Matemàtiques aplicades a l'art i el disseny digital

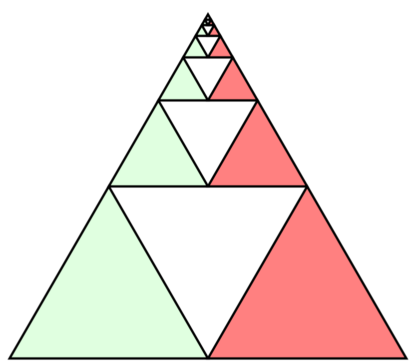
Grau en disseny digital i tecnologies creatives

PROVA 2. 10 de Gener de 2020

1. (2 *punts*) Considerem la progressió geomètrica de primer terme 1/4 i raó 1/4.

   (a) Dóna els cinc primers termes d'aquesta progressió i el valor de la suma d'aquests termes.

   (b) Dóna el valor de la suma de tots els seus termes. Pots arribar a la mateixa conclusió geomètricament mitjançant la figura següent. Raona com.



2. (3 *punts*) Quins són els sòlids platònics? Com es defineixen? En la descripció dels sòlids platònics cal que indiquis el nombre de cares de cadascun. Dibuixa el tetraedre.
   Considerem el tetraedre i trunquem tots els seus vèrtexs a fi d'obtenir el tetraedre truncat.

   (a) Quantes cares té el tetraedre truncat i de quina forma són?

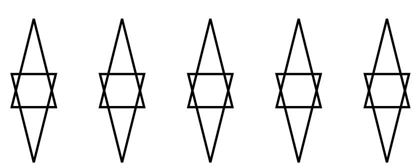
   (b) El tetraedre truncat és un sòlid arquimedià? Per què?

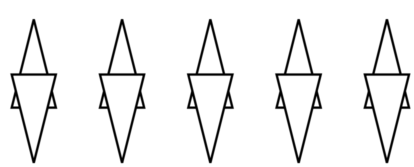
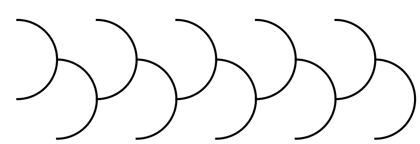
(c) Quina és la característica d'Euler del tetraedre truncat? Com l'has calculada?

3. (3 *punts*) Les sanefes es classifiquen segons els moviments rígids que les deixen invariants. Hi han 7 tipus de sanefes i les indiquem de la forma següent:

   - T Quan hi ha translació respecte la direcció de la sanefa (i res més).
   - R Quan hi ha rotació de 180^o respecte d'un punt (i res més a part de T).
   - V Quan hi ha simetria respecte un eix vertical (i res més a part de T).
   - G Quan hi ha *glide reflection* (i res més a part de T).
   - HG Quan hi ha simetria respecte la recta horitzontal central (i res més a part de T i G).
   - VRG Quan hi ha simetria respecte un eix vertical, rotació de 180^o respecte d'un punt, *glide reflection* i translació, però no hi ha simetria respecte la recta horitzontal central.
   - VHRG Quan hi ha simetria respecte un eix vertical, rotació de 180^o respecte d'un punt, *glide reflection*, simetria respecte la recta horitzontal central i translació.

   Digues de quin tipus són les quatre sanefes següents i dibuixa sanefes dels tipus que falten,indicant de quin tipus són. Cal que el motiu surti almenys quatre cops en cada sanefa.



4. (2 *punts*)

   (a) Descriu com es va produir el descobriment del caos matemàtic. Cal que parlis d'Henri Poincaré, del problema dels n cossos, de les lleis de Kepler, de la estabilitat del sistema solar, del determinisme triomfant de Lagrange . . .
   Descriu què és el caos matemàtic.

   (b) Descriu i dibuixa els tres primers passos de la construcció del fractal anomenat *floc de neu de von Koch*. Quina és la seva dimensió de semblança?

OBSERVACIONS.-

- Recorda d'escriure el teu nom i cognoms i el teu número de DNI en TOTS els fulls de l'examen.
- Disposes d'una hora i mitja per a realitzar aquesta prova.

Resolució de la Prova 2.

Problema 1. Considerem la progressió geomètrica de primer terme 1/4 i raó 1/4.

(a) Dóna els cinc primers termes d'aquesta progressió i el valor de la suma d'aquests termes. Els cinc primers termes són:

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16},\ \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64},\ \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256},\ \frac{1}{4^5} = \frac{1}{1024}.$$

La seva suma es pot calcular directament o fent servir la fórmula de la suma dels primers k termes d'una progressió geomètrica:

> *Els primers k termes d'una progressió geomètrica de primer terme a_0 i de raó r són*
>
> $$a_0,\ a_0 r,\ a_0 r^2,\ a_0 r^3,\ \ldots,\ a_0 r^{k-1},$$
>
> *i la seva suma val*
>
> $$a_0 \frac{1 - r^k}{1 - r}.$$

En el cas d'aquest problema tenim $a_0 = 1/4$, $r = 1/4$ i $k = 5$ pel que trobem que la suma val

$$\frac{1}{4} \frac{1 - (1/4)^5}{1 - (1/4)} = \frac{341}{1024}.$$

(b) Dóna el valor de la suma de tots els seus termes. Pots arribar a la mateixa conclusió geomètricament mitjançant la figura següent. Raona com.

La suma dels infinits termes d'aquesta progressió és el límit quan k tendeix a infinit de

$$a_0 \frac{1 - r^k}{1 - r},$$

prenent $r = 1/4$ i $a_0 = 1/4$. Com que $1/4 < 1$ tenim que $(1/4)^k$ tendeix a 0 quan k va a infinit. Per tant, el valor de la suma de tots els termes és:

$$a_0 \frac{1}{1 - r} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - (1/4)} = \frac{1}{3}.$$

En la figura que s'adjunta es divideix primer un triangle (que podem suposar que té àrea igual a 1) en quatre triangles iguals. Per tant, el triangle de sota a l'esquerra té àrea $1/4$. Prenem el triangle de dalt i es divideix altre cop en quatre triangles iguals. Per tant, el següent triangle té àrea $(1/4)^2$. Repetim aquest procés infinits cops i tots els triangles de l'esquerra van tenint àrees $1/4$ de l'anterior. Per tant, la suma de les àrees de tots els triangles de l'esquerra és:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \dots$$

on la suma és els termes de la progressió que ens ocupa fins a l'infinit. Veiem en la figura que aquests triangles ocupen un terç del triangle inicial, pel que aquesta suma infinita val $1/3$. En el raonament hem pres els triangles de l'esquerra, però podíem haver pres els de la dreta o els del mig de forma equivalent.

Problema 2. Quins són els sòlids platònics? Com es defineixen? En la descripció dels sòlids platònics cal que indiquis el nombre de cares de cadascun. Dibuixa el tetraedre.

Els sòlids platònics són els poliedres més regulars i es defineixen per complir les tres característiques següents:

- són convexos;
- totes les seves cares són iguals i són polígons regulars (és a dir, amb totes les arestes i tots els angles iguals);
- els vèrtexs són homogenis, és a dir, per cada parell de vèrtexs hi ha una simetria del sòlid que transforma el primer en el segon. En particular, en els vèrtexs es troben el mateix nombre de cares.

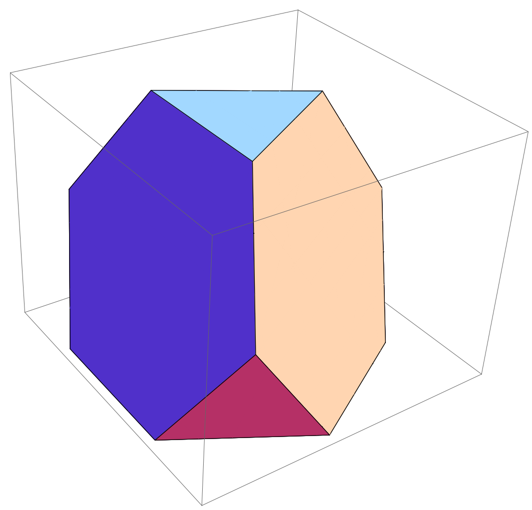
Només hi han cinc poliedres que compleixen aquestes tres propietats i són:

- el tetraedre, format per 4 cares que són triangles equilàters,
- el cub o hexaedre, format per 6 cares que són quadrats,
- el octaedre, format per 8 cares que són triangles equilàters,
- el dodecaedre, format per 12 cares que són pentàgons regulars,
- l'icosaedre, format per 20 cares que són triangles equilàters.

Es pot veure un gràfic de cadascun d'ells a:
`https://suportdocent.udl.cat/apunts/solids/platonics/`

Considerem el tetraedre i trunquem tots els seus vèrtexs a fi d'obtenir el tetraedre truncat.

Es pot veure que el poliedre obtingut té la forma següent:



(a) Quantes cares té el tetraedre truncat i de quina forma són? Està format per 4 triangles i per 4 hexàgons. Té vuit cares.

(b) El tetraedre truncat és un sòlid arquimedià? Per què? Sí, és un sólid arquimedià. Els sòlids arquimedians són els poliedres més regulars després dels sólids platònics. Compleixen les mateixes característiques que els sòlids platònics, excepte que totes les cares siguin iguals. És a dir, compleixen que:

- són convexos;
- totes les seves cares són polígons regulars (és a dir, amb totes les arestes i tots els angles iguals) i hi pot haver cares diferents;
- els vèrtexs són homogenis, és a dir, per cada parell de vèrtexs hi ha una simetria del sòlid que transforma el primer en el segon. En particular, en els vèrtexs es troben el mateix nombre de cares.

A més, en els sòlids arquimedians no considerem les families dels prismes i els antiprismes, que són families infinites que compleixen aquestes propietats. D'aquesta manera hi han 13 sòlids arquimedians.

El tetraedre truncat és un sòlid arquimedià perquè compleix totes aquestes propietats.

(c) Quina és la característica d'Euler del tetraedre truncat? Com l'has calculada? La característica d'Euler és un nombre associat a un poliedre que es calcula amb la fórmula

$$C - A + V,$$

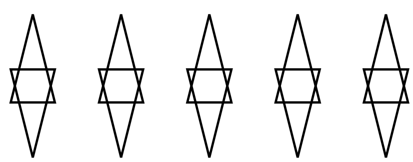
on C és el nombre de cares, A el nombre d'arestes i V el nombre de vèrtexos. El nombre de cares és 8, el nombre de vèrtexs és 12 (cadascun dels 4 vèrtexs del tetraedre passa a ser un triangle que té 3 vèrtexs) i el nombre d'arestes és 18 (hi han 4 triangles i 4 hexàgons, pel que tenim $4 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 36$ arestes, però així comptem cada aresta dos cops, pel que hi han 18 arestes). Per tant, la característica d'Euler dóna

$$C - A + V = 8 - 18 + 12 = 2.$$

La característica d'Euler per tots els poliedres homeomorfs a una esfera és 2.

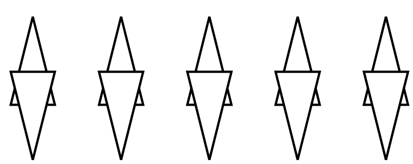
Problema 3. Digues de quin tipus són les quatre sanefes següents i dibuixa sanefes dels tipus que falten,indicant de quin tipus són. Cal que el motiu surti almenys quatre cops en cada sanefa.

La sanefa



és de tipus VHRG, ja que mostra totes les possibles simetries.

La sanefa

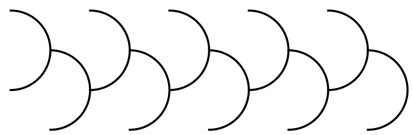


és de tipus V, ja que només mostra simetria respecte un eix vertical (i translació).

La sanefa

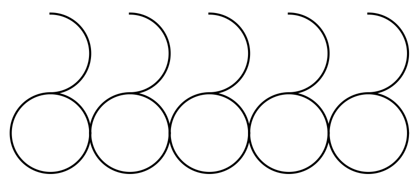
és de tipus R, ja que només mostra rotació de 180^o respecte d'un punt (i translació).

La sanefa

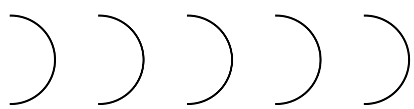


és de tipus G, ja que només mostra *glide reflection* (i translació).

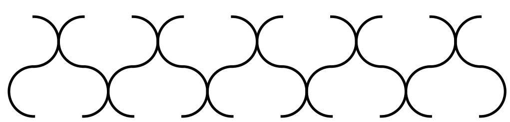
Hem de construir sanefes de tipus T, HG i VRG que són les que falten. Una sanefa de tipus T és la següent:



Una sanefa de tipus HG és la següent:



I una sanefa de tipus VRG és la següent:



Problema 4. **(a)** Descriu com es va produir el descobriment del caos matemàtic. Cal que parlis d'Henri Poincaré, del problema dels n cossos, de les lleis de Kepler, de la estabilitat del sistema solar, del determinisme triomfant de Lagrange ...
Descriu què és el caos matemàtic.

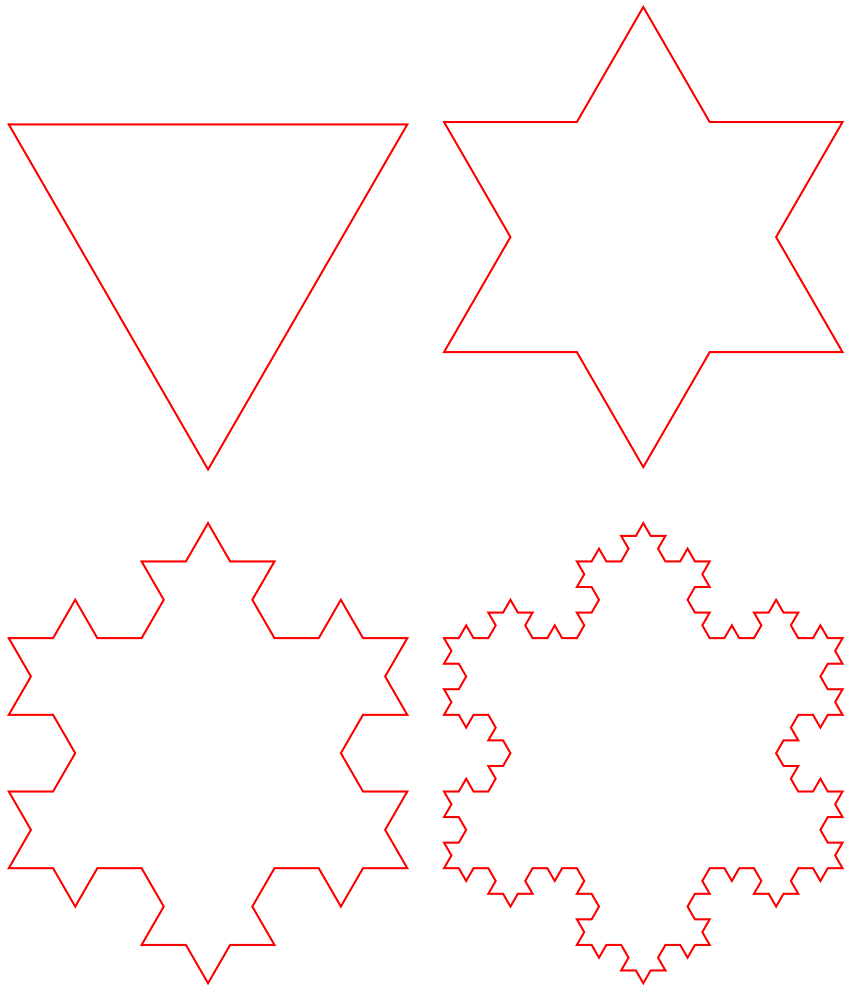
El caos matemàtic va ser descobert per Henri Poincaré, que va ser un filòsof, matemàtic i científic de finals del segle XIX (i principis del XX). Arran d'una convocatòria de concurs finançada pel rei de Suècia i Noruega a qui fes una aportació significativa en el camp de l'anàlisi superior, Henri Poincaré es va plantejar el problema del n cossos. Aquest problema preten determinar la posició i la velocitat de n cossos sotmesos a la llei de la gravitació universal formulada per Newton i sabent la seva posició i velocitat inicials. En el cas de $n = 2$ cossos es coneix la solució ja que Kepler va donar les tres lleis del moviment de dos cossos: un cos es mou formant una órbita el·líptica al voltant de l'altre que está situat en un dels focus de l'el·lipse, el cos que es mou en l'el·lipse escombra àrees iguals en temps iguals i el periode de revolució és proporcional (no de forma lineal) a un dels semieixos de l'el·lipse. Aquestes lleis van ser formulades per Kepler a partir dels amidaments fets per Tycho Brahe. I aquestes lleis van ser demostrades per Newton quan va formular la llei de la gravitació universal. Poincaré es plantejava usar aquestes lleis per demostrar l'estabilitat del sistema solar. Va presentar una memòria al concurs i va guanyar però en fer la versió final que havia de ser publicada es va adonar que hi havia un error. En la solució del problema dels n cossos hi havia una forta sensibilitat a les condicions inicials. Va escriure a l'editor de la revista on s'havia de publicar la memòria i li va fer pagar les despeses de la primera publicació. Gràcies a aquest error, Poincaré es va adonar de l'existència del caos matemàtic. La majoria de fenòmens que ens envolten són caòtics, és a dir, són molt sensibles a les condicions inicials. En un sistema caòtic, si coneixem amb total precisió les condicions inicials, les equacions del model ens donen una solució, però si les condicions inicials són lleugerament diferents, obtenim una solució totalment diferent. Aquest fet és el caos matemàtic. Arran d'aquest descobriment es va destruir el concepte de determinisme triomfant de Lagrange, qui deia que qualsevol fenòmen es podria predir si es coneixien les equacions que el modelaven. Amb conèixer i saber resoldre les equacions no n'hi ha prou. Donat que els aparells de mesura dels que disposem no són exactes, resulta impossible predir l'evolució d'un sistema caòtic ja que no podem determinar amb exactitud les condicions inicials.

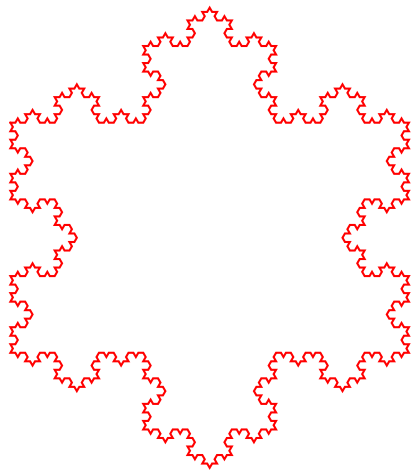
(b) Descriu i dibuixa els tres primers passos de la construcció del fractal anomenat *floc de neu de von Koch*. Quina és la seva dimensió de semblança?

El fractal de neu de von Koch es construeix a partir d'un triangle rectangle. En cada segment del triangle substituim el terç central per dos segments de la mateixa longitud i que formin un tros de triangle a sobre d'aquest.

Després repetim el procés en tots els segments obtinguts. En fer aquesta iteració infinits cops, trobem el fractal de neu de von Koch.

Els tres primers passos d'aquesta iteració són els següents:





Per calcular la dimensió de semblança prenem un dels costats del fractal i veiem que si el dividim en 3 trossos obtenim 4 còpies del costat, pel que la dimensió de semblança és:

$$\frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26186\ldots$$