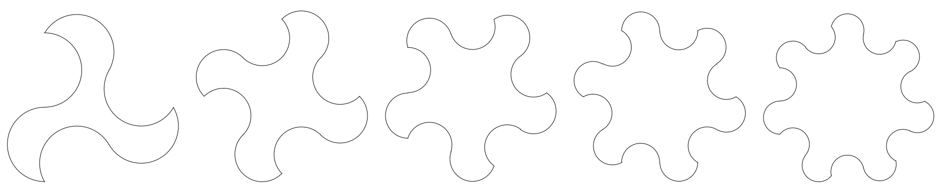
Matemàtiques aplicades a l'art i el disseny digital

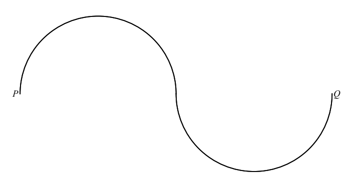
Grau en disseny digital i tecnologies creatives

PROVA 1. 6 de Novembre de 2023

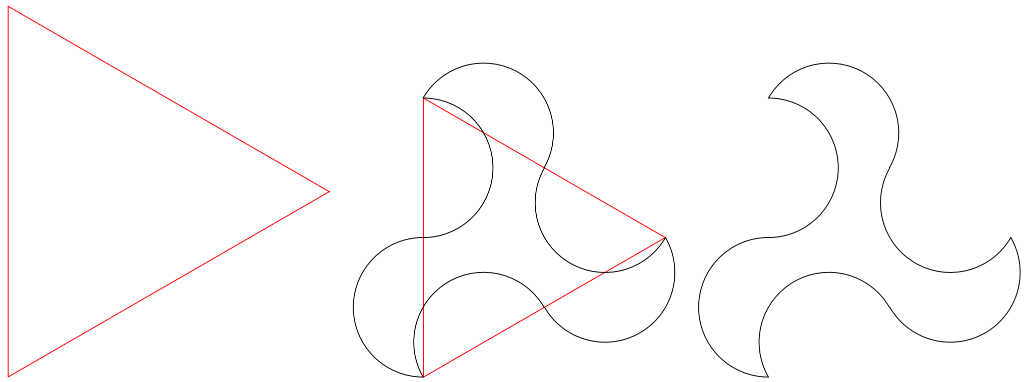
1. (4 *punts*) Les figures següents s'anomenen *starfish*:



Volem dibuixar figures *starfish* de la manera següent: prenem un polígon regular centrat en l'origen i amb un vèrtex en el punt $(1,0)$ i substituim cada costat per dues mitges circumferències capicuades, cadascuna de radi una quarta part del segment i amb centre en els punts situats a distància un quart de la mida del segment dels extrems. Per exemple, si tenim el segment donat pels punts P i Q, el substituim per les dues mitges circumferències de la forma següent:



Considerem un triangle centrat en l'origen i amb un vèrtex en el punt $(1,0)$:
Pas 1: els vèrtexs del triangle es troben en els punts $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ i $P_3 = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$.
Pas 2: la mida de cada costat és $\sqrt{3}$.
Pas 3: considerem el costat P_1P_2, el seu punt mig és el punt $M = (1/4, \sqrt{3}/4)$.
Pas 4: els punts que estan a distància $\sqrt{3}/4$ dels extrems són els punts $C_1 = (5/8, \sqrt{3}/8)$ i $C_2 = (-1/8, 3\sqrt{3}/8)$.
Pas 5: punxem el compàs en el punt C_1 i fem mitja circumferència de radi $\sqrt{3}/4$ que uneix els punts P_1 i M per dins.
Pas 6: punxem el compàs en el punt C_2 i fem mitja circumferència de radi $\sqrt{3}/4$ que uneix els punts M i P_2 per fóra.
I repetim els passos 3–6 pels altres dos costats.



(a) Fes els càlculs que justifiquen els passos 1, 2, 3 i 4 anteriors.

(b) Descriu amb detall els càlculs corresponents als passos 3–6 pels altres dos costats, per acabar la figura del *starfish* de tres puntes. Cal que diguis les coordenades dels punts on punxes el compàs i amb quin radi.

(c) Quins són els vèrtexs del quadrat centrat en l'origen i amb un vèrtex en el punt $(1, 0)$? Dibuixa un *starfish* basat en aquest quadrat. Quina és l'àrea d'aquest *starfish*?

(d) Fem una rotació de 45^o del quadrat anterior. Quins són ara els seus vèrtexs? Dibuixa el quadrat resultant i el *starfixh* corresponent girat.

2. (2.5 *punts*) Descriu què significa la frase: "La successió a_n tendeix al valor ℓ quan n tendeix a infinit". El nombre d'or es pot veure com a límit d'una successió relacionada amb els nombres de Fibonacci. Descriu de quina successió es tracta i demostra que el seu límit és el nombre d'or.

3. (1.5 *punts*) Dibuixa el triangle de Reuleux i descriu com es construeix. Calcula el seu perímetre i la seva àrea. Dóna un parell d'exemples d'aplicacions d'aquesta corba en l'art, la natura o l'enginyeria.

4. (2 *punts*) Les sanefes es classifiquen segons els moviments rígids que les deixen invariants. Hi han 7 tipus de sanefes i les indiquem de la forma següent:

T Quan hi ha translació respecte la direcció de la sanefa (i res més).

R Quan hi ha rotació de 180^o respecte d'un punt (i res més a part de T).

V Quan hi ha simetria respecte un eix vertical (i res més a part de T).

G Quan hi ha *glide reflection* (i res més a part de T).

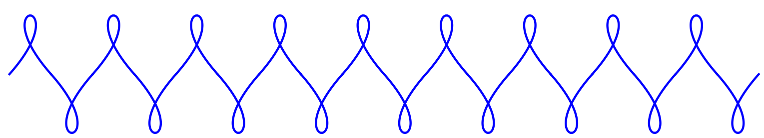
HG Quan hi ha simetria respecte la recta horitzontal central (i res més a part de T i G).

VRG Quan hi ha simetria respecte un eix vertical, rotació de 180^o respecte d'un punt, *glide reflection* i translació, però no hi ha simetria respecte la recta horitzontal central.

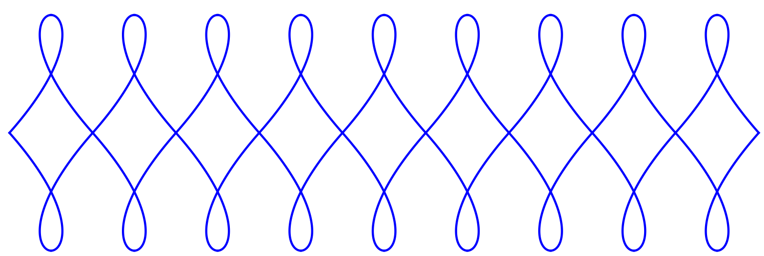
VHRG Quan hi ha simetria respecte un eix vertical, rotació de 180^o respecte d'un punt, *glide reflection*, simetria respecte la recta horitzontal central i translació.

Digues de quin tipus són cadascuna de les quatre sanefes següents i dibuixa sanefes dels tipus que falten, indicant de quin tipus són. Cal que el motiu surti almenys quatre cops en cada sanefa.

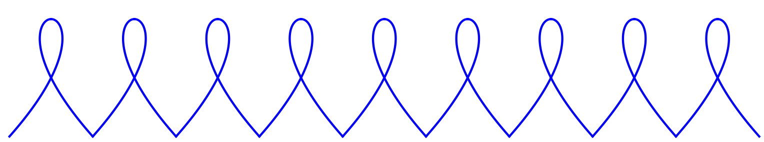
(a)



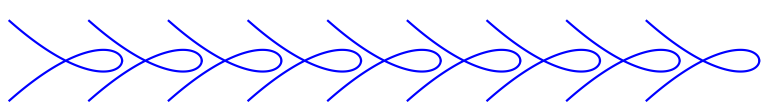
(b)



(c)



(d)



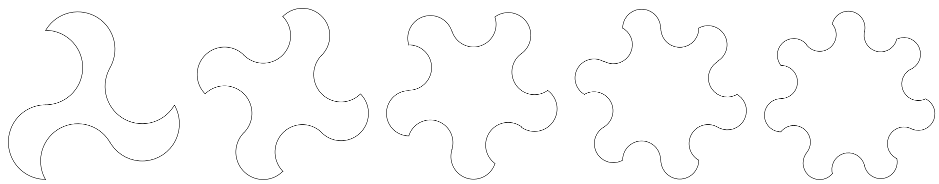
Observacions.-

- Recorda d'escriure el teu nom i cognoms i el teu número de DNI en TOTS els fulls de l'examen.

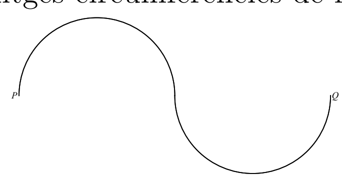
- Disposes d'una hora i mitja per a realitzar aquesta prova.

Resolució de la Prova 1

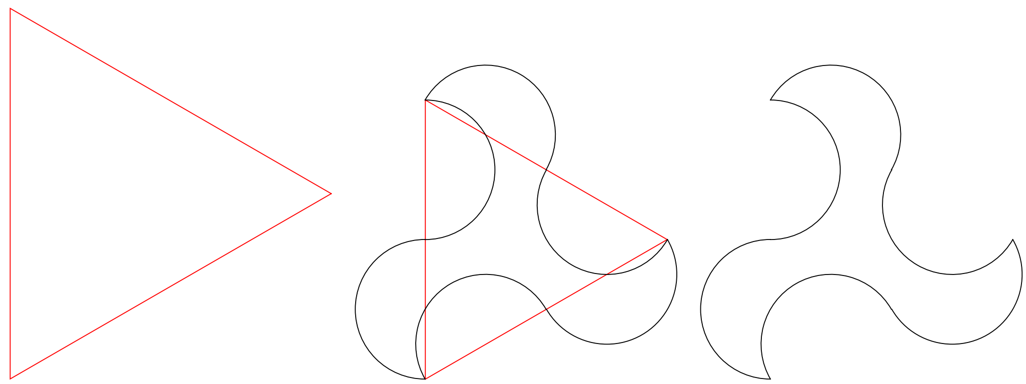
Problema 1. Les figures següents s'anomenen *starfish*:



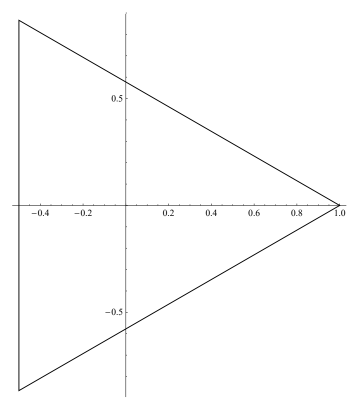
Volem dibuixar figures *starfish* de la manera següent: prenem un polígon regular centrat en l'origen i amb un vèrtex en el punt $(1, 0)$ i substituim cada costat per dues mitges circumferències capicuades, cadascuna de radi una quarta part del segment i amb centre en els punts situats a distància un quart de la mida del segment dels extrems. Per exemple, si tenim el segment donat pels punts P i Q, el substituim per les dues mitges circumferències de la forma següent:



Considerem un triangle centrat en l'origen i amb un vèrtex en el punt $(1, 0)$:
Pas 1**:** els vèrtexs del triangle es troben en els punts $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ i $P_3 = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$.
Pas 2**:** la mida de cada costat és $\sqrt{3}$.
Pas 3**:** considerem el costat P_1P_2, el seu punt mig és el punt $M = (1/4, \sqrt{3}/4)$.
Pas 4**:** els punts que estan a distància $\sqrt{3}/4$ dels extrems són els punts $C_1 = (5/8, \sqrt{3}/8)$ i $C_2 = (-1/8, 3\sqrt{3}/8)$.
Pas 5**:** punxem el compàs en el punt C_1 i fem mitja circumferència de radi $\sqrt{3}/4$ que uneix els punts P_1 i M per dins.
Pas 6**:** punxem el compàs en el punt C_2 i fem mitja circumferència de radi $\sqrt{3}/4$ que uneix els punts M i P_2 per fóra.
I repetim els passos 3–6 pels altres dos costats.



(a) Fes els càlculs que justifiquen els passos 1, 2, 3 i 4 anteriors. Per l'enunciat sabem que tenim un triangle regular (és a dir, equilàter) centrat en l'origen i amb un vèrtex en el punt $(1,0)$. Per tant, els altres dos vèrtexos estan a distància 1 de l'origen. A més, el vèrtex de sobre de l'eix x està a un angle de $360^o/3 = 120^o$, pel que les seves coordenades polars són $r = 1$ i $\theta = 120^o$. Fent el canvi a coordenades cartesianes amb les fòrmules $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ s'obté que $P_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ i, per simetria respecte de l'eix horitzontal, és clar que $P_3 = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$.



Per a fer el pas 2 podem calcular la distància entre els punts P_2 i P_3, per exemple, ja que tots els costats del triangle medeixen el mateix. Veiem que la distància entre aquests dos punts coincideix amb la diferència entre les seves coordenades y ja que comparteixen la mateixa coordenada x. per tant la distància és $\sqrt{3}/2 - \left(-\sqrt{3}/2\right) = \sqrt{3}/2 + \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$.

Considerem ara el segment P_1P_2 i en trobem el punt mig sumant les coordenades de cada vèrtex i dividint per dos. Així tenim que:

$$M = \frac{P_1 + P_2}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}, 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Per a fer el punt 4 prenem el punt mig del segment P_1M, que és el punt que hem anomenat C_1, i el punt mig del segment MP_2, que és el punt que hem anomenat

C_2:

$$C_1 = \frac{P_1 + M}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}, 0 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \left(\frac{5}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8}\right),$$

$$C_2 = \frac{M + P_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right).$$

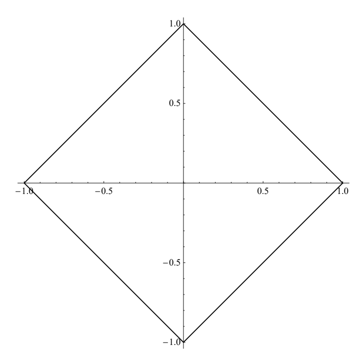
(b) Descriu amb detall els càlculs corresponents als passos 3–6 pels altres dos costats, per acabar la figura del *starfish* de tres puntes. Cal que diguis les coordenades dels punts on punxes el compàs i amb quin radi.

Considerem primer el costat P_2P_3 i anomenem els punts on punxarem el compàs C_3 i C_4. Calculem el punt mig del segment $N = P_2P_3$, que és clar que es troba en el punt de coordenades $(-1/2, 0)$. El punt mig entre aquest i P_2 és $C_3 = (-1/2, \sqrt{3}/4)$ i el punt mig entre la meitat del segment i P_3 és $C_4 = (-1/2, -\sqrt{3}/4)$. Així que per a fer les dues mitges circumferències corresponents a aquest costat, primer punxem el compàs en el punt C_3 i fem mitja circumferència de radi $\sqrt{3}/4$ que uneix els punts P_2 i N per dins i després punxem el compàs en el punt C_4 i fem mitja circumferència de radi $\sqrt{3}/4$ que uneix els punts N i P_3 per fóra.

Prenem ara el segment P_3P_1 i per simetria amb els càlculs que hem fet en elcostat P_1P_2 és clar que les coordenades dels punts on hem de punxar el compàs són $C_5 = (-1/8, -3\sqrt{3}/8)$ i $C_6 = (5/8, \sqrt{3}/8)$. Així que per a fer les dues mitges circumferències corresponents a aquest costat, primer punxem el compàs en el punt C_5 i fem mitja circumferència de radi $\sqrt{3}/4$ que uneix els punts P_3 i el punt mig del segment P_3P_1 per dins i després punxem el compàs en el punt C_6 i fem mitja circumferència de radi $\sqrt{3}/4$ que uneix el punt mig del segment P_3P_1 i el punt P_3 per fóra.

(c) Quins són els vèrtexs del quadrat centrat en l'origen i amb un vèrtex en el punt $(1, 0)$? Dibuixa un *starfish* basat en aquest quadrat. Quina és l'àrea d'aquest *starfish*?

És clar que els vèrtex d'aquest quadrat són el punts $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ i $(0, -1)$:

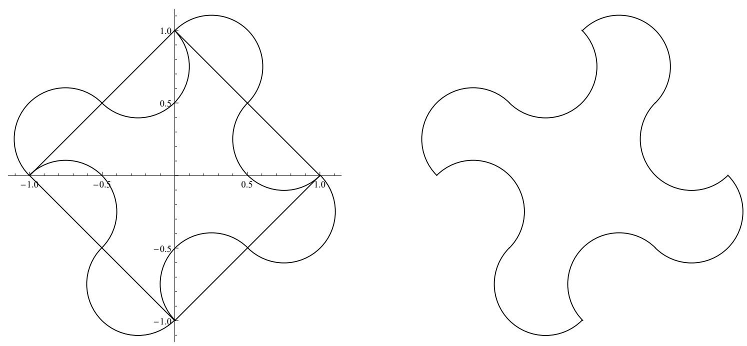


Fent càlculs anàlegs als de l'apartat anterior, veiem que hem de punxar el compàs en els punts de coordenades

$$\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right),\ \left(-\frac{2+\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right),$$

$$\left(-\frac{2+\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right),\ \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

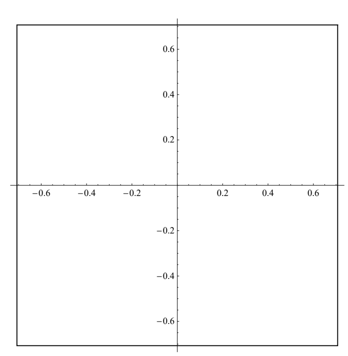
El *starfish* de quatre puntes resultant abans i després d'esborrar el quadrat és:



Observem que l'àrea d'aquest *starfish* coincideix amb l'àrea del quadrat inicial ja que per cada mitja circumferència que queda fóra del quadrat hi ha mitja circumferència que queda dins del quadrat. Anem, doncs, a calcular l'àrea del quadrat. La distància entre els punts $(1,0)$ i $(0,1)$ és $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ i un quadrat de costat de mida $\sqrt{2}$ té àrea 2. Per tant, aquest *starfish* cobreix àrea 2 unitats.

(d) Fem una rotació de 45^o del quadrat anterior. Quins són ara els seus vèrtexs? Dibuixa el quadrat resultant i el *starfixh* corresponent girat.

Fem una rotació de 45^o amb centre l'origen de coordenades i obtenim el següent quadrat:



Per a calcular els seus vèrtexs, considerem la matriu de rotació de 45^o:

$$R_{45^o} = \begin{pmatrix} \cos 45^o & -\sin 45^o \\ \sin 45^o & \cos 45^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Fem servir la fórmula de la rotació de centre el punt O i angle 45^o:

$$P \mapsto O + R_{45^o}[P - O],$$

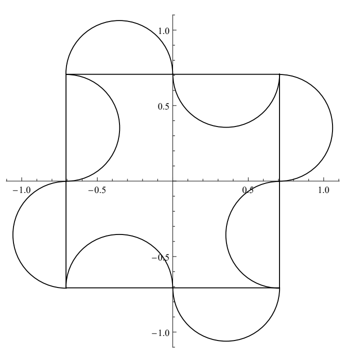
i l'apliquem al punt $(1,0)$, tenint en compte que el centre és $O = (0,0)$, per obtenir el seu punt girat

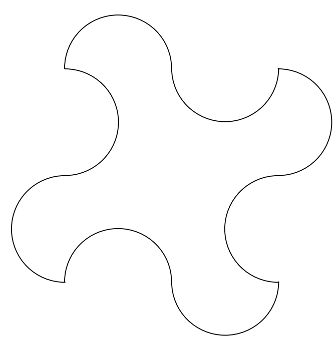
$$R_{45^o}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Per simetria, podem deduir els altres vèrtexos i així tenim que els vèrtexs del quadrat girat són:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Dibuixem el *starfish* corresponent a aquest quadrat i queda, abans i després d'esborrar el quadrat:





Problema 2. Descriu què significa la frase: "La successió a_n tendeix al valor ℓ quan n tendeix a infinit". El nombre d'or es pot veure com a límit d'una successió relacionada amb els nombres de Fibonacci. Descriu de quina successió es tracta i demostra que el seu límit és el nombre d'or.

La frase "La successió a_n tendeix al valor ℓ quan n tendeix a infinit" significa que si tenim una successió a_n i anem considerant valors de n cada cop més grans, ens anem apropant al valor ℓ. De manera precisa vol dir que per qualsevol valor positiu $\varepsilon > 0$, tant petit com es vulgui, existeix un valor N_ε prou gran, que és un nombre natural que depén de ε, de manera que si $n > N_\varepsilon$ aleshores la distp̀ ancia entre els valors a_n i ℓ és més petita que ε, és a dir, que $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Posem un exemple. Per exemple, considerem la successió

$$a_n = 2 + \frac{1}{n}.$$

Els seus primers valors són $a_1 = 3$, $a_2 = 2.5$, $a_3 = 2.\widehat{3}$, $a_4 = 2.25$, $a_5 = 2.2$, ... Si anem augmentant els valors de n veiem que els valors d'aquesta successió s'acosten al valor límit $\ell = 2$. Per a fer un exemple de la definició, considerem, per exemple el valor $\varepsilon = 0.1$ (que és un valor positiu petit) i observem que $N_{0.1} = 10$ ja que si $n > 10$ es compleix que els valors a_n estan a distància inferior a ε del valor límit $\ell = 2$.

Per veure com es relacionen el nombre d'or i la successió de Fibonacci, recordem que la successió de Fibonacci és una successió de nombres naturals que es defineixen de la manera següent. Comencem amb l'1 i l'1 i cada nombre es calcula amb la suma dels dos anteriors. D'aquesta manera els primers nombres de la successió són

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Per definir-los podem escriure que si denotem per c_n el n-èssim nombre de Fibonacci aleshores

$$c_1 = 1, \; c_2 = 1 \text{ i } c_n = c_{n-1} + c_{n-2} \text{ per } n \geq 2.$$

El nombre d'or és denota amb la lletra grega φ i val $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$. Es pot trobar com a límit de la successió formada pels quocients de dos nombres consecutius de Fibonacci. Denotem per r_n el terme n-èssim d'aquesta successió i tenim que $r_n = c_{n+1}/c_n$ per $n \geq 1$, on c_n és el n-èssim nombre de Fibonacci. Diem ℓ al valor del límit d'aquesta successió quan n tendeix a infinit. Com que $c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$, dividim l'expressió anterior per c_n i trobem que

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = 1 + \frac{c_{n-1}}{c_n}.$$

Com que $r_{n-1} = c_n/c_{n-1}$ deduim que

$$r_n = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}.$$

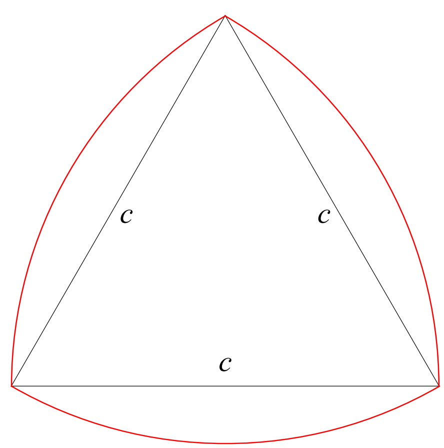
Fem el límit de la identitat anterior quan n tendeix a infinit i tenim que

$$\ell = 1 + \frac{1}{\ell}.$$

D'aquí es dedueix que $\ell^2 = \ell + 1$ i, per tant, $\ell^2 - \ell - 1 = 0$. Resolem aquesta equació de segon grau i tenim que $\ell = (1 \pm \sqrt{5})/2$. La solució que correspon al $-$ és negativa, pel que no té sentit segons els nombres de Fibonacci. Per tant el límit d'aquesta successió és el nombre d'or $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$.

Problema 3. Dibuixa el triangle de Reuleux i descriu com es construeix. Calcula el seu perímetre i la seva àrea. Dóna un parell d'exemples d'aplicacions d'aquesta corba en l'art, la natura o l'enginyeria.

El triangle de Reuleux és una corba d'amplada constant, és a dir, una corba tal que la separació entre dues rectes paral·leles tangents a la corba és independent de la seva orientació. El triangle de Reuleux es construeix a partir d'un triangle equilàter, del qual anomenem c a la mida del seu costat. Prenem un compàs i punxem a cada vèrtex del triangle equilàter i fem un arc de circumferència de radi c que uneixi els dos vèrtexs oposats. La corba descrita per aquests tres arcs de circumferència és un triangle de Reuleux.



Per calcular el seu perímetre usem la fórmula de la longitud d'un arc de circumferència: un arc de circumferència de radi r i angle α, mesurat en radiants, medeix $\alpha\, r$. El triangle de Reuleux està format per tres arcs de circumferència, tots ells de radi c i angle 60^o, que en radiants és $\pi/3$. Per tant, cada arc medeix $c\pi/3$ i la suma dels tres arcs dóna el perímetre $c\pi$. De fet, notem que c és el diàmetre del triangle de Reuleux, pel que el seu perímetre és el producte del diàmetre per π. Es pot demostrar que aquest fet es dóna en totes les corbes d'amplada constant.

Per calcular la seva àrea, anem a calcular l'àrea del triangle equilàter de costat c. Fent servir el Teorema de Pitàgores amb el triangle que resulta de partir el triangle equilàter inicial per la meitat seguint la línea que defineix la seva altura, trobem que l'altura del triangle equilàter és $h = c\sqrt{3}/2$. Per tant, l'àrea del triangle equilàter és

$$\frac{c}{2} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}.$$

Ara usem la fórmula de l'àrea d'un sector circular de radi r i angle α mesurat en radiants: $\alpha r^2/2$. Per tant, el sector circular que definim per construir un dels tres costats del triangle de Reuleux té àrea

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{c^2}{2} = \frac{c^2\,\pi}{6}.$$

Si a aquest valor li restem l'àrea del triangle equilàter, trobem l'àrea d'una de les figures en forma de lluna que envolten el triangle equilàter fins a la corba que defineix el triangle de Reuleux:

$$\text{àrea lluna} = \frac{c^2\,\pi}{6} - \frac{c^2\sqrt{3}}{4}.$$

L'àrea que envolta el triangle de Reuleux és la suma de les tres llunes i el triangle equilàter interior i dóna

$$3\left(\frac{c^2\,\pi}{6} - \frac{c^2\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{c^2\sqrt{3}}{4}.$$

Simplificant aquesta expressió queda:

$$\frac{c^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right).$$

Es pot demostrar que entre totes les corbes d'amplada constant i mateix diàmetre, el triangle de Reuleux és el que té àrea mínima.

El triangle de Reuleux no es troba fàcilment en la natura, ja que és una construcció humana. Es fa servir en el disseny com a secció d'un llapis, com a joguina rodari, com a moneda o com a broca d'un trepant que permet fer forats quasi quadrats, per exemple. Es poden veure imatges en els següents enllaços:
`https://mathtourist.blogspot.com/2016/09/`
`reuleaux-triangle-on-street.html`
`https://en.etudes.ru/etudes/drilling-square-holes/`
`https://parth3141.wordpress.com/2017/12/29/reuleaux-triangles/`
`https://math.stackexchange.com/questions/2825922/`
`why-are-some-coins-reuleaux-triangles`

Problema 4. Les sanefes es classifiquen segons els moviments rígids que les deixen invariants. Hi han 7 tipus de sanefes i les indiquem de la forma següent:

T Quan hi ha translació respecte la direcció de la sanefa (i res més).

R Quan hi ha rotació de 180^o respecte d'un punt (i res més a part de T).

V Quan hi ha simetria respecte un eix vertical (i res més a part de T).

G Quan hi ha *glide reflection* (i res més a part de T).

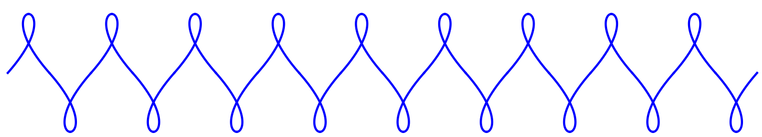
HG Quan hi ha simetria respecte la recta horitzontal central (i res més a part de T i G).

VRG Quan hi ha simetria respecte un eix vertical, rotació de 180^o respecte d'un punt, *glide reflection* i translació, però no hi ha simetria respecte la recta horitzontal central.

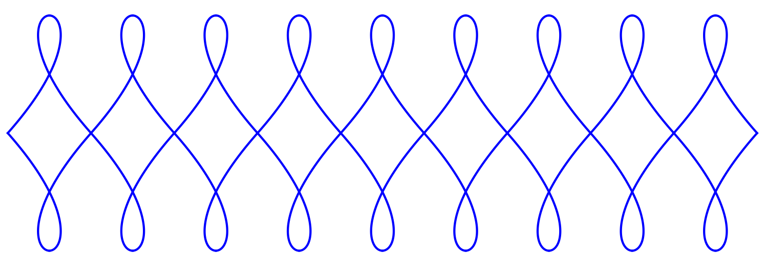
VHRG Quan hi ha simetria respecte un eix vertical, rotació de 180^o respecte d'un punt, *glide reflection*, simetria respecte la recta horitzontal central i translació.

Digues de quin tipus són cadascuna de les quatre sanefes següents i dibuixa sanefes dels tipus que falten, indicant de quin tipus són. Cal que el motiu surti almenys quatre cops en cada sanefa.

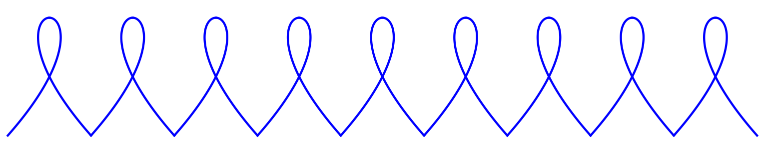
(a)



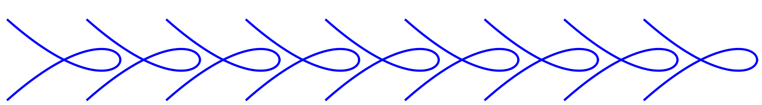
(b)



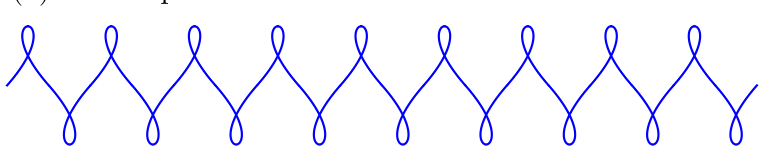
(c)



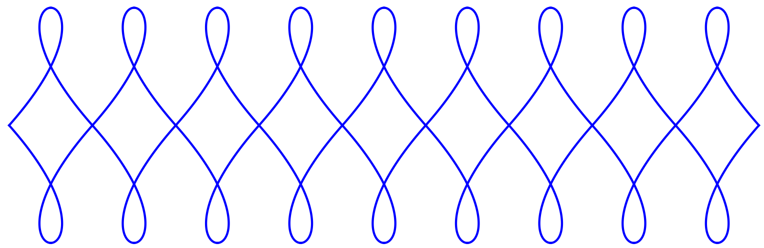
(d)



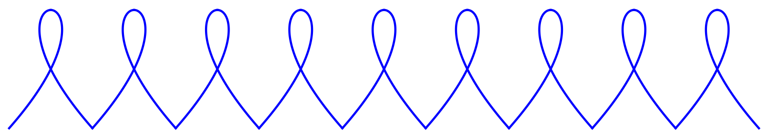
La sanefa (a) és de tipus VRG:



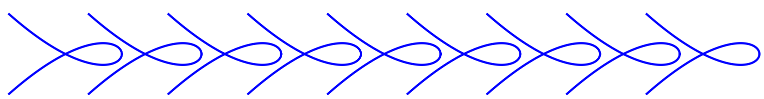
La sanefa (b) és de tipus VHRG:



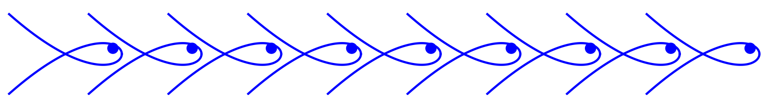
La sanefa (c) és de tipus V:



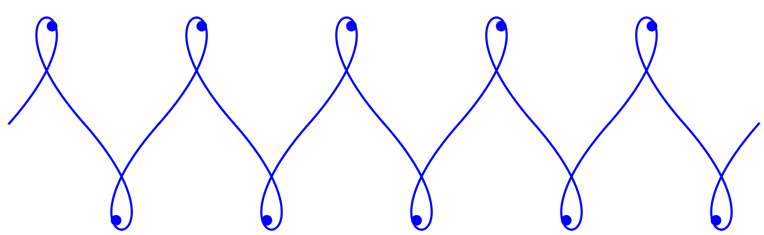
La sanefa (d) és de tipus HG:



Hem de dibuixar sanefes dels tipus T, R i G. Un exemple de sanefa de tipus T és:



Un exemple de sanefa de tipus R és:



Un exemple de sanefa de tipus G és: