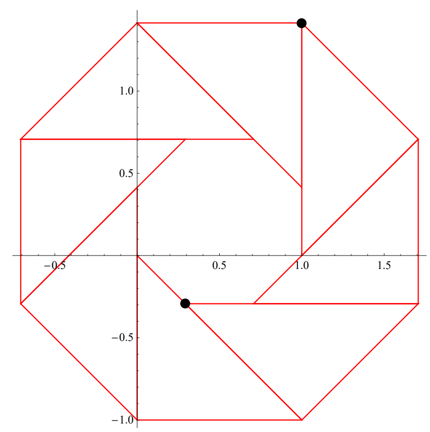
Matemàtiques aplicades a l'art i el disseny digital

Grau en disseny digital i tecnologies creatives

PROVA DE RECUPERACIÓ. 10 de Febrer de 2021

1. (3 *punts*)

   (a) La següent figura està formada per triangles rectangles que tenen ambdós catets de llargada 1. Determina les coordenades cartesianes dels dos vèrtexs marcats:

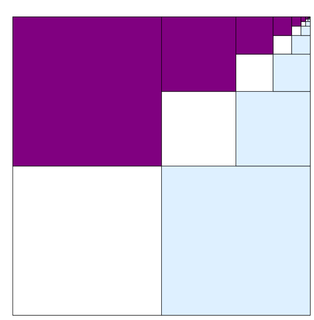


   (b) Realitzem una translació de manera que la figura quedi centrada en l'origen. Quin és el vector de la translació? Justifica la teva resposta.

2. (2 *punts*) Considerem la progressió geomètrica de primer terme 1/4 i raó 1/4.

   (a) Dóna els set primers termes d'aquesta progressió i el valor de la suma d'aquests termes.

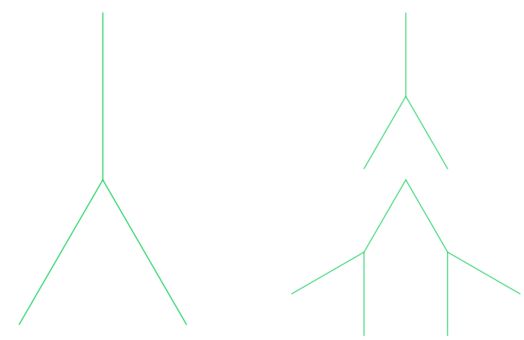
   (b) Dóna el valor de la suma de tots els seus termes. Pots arribar a la mateixa conclusió geomètricament mitjançant la figura següent. Raona com.



3. (2 *punts*) Descriu quins són els nombres de Fibonacci i de quina manera estan relacionats amb el nombre d'or. Dóna un parell d'exemples de l'art o la natura on apareguin els nombres de Fibonacci. Com es construeix l'espiral de Fibonacci? Fes una representació gràfica d'una espiral de Fibonacci que doni almenys una volta.

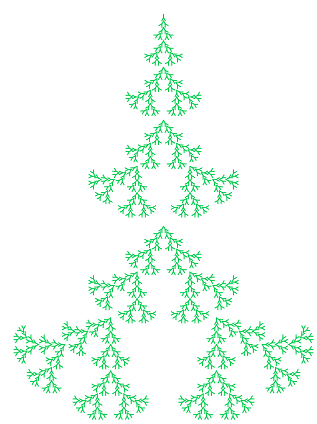
4. (3 *punts*) Considerem el fractal definit de la forma següent.

   - comencem amb un segment vertical de longitud 1
   - i dividim la meitat de sota del segment en dos separats un angle de $\pi/3\,rad$.
   - Repetim el procés en cada segment dels tres obtinguts.



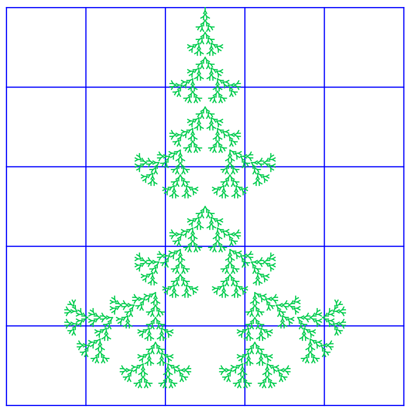
   (a) Dibuixa el tercer pas de la construcció d'aquest fractal.

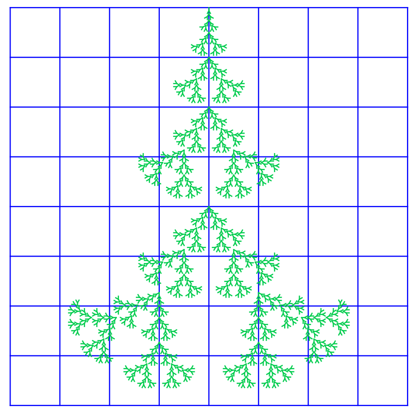
   (b) Al cap d'infinites iteracions, obtenim un fractal de la forma següent.



(b.1) Determina la seva dimensió de semblança. Dóna la definició de dimensió de semblança per a un fractal.

(b.2) Calcula aproximacions a la seva dimensió fractal mitjançant el mètode de recompte de caixes. Pots fer servir les dues figures següents.





Observacions.-

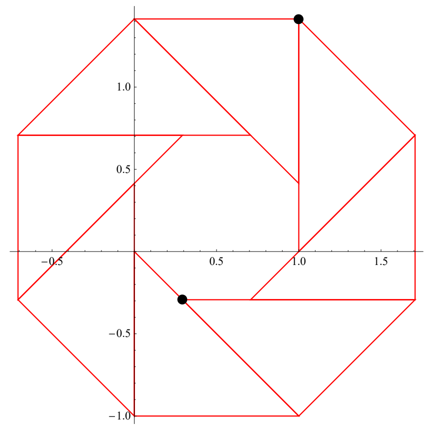
- Recorda d'escriure el teu nom i cognoms i el teu número de DNI en TOTS els fulls de l'examen.

- Disposes de dues hores per a realitzar aquesta prova.

Resolució de la Prova de recuperació.

Problema 1. (a)

La següent figura està formada per triangles rectangles que tenen ambdós catets de llargada 1. Determina les coordenades cartesianes dels dos vèrtexs marcats:



Per trobar el vèrtex marcat i situat en el quart quadrant, considerem el triangle de sota, que té per vèrtexs els punts $(0,0)$, $(0,-1)$ i $(1,-1)$. Pel Teorema de Pitàgores deduim que la seva hipotenusa medeix $\sqrt{2}$. Com que tots els triangles tenen catets de llargada 1, veiem que aquest punt està a distància $\sqrt{2}-1$ de l'origen de coordenades. A més veiem que el seu angle respecte del semieix positiu és -45^o. Per tant, les seves coordenades polars són $r=\sqrt{2}-1$ i angle $\theta = -45^o$. Fem el canvi a coordenades cartesianes amb les fórmules

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta = (\sqrt{2}-1)\cos(-45^o) = (\sqrt{2}-1)\frac{\sqrt{2}}{2} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y &= r\sin\theta = (\sqrt{2}-1)\sin(-45^o) = (\sqrt{2}-1)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}-1. \end{aligned}$$

Per tant, tenim el punt

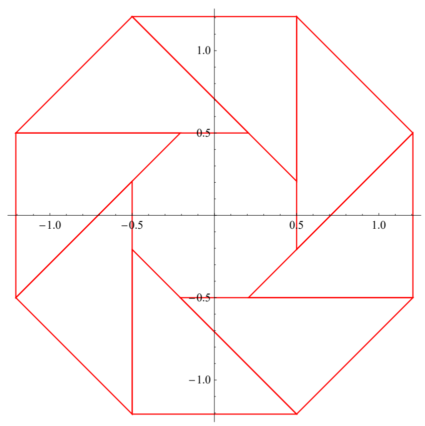
$$(x,y) = (1-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2-1) \approx (0.292893, -0.292893).$$

Per trobar les coordenades del vèrtex marcat i situat en el primer quadrant, ens adonem que la seva abcissa val 1 i la seva ordenada val $\sqrt{2}$ ja que coincideix amb el valor de la hipotenusa d'un triangle rectangle de catets de mida

1 (hem usat el Teorema de Pitàgores). Per tant, les seves coordenades cartesianes són $(x, y) = (1, \sqrt{2}) \approx (1, 1.41421)$.

(b) Realitzem una translació de manera que la figura quedi centrada en l'origen. Quin és el vector de la translació? Justifica la teva resposta.

Calculem les coordenades cartesianes del centre de l'octàgon petit de la figura. Veiem que la seva abcissa és $1/2$ i la seva ordenada, tenint en compte que cada costat d'aquest octàgon petit medeix $\sqrt{2} - 1$, és $(\sqrt{2} - 1)/2$. És a dir, que el centre de la figura es troba en el punt de coordenades $(x, y) = (1/2, (\sqrt{2} - 1)/2)$. Llavors el vector de la translació de manera que la figura queda centrada en l'origen és $\vec{v} = (-1/2, (1 - \sqrt{2})/2) \approx (-0.5, -0.207107)$. La figura resultant d'aplicar la translació respecte d'aquest vector, és a dir de transformar cada punt P a $P + \vec{v}$, queda:



Problema 2. Considerem la progressió geomètrica de primer terme $1/4$ i raó $1/4$.

(a) Dóna els set primers termes d'aquesta progressió i el valor de la suma d'aquests termes. Comencem amb el valor $1/4$ i cada terme es calcula a partir de l'anterior multiplicant per $1/4$ de manera que tenim:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \frac{1}{1024}, \frac{1}{4096}, \frac{1}{16384}.$$

La suma de k termes d'una progressió geomètrica de raó r ve donada per la fórmula

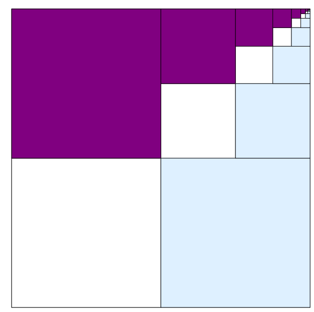
$$\frac{(\text{darrer terme})\, r - \text{primer terme}}{r - 1}.$$

En el nostre cas, trobem que la suma d'aquests valors dóna:

$$\frac{\frac{1}{16384}\,\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-1}=\frac{5461}{16384}\approx 0.333313$$

(b)

Dóna el valor de la suma de tots els seus termes. Pots arribar a la mateixa conclusió geomètricament mitjançant la figura següent. Raona com.



La suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica de raó r, quan $|r|<1$, ve donada per la fórmula

$$\frac{\text{primer terme}}{1-r}.$$

En el nostre cas dóna

$$\frac{1/4}{1-1/4}=\frac{1}{3}.$$

En la figura veiem tres bandes de quadrats pintades en colors diferents. Si posem que l'àrea del quadrat gran, que conté tots els altres, és 1, aleshores cada banda ocupa un terç de l'àrea total del quadrat. Triem una de les bandes, per exemple la dels quadrats blancs. Veiem que les àrees de cadascun dels quadrats blancs són

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{256},\ \frac{1}{1024},\ldots$$

ja que el quadrat blanc més gran és 1/4 del quadrat gros, el segon quadrat més gran té un quart de l'àrea anterior, és a dir 1/16, el tercer quadrat més gran té àrea un quart de l'anterior, és a dir 1/64 i així successivament. És a dir, les àrees de cadascun dels quadrats blancs formen una progressió geomètrica de primer terme 1/4 i raó 1/4 i tots ells (els infinits) ocupen àrea 1/3.

Problema 3. Descriu quins són els nombres de Fibonacci i de quina manera estan relacionats amb el nombre d'or. Dóna un parell d'exemples de l'art o la natura on apareguin els nombres de Fibonacci. Com es construeix l'espiral de Fibonacci? Fes una representació gràfica d'una espiral de Fibonacci que doni almenys una volta.

Els nombres de Fibonacci és una successió de nombres naturals que es defineixen de manera recursiva de la forma següent: els dos primers nombres de Fibonacci són 1, 1 i cada nombre de Fibonacci és la suma dels dos anteriors. Així obtenim la successió següent:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Aquesta successió té infinits valors. Si diem c_n al valor n-èssim, aleshores aquesta successió es defineix amb les fórmules:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad c_n = c_{n-1} + c_{n-2} \text{ per a } n > 2.$$

Considerem ara la successió formada per quocients de dos nombres consecutius de Fibonacci, és a dir, els primers termes d'aquesta successió són

$$\frac{1}{1} = 1, \; \frac{2}{1} = 2, \; \frac{3}{2} = 1.5, \; \frac{5}{3} = 1.\widehat{6}, \; \ldots$$

Diem r_n als termes d'aquesta successió i tenim que $r_n = c_{n+1}/c_n$. Anem a manipular algunes expressions per a calcular el valor del límit de la successió r_n, que és un nombre entre 1 i 2. Veiem que $r_{n-1} = c_n/c_{n-1}$ i com que $c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$ tenim que

$$r_n = \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{c_n + c_{n-1}}{c_n} = \frac{c_n}{c_n} + \frac{c_{n-1}}{c_n} = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}.$$

Hem deduït que $r_n = 1 + 1/r_{n-1}$. Diem ℓ al límit de la successió r_n i en la identitat anterior fem n tendir a infinit, de manera que trobem que $\ell = 1 + 1/\ell$. Arreglem aquesta equació i trobem que $\ell^2 - \ell - 1 = 0$. Resolem aquesta equació de segon grau i trobem les solucions:

$$\ell = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}.$$

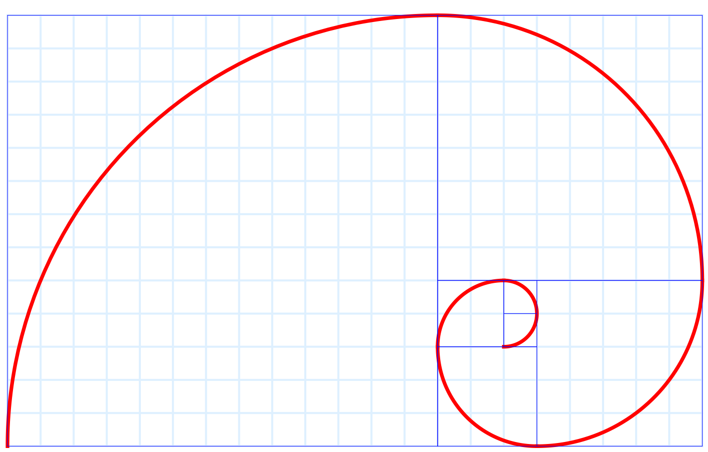
De les dues solucions, només n'hi ha una que es troba entre 1 i 2. I aquest és el nombre d'or, que denotem per φ:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Hem vist, doncs, que el nombre d'or és el límit de la successió formada pels quocients de dos nombres consecutius de Fibonacci.

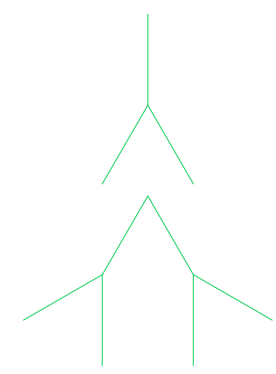
Els nombres de Fibonacci apareixen en la distribució dels pètals de les flors. La majoria de flors tenen un nombre de pètals que és un nombre de Fibonacci. Aquests nombres també apareixen en la distribució arquitectònica d'edificis emblemàtics, per exemple en la cultura grega o romana. El Partenó d'Atenes es recolza en columnes situades en les seves façanes exteriors. Els dos cantons més curts contenen vuit columnes cadascun.

Un altre exemple d'aplicació dels nombres de Fibonacci és l'espiral de Fibonacci. Moltes composicions artístiques es basen en aquesta espiral, per exemple, el quadre titulat *Tassa gegant volant, amb apèndix incomprensible de cinc metres de llarg*, de Salvador Dalí. L'espiral de Fibonacci es construeix a partir d'una quadrícula formada per dos nombres consecutius de Fibonacci. D'aquesta quadrícula, prenem un quadrat (el més gran possible), en un dels seus extrems. Aleshores, en el rectangle que ens queda prenem també un quadrat el més gran possible en un dels seus extrems. En el rectangle que ens queda, prenem també un quadrat el més gran possible en l'extrem que voreja l'anterior. I repetim el procés fins que ens queden dos quadrats de la quadrícula. Ens queden exactament dos quadrats per construcció, donada la definició dels nombres de Fibonacci. Aleshores construim l'espiral punxant en alguns vèrtexs de la quadrícula i fent quarts de circumferència tangents als quadrats triats. Podem continuar l'espiral per fóra afegint un quadrat de mida el costat més llarg de la quadrícula anterior. Podem fer una espiral que doni tantes voltes com vulguem, fent-la a cada volta, més gran. El resultat, començant a partir d'una qudrícula 13×21 és el següent.

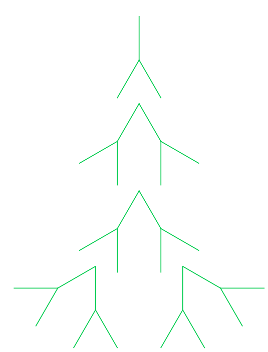


Problema 4. Considerem el fractal definit de la forma següent.

- comencem amb un segment vertical de longitud 1
- i dividim la meitat de sota del segment en dos separats un angle de $\pi/3\,rad$.
- Repetim el procés en cada segment dels tres obtinguts.

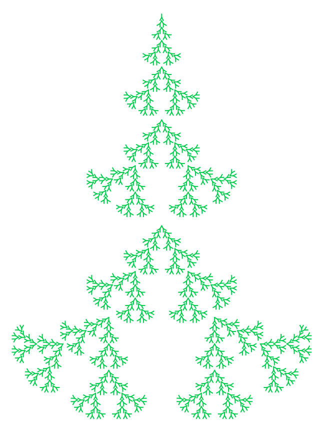


(a) Dibuixa el tercer pas de la construcció d'aquest fractal.
Seguint les instruccions que defineixen aquest fractal, el tercer pas és



També podem dibuixar els passos quart i cinquè (tot i que no ens ho demana el problema):

(b) Al cap d'infinites iteracions, obtenim un fractal de la forma següent.



(b.1) Determina la seva dimensió de semblança. Dóna la definició de dimensió de semblança per a un fractal.

La dimensió de semblança es defineix per a fractals perfectament autosemblants de la manera següent: dividim un costat del fractal en k trossos i obtenim p peces semblants. Aleshores la dimensió de semblança es calcula amb el quocient:

$$\text{dimensió de semblança} = \frac{\ln p}{\ln k}.$$

En el cas d'aquest fractal veiem que si dividim un costat en 2 trossos obtenim 3 peces semblants, de manera que la dimensió de semblança esdevé

$$\text{dimensió de semblança} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.58496$$

(b.2) Calcula aproximacions a la seva dimensió fractal mitjançant el mètode de recompte de caixes. Pots fer servir les dues figures següents.

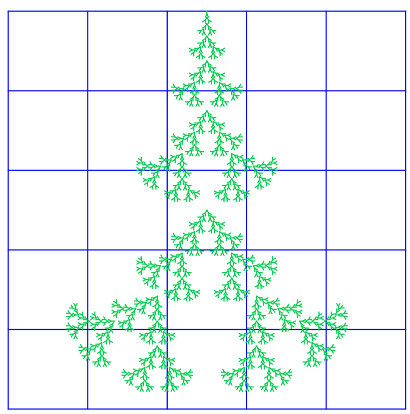
El métode de recompte de caixes ens permet calcular aproximacions a la dimensió fractal de la manera següent. Considerem una quadrícula amb n quadradets per costat que cobreixi el fractal i calculem el nombre $N(n)$ de quadradets ocupats pel fractal. Calculem el quocient

$$\frac{\ln N(n)}{\ln n}.$$

En augmentar la n aquest valor s'aproxima al valor de la dimensió fractal, de manera que

$$\text{dimensió fractal} = \text{límit}\,\frac{\ln N(n)}{\ln n} \quad \text{quan } n \text{ tendeix a } +\infty.$$

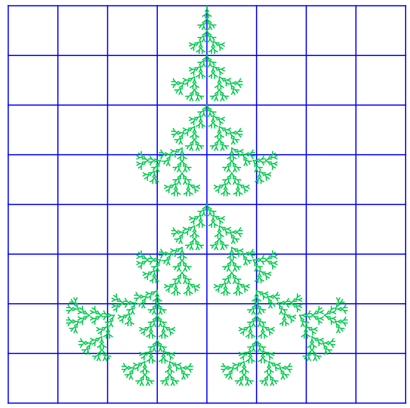
En el primer gràfic



tenim una quadrícula de 5 quadrats a cada costat. Veiem que hi han 17 quadrats ocupats pel fractal, pel que $N(5) = 17$. Aleshores tenim el quocient

$$\frac{\ln 17}{\ln 5} \approx 1.76037$$

En la segona figura



tenim una quadrícula de 8 quadrats a cada costat i comptem 34 quadrats ocupats pel fractal, de manera que $N(8) = 34$ i trobem el quocient

$$\frac{\ln 34}{\ln 8} \approx 1.69582$$