

Sessió a l'aula de coworking

Matemàtiques aplicades a l'art i disseny digital
Grau en disseny digital i tecnologies creatives

Sessió: poliedres

- ① Definició de poliedre
- ② Els sòlids platònics
- ③ Activitats en grup:
 - els poliedres arquimedianos
 - la característica d'Euler
 - els poliedres duals
 - els deltaedres
 - les seccions d'un poliedre i els poliedres truncats

- ① Definició de poliedre
- ② Els sòlids platònics
- ③ Activitats en grup:
 - els poliedres arquimedianos
 - la característica d'Euler
 - els poliedres duals
 - els deltaedres
 - les seccions d'un poliedre i els poliedres truncats

Un **poliedre** és un cos geomètric, la superfície del qual es compon d'una quantitat finita de polígons plans. Aquests polígons no es superposen i els seus costats es troben en els extrems.

Està format per:

- cares: els polígons de la seva superfície,
- arestes: els costats del polígons, on es troben dues cares.
- vèrtexs: els punts on es troben les arestes.

- ① Definició de poliedre
- ② Els sòlids platònics
- ③ Activitats en grup:
 - els poliedres arquimedians
 - la característica d'Euler
 - els poliedres duals
 - els deltaedres
 - les seccions d'un poliedre i els poliedres truncats

Els poliedres es classifiquen segons la seva regularitat. Els poliedres més regulars són els **sòlids platònics**. Es defineixen:

- són convexos;
- tenen totes les cares iguals i formades per polígons regulars (amb totes les arestes i els angles iguals);
- els vèrtexs són homogenis, és a dir, per cada parell de vèrtexs hi ha una simetria del sòlid que transforma el primer en el segon. En particular, en els vèrtexs es troben el mateix nombre de cares.

Només hi ha cinc poliedres que compleixen aquestes propietats:

- **tetraedre**: format per 4 triangles equilàters. En cada vèrtex es troben 3 triangles.
- **cub**: format per 6 quadrats. En cada vèrtex es troben 3 quadrats.
- **octaedre**: format per 8 triangles equilàters. En cada vèrtex es troben 4 triangles.
- **dodecaedre**: format per 12 pentàgons regulars. En cada vèrtex es troben 3 pentàgons.
- **icosaedre**: format per 20 triangles regulars. En cada vèrtex es troben 5 triangles.

Els sòlids platònics

Podeu veure imatges d'aquests cinc poliedres a:

<https://www.experiencingmaths.org/ca/omplir-lespai/?onglet-2>

I també a:

https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

Per què hi han exactament cinc sòlids platònics i no n'hi han més?

Es pot trobar la resposta a:

<https://www.ccma.cat/tv3/alacarta/quequicom/els-poliedres-regulars/video/5630211/>

i també a: https://www.youtube.com/watch?v=gVzu1_12FUc

- ① Definició de poliedre
- ② Els sòlids platònics
- ③ **Activitats en grup:**
 - els poliedres arquimedianos
 - la característica d'Euler
 - els poliedres duals
 - els deltaedres
 - les seccions d'un poliedre i els poliedres truncats

Organitzeu-vos en **cinc** grups.

Prepararem cinc “estacions”. Cada grup estarà en una estació durant vint minuts per tal de resoldre la tasca encomanada. Tots els grups passareu per cadascuna de les estacions.

Un cop vistes les cinc estacions, cal que resolgueu els enunciats proposats i entregueu les respostes en paper a la professora. Poseu el nom i el número de DNI de cadascun dels membres del grup.

Material:

- 12 pentàgons i 20 hexàgons del joc *Polydron*,
- un model de l'icosaedre.

Els poliedres arquimedians

Els poliedres arquimedians són el segon grup de poliedres per ordre de regularitat, després dels sòlids platònics. Es defineixen

- són convexos;
- tenen totes les cares formades per polígons regulars (amb totes les arestes i els angles iguals)–les cares no tenen perquè ser totes iguals;
- els vèrtex són homogenis, és a dir, per cada parell de vèrtexs hi ha una simetria del sòlid que transforma el primer en el segon. En particular, en els vèrtexs es troben el mateix nombre de cares.
- no són ni un [prisma](#) ni un [antiprisma](#).

Els poliedres arquimedians

prisma

Un prisma és un poliedre format per dues cares poligonals iguals paral·leles i unides per paral·lelograms. Quan totes les cares són polígons regulars és un prisma regular.

antiprisma

Un prisma és un poliedre format per dues cares poligonals iguals paral·leles i unides per triangles. Quan totes les cares són polígons regulars és un antiprisma regular.

Fixeu-vos que de prismes i antiprismes n'hi han [infinit](#)s. En canvi, es pot demostrar que només hi han 13 poliedres arquimedians.

Els poliedres arquimedians

La tasca que se us demana es muntar un dels 13 poliedres arquimedians: el **icosaedre truncat**.

Disposeu de 12 pentàgons i 20 hexàgons del joc *Polydron*.

Per pensar: per què s'anomena **icosaedre truncat**? Què té a veure amb l'icosaedre?

Estació: la característica d'Euler

Material:

- papers de colors, tisores, cinta adhesiva, llapis, goma i regle
- un model del dodecaedre

La característica d'Euler

La característica d'Euler és una propietat d'un poliedre que es manté invariant sota transformacions: podem girar, engrandir, estirar, fer simètric un poliedre i la seva característica d'Euler no canvia.

Es calcula a partir de la fórmula:

$$\# \text{cares} - \# \text{arestes} + \# \text{vèrtexos}.$$

(Recordeu que $\#$ significa *nombre de*).

Suposeu que “inflem” un dels sòlids platònics fins que arribem a una esfera. De fet, per la majoria de poliedres que coneixem es verifica aquesta propietat. Diem que són **homeomorfs a una esfera**. Per tots aquests sòlids es compleix que

$$\# \text{cares} - \# \text{arestes} + \# \text{vèrtexos} = 2.$$

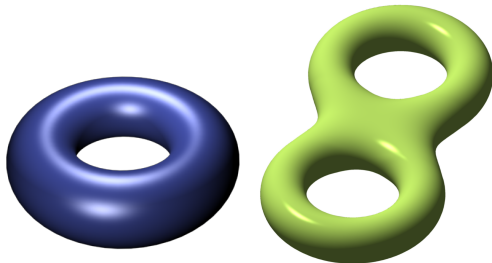
La característica d'Euler

La tasca que se us demana es construir un poliedre que **no** sigui homeomorf a una esfera. És a dir, un poliedre que si l'inflam esdevingui un *torus* (la figura d'un donut, o d'un flotador) o un objecte amb més forats.

Un cop construït, calculeu quina és la seva característica d'Euler.

Fixeu-vos que el dodecaedre compleix que la seva característica d'Euler val 2.

La característica d'Euler



Imatge torus: CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=979546>

Imatge doble torus: By Oleg Alexandrov - Own work, Public Domain,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2690147>

Material:

- un ordinador amb connexió a internet
- paper i llapis per tal de fer esbossos

Donat un poliedre convex, definim el seu **poliedre dual** com el poliedre que intercanvia el paper de vèrtexos i cares. És a dir, fem correspondre un vèrtex a cada cara de l'altre i els unim amb una aresta si les cares eren adjacents.

Pels sòlids platònics, podem prendre el baricentre de cadascuna de les cares i unir-los amb arestes si les cares corresponents són adjacents. Fixeu-vos que s'obté un sòlid platònic degut a la seva regularitat.

En aquesta estació pretenem entendre com es construeixen els poliedres duals en general. I també quins són els poliedres duals dels sòlids platònics.

Mireu el següent enllac:

<http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/platonicos/dualidad.html> per tal de ser capaços de respondre les preguntes següents. També podeu mirar l'enllaç: <https://www.geogebra.org/m/exVwHtmk>

- 1 Quin és el dual de cada sòlid platònic? Per què?
- 2 Considerem una piràmide de base quadrada, quin és el seu poliedre dual? I d'una piràmide d'una altra base?
- 3 Considerem un prisma de base triangular, quin és el seu poliedre dual? I d'un prisma d'una altra base?
- 4 Quin és el poliedre dual d'una bipiràmide?

piràmide

Una piràmide és un poliedre format per una base, que pot ser qualsevol tipus de polígon, de la qual en cada aresta surten triangles amb un vèrtex en comú.

Una **bipiràmide** és un poliedre format a partir d'“enganxar” les bases de dues piràmides de la mateixa base.

prisma

Un prisma és un poliedre format per dues cares poligonals iguals paral·leles i unides per paral·lelograms. Quan totes les cares són polígons regulars és un prisma regular.

Material:

- peces triangulars del joc del Polydron
- els models del tetraedre i l'octaedre
- paper i llapis per a escriure

Els **deltaedres** són poliedres convexos on totes les cares són triangles equilàters.

Com que totes les cares són triangles, hi han relacions molt fortes entre el nombre de cares, arestes i vèrtexos. Es pot demostrar que només hi han vuit deltaedres.

Anomenem:

C : nombre de cares,

A : nombre d'arestes,

V : nombre de vèrtexos

V_n : nombre de vèrtexos amb n arestes incidents.

La tasca que se us demana és construir alguns dels deltaedres i descobrir les relacions entre els nombres de cares, arestes i vèrtexos.

- 1 Observeu que, a partir de les definicions anteriors es compleix que $V_3 + V_4 + V_5 = V$. Per què no hi ha V_2 ? Per què no hi ha V_6 ?
- 2 Construïu un deltaedre de 6 cares. S'anomena **dipiràmide triangular**.
- 3 Construïu la **dipiràmide pentagonal**, que és un deltaedre de 10 cares.
- 4 Observeu els quatre deltaedres que teniu, calculeu els valors de C , A , V , V_3 , V_4 i V_5 per cadascun d'ells.

- 5 Comproveu que es verifica que

$$3C = 2A.$$

Aquesta identitat es dóna en tots els deltaedres. Per què?

- 6 Hi poden haver deltaedres amb un nombre senar de cares?
Raoneu la vostra resposta.
- 7 Comproveu que es verifica que

$$3V_3 + 4V_4 + 5V_5 = 3C.$$

Aquesta identitat es dóna en tots els deltaedres. Per què?

Hi han deltaedres de 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 i 20 cares. Sou capaços de construir-los tots?

Fixeu-vos que el de 20 cares és l'icosaedre, un dels sòlids platònics.

Estació: seccions d'un poliedre i poliedres truncats

Material:

- plastelina, eines per modelar plastelina
- model del cub

Atenció!!

Abans de modelar amb plastelina, cal que la taula estigui coberta amb mantell.

Seccions d'un poliedre

Una secció d'un poliedre és el polígon que resulta en tallar-lo per un pla.

La tasca que se us demana es descobrir diferents seccions d'alguns poliedres.

- 1 Modeleu un **tetraedre** amb plastelina. Recordeu que és un sòlid platònic format per quatre triangles equilàters.
- 2 Sabeu trobar dos polígons diferents que són secció d'un tetraedre? (Pista: triangle, trapezi)
- 3 Modeleu un **cub** amb plastelina.
- 4 Sabeu trobar quatre polígons diferents que són secció d'un cub? (Pista: triangle, quadrat, rectangle, hexàgon)

A partir d'un poliedre es pot genera un altre poliedre per truncament. El truncament d'un vèrtex v d'un poliedre és l'eliminació d'una part de poliedre a través d'un tall a prop de v .

La tasca que se us demana es generar diferents poliedres per truncament.

- 1 Modeleu un **tetraedre** amb plastelina.
- 2 Trunqueu els seus quatre vèrtexs fins a formar el poliedre anomenat **tetraedre truncat**. Aquest està format per 4 cares triangulars i 4 cares hexagonals. Intenteu fer que siguin tots polígons regulars.

- 4 Modeleu un **cub** amb plastelina.
- 5 Trunqueu els seus vuit vèrtexs fins a formar el poliedre anomenat **cub truncat**. Aquest està format per 8 cares triangulars i 6 cares octagonals.
- 6 Seguiu el truncament del cub (tal·leu més endins) fins a formar el poliedre anomenat **cuboctaedre**. Aquest està format per 8 cares triangulars i 6 cares quadrades. Intenteu fer que siguin tots polígons regulars.
- 7 Observeu que si seguim el truncament podem arribar a un octaedre. Recordeu que és un sòlid platònic format per vuit triangles equilàters.

Un cop vistes les cinc estacions, cal que resolgueu els enunciats proposats i entregueu les respostes en paper a la professora. Poseu el nom i el número de DNI de cadascun dels membres del grup.

- 1 Quins són els sòlids platònics? Com es defineixen?
- 2 Prenem dos tetraedres i els enganxem per una base de forma que obtenim un poliedre format per 6 cares triangulars. És un sòlid platònic? És un sòlid arquimedià? Raoneu la vostra resposta.
- 3 Com es calcula la característica d'Euler d'un poliedre? Quin valor pren?

Preguntes

- 4 En fer el poliedre dual d'un tetraedre obtenim un tetraedre més petit. Si ho repetim, obtenim un tetraedre encara més petit. Quants cops podem repetir aquest procés? Què obtenim al final?
- 5 Igual que en la pregunta anterior: si presem un cub i fem el seu dual, obtenim un octaedre més petit. Si repetim el procés cap endins, quants cops ho podem repetir? I què obtenim al final?
- 6 En els deltaedres es verifica que $3C = 2A$, on C és el nombre de cares i A és el nombre d'arestes. Per què es dóna aquesta identitat?
- 7 En fer deltaedres, heu construït la *dipiràmide triangular* i la *dipiràmide pentagonal*. Existeix la *dipiràmide hexagonal*? I la *dipiràmide quadrangular*? Raoneu la vostra resposta.

- 8 Quan es secciona un cub per obtenir un hexàgon regular, es divideix el cub en dues parts iguals? Raoneu la vostra resposta.
- 9 El tetraedre truncat, el cub truncat i el cuboctaedre, són sòlids arquimedians? Raoneu la vostra resposta.