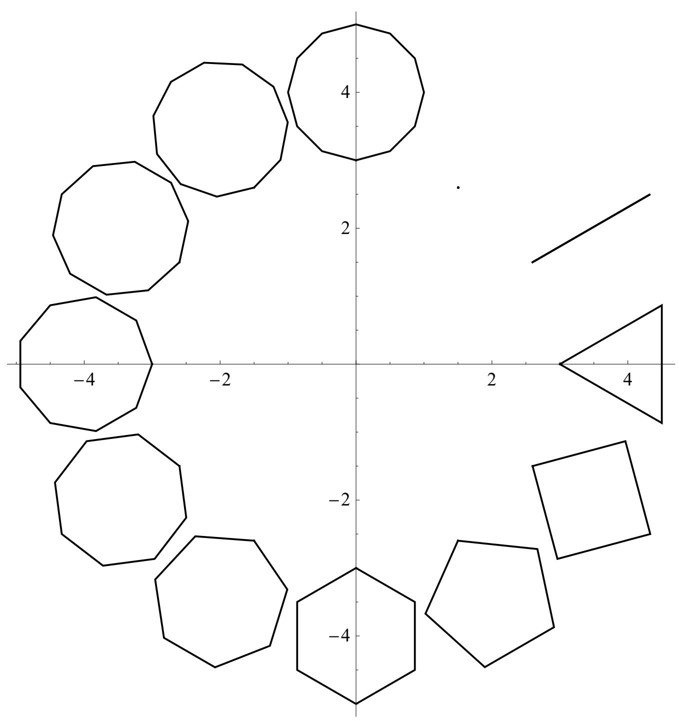
Matemàtiques aplicades a l'art i el disseny digital

Grau en disseny digital i tecnologies creatives

PROVA 1. 8 de Novembre de 2022

1. (3 *punts*) El rellotge de la figura següent mostra dotze polígons regulars amb un nombre consecutiu de costats, des de 1 fins a 12. El centre de cada polígon es troba en la circumferència de centre l'origen i radi 4, equiespaiats un angle de 30^o. Alguns dels vèrtexs dels polígons dibuixats, en coordenades cartesianes, són:

$$(3,0),\ (0,-3),\ (0,-5),\ (-3,0),\ (0,3),\ (0,5),\ (3/2, 3\sqrt{3}/2).$$



(a) Fes un croquis de la figura i marca els vèrtexos de la llista anterior. Digues quin és cadascun i raona la teva resposta.

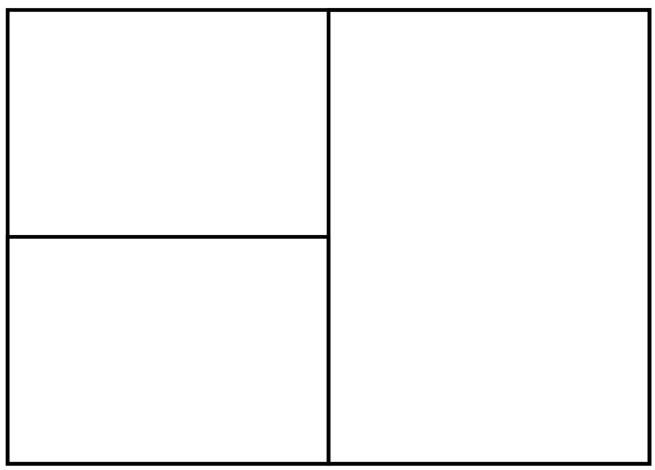
(b) Dóna les coordenades cartesianes dels tres vèrtexos del triangle.

(c) Dóna les coordenades cartesianes d'algun vèrtex que no sigui cap de la llista ni estigui al triangle.

(d) Quant medeix un costat de l'hexàgon? Raona la teva resposta.

(e) Fem una homotècia de centre el punt $(0, -4)$ i escalar $\lambda = 2$. Dóna les coordendes cartesianes dels punts $(0, -3)$ i $(0, -5)$ després de fer l'homotècia. Quant medeix ara el costat de l'hexàgon?

2. (2 *punts*) Sabem que l'alçada del rectangle exterior de la figura medeix 1. Dóna la base i l'alçada de tots els rectangles de la figura sabent que són tots semblants.



3. (3 *punts*) Descriu quins són els nombres de Fibonacci i quina és la seva relació amb el nombre d'or. Cal que calculis el nombre d'or a partir dels nombres de Fibonacci. Dóna exemples en l'art i la natura on apareguin els nombres de Fibonacci i el nombre d'or.

4. (2 *punts*) Les sanefes es classifiquen segons els moviments rígids que les deixen invariants. Hi han 7 tipus de sanefes i les indiquem de la forma següent:

T Quan hi ha translació respecte la direcció de la sanefa (i res més).

R Quan hi ha rotació de 180^o respecte d'un punt (i res més a part de T).

V Quan hi ha simetria respecte un eix vertical (i res més a part de T).

G Quan hi ha *glide reflection* (i res més a part de T).

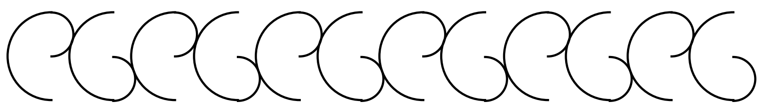
HG Quan hi ha simetria respecte la recta horitzontal central (i res més a part de T i G).

VRG Quan hi ha simetria respecte un eix vertical, rotació de 180^o respecte d'un punt, *glide reflection* i translació, però no hi ha simetria respecte la recta horitzontal central.

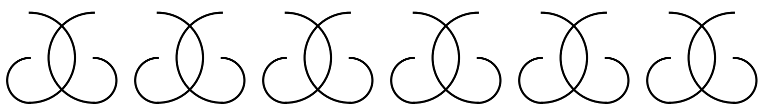
VHRG Quan hi ha simetria respecte un eix vertical, rotació de 180^o respecte d'un punt, *glide reflection*, simetria respecte la recta horitzontal central i translació.

Digues de quin tipus són cadascuna de les quatre sanefes següents i dibuixa sanefes dels tipus que falten, indicant de quin tipus són. Cal que el motiu surti almenys quatre cops en cada sanefa.

(a)

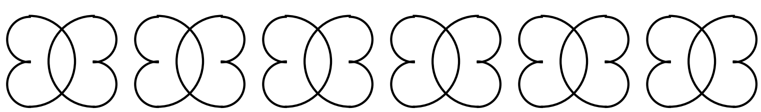


(b)



(c)

(d)



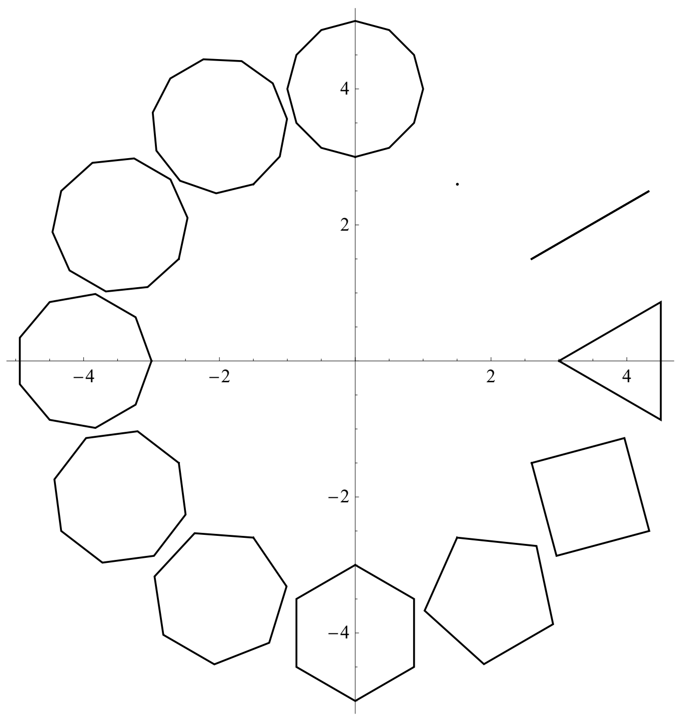
Observacions.-

- Recorda d'escriure el teu nom i cognoms i el teu número de DNI en TOTS els fulls de l'examen.
- Disposes d'una hora i mitja per a realitzar aquesta prova.

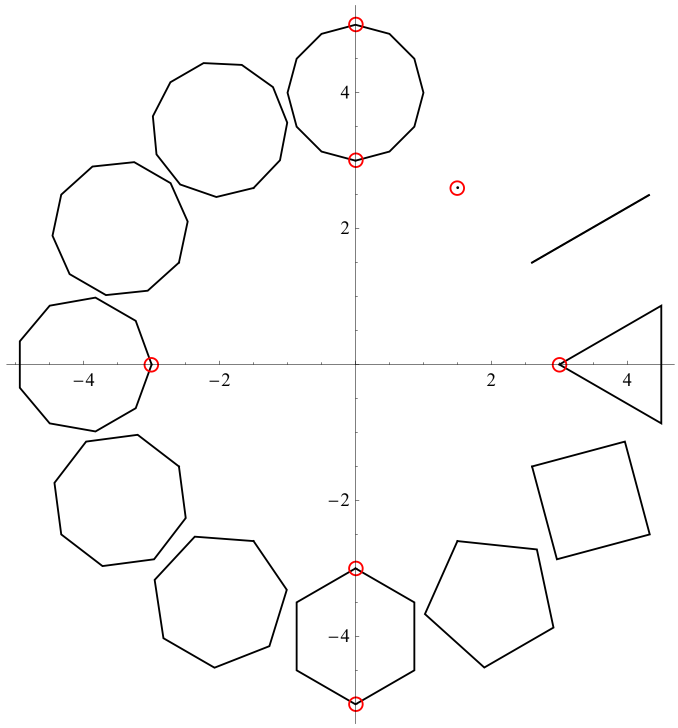
Resolució de la Prova 1

Problema 1. El rellotge de la figura següent mostra dotze polígons regulars amb un nombre consecutiu de costats, des de 1 fins a 12. El centre de cada polígon es troba en la circumferència de centre l'origen i radi 4, equiespaiats un angle de 30^o. Alguns dels vèrtexs dels polígons dibuixats, en coordenades cartesianes, són:

$$(3,0),\ (0,-3),\ (0,-5),\ (-3,0),\ (0,3),\ (0,5),\ (3/2, 3\sqrt{3}/2).$$



(a) Els punts que es demanen estan marcats en vermell a la figura de sota. Per determinar quins són cal tenir en compte els que estan en els eixos i en quina distància de l'origen. El $(3,0)$ és un dels vèrtecs del triangle, els punts $(0,-3)$ i $(0,-5)$ formen part de l'hexàgon, el punt $(-3,0)$ forma part del polígon de 9 costats i els punts $(0,3)$ i $(0,5)$ formen part del polígon de 12 costats. D'altra banda, veiem que el punt que marca la una està situat a distància 3 de l'origen i angle 60^o, pel que escrit en coordenades cartesianes és el $(3\cos(60^o),\, 3\sin(60^o)) = (3/2, 3\sqrt{3}/2)$.



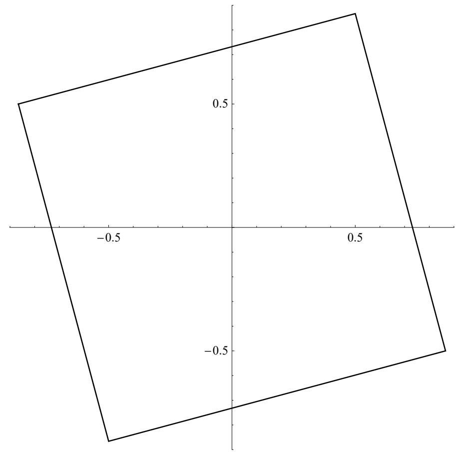
(b) Dóna les coordenades cartesianes dels tres vèrtexos del triangle.

El triangle és equilàter, està centrat en el punt $(4, 0)$ i té un vèrtex en el punt $(3, 0)$. Si estés centrat en l'origen, tindria els vèrtexos en els punts de coordenades $(-1, 0)$, $(\cos(60^o), \sin(60^o)) = (1/2, \sqrt{3}/2)$ i $(\cos(-60^o), \sin(-60^o)) = (1/2, -\sqrt{3}/2)$. Traslladem aquests punts seguint el vector $\vec{v} = (4, 0)$ i trobem que els vèrtexos del triangle es troben en els punts $(3, 0)$, $(9/2, \sqrt{3}/2)$ i $(9/2, -\sqrt{3}/2)$. Recordem que la fórmula de la translació respecte d'un vector $\vec{v}$ és $P \longrightarrow P + \vec{v}$.

(c) Dóna les coordenades cartesianes d'algun vèrtex que no sigui cap de la llista ni estigui al triangle.

Per calcular els vèrtexs dels altres polígons, els calculem primer centrats en l'origen i despŕes els traslladem recordant que el centre està situat a la circumferència de centre l'origen i radi 4, equiespaiats un angle de 30^o. És 30^o perquè hi han dotze polígons i $360^o/12 = 30^o$.

Calculem en detall els vèrtexos del quadrat, per exemple. El centre del quadrat es troba en el punt de radi 4 i angle -30^o. Per tant, el seu centre es troba en el punt de coordenades cartesianes $(4\cos(-30^o), 4\sin(-30^o)) = (2\sqrt{3}, -2)$. Primer calculem els vèrtexos del quadrat com si estés centrat en l'origen de coordenades i després els traslladem seguint el vector $\vec{v} = (2\sqrt{3}, -2)$. El quadrat centrat en l'origen de coordenades és el següent:



Veiem que aquest quadrat és el quadrat de vèrtexos $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ i $(0,1)$ girat -30^o. Prenem la matriu de rotació de -30^o que és

$$R_{(-30^o)} = \begin{pmatrix} \cos(-30^o) & -\sin(-30^o) \\ \sin(-30^o) & \cos(-30^o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Apliquem aquesta matriu als punts $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ i $(0,1)$ i obtenim els vèrtexos:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ i } \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

que són els de la figura anterior. Ara els traslladem seguint el vector $\vec{v} = (2\sqrt{3}, -2)$ i obtenim que els vèrtexos del quadrat del rellotge són:

$$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{1}{2} + 2\sqrt{3}, -2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}\right), \left(\frac{1}{2} + 2\sqrt{3}, -2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

De la mateixa manera podem calcular els vèrtexs de tots els polígons del rellotge. Llistem a sota les coordenades cartesianes dels vèrtexos de cada polígon, escrits en format decimal.

Punt que marca la una: $(1.5, 2.598)$.

Segment que marca les dues: $(2.598, 1.5)$, $(4.33013, 2.5)$.

Triangle que marca les tres: $(3., 0.)$, $(4.5, -0.866025)$, $(4.5, 0.866025)$.

Quadrat que marca les quatre: $(2.59808, -1.5)$, $(2.9641, -2.86603)$, $(4.33013, -2.5)$, $(3.9641, -1.13397)$.

Pentàgon que marca les cinc: $(1.5, -2.59808)$, $(1.02185, -3.67201)$, $(1.89547, -4.45862)$, $(2.91355, -3.87084)$, $(2.66913, -2.72096)$.

Hexàgon que marca les sis: $(0., -3.)$, $(-0.866025, -3.5)$, $(-0.866025, -4.5)$, $(0., -5.)$, $(0.866025, -4.5)$, $(0.866025, -3.5)$.

Heptàgon que marca les set: $(-1.5, -2.59808)$, $(-2.36534, -2.53323)$, $(-2.95557, -3.16935)$, $(-2.82624, -4.02742)$, $(-2.07473, -4.46131)$, $(-1.26695, -4.14427)$, $(-1.01117, -3.31506)$.

Octàgon que marca les vuit: $(-2.59808, -1.5)$, $(-3.20528, -1.03407)$, $(-3.9641, -1.13397)$, $(-4.43003, -1.74118)$, $(-4.33013, -2.5)$, $(-3.72292, -2.96593)$, $(-2.9641, -2.86603)$, $(-2.49818, -2.25882)$.

Polígon de 9 costats que marca les nou: $(-3., 0.)$, $(-3.23396, 0.642788)$, $(-3.82635, 0.984808)$, $(-4.5, 0.866025)$, $(-4.93969, 0.34202)$, $(-4.93969, -0.34202)$, $(-4.5, -0.866025)$, $(-3.82635, -0.984808)$, $(-3.23396, -0.642788)$.

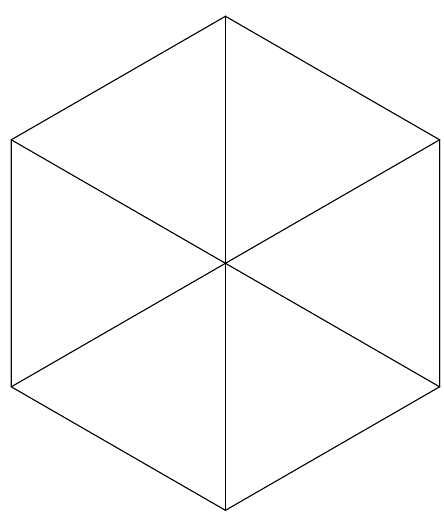
Polígon de 10 costats que marca les deu: $(-2.59808, 1.5)$, $(-2.46958, 2.10453)$, $(-2.72096, 2.66913)$, $(-3.25619, 2.97815)$, $(-3.87084, 2.91355)$, $(-4.33013, 2.5)$, $(-4.45862, 1.89547)$, $(-4.20725, 1.33087)$, $(-3.67201, 1.02185)$, $(-3.05736, 1.08645)$.

Polígon de 11 costats que marca les onze: $(-1.5, 2.59808)$, $(-1.11116, 3.00588)$, $(-1.00453, 3.55916)$, $(-1.21395, 4.08226)$, $(-1.67293, 4.4091)$, $(-2.23576, 4.43591)$, $(-2.72373, 4.15418)$, $(-2.98193, 3.65335)$, $(-2.92837, 3.09244)$, $(-2.58006, 2.64953)$, $(-2.04758, 2.46523)$.

Polígon de 12 costats que marca les dotze: $(0., 3.)$, $(0.5, 3.13397)$, $(0.866025, 3.5)$, $(1., 4.)$, $(0.866025, 4.5)$, $(0.5, 4.86603)$, $(0., 5.)$, $(-0.5, 4.86603)$, $(-0.866025, 4.5)$, $(-1., 4.)$, $(-0.866025, 3.5)$, $(-0.5, 3.13397)$.

(d) Quant medeix un costat de l'hexàgon? Raona la teva resposta.

Dos dels vèrtexs de l'hexàgon són el $(0, -3)$ i el $(0, -5)$. Per tant, la diagonal de l'hexàgon medeix 2. Com que un hexàgon regular està format per sis triangles equilàters, tenim que cada costat de l'hexàgon medeix 1.



(e) Fem una homotècia de centre el punt $(0, -4)$ i escalar $\lambda = 2$. Dóna les coordendes cartesianes dels punts $(0, -3)$ i $(0, -5)$ després de fer l'homotècia. Quant medeix ara el costat de l'hexàgon?

La fórmula d'una homotècia de centre el punt O i escalar λ és $P \longrightarrow O+\lambda(P-O)$. Per tant, el punt $(0,-3)$ es transforma en el punt

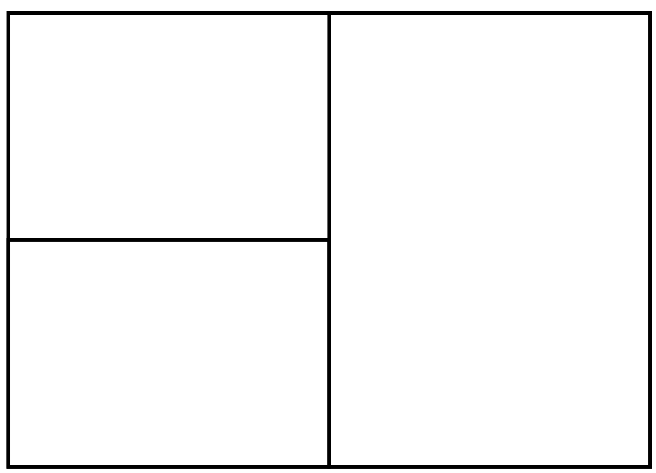
$$(0,-4)+2\left((0,-3)-(0,-4)\right) \;=\; (0,-4)+2(0,1) \;=\; (0,-2),$$

després de fer l'homotècia. I el punt $(0,-5)$ es transforma en el punt

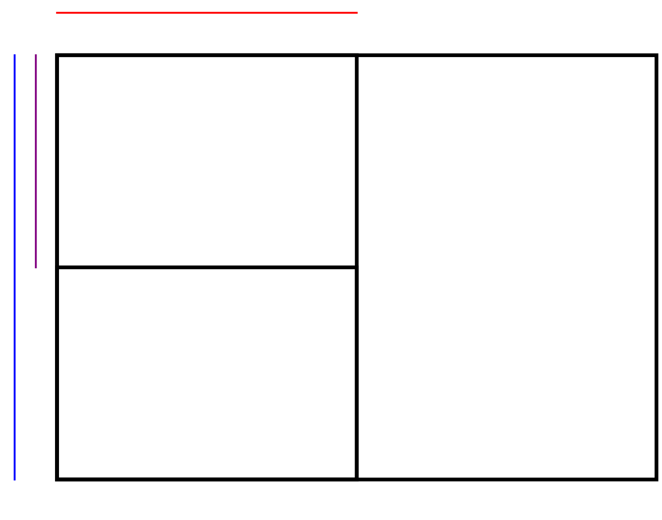
$$(0,-4)+2\left((0,-5)-(0,-4)\right) \;=\; (0,-4)+2(0,-1) \;=\; (0,-6).$$

Les homotècies transformen les distàncies de manera que queden multiplicades per l'escalar λ. Com que $\lambda=2$ i abans de fer l'homotècia el costat de l'hexàgon medeix 1, tal com hem vist en l'apartat anterior, tenim que després de fer l'homotècia el costat de l'hexàgon medeix 2.

Problema 2. Sabem que l'alçada del rectangle exterior de la figura medeix 1. Dóna la base i l'alçada de tots els rectangles de la figura sabent que són tots semblants.



Diem b a la distància marcada en verd en la figura següent, que és la base del rectangle exterior. La distància marcada en blau en la figura següent medeix 1 tal com diu l'enunciat. Diem x a la distància marcada en vermell en la figura següent, que és la base del rectangle de dalt a l'esquerra. I diem a a la distància marcada en violeta en la figura següent, que és l'alçada del rectangle de dalt a l'esquerra.



Veiem que la base del rectangle gros és b i la seva alçada és 1 i que la base del rectangle de la dreta és 1 i la seva alçada és $b-x$. Com que són rectangles semblants, tenim que

$$\frac{b}{1} = \frac{1}{b-x}.$$

El rectangle de sota a l'esquerra té base x i alçada $1-a$. Com que és semblant al rectangle exterior, tenim que

$$\frac{b}{1} = \frac{x}{1-a}.$$

El rectangle de dalt a l'esquerra té base x i alçada a. Com que també és semblant al rectangle exterior tenim que

$$\frac{b}{1} = \frac{x}{a}.$$

Aquestes tres equacion s'escriuen

$$ba = x, \qquad b(1-a) = x, \qquad b(b-x) = 1.$$

Substituïm que $ba = x$ en la segona equació i deduim que $b = 2x$. Substituim que $b = 2x$ en la tercera equació i trobem que $x^2 = 1/2$. Com que tant a, com b com x són valors positius, tenim que $x = 1/\sqrt{2}$. Com que $b = 2x$ tenim que $b = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$ i com que $ba = x$ tenim que $a = 1/2$. Tenim així que tots els rectangles tenen quocient entre la base i l'alçada $\sqrt{2}$. El rectangle exterior té base $\sqrt{2}$ i alçada 1. El rectangle de la dreta té base 1 i alçada $1/\sqrt{2}$ i els dos rectangles de l'esquerra són iguals i tenen base $1/\sqrt{2}$ i alçada $1/2$.

Problema 3. Descriu quins són els nombres de Fibonacci i quina és la seva relació amb el nombre d'or. Cal que calculis el nombre d'or a partir dels nombres de Fibonacci. Dóna exemples en l'art i la natura on apareguin els nombres de Fibonacci i el nombre d'or.

Els nombres de Fibonacci és una successió de nombres naturals que es defineixen de la manera següent. Comencem amb l'1 i l'1 i cada nombre es calcula amb la suma dels dos anteriors. D'aquesta manera els primers nombres de la successió són

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Per definir-los podem escriure que si denotem per c_n el n-èssim nombre de Fibonacci aleshores

$$c_1 = 1, \; c_2 = 1 \text{ i } c_n = c_{n-1} + c_{n-2} \text{ per } n \geq 2.$$

El nombre d'or és denota amb la lletra grega φ i val $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$. Es pot trobar com a límit de la successió formada pels quocients de dos nombres consecutius de Fibonacci. Denotem per r_n el terme n-èssim d'aquesta successió i tenim que $r_n = c_{n+1}/c_n$ per $n \geq 1$, on c_n és el n-èssim nombre de Fibonacci. Diem ℓ al valor del límit d'aquesta successió quan n tendeix a infinit. Com que $c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$, dividim l'expressió anterior per c_n i trobem que

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = 1 + \frac{c_{n-1}}{c_n}.$$

Com que $r_{n-1} = c_n/c_{n-1}$ deduim que

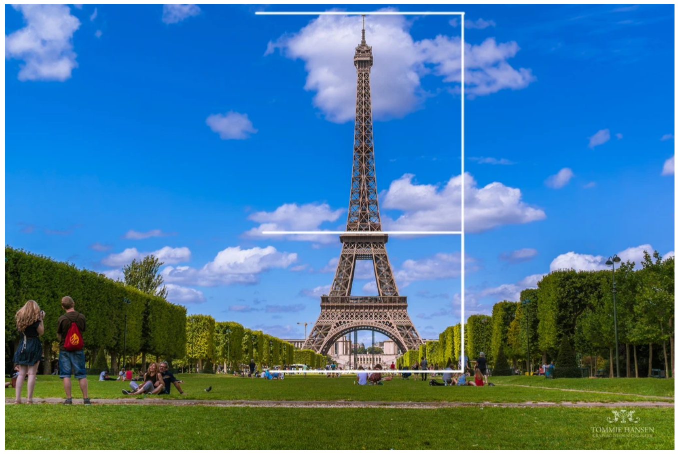
$$r_n = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}.$$

Fem el límit de la identitat anterior quan n tendeix a infinit i tenim que

$$\ell = 1 + \frac{1}{\ell}.$$

D'aquí es dedueix que $\ell^2 = \ell + 1$ i, per tant, $\ell^2 - \ell - 1 = 0$. Resolem aquesta equació de segon grau i tenim que $\ell = (1 \pm \sqrt{5})/2$. La solució que correspon al $-$ és negativa, pel que no té sentit segons els nombres de Fibonacci. Per tant el límit d'aquesta successió és el nombre d'or $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.

Els nombres de Fibonacci i el nombre d'or apareixen a la natura de forma ubiqua. Per exemple, el nombre de pètals de les flors acostuma a ser un nombre de Fibonacci. El nombre d'espirals que dibuixen les pinyes o els bròquils també acostuma a ser un nombre de Fibonacci. El quocient entre l'alçada i l'alçada fins al melic d'una persona és idealment el nombre d'or. I en l'art trobem nombres de Fibonacci per exemple amb el nombre de columnes de la façana del Partenó d'Atenes, el nombre d'or en les proporcions entre les alçades dels diferents pisos de la Torre Eiffel de Paris, també en la façana del Partenó d'Atenes o en el Taj Mahal a la ciutat d'Agra (Índia).



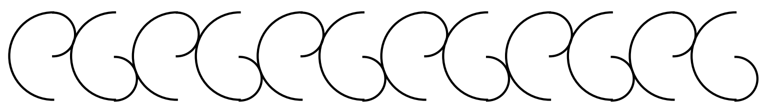
Problema 4. Les sanefes es classifiquen segons els moviments rígids que les deixen invariants. Hi han 7 tipus de sanefes i les indiquem de la forma següent:

- T Quan hi ha translació respecte la direcció de la sanefa (i res més).
- R Quan hi ha rotació de 180^o respecte d'un punt (i res més a part de T).
- V Quan hi ha simetria respecte un eix vertical (i res més a part de T).
- G Quan hi ha *glide reflection* (i res més a part de T).
- HG Quan hi ha simetria respecte la recta horitzontal central (i res més a part de T i G).
- VRG Quan hi ha simetria respecte un eix vertical, rotació de 180^o respecte d'un punt, *glide reflection* i translació, però no hi ha simetria respecte la recta horitzontal central.

VHRG Quan hi ha simetria respecte un eix vertical, rotació de 180^o respecte d'un punt, *glide reflection*, simetria respecte la recta horitzontal central i translació.

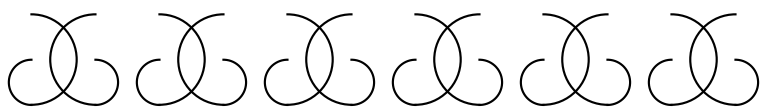
Digues de quin tipus són cadascuna de les quatre sanefes següents i dibuixa sanefes dels tipus que falten, indicant de quin tipus són. Cal que el motiu surti almenys quatre cops en cada sanefa.

La sanefa (a)



és de tipus G.

La sanefa (b)

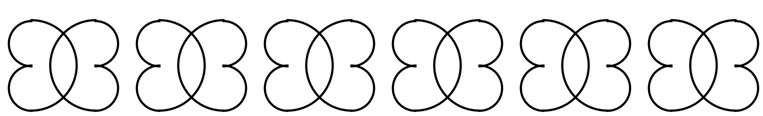


és de tipus V.

La sanefa (c)

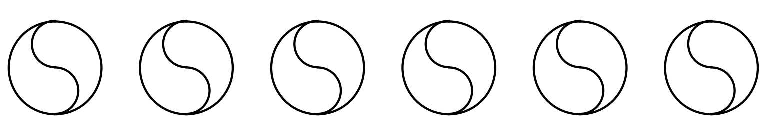
és de tipus T.

La sanefa (d)



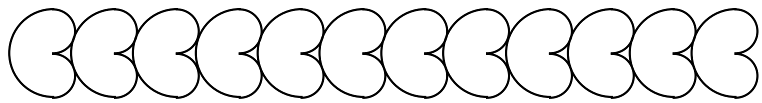
és de tipus $VHRG$.

Anem a dibuixar les sanefes dels tipus que falten. La sanefa



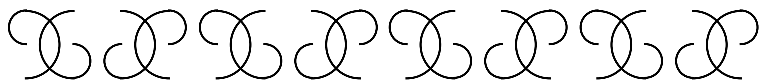
és de tipus R.

La sanefa



és de tipus HG.

La sanefa



és de tipus VRG.