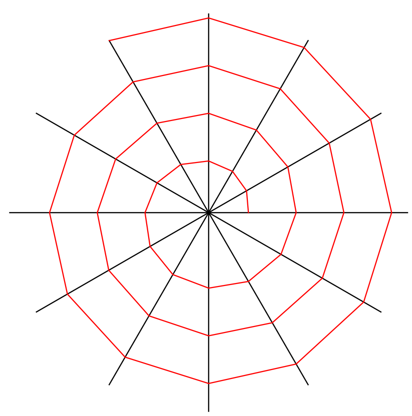
Matemàtiques aplicades a l'art i el disseny digital

Grau en disseny digital i tecnologies creatives

PROVA DE RECUPERACIÓ. 31 de gener de 2023

1. (3 *punts*) Moltes aranyes teixeixen la seva teranyina en dos passos. Primer construeixen una base amb uns fils forts i resistents que conflueixen en un punt central i amb radis equiespaiats. Després fan una espiral fent servir uns fils més dèbils però molt enganxosos. Prenen un punt de la base anterior i generen un segment de recta fins a trobar el següent radi però a una distància una mica major del centre. Repeteixen aquest procés fins a generar una espiral formada per segments rectilinis. En la figura de sota hem pres una base radial des de l'origen de coordenades. Per començar l'espiral hem pres el punt $(1, 0)$ i el següent tall amb un radi es troba a distància 1.1 de l'origen de coordenades. Cada cop que tallem amb un radi, augmentem en 0.1 la distància amb l'origen de coordenades.



   (a) Les coordenades cartesianes dels 4 primers punts de tall de l'espiral anterior amb els radis són

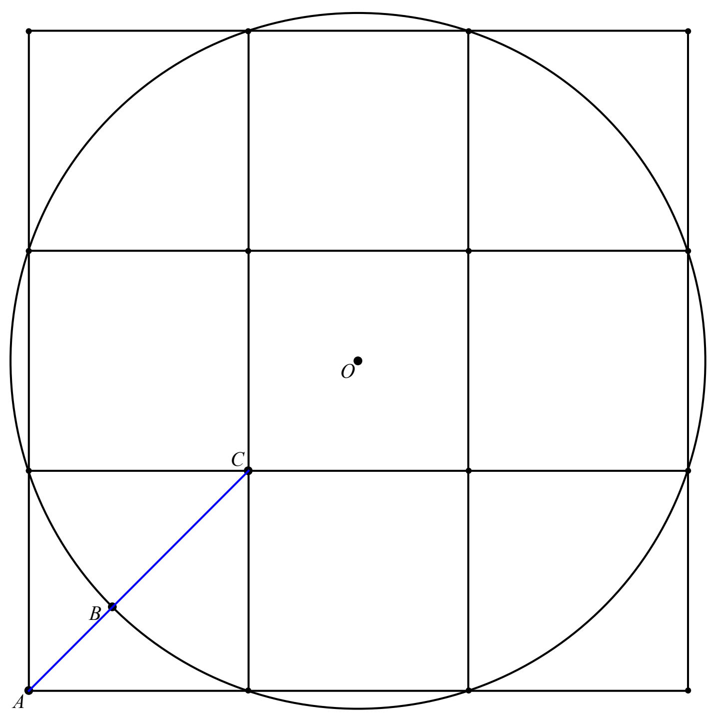
$$(1, 0),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (0, 1.3).$$

Calcula les coordenades (x_1, y_1) i (x_2, y_2).

(b) Determina les coordenades cartesianes de tots els punts de tall de l'espiral anterior en el semieix horitzontal $\{x > 0,\ y = 0\}$. Tenint en compte aquests valors, diries que aquesta espiral s'assimila a una espiral logarítmica o arquimediana? Raona la teva resposta.

(c) Tenint en compte les propietats de les espirals, per què creus que les aranyes fan servir aquesta construcció per a les seves teranyines. Per què no usen circumferències enlloc d'espirals?

2. (3 *punts*) Considerem la següent figura en la que coneixem les coordenades cartesianes dels punts $A = (0, 0)$ i $C = (1, 1)$.



(a) Comprova que la circumferència dibuixada té radi $\sqrt{5/2}$.

(b) Comprova que les coordenades cartesianes del punt B són $B = (b, b)$ amb $b = (3 - \sqrt{5})/2$.

(c) Comprova que el quocient entre la mida del segment BC i la mida del segment AB és $BC/AB = \varphi$ on φ és el nombre d'or.

(d) Dóna una altra definició geomètrica del nombre d'or i digues quant val numèricament.

(e) Dóna almenys dos exemples en l'art pictòric on aparegui el nombre d'or. Cal que donis almenys el nom de dues obres d'artistes diferents i descriguis de quina manera apareix el nombre d'or en l'obra.

3. (2 *punts*) Dóna la definició de fractal i descriu com va aparèixer aquest concepte en la història. Cal que descriguis quins són els primers fractals coneguts i quina és la contribució de Benoît Mandelbrot a la geometria fractal. Dóna almenys dos exemples diferents de fractals en la natura o l'art.

4. (2 *punts*) Considerem un triangle rectangle tal que els seus dos catets medeixen 1. Punxem un compàs en un dels vèrtexs de la seva hipotenusa i fem un arc de circumferència de radi $\sqrt{2}$ i d'angle 45^o amb la intenció de construir una corba d'amplada constant.

   (a) Dibuixa la corba d'amplada constant que s'obté al final del procés. Descriu pas a pas com l'has construïda. Cal que diguis quin radi i quin angle fas servir cada pas.

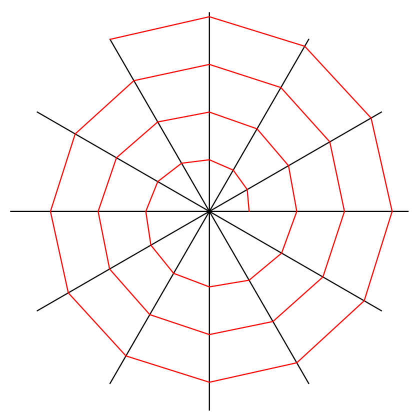
   (b) Calcula el perímetre de la corba d'amplada constant que has construït.

Observacions.-

- Recorda d'escriure el teu nom i cognoms i el teu número de DNI en TOTS els fulls de l'examen.
- Disposes de dues hores per a realitzar aquesta prova.

Resolució de la Prova de recuperació.

Problema 1. Moltes aranyes teixeixen la seva teranyina en dos passos. Primer construeixen una base amb uns fils forts i resistents que conflueixen en un punt central i amb radis equiespaiats. Després fan una espiral fent servir uns fils més dèbils però molt enganxosos. Prenen un punt de la base anterior i generen un segment de recta fins a trobar el següent radi però a una distància una mica major del centre. Repeteixen aquest procés fins a generar una espiral formada per segments rectilinis. En la figura de sota hem pres una base radial des de l'origen de coordenades. Per començar l'espiral hem pres el punt $(1, 0)$ i el següent tall amb un radi es troba a distància 1.1 de l'origen de coordenades. Cada cop que tallem amb un radi, augmentem en 0.1 la distància amb l'origen de coordenades.



(a) Les coordenades cartesianes dels 4 primers punts de tall de l'espiral anterior amb els radis són

$$(1, 0),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (0, 1.3).$$

Calcula les coordenades (x_1, y_1) i (x_2, y_2).

Veiem en la figura anterior que hi han 12 radis que parteixen de l'origen de coordenades. Com que estan equiespaiats, hi ha un angle de $360^o/12 = 30^o$ entre dos radis consecutius. Tal com està descrit l'enunciat, les coordenades polars del punt (x_1, y_1) són $r = 1.1$ i $\theta = 30^o$. Per tant, les seves coordenades cartesianes són

$$x_1 = 1.1\cos(30^o) = 0.9526\ldots,\ y_1 = 1.1\sin(30^o) = 0.55.$$

De la mateixa manera és clar que les coordenades polars del punt (x_2, y_2) són $r = 1.2$ i $\theta = 60^o$, pel que les seves coordenades cartesianes són

$$x_2 = 1.2\cos(60^o) = 0.6, \; y_1 = 1.1\sin(30^o) = 1.03923\ldots.$$

(b) Determina les coordenades cartesianes de tots els punts de tall de l'espiral anterior en el semieix horitzontal $\{x > 0, \, y = 0\}$. Tenint en compte aquests valors, diries que aquesta espiral s'assimila a una espiral logarítmica o arquimediana? Raona la teva resposta.

En cada quart de volta augmentem la distància a l'origen en 0.3, pel que en una volta augmentem la distància a l'origen en 1.2. Així els punts de tall amb el semieix horitzontal positiu $\{x > 0, \, y = 0\}$ formen una progressió aritmètica de primer terme 1 i raó 1.2. Els seus primers termes són

$$1, \, 2.2, \, 3.4, \, 4.6, \, 5.8, \, 7, \, 8.2, \, \ldots$$

El seu terme general és $1 + 1.2k$ on k és qualsevol nombre natural no negatiu.

Tenint en compte que els talls amb una semirecta formen una progressió aritmètica, l'espiral d'aquesta teranyina s'assimilaria a una espiral arquimediana. Les espirals arquimedianes són corbes llises mentre que l'espiral de la teranyina no ho és, però sí que comparteixen aquesta propietat. Una espiral arquimediana és una corba que s'inicia en un centre i que va augmentant la distància amb el centre a mesura que augmenta l'angle, de manera lineal. Així, els talls amb una semirecta horitzontal formen una progressió aritmètica. Una espiral arquimediana sempre és pot continuar per fóra però no per dins, ja que s'acaba quan toca el centre. En canvi, en una espiral logarítmica, la distància amb el centre també augmenta a mesura que augmenta l'angle, però de manera exponencial. Els talls amb una semirecta horitzontal formen una progressió geomètrica. A més, una espiral logarítmica sempre es pot continuar per dins i per fóra, ja que fa infinites voltes per arribar al centre. En la natura normalment trobem espirals logarítmiques. El cas de les teranyines és un dels pocs casos en què trobem una espiral en la natura que es pot assimilar a una espiral arquimediana.

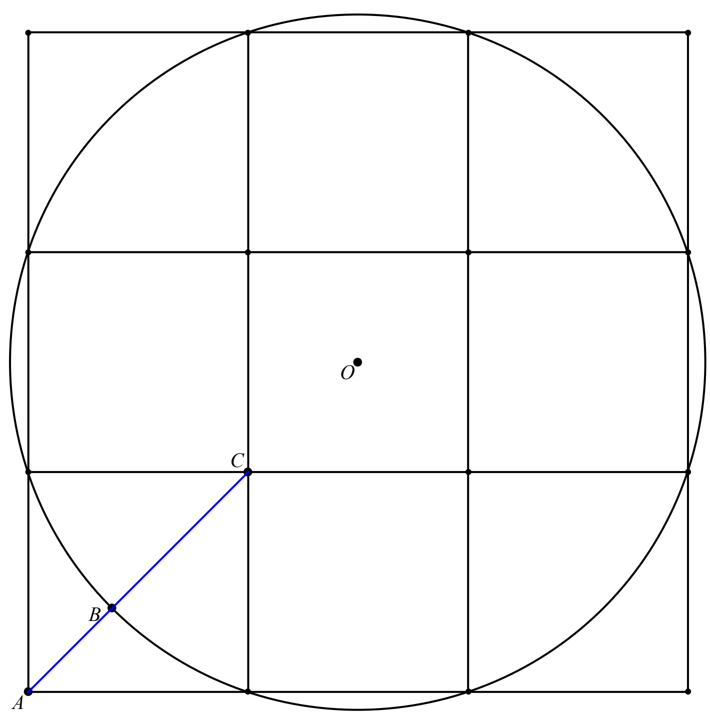
(c) Tenint en compte les propietats de les espirals, per què creus que les aranyes fan servir aquesta construcció per a les seves teranyines. Per què no usen circumferències enlloc d'espirals?

Les espirals són corbes que tenint en compte l'àrea que cobreixen, minimitzen la longitud, sempre i quan no comptem la longitud entre una espira i l'anterior. D'aquesta manera, l'aranya ha de generar la menor quantitat de fil enganxós per cobrir la mateixa superfície i, a més pot anar fent crèixer l'espiral de manera continua. Si les aranyes fessin servir circumferències enlloc d'espirals, gastarien més fil per cobrir la mateixa àrea. Això és cert perquè les aranyes no cobreixen amb fil enganxós la distància entre espires, és a dir, no cobreixen regions del tot limitades per fil enganxós.

Per saber-ne més de teranyines i de la seva construcció, podeu consultar els enllaços següents:
`https://matematicasentumundo.es/NATURALEZA/naturaleza_telarana.htm`
`https://monnaturapirineus.wordpress.com/2016/09/25/la-teranyina/`

I per veure alguns usos de les teranyines en el món de l'art, podeu consultar el següent enllaç:
`https://www.metmuseum.org/blogs/now-at-the-met/2017/spider-webs`.

Problema 2. Considerem la següent figura en la que coneixem les coordenades cartesianes dels punts $A = (0,0)$ i $C = (1,1)$.



(a) Comprova que la circumferència dibuixada té radi $\sqrt{5/2}$.

Com que la figura és una quadrícula 3×3 i, per l'enunciat, sabem que cada quadrat és de costat 1, deduiem que el punt central és $O = (3/2, 3/2)$. Veiem que la circumferència de la figura interseca el quadrat més gros en diversos punts, en particular en el punt $(1,3)$. Per tant, el radi de la circumferència és la distància entre els punts $(3/2, 3/2)$ i $(1,3)$. Fem servir la fórmula de la distància entre dos punts per calcular aquest radi:

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(\frac{3}{2}-3\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

(b) Comprova que les coordenades cartesianes del punt B són $B = (b, b)$ amb $b = (3-\sqrt{5})/2$.

El punt $B = (b, b)$ és el punt que es troba en el segment que uneix els punts A i C i que forma part de la circumferència de centre el punt $O = (3/2, 3/2)$ i radi $\sqrt{5/2}$. Les seves dues coordenades són iguals perquè es troba en la bisectriu del primer quadrant. Per tant, aquest punt compleix que les seves coordenades $B = (b, b)$ són tals que $0 < b < 1$ i també es compleix que la distància de B a O és $\sqrt{5/2}$. Per tant,

$$\sqrt{\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+\left(b-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

L'equació anterior s'escriu

$$\left(b-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

D'aquí que

$$b-\frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

I, per tant,

$$b = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

De les dues solucions, descartem la que té signe + ja que dóna lloc a un valor de b major que 1. Concloem que $b = (3-\sqrt{5})/2$.

(c) Comprova que el quocient entre la mida del segment BC i la mida del segment AB és $BC/AB = \varphi$ on φ és el nombre d'or.

Recordem que el nombre d'or és $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$. Anem a calcular la mida del segment BC amb la fórmula de la distància entre dos punts:

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{\left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{2}\left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right). \end{aligned}$$

Ara calculem la mida del segment AB també amb la fórmula de la distància entre dos punts:

$$AB = \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}-0\right)^2+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}-0\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(3-\sqrt{5}\right).$$

El quocient entre aquestes dues longituds queda:

$$\begin{aligned} \frac{BC}{AC} &= \frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \\ &= \frac{-3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5}{9-5} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi, \end{aligned}$$

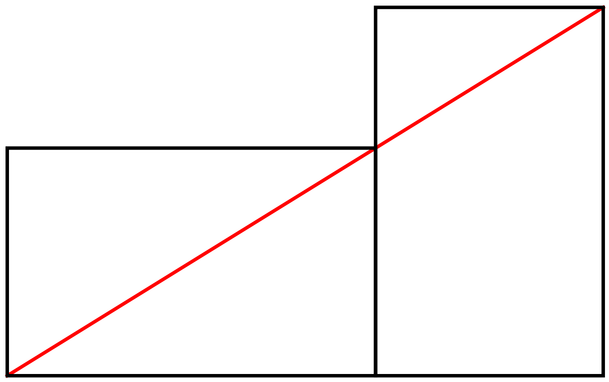
on hem usat la racionalització d'una expressió formada per binomis amb una arrel.

(d) Dóna una altra definició geomètrica del nombre d'or i digues quant val numèricament.

El nombre dór és

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887498948482045868343656381177203\ldots$$

Una altra manera de definir-lo és la següent. Prenem un rectangle, el copiem i el girem 90^o. Posem els dos rectangles un al costat de l'altre com en la figura de sota i suposem que la diagonal d'un dels rectangles arriba fins al vèrtex superior de l'altre rectangle. Aleshores, el quocient entre la base i l'alçada d'aquests rectangles és el nombre d'or.



En efecte, diem a a l'alçada del rectangle i b a la seva base. Considerem el triangle rectangle que cobreix el rectangle de l'esquerra en la figura anterior. El quocient entre la seva base i la seva alçada és b/a. Ara considerem el triangle rectangle que va desde l'extrem inferior esquerra de la figura fins a l'extrem superior dret. Veiem que és un traingle rectangle semblant a l'anterior. La seva base medeix $b + a$ i la seva alçada medeix b. Per tant, deduim que

$$\frac{b}{a} = \frac{b+a}{b}.$$

Diem $q = b/a$ i volem veure que q és el nombre d'or φ. De la identitat anterior es veu que $q = 1 + 1/q$. I d'aquí que $q^2 = q + 1$. Per tant $q^2 - q - 1 = 0$. Resolem aquesta equació de segon grau per q i trobem que

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

La solució amb $-$ la descartem perquè és negativa i, per tant, $q = (1 + \sqrt{5})/2 = \varphi$, el nombre d'or.

(d) Dóna almenys dos exemples en l'art pictòric on aparegui el nombre d'or. Cal que donis almenys el nom de dues obres d'artistes diferents i descriguis de quina manera apareix el nombre d'or en l'obra.

Un dels pintors que fa un ús prolífic del nombre d'or és Leonardo da Vinci. Un exemple és a la Mona Lisa, on usa el nombre d'or en el rostre de la dama i també en les proporcions del quadre. Un altre exemple és a Las Meninas de Diego Velázquez on s'usa la proporció d'or en la configuració de l'obra.

Imatge extreta de `https://es.wikipedia.org/wiki/Las_meninas`

Un altre pintor que usa la proporció d'or és Salvador Dalí. En el quadre *Noia a la finestra* fa servir la proporció d'or per la mida del quadre i la situació de l'horitzó i la mida de la finestra, etc.

Imatge extreta de
`https://web.archive.org/web/20120201233805/`
`http://www.artcyclopedia.com/images/PhilMusArt-Dali-Figure.jpg`.

Problema 3. Dóna la definició de fractal i descriu com va aparèixer aquest concepte en la història. Cal que descriguis quins són els primers fractals coneguts i quina és la contribució de Benoît Mandelbrot a la geometria fractal. Dóna almenys dos exemples diferents de fractals en la natura o l'art.

Un fractal és un objecte tal que la seva dimensió fractal no coincideix amb la seva dimensió topològica. La dimensió topològica ens descriu en "quin espai" viu l'objecte. Per exemple, una recta té dimensió 1, un quadrat ple té dimensió 2 i un cub ple té dimensió 3. Un objecte fractal, com el floc de neu de von Koch, per exemple, és una corba, pel que té dimensió topològica 1, però mitjançant la definició de dimensió de semblança es pot veure que té dimensió fractal ≈ 1.26. És un objecte "més rugós" que una recta però no té dimensió 2. Aquesta rugositat, que podem quantificar amb la definició de dimensió fractal, és la que el defineix com a fractal.

Al segle XVII, Gottfried Leibniz va posar les bases matemàtiques per poder entendre els fractals quan va començar a parlar de l'auto-semblança recursiva. Era un moment en què les idees de procés iteratiu i recursió prenien forma. Les primeres idees en aquesta direcció van ser rebutjades per ser considerades "monstruoses". Al cap de dos segles, al 1872, Karl Weierstrass va definir una funció matemàtica *continua a tot arreu i diferenciable enlloc.* El gràfic d'aquesta funció avui és considerat un fractal. Un dels seus alumnes, Georg Cantor, va donar exemples de conjunts que avui són considerats fractals (la pols de Cantor). D'altres matemàtics cèlebres, com Klein o Poincaré, van donar descripcions d'objectes matemàtics que avui es consideren fractals. El primer exemple gràfic de fractal el devem a von Koch (1904) amb el floc de neu de von Koch. Després al 1915, Sierpiński va donar el seu triangle i al 1916, la seva catifa. Van aparèixer d'altres exemples, però sempre de corbes que es poden explicar amb pocs passos. L'any 1960, Benoît Mandelbrot va publicar un llibre sobre corbes auto-semblants. Mandelbrot va tenir accés a càlculs amb computadora i a representar gràfics amb computadora. L'any 1975 va donar base al concepte de fractal i va mostrar les imatges que avui tots tenim al nostre imaginari. Els gràfics de Mandelbrot, que van resultar molt atractius pels seus colors i la seva configuració, van donar lloc a una nova corrent artística: l'art fractal. L'altra gran aportació de Mandelbrot va ser mostrar com els fractals poden modelar objectes naturals, com les costes d'un pais. I va resoldre el problema de determinar quina és la longitud de la costa d'Anglaterra. La resolució d'aquest problema ha permés millorar les prediccions meteorològiques. Exemples de fractals en la natura els podem trobar en les fulles d'una falguera, un núvol, l'escorça d'un arbre, …Tots

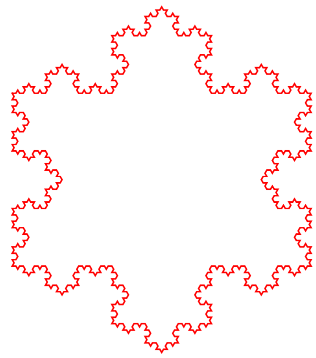


Figura 1: Representació del floc de neu de von Koch.

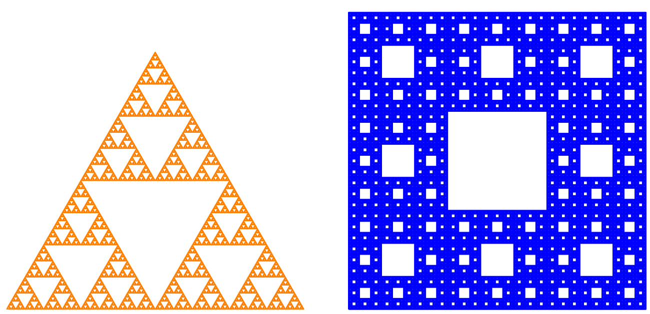


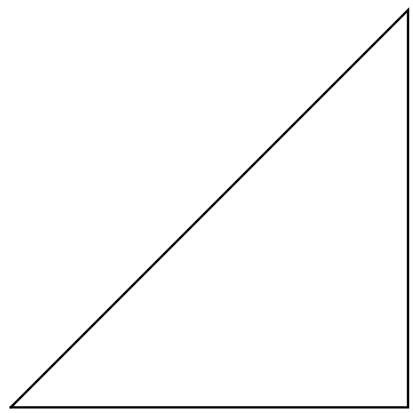
Figura 2: Representació del triangle i la catifa de Sierpiński.

aquests objectes es poden modelar mitjançant fractals degut a la seva rugositat. I en l'art, tenim exemples on apareixen fractals en les obres de Maurits Escher anomenades *Circles Limit*. `https://mathstat.slu.edu/escher/index.php/Circle_Limit_Exploration` Aquestes obres també mostren de manera gràfica el model de la Geometria no Euclidiana descrit per Poincaré.

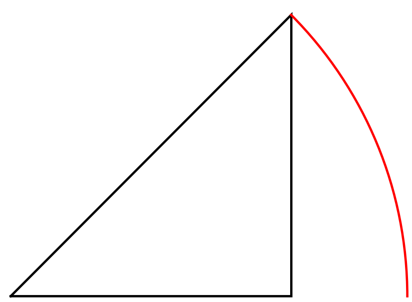
Problema 4. Considerem un triangle rectangle tal que els seus dos catets medeixen 1. Punxem un compàs en un dels vèrtexs de la seva hipotenusa i fem un arc de circumferència de radi $\sqrt{2}$ i d'angle 45^o amb la intenció de construir una corba d'amplada constant.

(a) Dibuixa la corba d'amplada constant que s'obté al final del procés. Descriu pas a pas com l'has construïda. Cal que diguis quin radi i quin angle fas servir cada pas.

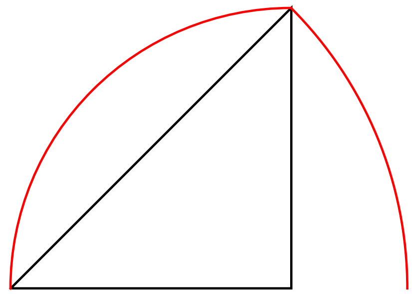
Comencem dibuixant el triangle rectangle tal que els seus dos catets medeixen 1:



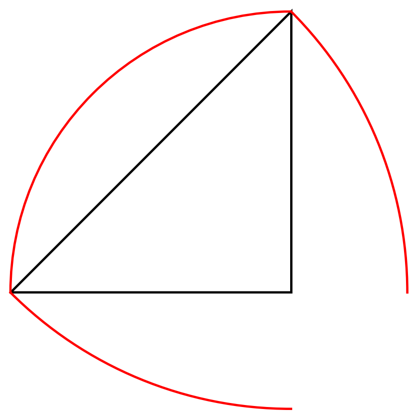
Per situar-nos, posem els vèrtexos en els punts de coordenades cartesianes $(0,0)$, $(1,0)$ i $(1,1)$. Punxem el compàs en el punt $(0,0)$ i fem un arc de circumferència de radi $\sqrt{2}$ i angle 45^o, que va des del punt $(1,1)$ fins al punt $(\sqrt{2},0)$.



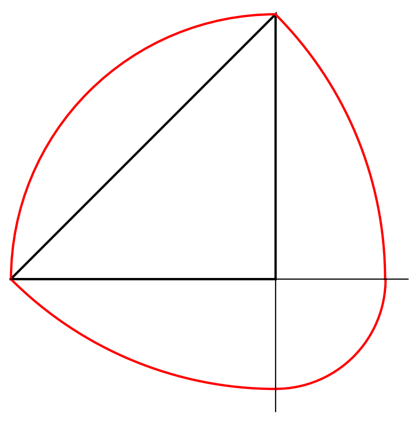
Com que aquest arc arriba fins al vèrtex $(1,1)$ del triangle, el següent pas és punxar el compàs en el vèrtex $(1,0)$ del triangle i fer un arc de circumferència de radi 1 i angle 90^o que va des del punt $(1,1)$ fins al punt $(0,0)$:



Com que aquest arc arriba fins al vèrtex $(0, 0)$ del triangle, el següent pas és punxar el compàs en el vèrtex $(1, 1)$ del triangle i fer un arc de circumferència de radi $\sqrt{2}$ i angle 45^o que va des del punt $(0, 0)$ fins al punt $(1, 1 - \sqrt{2})$:



El darrer pas és punxar el compàs en el vèrtex $(1, 0)$ i fer un arc de circumferència de radi $\sqrt{2} - 1$ i angle 90^o per unir els punts de coordenades $(1, 1 - \sqrt{2})$ i $(\sqrt{2}, 0)$:



Hem obtingut la corba d'amplada constant. En el gràfic hem dibuixat també la prolongació dels dos catets per a que es vegi millor el darrer pas i les interseccions.

(b) Calcula el perímetre de la corba d'amplada constant que has construït. Farem ús de la fórmula de la longitud ℓ d'un arc de circumferència de radi r i angle α, on α està expressat en radiants: $\ell = r\alpha$.

Sintetitzem els passos que hem descrit en l'apartat anterior:

PAS 1: arc de circumferència de centre el punt $(0, 0)$, radi $\sqrt{2}$ i angle $45^o = \pi/4\,\text{rad}$;

PAS 2: arc de circumferència de centre el punt $(1, 0)$, radi 1 i angle $90^o = \pi/2\,\text{rad}$;

PAS 3: arc de circumferència de centre el punt $(1, 1)$, radi $\sqrt{2}$ i angle $45^o = \pi/4\,\text{rad}$;

PAS 4: arc de circumferència de centre el punt $(1, 0)$, radi $\sqrt{2}-1$ i angle $90^o = \pi/2\,\text{rad}$.

Per tant, el perímetre de la corba d'amplada constant construïda és:

$$\sqrt{2}\,\frac{\pi}{4} + 1\,\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}\,\frac{\pi}{4} + (\sqrt{2}-1)\,\frac{\pi}{2} = \pi\sqrt{2}.$$

Tot i que no ens ho demanen, també podem calcular l'àrea de la regió envoltada per la corba d'amplada constant. Recordem que l'àrea A d'un sector circular de radi r i angle α, on α està expressat en radiants, és $A = r^2\alpha/2$. L'àrea del triangle rectangle que ens fa de base per construir la corba d'amplada constant és $1/2$ on hem usat que la seva base i la seva alçada medeixen 1. L'àrea del sector circular que cobrim en el primer pas és $(\sqrt{2})^2(\pi/4)/2 = \pi/4$. L'àrea del sector circular que cobrim en el segon pas és $(1)^2(\pi/2)/2 = \pi/4$. L'àrea del sector circular que cobrim en el tercer pas és $(\sqrt{2})^2(\pi/4)/2 = \pi/4$. I l'àrea del sector circular que cobrim en el darrer pas és $(\sqrt{2}-1)^2(\pi/2)/2 = (3-2\sqrt{2})\pi/4$. Veiem que si sumem aquestes quatre àrees cobrim el triangle rectangle tres cops pel que l'àrea del la regió limitada per la corba d'amplada constant construïda és:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + (3-2\sqrt{2})\frac{\pi}{4} - 2\cdot\frac{1}{2} = (3-\sqrt{2})\,\frac{\pi}{2} - 1 = 1.49094751\ldots$$

Si volem comparar l'àrea amb la d'una circumferència del mateix perímetre, considerem una circumferència de radi $\sqrt{2}/2$. El seu perímetre és $2\pi r = \pi\sqrt{2}$, com el de l'objecte que hem construït. L'àrea que envolta aquesta circumferència és $\pi r^2 = \pi/2 = 1.5707963\ldots$. Observem que l'àrea de l'objecte construït és menor que la de la circumferència del mateix perímetre.