2}$. Donades les coordenades cartesianes d'un punt P, l'homotècia de centre el punt $(-1, 0)$ i escalar $1/\sqrt{2}$ transforma P en el punt

$$(-1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(P - (-1,0)\right).$$

Així, el punt $(3, 0)$ es transforma en el punt

$$(-1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left((3,0) - (-1,0)\right) = (-1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(4,0) = (2\sqrt{2}-1, 0).$$

En decimals (aproximats a tres xifres decimals), aquest punt és $(1.828, 0)$. La gràfica de les dues estrelles (la inicial i la d'àrea la meitat) és:



Problema 2. Molts dels logos que veiem habitualment estan dissenyats seguint la proporció àurea. Per exemple, el logos d'Apple, de Tweeter, de Google, d'iCloud, de National Geographic, de la petrolera bp, de Pepsi, ...

(a) Defineix què significa que dos nombres estan en proporció àurea. Dóna dues definicions diferents i demostra que són equivalents.

Dos nosmbres a i b (suposem que $a > b$) estan en proporció àurea si $a/b = \phi$ on ϕ és el nombre d'or, que val $(1+\sqrt{5})/2$. Una segona definició, que és la més clàssica, és que dos nombres estan en proporció àurea si $(a+b)/a = a/b$. Per veure que ambdues definicions són equivalents considerem el valor quocient entre a i b i li diem $q = a/b$. La primera definició ens diu que $q = \phi$ i la segona definició es reescriu com

$$\frac{q+1}{q} = q,$$

un cop hem substituït $a = bq$ i hem simplificat b. Escrivim aquesta darrera expressió com $q + 1 = q^2$, que dóna $q^2 - q - 1 = 0$. Resolem aquesta equació de segon grau i trobem

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

De les dues solucions descartem la negativa ja que q és un quocient de longituds i, per tant, és un nombre positiu. Concloem que si $q = \phi$ aleshores satisfà la segona definició. I, recíprocament, si q satisfà la segona equació aleshores $q = (1+\sqrt{5})/2 = \phi$.

(b) Dóna almenys dos exemples diferents de la natura, l'art o l'arquitectura on aparegui la proporció d'or. La proporció d'or apareix de manera ubiqua en el nostre entorn: l'alçada d'un humà i l'alçada fins al melic són dos valors que estan en proporció àurea, la longitud del braç d'una estrella pentagonal i la del pentàgon inscrit estan en proporció àurea (aquest exemple apareix en composicions artístiques), el Modulor de Le Corbusier és un conjunt de mesures harmòniques per a la fabricació d'objectes d'ús humà que segueixen la proporció d'or, ...

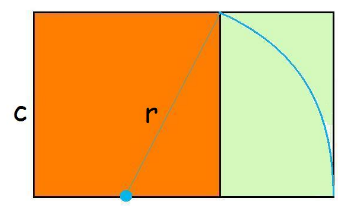
(c) Per què creus que s'usa la proporció àurea en el disseny de logos? Raona la teva resposta.

La proporció àurea ens resulta còmoda i agradable a l'ull. Es manifesta en tantes ocasions en el nostre entorn que ens hem acostumat a veure-la i quan un disseny no segueix aquesta proporció se'ns fa estrany. A més, fa que els logos ens resultin més quotidians i naturals. Algunes marques busquen relacionar els seus productes amb la natura, pel que la proporció àurea és un referent. Per exemple del logo de la marca Pepsi ens recorda un somriure i la proporció d'or ens ajuda a distingir-lo ja que les proporcions d'un somriure també segueixen el nombre d'or.

(d) Dibuixa un logo que segueixi la proporció àurea. Cal que descriguis amb detall com has determinat la proporció àurea en el teu logo. Com es construeix la raó àurea gràficament?

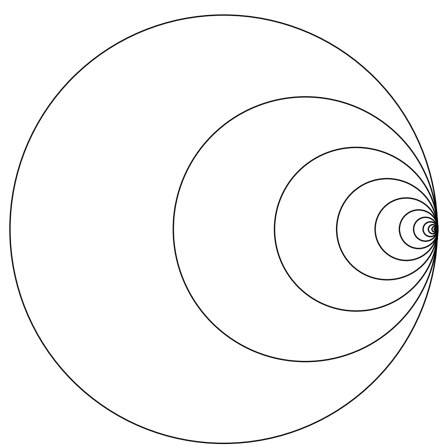
Per construir dues longituds que estiguin en proporció d'or, considerem una longitud, que serà la petita de les dues longituds que estan en proporció d'or.

Amb aquesta longitud, fem un quadrat. Allarguem la recta corresponent a un dels costats i punxem un compàs en la meitat d'aquest costat. Prenem com a radi la longitud fins a un dels vèrtexs oposats del quadrat i fem un arc de circumferència fins a la recta que hem allargat. En el punt d'intersecció podem construir un rectangle que contingui el quadrat inicial. La base i l'alçada d'aquest rectangle estan en proporció àurea. El següent gràfic mostra els passos que hem dit:



Un cop tenim les dues longituds que estan en proporció àurea les podem usar per construir el nostre logo. Podem observar que el rectangle resultant de treure el quadrat més gran possible d'un cantó del rectangle que hem fet, també té la base i l'alçada en proporció d'ór. I si a aquest li treiem un quadrat (el més gran possible, d'un cantó) també obtenim un rectangle semblant. D'aquesta manera podem obtenir infinits rectangles auris.

Una imatge generada d'aquesta manera pot ser la següent:

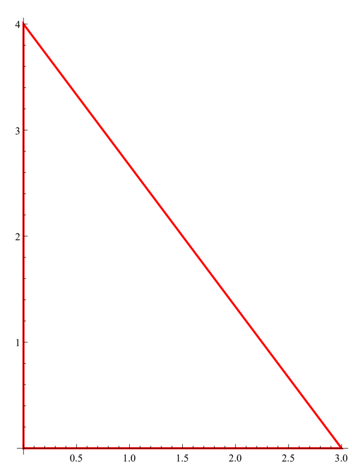


que està formada per 12 cercles de manera que els diàmetres entre dos cercles de mides consecutives estan en proporció àurea. Els diàmetres s'han pres a partir de la construcció de rectangles d'or.

Problema 3. Existeix l'infinit? Raona la resposta a aquesta pregunta usant conceptes com el googol i el googolplex, els diferents tipus d'infinit, la precisió, l'experiència humana, ...i explica l'obra artística de Yayoi Kusama i amb quins mitjans analitza aquesta pregunta.

Infinit es defineix com una quantitat que no te fi. Per exemple, hi han infinits nombres naturals i infinits nombres reals. En la nostra manera d'entendre els nombres naturals, per exemple, com que després d'un valor sempre n'hi ha un de més gran i aquest procés no s'acaba, veiem que n'hi ha una quantitat infinita. Per a fer aquesta descripció, hem usat la nostra imaginació, perquè no podem enumerar infinites coses. La pregunta que se'ns planteja és si existeix l'infinit. La resposta és que en el nostre pensament sí, ja que som capaços d'imaginar-lo, però no és un concepte tangible. Hi han nombres molt grans, com un googol $= 10^{100}$ o un googolplex $= 10^{\text{googol}}$. Podem imaginar aquests valors, però seguint les teories actuals de la física, a l'univers no hi han un googolplex de partícules. Per tant, hi han quantitats que *no existeixen*, en el sentit que no hi ha res que puguem comptar que tingui aquesta quantitat d'elements. Aquests valors són nombres naturals. També som capaços de pensar en l'infinit dels nombres reals, que és un altre tipus d'infinit tal com va definir Cantor. Entre dos nombres reals sempre n'hi ha un altre, i aquest fet ens demostra que, de fet, entre dos nombres reals sempre n'hi ha una infinitat. I que aquesta infinitat és tan gran com tots els nombres reals, tal com va mostrar Cantor. La continuïtat en els nombres reals també és una propietat que podem imaginar però no podem "tocar" perquè no hi ha cap aparell de mesura fabricat per humans que permeti precisió infinita. És a dir, no podem determinar, per exemple, totes les xifres del nombre π a partir de mesurar (amb algun aparell) la longitud d'una circumferència física. Tots els aparells tenen un error. L'experiència humana no ens permet determinar cap punt de manera exacta, ja que no podem mesurar les infinites xifres decimals que requerim per descriure'l. L'artista japonesa Yayoi Kusama és una artista pop icònica per tractar el tema de l'infinit. En les seves obres crea ambients infinits i els relaciona amb aspectes de les emocions humanes. Fa servir diferents perspectives i punts i miralls que creen reflexions entre sí. La pregunta de si l'infinit existeix és una constant en la seva obra de manera que mostra els límits de la nostra experiència que trenquem amb la nostra imaginació.

Problema 4. Construeix una corba d'amplada constant (i diàmetre 6) a partir del triangle de la figura següent.



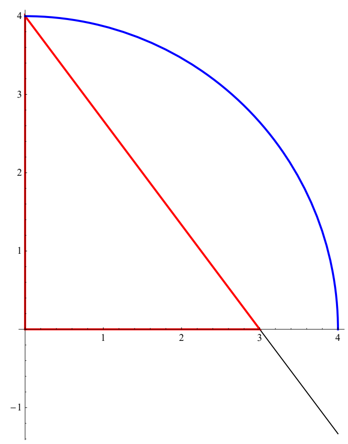
Cal que descriguis amb detall cadascun dels passos que fas. Per exemple, el primer pas és:

> Punxem el compàs en el punt $(0,0)$ i fem un arc de circumferència des del punt $(0,4)$ fins al punt $(4,0)$.

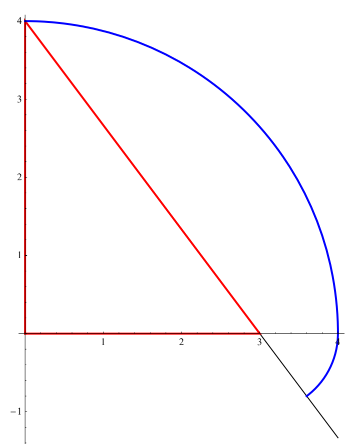
Demostra que el perímetre de la corba que has construït és 6π.

Tots els angles que apareixen en la descripció estan mesurats en radiants.

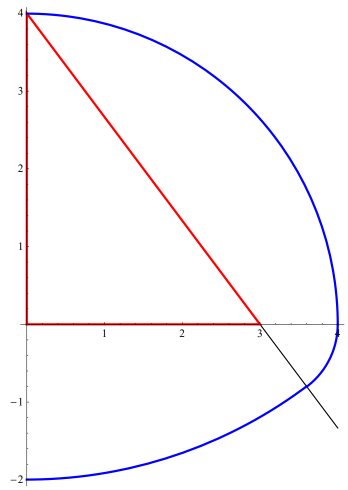
Primer pas: punxem el compàs en el punt $(0,0)$ i fem un arc de circumferència des del punt $(0,4)$ fins al punt $(4,0)$. El radi d'aquest arc de circumferència és 4 i hem fet un arc d'angle $\pi/2$ radiants.



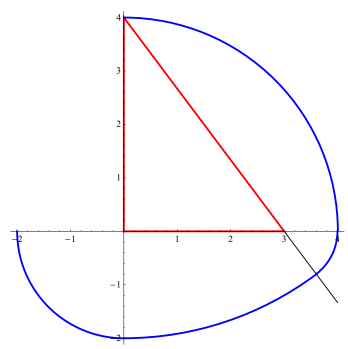
Segon pas: punxem el compàs en el punt $(3,0)$ i fem un arc de circumferència de radi 1 des del punt $(4,0)$ fins a intersecar la recta que hem allargat seguint la hipotenusa del triangle. Fixem-nos que aquest arc de circumferència té angle $\alpha = \arctan(4/3)$.



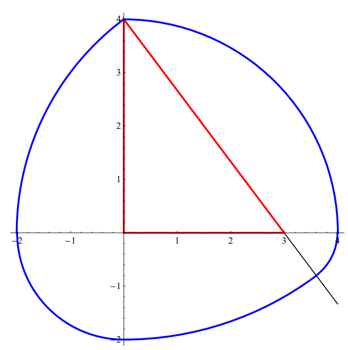
Tercer pas: punxem el compàs en el punt $(0,4)$ i fem un arc de circumferència de radi 6 des del punt on s'acaba l'arc anterior i el punt $(0,-2)$. Fixem-nos que aquest arc de circumferència té angle β, de manera que $\alpha + \beta + \pi/2 = \pi$ i així $\beta = \pi/2 - \alpha$.



Quart pas: punxem el compàs en el punt $(0, 0)$ i fem un arc de circumferència de radi 2 i angle $\pi/2$ des del punt $(0, -2)$ fins al $(-2, 0)$.



Cinquè i darrer pas: punxem el compàs en el punt $(3, 0)$ i fem un arc de circumferència de radi 5 des del punt $(-2, 0)$ fins al $(0, 4)$. Fixem-nos que aquest arc de circumferència té angle α. La corba final resultant és:



Per tal de mesurar el perímetre d'aquesta corba, recordem que la longitud d'un arc de circumferència de radi r i angle θ és $r\theta$, on θ està mesurat en radiants. Sumem les longituds dels arcs de circumferència de cadascun dels cinc passos:

$$4 \cdot \frac{\pi}{2} + 1 \cdot \alpha + 6 \cdot \beta + 2 \cdot \frac{\pi}{2} + 5 \cdot \alpha,$$

on $\alpha = \arctan(4/3)$ i $\beta = \pi/2 - \alpha$. Substituim el valor de β en la suma anterior i trobem que el perímetre val

$$2\pi + \alpha + 6\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \pi + 5\alpha = 2\pi + 3\pi + \pi = 6\pi.$$

Tot i que no ho demana el problema, calculem l'àrea que cobreix aquesta corba. Recordem que l'àrea d'un sector circular de radi r i angle θ és $r^2\theta/2$ on θ està mesurat en radiants. Si sumem les àrees de tots els sectors circulars que hem fet en la construcció de la corba, cobrim el triangle inicial 3 cops. Fixem-nos que el triangle inicial té àrea $3 \cdot 4/2 = 6$, on hem usat que l'àrea d'un triangle és base per alçada partit per 2. Per tant, l'àrea envoltada per la corba que hem construit és la suma de les àrees de tots els sectors circulars a la que li hem de restar 12. Calculem primer la suma de les àrees de tots els sectors circulars:

$$16 \cdot \frac{\pi}{4} + 1^2 \cdot \frac{\alpha}{2} + 36 \cdot \frac{\beta}{2} + 4 \cdot \frac{\pi}{4} + 25 \cdot \frac{\alpha}{2},$$

on, com abans, $\alpha = \arctan(4/3)$ i $\beta = \pi/2 - \alpha$. Substituim el valor de β com abans i tenim

$$4\pi + \frac{\alpha}{2} + 9\pi - 36 \cdot \frac{\alpha}{2} + \pi + 25 \cdot \frac{\alpha}{2} = 14\pi - 5\alpha.$$

Per tant, l'àrea coberta per la corba que hem construit val

$$14\pi - 5\alpha - 12,$$

on $\alpha = \arctan(4/3)$. Substituim el valor de $\alpha \approx 0.9273$ i l'àrea queda 27.3458.