Matemàtiques aplicades a l'art i el disseny digital

Grau en disseny digital i tecnologies creatives

PROVA DE RECUPERACIÓ. 28 de Gener de 2020

1. (3 *punts*) Dibuixa una quadrícula de 5×8 i dibuixa-hi una espiral de Fibonacci tan gran com puguis.

   (a) Posa coordenades en la quadrícula i digues quines són les coordenades dels centres i els valors del radi dels trossos de circumferència que has dibuixat.

   (b) Quina és l'àrea que escombra aquesta espiral?

   (c) Pots continuar aquesta espiral per dins? Raona la teva resposta.

   (d) La successió de Fibonacci s'inicia en els valors 1, 1. Continua-la endarrera, és a dir, quins serien els valors anteriors al 1, 1? Dóna almenys sis valors.

2. (2 *punts*) Dóna almenys dues definicions diferents del rectangle d'or i demostra que són equivalents. Dóna almenys dos exemples en la natura, l'art, el disseny o l'arquitectura d'aplicació del rectangle d'or.

3. (2 *punts*) Considerem la successió iterada definida per $x_n = f(x_{n-1})$ amb $f(x) = rx(1-x)$. Considerem valors de x entre 0 i 1. Aquesta és l'anomenada *aplicació logística*.

   (a) En quin camp científic apareix l'aplicació logística i qué representa?

   (b) Dóna la definició de caos matemàtic.

   (c) Prenem $r = 2$. Comprova, mitjançant alguns exemples amb la calculadora, que

   - Si $x_0 = 0$, aleshores la successió x_n és constant igual a 0.
   - Si $0 < x_0 < 1$, aleshores la successió x_n tendeix a 0.5.

- Si $x_0 = 1$, aleshores la successió x_n és constant igual a 0.

   És aquesta successió caòtica? Raona la teva resposta.

(d) Prenem $r = 3.9$. Calcula quatre iterats de la successió definida començant per dos condicions inicials separades d'una centèssima (per exemple 0.41 i 0.42). Ens suggereix el resultat que aquesta successió és caòtica? Per què?

4. (3 *punts*) Volem construir una tessel·lació del pla fent servir només polígons regulars.

   (a) Si només podem fer servir **un** tipus de polígon, quins polígons podem fer anar? Raona la teva resposta.

   (b) Defineix què és una tessel·lació semi-regular. Dóna un exemple de tessel·lació semi-regular fent servir només octàgons regulars i quadrats. Cal que en el dibuix surtin almenys deu octàgons regulars.

   (c) Dóna un exemple d'una tessel·lació que no sigui ni regular ni semi-regular i que faci servir només polígons regulars. Cal que en el dibuix surtin almenys dotze peces.

OBSERVACIONS.-

- Recorda d'escriure el teu nom i cognoms i el teu número de DNI en TOTS els fulls de l'examen.
- Disposes de dues hores per a realitzar aquesta prova.

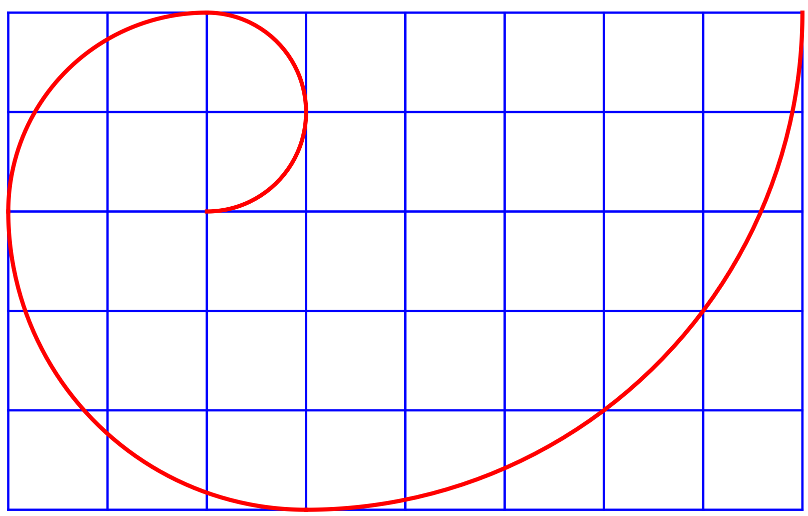
Resolució de la Prova de recuperació.

Problema 1. Dibuixa una quadrícula de 5×8 i dibuixa-hi una espiral de Fibonacci tan gran com puguis.

L'espiral de Fibonacci es construeix amb quarts de circumferència que es concatenen i els seus radis van creixent seguint la successió de Fibonacci:

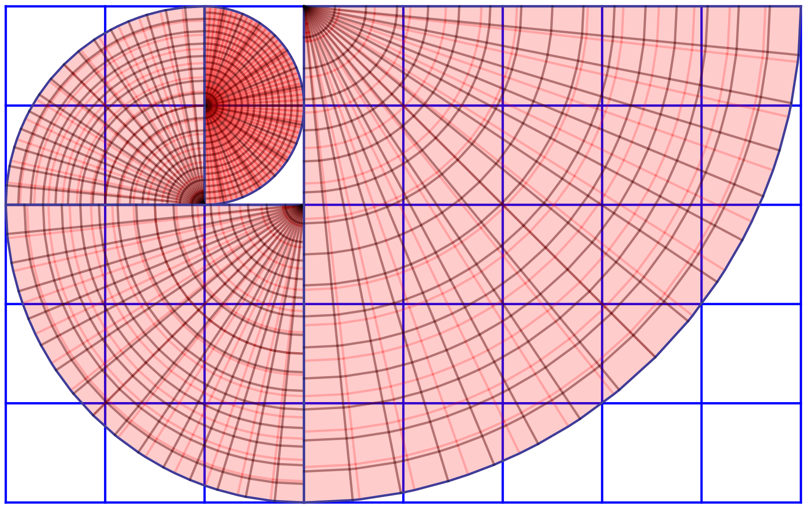
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Un exemple de quadrícula 5×8 amb una espiral de Fibonacci (fins a radi 5) és la següent:



(a) Posa coordenades en la quadrícula i digues quines són les coordenades dels centres i els valors del radi dels trossos de circumferència que has dibuixat. Posem coordenades de manera que l'extrem de l'esquerra i de sota de la quadrícula sigui el $(0, 0)$ i l'extrem de dalt a la dreta sigui el $(8, 5)$. Primer hem fet dos quarts de circumferència ambdos de radi 1, amb centre en el punt $(2, 4)$ (angle de -90^o a 90^o). Després posem de centre el punt $(2, 3)$ i fem un quart de circumferència de radi 2 (angle de 90^o a 180^o). Després prenem com a centre el punt $(3, 3)$ i fem un quart de circumferència de radi 3 (angle de 180^o a 270^o). I finalment, hem pres un quart de circumferència amb centre el punt $(3, 5)$ i radi 5 (angle de 270^o a 360^o).

(b) Quina és l'àrea que escombra aquesta espiral?



L'àrea d'una circumferència de radi r és πr^2. La primera meitat de circumferència escombra àrea $\pi\, 1^2/2$. Després tenim un quart de circumferència que escombra àrea $\pi\, 2^2/4$, el següent quart de circumferència escombra àrea $\pi\, 3^2/4$ i el darrer quart de circumferència àrea $\pi\, 5^2/4$. En total l'espiral escombra àrea

$$\frac{\pi\, 1^1}{2} + \frac{\pi\, 2^2}{4} + \frac{\pi\, 3^2}{4} + \frac{\pi\, 5^2}{4} = 10\pi.$$

(c) Pots continuar aquesta espiral per dins? Raona la teva resposta. Aquesta espiral no la podem continuar per dins perquè els radis han de seguir la successió de Fibonacci i el valor anterior al 1, 1 és 0 que no dóna lloc a cap radi.

(d) La successió de Fibonacci s'inicia en els valors 1, 1. Continua-la endarrera, és a dir, quins serien els valors anteriors al 1, 1? Dóna almenys sis valors. Tal com hem vist en l'apartat anterior, per continuar la successió de Fibonacci hem de prendre valors que en sumar-ne dos de consecutius doni el tercer. Per tant, abans del 1, 1, hi ha d'haver un valor que al sumar-lo a l'1 doni 1, és a dir, el 0. I fent servir la mateixa regla obtenim la següent successió:

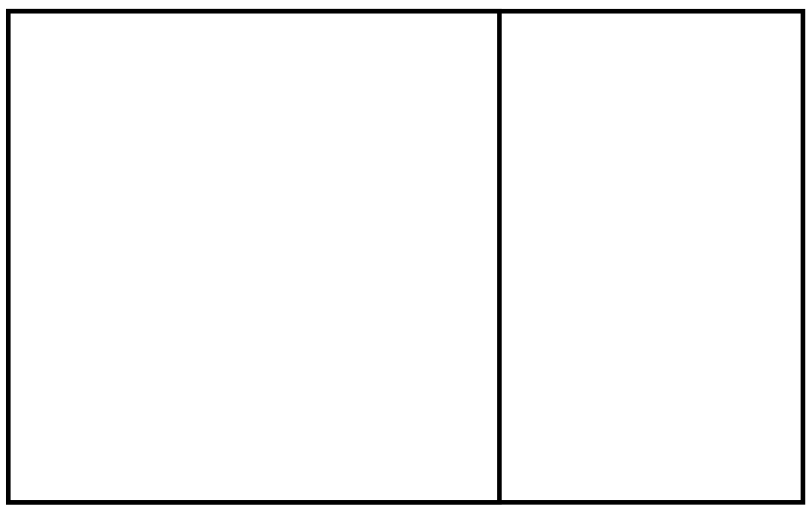
$$\ldots, -21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$$

Problema 2. Dóna almenys dues definicions diferents del rectangle d'or i demostra que són equivalents. Dóna almenys dos exemples en la natura, l'art, el disseny o l'arquitectura d'aplicació del rectangle d'or.

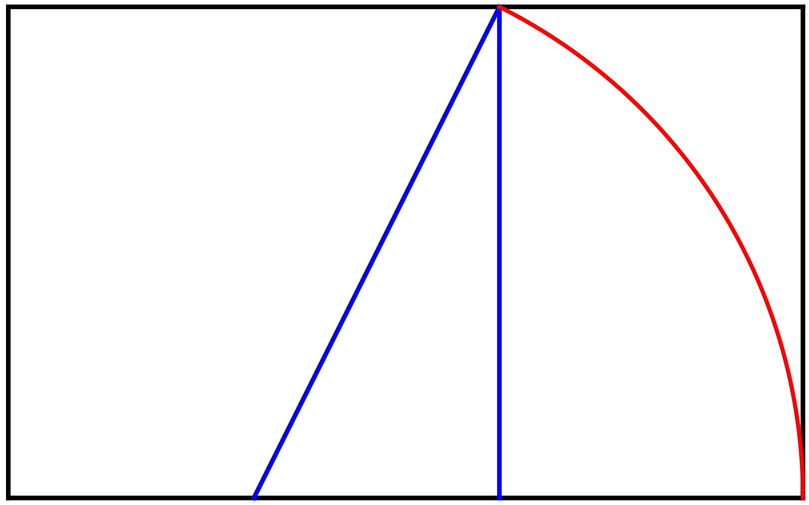
Hi han diverses definicions de rectangle d'or. Aquí n'hi han tres:

- Diem A a la llargada de la base (costat llarg) d'un rectangle i B a la llargada de l'alçada (costat curt). Un rectangle és auri si $A/B = \phi$ on $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ és el nombre d'or.

- Un rectangle és d'or quan el rectangle que resulta de treure'n el quadrat més gran possible és semblant a l'inicial.



- Un rectangle d'or es construeix a partir d'un quadrat, es pren un quart de circumferència de centre el punt mig d'un costat del quadrat i radi la distància fins a un vèrtex oposat i es fa el rectangle d'alçada el quadrat i de base el punt on ha acabat el quart de circumferència.



Anem a veure que les dues primeres definicions són equivalents. Suposem un rectangle que compleix que $A/B = \phi$ on A és la llargada de la base i B la de l'alçada. Treiem d'aquest rectangle el quadrat més gran i diem a a la llargada de la base i b a la llargada de l'alçada del rectangle que queda. Veiem que $a = B$ i $b = A - B$. Veiem que

$$\frac{a}{b} = \frac{B}{A-B} = \frac{B}{\phi B - B} = \frac{1}{\phi - 1}.$$

Notem que el valor ϕ compleix que $\phi(\phi - 1) = 1$ de manera que $a/b = A/B$ i, per tant, els dos rectangles són semblants. Si partim com a hipòtesi de que els dos rectangles són semblants, aleshores pel mateix raonament al revés, deduim que $A/B = q$ on q és un nombre major que 1 (perquè $A > B$) que compleix que $q(q-1) = 1$. Resolent aquesta equació de segon grau trobem que $q = \phi$ i reobtenim la primera definició. Per tant, les dues primeres definicions són equivalents.

El rectangle d'or apareix en les proporcions de la façana de la catedral de Nôtre Dame (que està inscrita en un rectangle d'or), i també en les proporcions de la cara de La Mona Lisa, per exemple.

Problema 3. Considerem la successió iterada definida per $x_n = f(x_{n-1})$ amb $f(x) = rx(1-x)$. Considerem valors de x entre 0 i 1. Aquesta és l'anomenada *aplicació logística*.

(a) En quin camp científic apareix l'aplicació logística i qué representa? Aquesta aplicació apareix en biologia i dóna un model demogràfic d'una població tal que la seva mortalitat depén només de la competència entre individus de la mateixa població. Els valors de x_n representen un tant per u de la població en un moment n i r és el valor de la taxa de creixement. Per valors de r entre 3.8 (aproximadament) i 4 les solucions d'aquesta equació mostren caos.

(b) El caos matemàtic es mostra amb la sensibilitat a les condicions inicials. En un sistema caòtic, si coneixem amb total precisió les condicions inicials, les equacions del model ens donen una solució, però si les condicions inicials són lleugerament diferents, obtenim una solució totalment diferent. Aquest fet és el caos matemàtic.

(c) Prenem $r = 2$. Comprova, mitjançant alguns exemples amb la calculadora, que

- Si $x_0 = 0$, aleshores la successió x_n és constant igual a 0.
- Si $0 < x_0 < 1$, aleshores la successió x_n tendeix a 0.5.
- Si $x_0 = 1$, aleshores la successió x_n és constant igual a 0.

És aquesta successió caòtica? Raona la teva resposta.

Prenem $x_0 = 0$ i la iteració $x_{n+1} = 2x_n(1-x_n)$ és tal que $x_n = 0$ constant igual a zero. Si prenem $x_0 = 1$ veiem que $x_1 = 2 \cdot 1 \cdot (1-1) = 0$ i, pel mateix raonament d'adés, és clar que la successió acaba essent constant igual a 0. Si prenem $x_0 = 0.5$, tenim que $x_1 = 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.5$ pel que la successió esdevé constant igua a 0.5. Si tenim $x_0 \in (0,1)$, prenem per exemple $x_0 = 0.2$ i trobem que els primers dotze termes de la successió són:

$$0.2, 0.32, 0.4352, 0.491602, 0.499859, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, \ldots$$

Si prenem $x_0 = 0.4$ trobem els següents termes

$$0.4, 0.48, 0.4992, 0.499999, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, \ldots$$

Si prenem $x_0 = 0.6$ trobem els següents termes

$$0.6, 0.48, 0.4992, 0.499999, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, \ldots$$

I si prenem $x_0 = 0.8$, trobem els següents termes

$$0.8, 0.32, 0.4352, 0.491602, 0.499859, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, \ldots$$

Observem, doncs, que el que diu l'enunciat es compleix. Aquesta successió no és caòtica perquè punts inicials propers donen lloc al mateix límit de 0.5 en la successió.

(d) Prenem $r = 3.9$. Calcula quatre iterats de la successió definida començant per dos condicions inicials separades d'una centèssima (per exemple 0.41 i 0.42). Ens suggereix el resultat que aquesta successió és caòtica? Per què?

Comencem amb la condició inicial $x_0 = 0.41$ i calculem alguns termes de la successió definida per $x_{n+1} = 3.9x_n(1 - x_n)$:

$$\begin{gathered}0.41, 0.94341, 0.208212, 0.642952, 0.895302, 0.36557,\\ 0.904522, 0.336812, 0.871142, 0.437789, \ldots\end{gathered}$$

Ara prenem com a condició inicial $x_0 = 0.42$ i calculem alguns termes de la successió:

$$\begin{gathered}0.42, 0.95004, 0.18511, 0.588292, 0.944598, 0.204098,\\ 0.633523, 0.905469, 0.33382, 0.867299, \ldots\end{gathered}$$

Observem que malgrat les condicions inicials són molt properes (difereixen d'una centèssima), les successions que en resulten són molt diferents. Això ens suggereix que aquesta successió és caòtica ja que mostra sensibilitat a les condicions inicials.

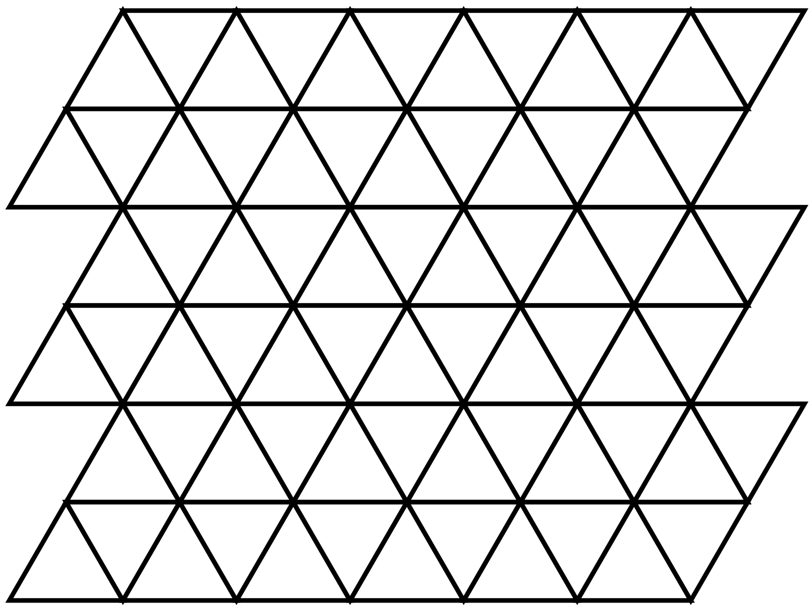
Problema 4. Volem construir una tessel·lació del pla fent servir només polígons regulars.

(a) Si només podem fer servir **un** tipus de polígon, quins polígons podem fer anar? Raona la teva resposta.

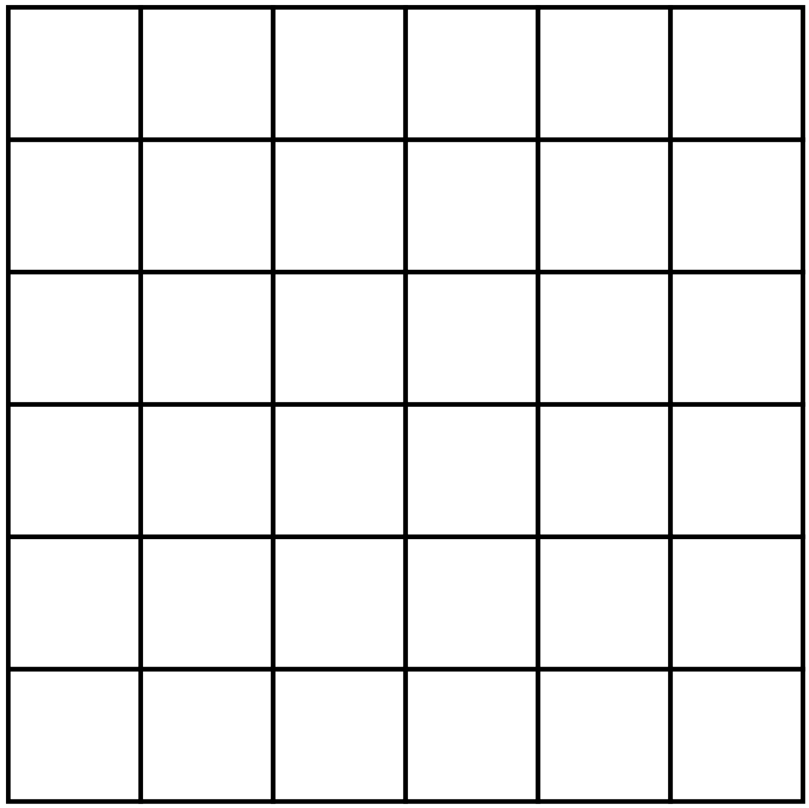
Una *tessel·lació* és un recobriment del pla amb figures que no es superposen ni deixen forats sense cobrir. Considerem només tessel·lacions que siguin *aresta a aresta*. És a dir, que les arestes coincideixin en tota la seva longitud i es trobin en vèrtexos. Les tessel·lacions regulars estan formades per polígons regulars, és a dir, polígons amb tots els costats i tots els angles iguals. Només podem fer servir un tipus de peça. Per tant, hem d'usar polígons regulars tals que algun múltiple enter positiu del seu angle intern en cada vèrtex sigui

360^o ja que si no no podem gener una tessel·lació. Els angles interiors d'un polígon regular de n costats medeixen $(n-2)\,180^o/n$ graus.

- Els angles interiors d'un triangle regular medeixen 60^o, pel que amb 6 triangles regulars en un vèrtex tenim 360^o. Amb aquesta figura podem generar una tessel·lació regular.

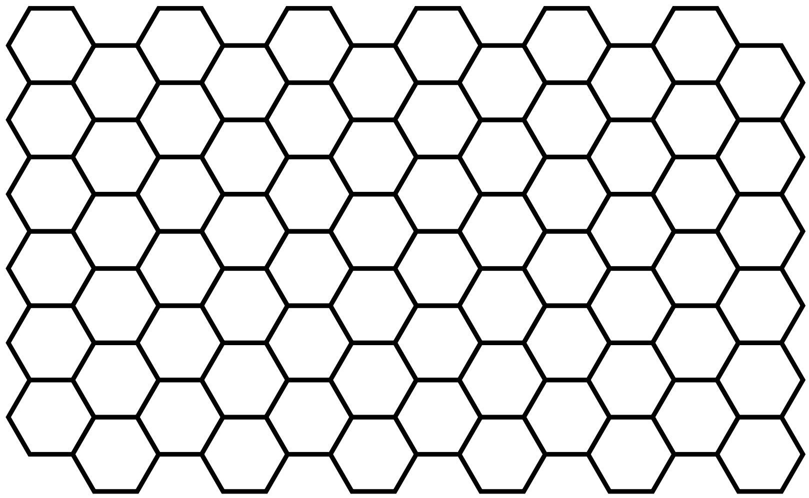


- Els angles interiors d'un quadrat medeixen 90^o, pel que amb 4 quadrats en un vèrtex tenim 360^o. Amb aquesta figura podem generar una tessel·lació regular.



- Els angles interiors d'un pentàgon regular medeixen 108^o, pel que amb 3 pentàgons en un vèrtex tenim 324^o i amb 4 pentàgons en un vèrtex tenim 432^o. No podem fer 360^o amb un nombre enter de pentàgons. No podem generar una tessel·lació regular.

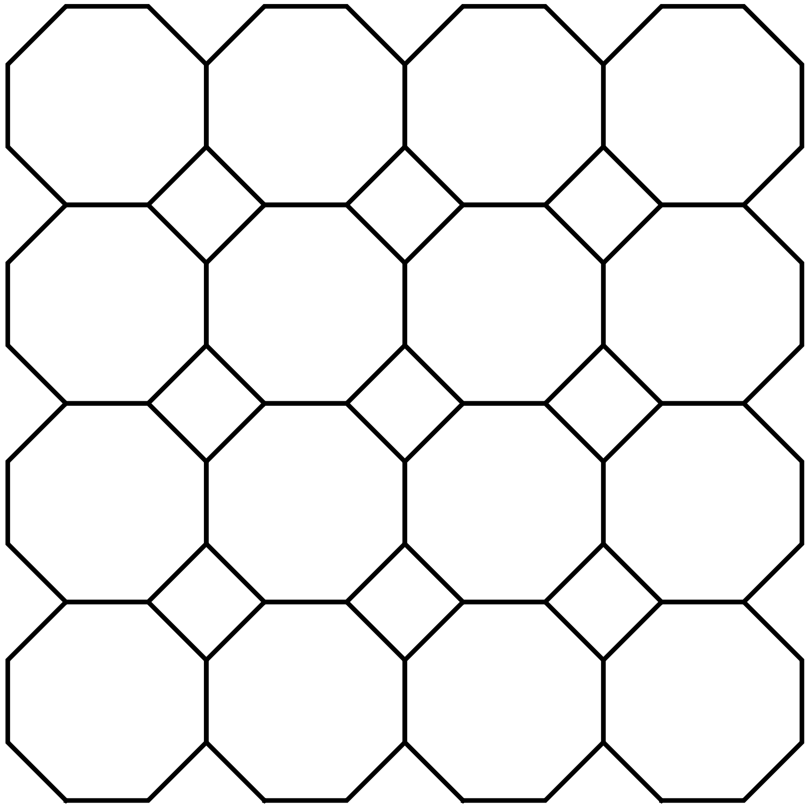
- Els angles interiors d'un hexàgon regular medeixen 120^o, pel que amb 3 hexàgons regulars en un vèrtex tenim 360^o. Amb aquesta figura podem generar una tessel·lació regular.



- Els angles interiors d'un polígon regular de 7 costats o més medeixen més de 120^o i menys de 180^o (que és un angle pla). Per tant, amb 2 peces en un vèrtex no arribem a 180^o i amb 3 peces en un vèrtex ens passem de 360^o. Amb aquesta polígons no podem generar una tessel·lació regular.

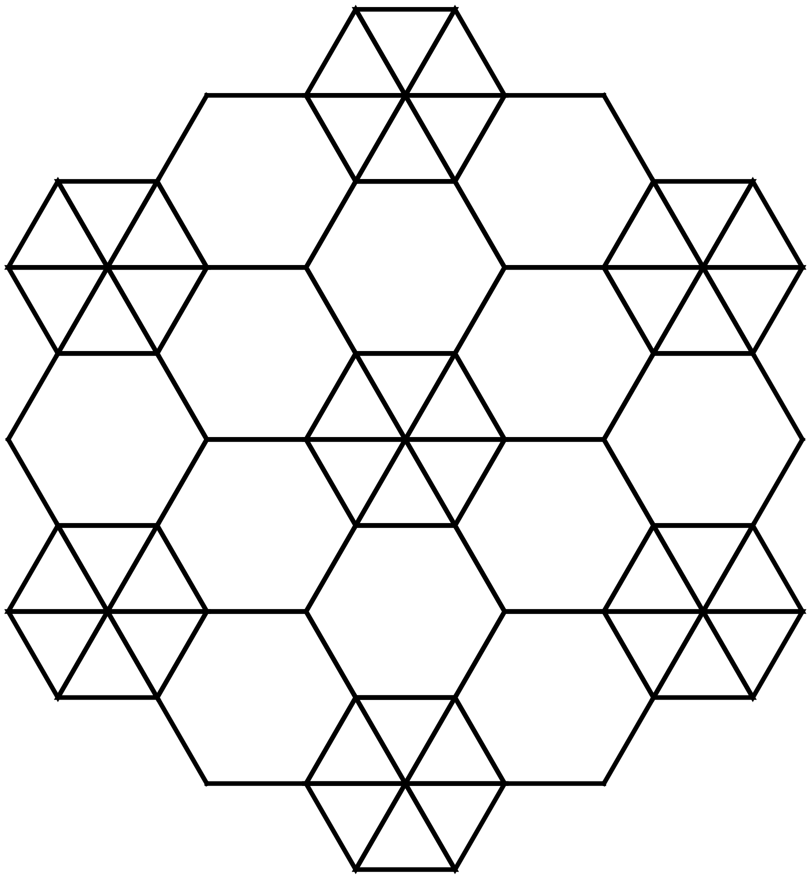
(b) Defineix què és una tessel·lació semi-regular. Dóna un exemple de tessel·lació semi-regular fent servir només octàgons regulars i quadrats. Cal que en el dibuix surtin almenys deu octàgons regulars.

Les tessel·lacions *semi-regulars* estan formades per polígons regulars, és a dir, polígons amb tots els costats i tots els angles iguals. Podem fer servir diferents tipus de peça. Els vèrtexs són **homogenis**, és a dir, per cada parell de vèrtexs hi ha una simetria de la tessel·lació que transforma el primer en el segon. Un exemple de tessel·lació semi-regular fent servir només octàgons regulars i quadrats és la següent:



(c) Dóna un exemple d'una tessel·lació que no sigui ni regular ni semiregular i que faci servir només polígons regulars. Cal que en el dibuix surtin almenys dotze peces.

Un exemple fent servir hexàgons i triangles regulars és la següent:



Veiem que hi han vèrtexs on es troben sis triangles, vèrtexs on es troben tres hexàgons i vèrtexs on es troben dos hexàgons i dos triangles.