Fractal

1. Què és un fractal?

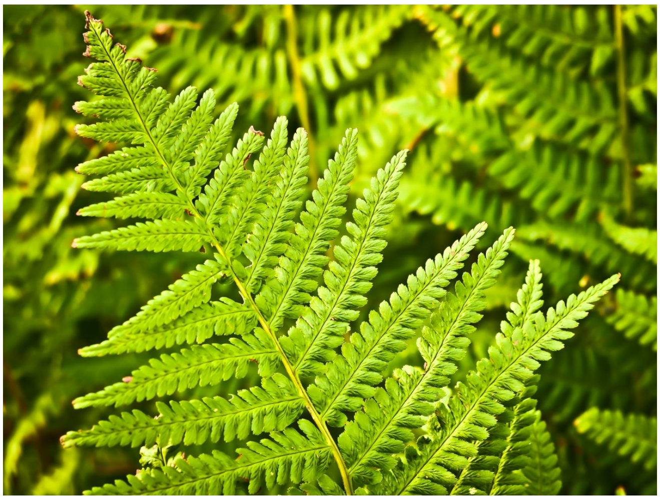
Un fractal és un conjunt matemàtic caracteritzat per què la seva dimensió de Haussdorf és superior a la seva dimensió topològica.

Un fractal mostra auto-semblança, és a dir, que es veu igual a diferents escales (s'autoreplica a diferents escales).

Tot seguit veurem una colla d'exemples de fractals en la natura.

Exemples de fractals

En la natura: falguera



Exemples de fractals

Fulla d'avet

Exemples de fractals

Bròquil

Exemples de fractals

Floc de neu

Exemples de fractals

Floc de neu

Exemples de fractals

Llampec

Exemples de fractals

Núvol

Exemples de fractals

Línia de la costa

Exemples de fractals

Xarxa fluvial

Exemples de fractals

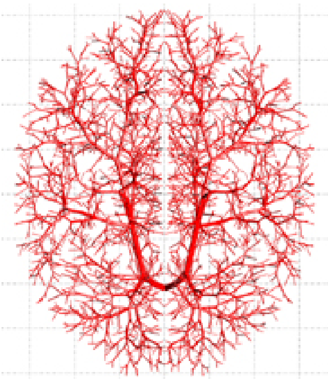
Estalactites i estalagmites

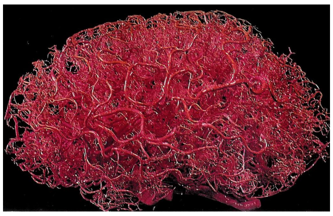
Exemples de fractals

Galàxia

Exemples de fractals

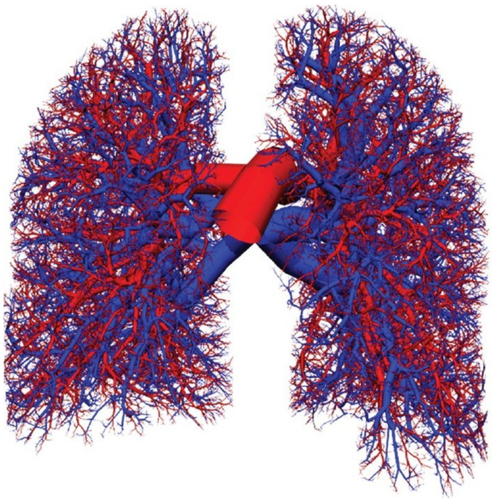
Sistema circulatori: cervell





Exemples de fractals

Sistema circulatori: pulmons



Exemples de fractals

Inflorescències: girasol

Exemples de fractals

Flor de la pastanaga

Exemples de fractals

Flor de la pastanaga

Exemples de fractals

Flor de la pastanaga

Exemples de fractals

Dent de lleó

Geometria fractal o Teoria de la Rugositat

El terme fractal el va inventar Benoît Mandelbrot.

Benoît Mandelbrot
Polònia 1924 –
Estats Units 2010.

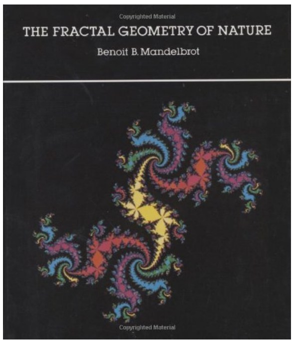
- Va nèixer a Varsòvia, però amb la seva familia es van traslladar a França l'any 1936 fugint de la persecució als jueus.
- Va tenir les nacionalitats polonesa, francesa i estatunidenca.
- Va viure la major part de la seva vida a Estats Units.

Geometria fractal o Teoria de la Rugositat

Benoît Mandelbrot
Polònia 1924 –
Estats Units 2010.

- Després d'estudiar matemàtiques i aeronàutica a les universitats de Paris i Caltech, l'any 1958 va començar a treballar a IBM.
- L'accès a gràfics per ordinador li va permetre concebre la idea dels fractals.
- L'any 1967 va publicar a la revista Science l'article titulat "Quant medeix la costa de Gran Bretanya?".

La Geometria Fractal de la Natura



The Fractal Geometry of Nature.
Benoît Mandelbrot
1982.

Els núvols no són esferes, les montanyes no són cons, les costes no són cercles i les escorces dels arbres no són llises, ni els llampecs viatgen en línia recta.
Frase del llibre.

Mesura de la línia d'una costa

El matemàtic i meteoròleg Lewis Fry Richardson (Gran Bretanya 1881 - 1953) va proposar la paradoxa de la línia de costa a l'observar que la línia d'una costa sembla que no tingui una longitud ben definida.

Mesura de la línia d'una costa

L'article "Quant medeix la costa de Gran Bretanya?" de Benoît Mandelbrot (Science 1967) resol aquest problema al modelar la línia d'una costa mitjançant fractals.

Mesura de la línia d'una costa

Llistat de països per la llargada de la seva costa:
http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_length_of_coastline

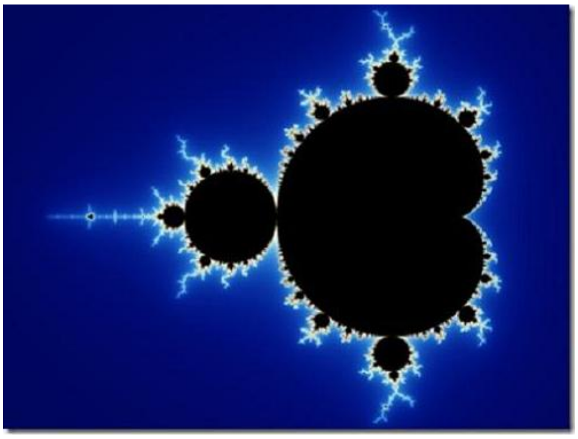
Dimensió fractal

2. Com es calcula la dimensió fractal?

Dimensió fractal

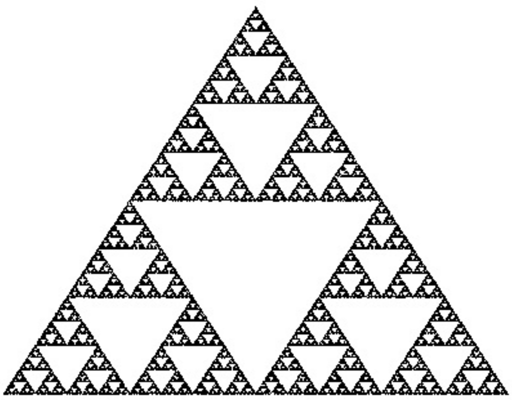
Anem a veure alguna exemples de conjunts fractals definits matemàticament i d'alguns en calcularem la seva dimensió fractal.

El fractal de Mandelbrot



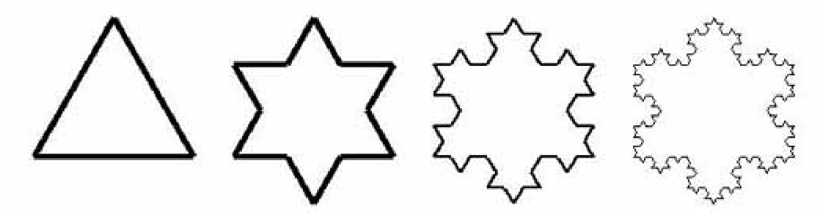
Aquest és el fractal més famós i es defineix a partir de l'estudi de la dinàmica de l'aplicació $z \to z^2 + c$ en el pla dels nombres complexos.

El triangle de Sierpiński



Aquest fractal es defineix a partir de buidar un triangle equilàter mitjançant triangles equilàters. L'objecte que resulta d'"anar buidant" és el triangle de Sierpiński.

El floc de neu de von Koch



Aquest fractal es defineix a partir de construir dos costats d'un triangle equilàter en el terç del mig d'un segment. En el cas de partir de tres segments que formen un triangle, s'obté el floc de von Koch.
Una aplicació per a generar-lo: `vonkoch/KochCurve`

Dimensió de semblança

La dimensió topològica d'una recta és 1, d'un pla és 2 i d'un objecte amb volum és 3. Suposem que volguessim calcular aquesta dimensió fent còpies de cada objecte.

Prenem un quadrat. Té dimensió topològica $= 2$.

- Si dividim cada costat per 2, obtenim 4 quadrats.
- Si dividim cada costat per 3, obtenim 9 quadrats.
- Si dividim cada costat per n, obtenim n^2 quadrats.

En fer divisions dels costats, obtenim objectes semblants.

Dimensió de semblança

Ara prenem un cub. Té dimensió topològica = 3.

- Si dividim cada costat per 2, obtenim 8 cubs.
- Si dividim cada costat per 3, obtenim 27 cubs.
- Si dividim cada costat per n, obtenim n^3 cubc.

En fer divisions dels costats, obtenim objectes semblants.

Dimensió de semblança

Observem que obtenim la següent relació:

$$\sharp\text{peces semblants} = (\sharp\text{trossos costat})^{\text{dimensió}}$$

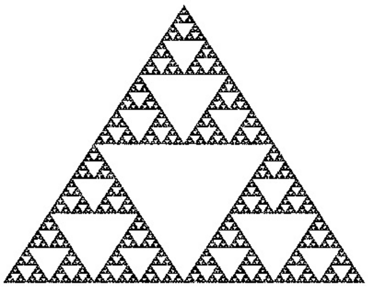
Fent logaritmes a banda i banda obtenim la fórmula següent:

$$\text{dimensió semblança} = \frac{\ln(\sharp\text{peces semblants})}{\ln(\sharp\text{trossos costat})}$$

Apliquem aquesta definició al triangle de Sierpiński i al floc de neu de von Kock.

Dimensió de semblança

Triangle de Sierpiński:

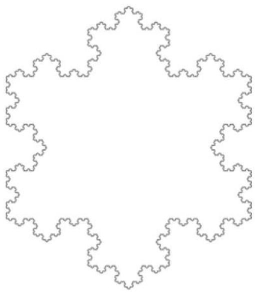


Observem que si dividim els costats del triangle de Sierpiński en 2 trossos, obtenim 3 còpies del mateix. Per la fòrmula:

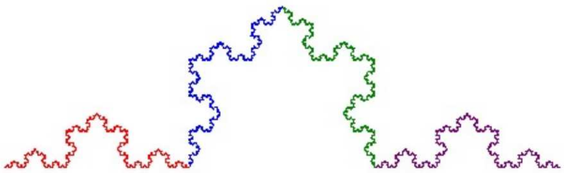
$$\text{dimensió semblança} = \frac{\ln(\sharp\text{peces semblants})}{\ln(\sharp\text{trossos costat})} = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.5849625\ldots$$

Dimensió de semblança

Floc de neu de von Koch:

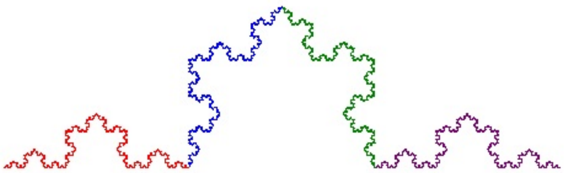


Prenem un dels tres trossos per poder calcular més fàcil.



Dimensió de semblança

Floc de neu de von Koch:



Observem que si dividim el segment en 3 trossos, obtenim 4 còpies del mateix. Per la fòrmula:

$$\text{dimensió semblança} = \frac{\ln(\sharp\text{peces semblants})}{\ln(\sharp\text{trossos costat})} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2618595\ldots$$

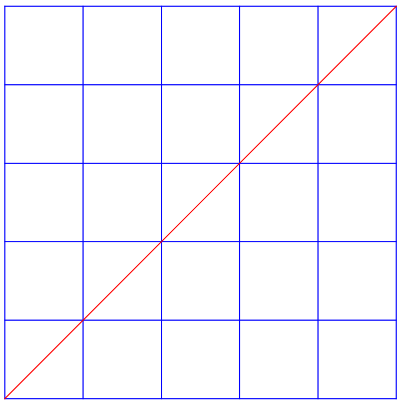
Dimensió de semblança/Box-counting dimension

La dimensió de semblança ens permet calcular dimensions fractals d'objectes que són perfectament auto-semblants. Els fractals que apareixen en la natura **no** són auto-semblants. Usarem una altra manera de calcular la dimensió fractal, que s'usa en la realitat: box-counting dimension.

El mètode de recompte de caixes es pot fer en qualsevol dimensió i l'expliquem en dimensió 2. Suposem que tenim un conjunt F en el pla i dibuixem una quadrícula de $n \times n$ quadradets. Calculem quants quadradets toquen a F i anomenem aquest valor $N(n)$.

Mètode de recompte de caixes

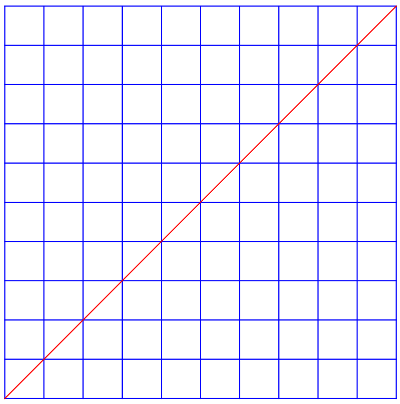
Considerem un segment (i sabem que la seva dimensió és 1).
Prenem primer una quadrícula 5×5:



I el segment toca en 5 quadradets.

Mètode de recompte de caixes

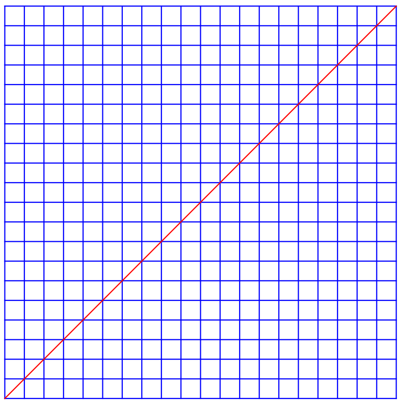
Prenem una quadrícula 10×10:



I el segment toca en 10 quadradets.

Mètode de recompte de caixes

Prenem una quadrícula 20×20:



I el segment toca en 20 quadradets.

Mètode de recompte de caixes

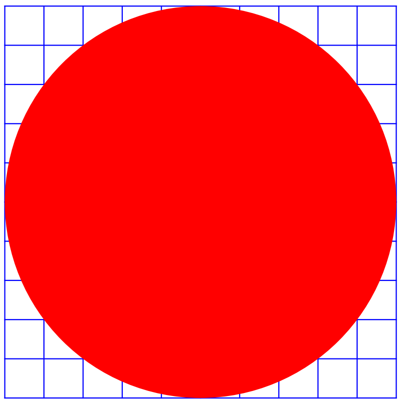
Per tant, en una quadrícula $n \times n$, el segment toca en $N(n) = n$ quadradets. Observem que si fem

$$\frac{\ln(N(n))}{\ln n} = 1.$$

Ara fem el mateix per un cercle, que sabem que té dimensió 2.

Mètode de recompte de caixes

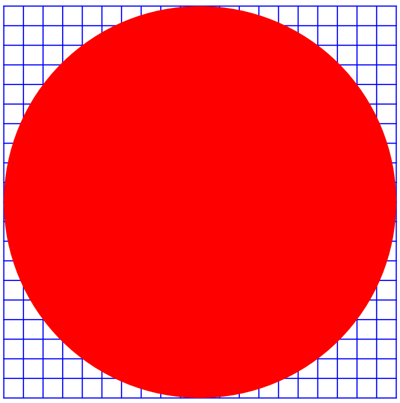
Prenem una quadrícula 10×10:



I el cercle toca en 88 quadradets.

Mètode de recompte de caixes

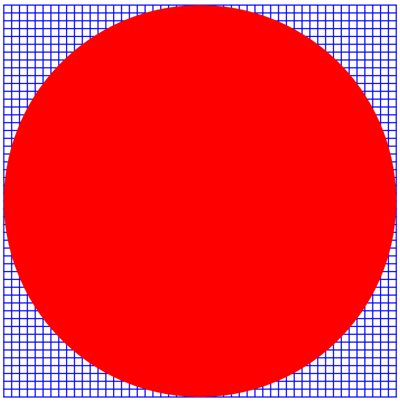
Prenem una quadrícula 20×20:



I el cercle toca en 340 quadradets.

Mètode de recompte de caixes

Prenem una quadrícula 50×50:



I el cercle toca en 2064 quadradets.

Mètode de recompte de caixes

Obtenim la següent taula:

n	$N(n)$	$\ln(N(n))\,/\ln n$
10	88	1.944
20	340	1.946
50	2064	1.951

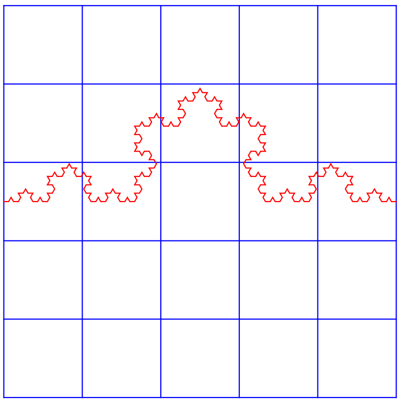
Observem que el quocient $\ln(N(n))\,/\ln n$ s'aproxima a 2.
En general, es pot demostrar que

$$\text{dimensió fractal} = \text{límit}\ \frac{\ln(N(n))}{\ln n}\ \text{quan}\ n \to \infty.$$

Dimensió fractal corba de Koch

Anem a calcular la dimensió fractal del floc de neu de Koch mitjançant el mètode de recompte de caixes.

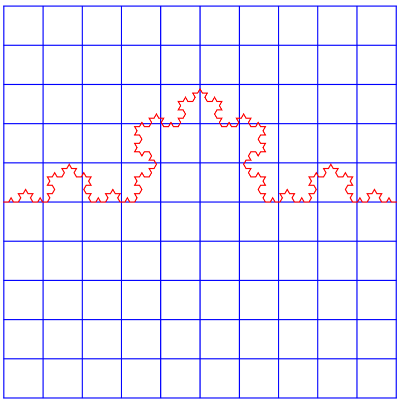
Prenem una quadrícula 5×5:



I el fractal toca en 7 quadradets.

Dimensió fractal corba de Koch

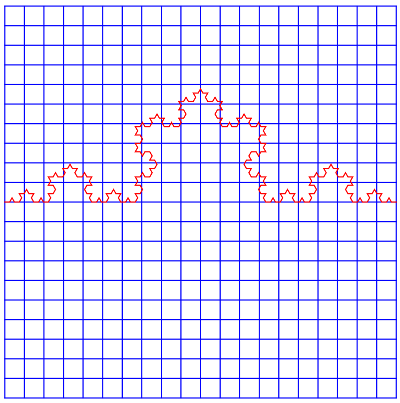
Prenem una quadrícula 10×10:



I el fractal toca en 16 quadradets.

Dimensió fractal corba de Koch

Prenem una quadrícula 20×20:



I el fractal toca en 44 quadradets.

Dimensió fractal corba de Koch

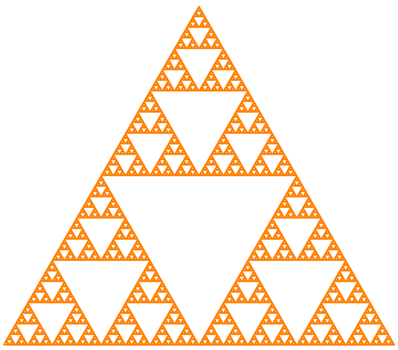
Obtenim la següent taula:

n	$N(n)$	$\ln(N(n))\,/\ln n$
5	7	1.209
10	16	1.204
20	44	1.263

Recordem que la dimensió de semblança ens havia donat ≈ 1.26.

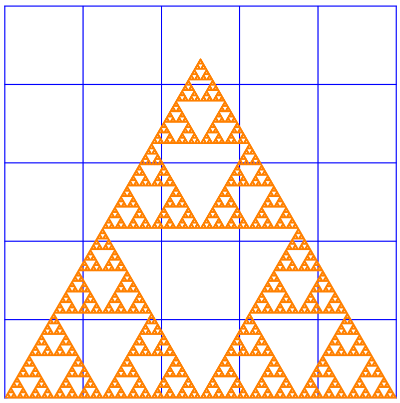
Dimensió fractal triangle Sierpiński

Anem a calcular la dimensió fractal del triangle de Sierpiński mitjançant el mètode de recompte de caixes.



Dimensió fractal triangle Sierpiński

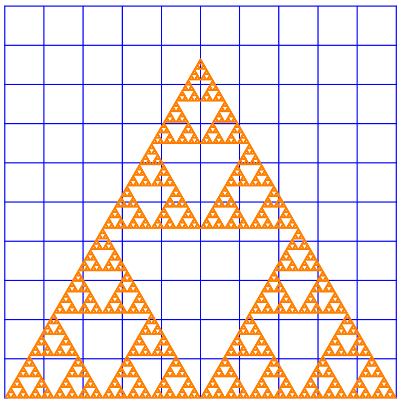
Prenem una quadrícula 5×5:



I el fractal toca en 16 quadradets.

Dimensió fractal triangle Sierpiński

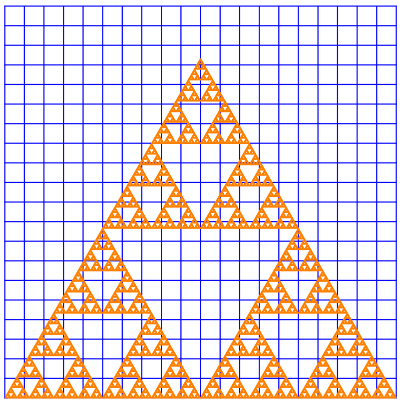
Prenem una quadrícula 10×10:



I el fractal toca en 48 quadradets.

Dimensió fractal triangle Sierpiński

Prenem una quadrícula 20×20:



I el fractal toca en 120 quadradets.

Dimensió fractal triangle Sierpiński

Obtenim la següent taula:

n	$N(n)$	$\ln(N(n)) / \ln n$
5	16	1.7227
10	48	1.6812
20	120	1.598

Recordem que la dimensió de semblança ens havia donat ≈ 1.585.

Dimensió fractal

La dimensió fractal és una mesura de la "rugositat" d'un objecte. D'aquesta manera, tdeterminem que el triangle de Sierpiński ($d \approx 1.58$) és més rugós que el floc de neu de Koch ($d \approx 1.26$).

El mètode de recompte de caixes es pot aplicar a qualsevol objecte.

Aplicacions de la dimensió fractal

En medicina:

Per exemple, es determina la dimensió fractal del teixit mamari a partir d'una mamografia.

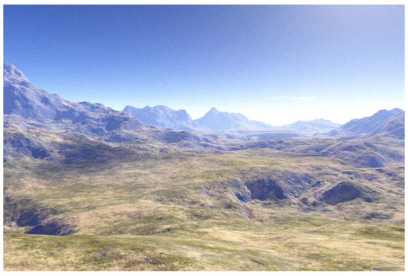
Quan aquesta dimensió és entre 1 i 1.5 acostuma a ser una lesió benigna i si està entre 1.35 i 2 acostuma a ser maligna.

També s'aplica a l'estudi de l'osteoporosi, l'enfisema pulmonar, la retinopatia diabètica ...

Aplicacions de la dimensió fractal

En ecologia i geografia:

Per exemple, es determina la dimensió fractal de diferents terrenys, costes



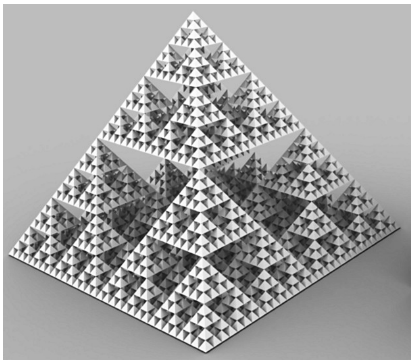
També s'aplica a l'estudi de modelització de paisatges, metereologia, ...
Institut cartogràfic i geològic de Catalunya:
`https://www.icgc.cat`

Fractals

El següent vídeo mostra un resum del que hem explicat sobre fractals:
`https://youtu.be/gB9n2gHsHN4`
(20', en anglès).

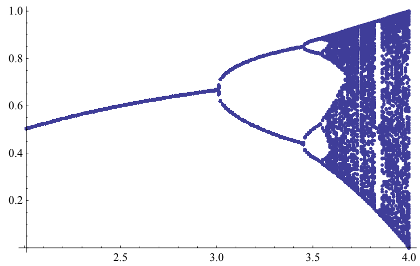
Fractals i Teoria del Caos

3. Què tenen a veure els fractals amb la Teoria del Caos?



Fractals i Teoria del Caos

Suposem que tenim un sistema caòtic.
A partir de condicions inicials molt properes, en fer evolucionar el temps, obtenim solucions diferents.
Suposem que prenem un conjunt de condicions inicials i les fem evolucionar totes amb el temps. El conjunt "on van a parar" s'anomena atractor.
Pot ser que aquest atractor tingui estructura fractal. Aleshores s'anomena atractor extrany.



Fractals i Teoria del Caos

Capítol 9 de *Más por menos. Fractales: la geometría del caos.*

Tota la sèrie: `http://www.rtve.es/television/la-aventura-del-saber/documentales/mas-por-menos/`

Per saber-ne més

TED talk de Benoît Mandelbrot
`https://www.ted.com/talks/benoit_mandelbrot_fractals_the_art_of_roughness`

Article de la revista Mat^2:
A. Gasull, FRACTALS I MEDICINA, Materials Matemàtics, Vol. 2016, no. 5.
`http://mat.uab.cat/matmat/`

Activitats

- Descriu com es va produir el descobriment del caos matemàtic. Cal que parlis d'Henri Poincaré, del problema dels n cossos, de les lleis de Kepler, de la estabilitat del sistema solar, del determinisme triomfant de Lagrange ...
- Què és el caos matemàtic? Dóna exemples de fenòmens naturals on aparegui el caos matemàtic.
- Què és i què representa l'aplicació logística?
- Quina és la diferència enre caos i atzar? Dóna exemples de fenòmens caòtics i fenòmens aleatoris.
- Descriu com es va desenvolupar la teoria del caos. Cal que parlis de l'atractor de Lorenz, de la convecció atmosfèrica, de l'efecte papallona, ...

Activitats

- Considerem la successió iterada definida per $x_n = f(x_{n-1})$ amb $f(x) = rx(1-x)$. Considerem valors de x entre 0 i 1. Aquesta és l'anomenada aplicació logística.
  - En quin camp científic apareix l'aplicació logística i qué representa?
  - Prenem $r = 2$. Comprova, mitjançant alguns exemples amb la calculadora, que
    - Si $x_0 = 0$, aleshores la successió x_n és constant igual a 0.
    - Si $0 < x_0 < 1$, aleshores la successió x_n tendeix a 0.5.
    - Si $x_0 = 1$, aleshores la successió x_n és constant igual a 1.

    És aquesta successió caòtica? Raona la teva resposta.
  - Prenem $r = 3.9$. Calcula quatre iterats de la successió definida començant per dos condicions inicials separades d'una centèssima (per exemple 0.41 i 0.42). Ens suggereix el resultat que aquesta successió és caòtica? Per què?

Activitats

- Considerem la successió iterada definida per $x_n = f(x_{n-1})$ amb $f(x) = 1 - x$.
  - Calcula, amb l'ajuda de la calculadora, els primers 6 iterats prenent com a condicions inicials $x_0 = 0.3$, $x_0 = 0$, $x_0 = 0.5$ i $x_0 = 2$.
  - Quin és el comportament de la successió x_n segons els valors de la condició inicial?
  - Ens suggereix el resultat que aquesta successió és caòtica? Per què?

Activitats

- Considerem el floc de neu de von Koch.
  - Inicialment, tenim un triangle equilàter de costat 1. Quin és el seu perímetre? I la seva àrea?
  - Fem la primera iteració del procés de Koch. Quin és el perímetre i làrea de la figura resultant?
  - I en la segona iteració del procés de Koch, quin és el perímetre i l'àrea de la figura resultant?

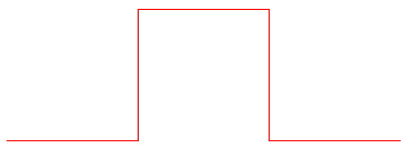
  Es pot demostrar que el perímetre del floc de neu de von Koch es infinit i que la seva àrea és finita i val $2\sqrt{3}/5$.

Activitats

Considerem el fractal definit de la forma següent.

- comencem amb un segment de longitud 1.

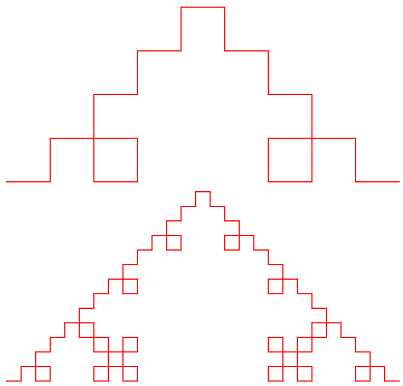
- i afegim tres costats d'un quadrat en el seu terç central.



- Repetim el procés en cada segment dels cinc obtinguts.

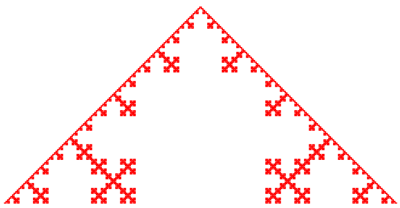
Activitats

- Comprova que el tercer i quart pas del procés descrit donen lloc a les figures següents:



Activitats

Obtenim un fractal de la forma següent:

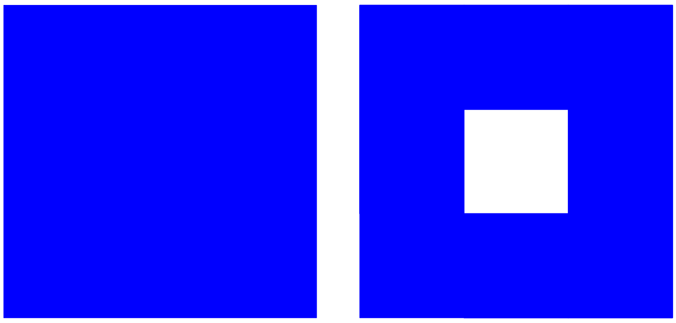


- Determina la seva dimensió de semblança.
- Calcula aproximacions a la seva dimensió fractal mitjançant el mètode de recompte de caixes.

Activitats

Considerem el fractal definit de la forma següent. Aquest fractal s'anomena *alfombra de Sierpiński*.

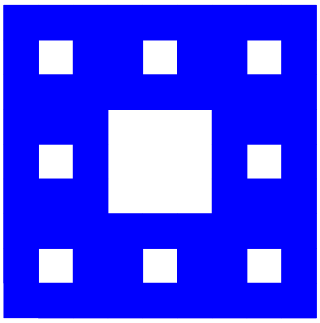
- comencem amb un quadrat de costat 1.
- Dividim el quadrat en nou quadrats i esborrem el quadrat central.

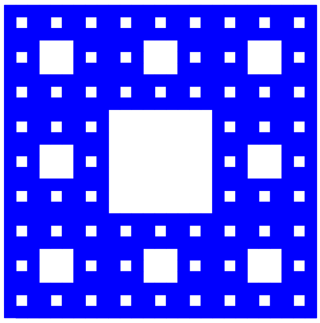


- Repetim el procés en cadascun dels vuit quadrats restants.

Activitats

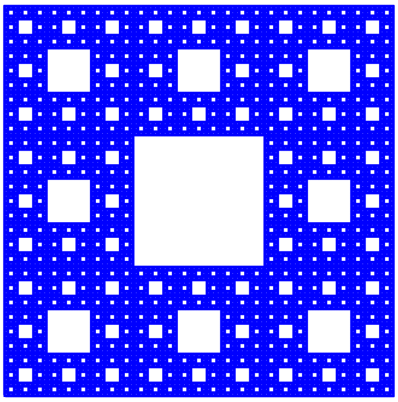
- Comprova que el tercer i quart pas del procés descrit donen lloc a les figures següents:





Activitats

Obtenim un fractal de la forma següent:



- Determina la seva dimensió de semblança.
- Calcula aproximacions a la seva dimensió fractal mitjançant el mètode de recompte de caixes.

Activitats

- Per construir l'alfombra de Sierpiński, comencem amb 1 quadrat de costat 1. Quin és el seu perímetre? I la seva àrea?
- En el primer pas, tenim 8 quadradets de costat 1/3. Quin és el perímetre de la figura? I la seva àrea?
- Quants quadradets tenim en el segon pas? I quant medeix el seu costat? Quin és el perímetre de la figura? I la seva àrea?
- Quants quadradets tenim en el pas n-èssim? I quant medeix el seu costat? Quin és el perímetre de la figura? I la seva àrea?
- Raona, a partir del pas al límit en els càlculs de l'apartat anterior, que el perímetre de l'alfombra de Sierpiński és infinit i la seva àrea és 0.

Exemples en l'art

Les figures següents mostren dos detalls dels mosaics del terra, la primera de la catedral d'Anagni (Itàlia), construïda l'any 1104, i la segona de la basílica de San Clemente (Roma, Itàlia).