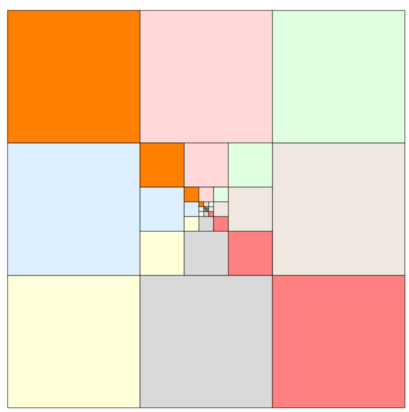
Matemàtiques aplicades a l'art i el disseny digital

Grau en disseny digital i tecnologies creatives

PROVA 2. 11 de Gener de 2023

1. (2 *punts*) Considerem la progressió geomètrica de primer terme 1/9 i raó 1/9.
   (a) Dóna els cinc primers termes d'aquesta progressió i el valor de la suma d'aquests termes.
   (b) Dóna el valor de la suma de tots els seus termes. Pots arribar a la mateixa conclusió geomètricament mitjançant la figura següent. Raona com.

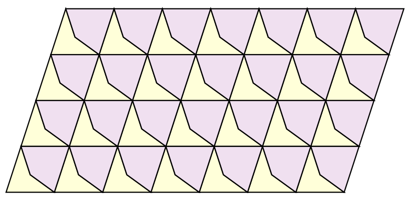


2. (2 *punts*) Descriu el procés d'estel·lació (*stellation*) d'un poliedre. En particular, digues quantes cares té l'estel·lació de cadascun dels sòlids platònics. Raona la teva resposta.
   Quin d'aquests poliedres estrellats és l'estrella que culmina la torre de la Mare de Déu de la Sagrada Família?

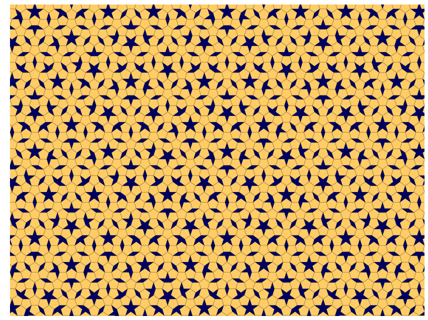
3. (3 *punts*) Digues quines de les tessel·lacions representades en les figures de sota són tessel·lacions de Penrose, quines són tessel·lacions regulars, quines són tessel·lacions semi-regulars o quines no s'adiuen a cap

d'aquestes descripcions. Raona les teves respostes fent servir les definicions de cada tipus de tessel·lació.

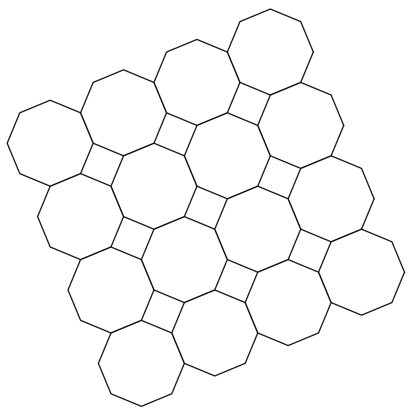
(a)



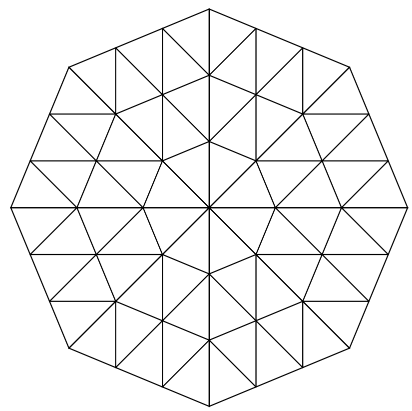
(b)



(c)

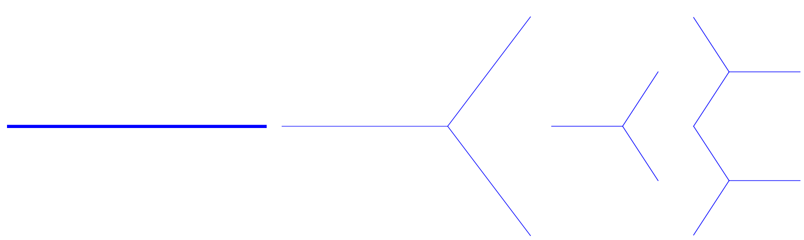


(d)



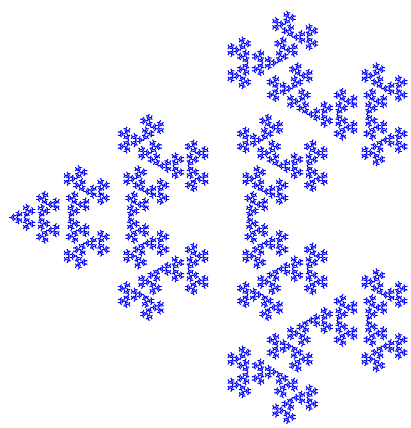
4. (3 *punts*) Considerem el fractal definit de la forma següent.

   - comencem amb un segment horitzontal
   - i dividim la meitat de la dreta del segment en dos separats un angle de $2\pi/3\,rad$.
   - Repetim el procés en cada segment dels tres obtinguts.



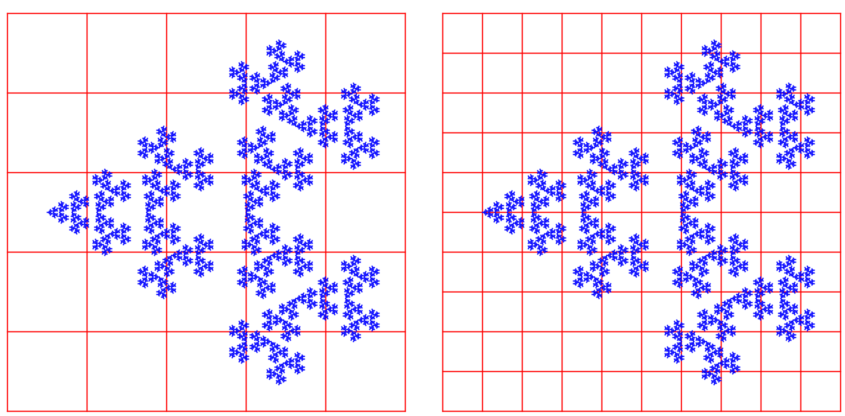
   (a) Dibuixa el tercer pas de la construcció d'aquest fractal.

(b) Al cap d'infinites iteracions, obtenim un fractal de la forma següent.



(b.1) Determina la seva dimensió de semblança. Dóna la definició de dimensió de semblança per a un fractal.

(b.2) Calcula aproximacions a la seva dimensió fractal mitjançant el mètode de recompte de caixes. Pots fer servir les dues figures següents.



Observacions.-

- Recorda d'escriure el teu nom i cognoms i el teu número de DNI en TOTS els fulls de l'examen.
- Disposes d'una hora i mitja per a realitzar aquesta prova.

Resolució de la Prova 2

Problema 1. Considerem la progressió geomètrica de primer terme 1/9 i raó 1/9.
(a) Dóna els cinc primers termes d'aquesta progressió i el valor de la suma d'aquests termes.

Els cinc primers termes d'aquesta successió són:

$$\frac{1}{9}, \frac{1}{81}, \frac{1}{729}, \frac{1}{6561}, \frac{1}{59049}.$$

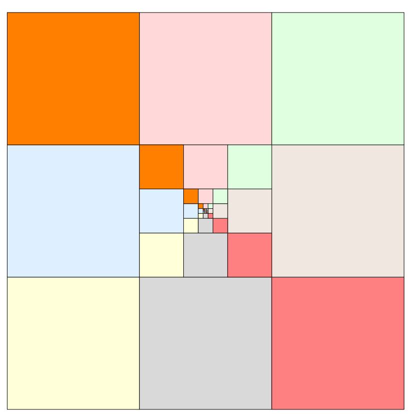
I per calcular la seva suma podem fer servir la fórmula de la suma d'un nombre finit de termes d'una progressió geomètrica de raó r:

$$\frac{(\text{darrer terme})\, r \, - \, (\text{primer terme})}{r-1}.$$

En el nostre cas dóna

$$\frac{1/531441 - 1/9}{1/9 - 1} = \frac{7381}{59049} = 0.124997883\ldots$$

(b) Dóna el valor de la suma de tots els seus termes. Pots arribar a la mateixa conclusió geomètricament mitjançant la figura següent. Raona com.



Anem a fer la suma dels infinits termes d'aquesta progressió geomètrica pel que usem la fórmula de la suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica de raó r, si $|r| < 1$:

$$\frac{\text{(primer terme)}}{1-r} = \frac{1/9}{1-1/9} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

Podem arribar a la mateixa conclusió considerant la figura anterior raonant de la manera següent. Considerem tots els quadrats d'un mateix color, per exemple rosa. Veiem que lárea de tots aquests quadrats rosa cobreix un vuité del quadrat més gran ja que hi han vuit colors diferents i cada conjunt de quadrats d'un mateix color cobreix la mateixa àrea. Cada color es correspon a un dels quadrats de la vora. Observem que si prenem tots els quadrats rosa tenim que el quadrat més gros d'aquest conjunt cobreix 1/9 de l'àrea del quadrat més gran. El següent quadrat cobreix 1/9 d'un quadrat que és 1/9 del més gran, és a dir, que cobreix àrea 1/81 del quadrat més gran. El tercer quadrat rosa cobrei 1/9 d'un quadrat que és 1/81 del quadrat m
'es gran. I així succesivament. De manera que la suma de l'àrea de tots els quadrats de color rosa correspon a la suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica de primer terme 1/9 i raó 1/9.

Problema 2. Descriu el procés d'estel·lació (*stellation*) d'un poliedre. En particular, digues quantes cares té l'estel·lació de cadascun dels sòlids platònics. Raona la teva resposta.
Quin d'aquests poliedres estrellats és l'estrella que culmina la torre de la Mare de Déu de la Sagrada Família?

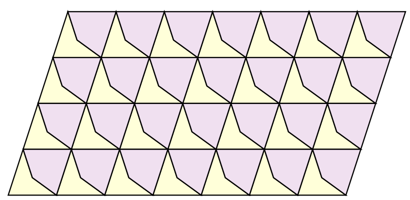
El procés d'estel·lació (*stellation*) d'un poliedre consisteix en prendre un poliedre, en general, convex, i transformar-lo en un poliedre estel·lat. Una manera de fer-ho és afegint una piràmide a cada cara. D'aquesta manera trobem un poliedre estrellat que no és convex. Els poliedres estrellats més coneguts són els que provenen dels cinc sòlids platònics. A partir del tetraedre, que és el sòlid platònic amb quatre cares triangulars, construim el tetraedre estrellat que té $4 \times 3 = 12$ cares triangulars i quatre punxes. A partir del cub, que és el sòlid platònic amb sis cares quadrades, construim el cub estrellat que té $6 \times 4 = 24$ cares triangulars i sis punxes. A partir de l'octaedre, que és el sòlid platònic amb vuit cares triangulars, construim l'octaedre estrellat que té $8 \times 3 = 24$ cares triangulars i vuit punxes. A partir del dodecaedre, que és el sòlid platònic amb dotze cares pentagonals, construim el dodecaedre estrellat que té $12 \times 5 = 60$ cares triangulars i dotze punxes. A partir de l'icosaedre, que és el sòlid platònic amb vint cares triangulars, construim l'icosaedre estrellat que té $20 \times 3 = 60$ cares triangulars i vint punxes.

L'estrella que culmina la torre de la Mare de Déu de la Sagrada Família és el *petit dodecaedre estrellat* i és el que es forma a partir del dodecaedre tal com hem descrit.

Problema 3. Digues quines de les tessel·lacions representades en les figures de sota són tessel·lacions de Penrose, quines són tessel·lacions regulars, quines són tessel·lacions semi-regulars o quines no s'adiuen a cap d'aquestes descripcions. Raona les teves respostes fent servir les definicions de cada tipus de tessel·lació.

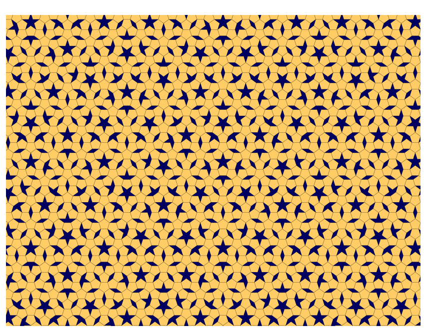
Recordem que una tessel·lació del pla és un recobriment del pla amb figures planes que no es superposen i no deixen cap forat. A més, en el cas de figures poligonals, només considerem tessel·lacions aresta a aresta, és a dir, les arestes de les figures es toquen en tota la seva longitud. Les quatre figures representades compleixen aquestes condicions. Una tessel·lació regular és una tessel·lacio formada per una única peça i aquesta ha de ser un polígon regular. A partir de la mesura dels angles interns dels polígons regulars es pot deduir que només hi han tres tessel·lacions regular: amb triangles equilàters, amb quadrats i amb hexàgons regulras. Cap d'aquests tipus apareixen representats en les figures de sota. les tessel·lacions semi-regulars es formen també a partir de polígons regulars, però es pot usar més d'un sol tipus de polígon. A més, per a tenir una tessel·lació semi-regular cal que tots els vèrtex siguin homogenis, és a dir, que el nombre i configuració de les peces en qualsevol vèrtex sigui la mateixa. Tenint en compte aquestes premisses i l'nagle intern dels polígons regulars, es pot demostrar que nom és hi han 8 tessel·lacions semi-regulars. La figura (c) és una tessel·lació semi-regular formada per octàgons i quadrats. Les tessel·lacions de Penrose estan formades per un conjunt finit de peces poligonals que formen una tessel·lació que no és invariant per translació, és a dir, que si traslladem seguint un vector no nul qualsevol, la tessel·lació no es manté invariant. A més, cal que les peces siguin de tal manera que, encara que les reordenem, no sigui possible construir una tessel·lació que sigui invariant per translació. En les figures de l'enunciat, només la figura (b) és una tessel·lació de Penrose. La figura (a) és una tessel·lació formada per dards (*darts*) i cometes (*kites*). Aquestes peces les va descriure Roger Penrose i si les unim seguint les regles que ell va enunciar, es construeix una tessel·lació de Penrose, però tal com estan col·locades no ho són perquè és una tessel·lació invariant per translacions. I la figura (d) és una tessel·lació de tipus *pinwheel*. Aquestes tessel·lacions es construeixen a partir d'un punt central i col·locant figures al seu voltant de manera radial. Les tessel·lacions tipus *pinwheel* no són invariants per translacó respecte de qualsevol vector no nul ja que en moure el punt central canvia la tessel·lació. Però no són tessel·lacions de Penrose perquè si reordenem les peces podem obtenir una tessel·lació que sigui invariant per translació.

La figura (a)



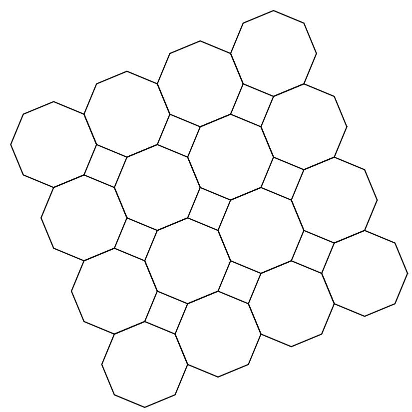
no és una tessel·lació regular ni semi-regular perquè no està formada per polígons regulars. Tampoc és una tessel·lació de Penrose perquè és invariant per translació.

La figura (b)



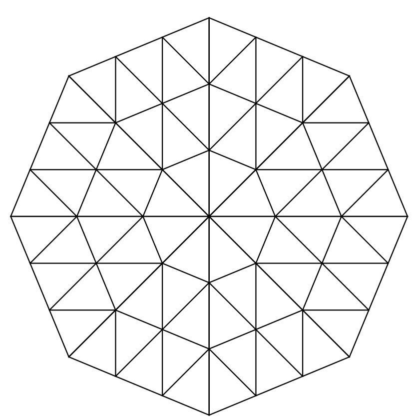
no és una tessel·lació regular ni semi-regular perquè no està formada per polígons regulars. És una tessel·lació de Penrose perqué no hi ha cap translació no nul·la que la deixi invariant i les peces no es poden reordenar a fi d'obtenir-ne una.

La figura (c)



no és una tessel·lació regular perquè està formada per més d'un polígon regular. Està formada per octàgons regulars i quadrats disposats de manera que els vèrtexos són homogenis i, per tant, és una tessel·lació semi-regular. No és una tessel·lació de Penrose perquè és invariant per translació.

La figura (d)

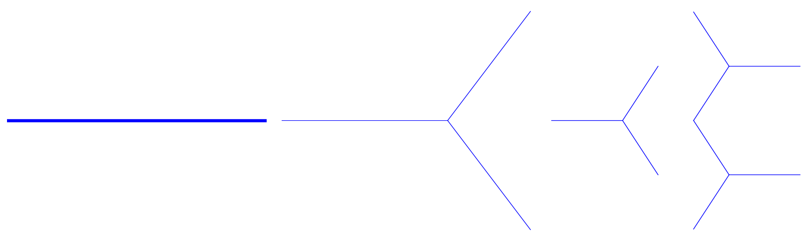


no és una tessel·lació regular ni semi-regular perquè no està formada per polígons regulars. Els triangles que la formen són isòsceles. és una tessel·lació de tipus *pinwheel* i no hi ha cap translació no nul·la que la deixi invariant.

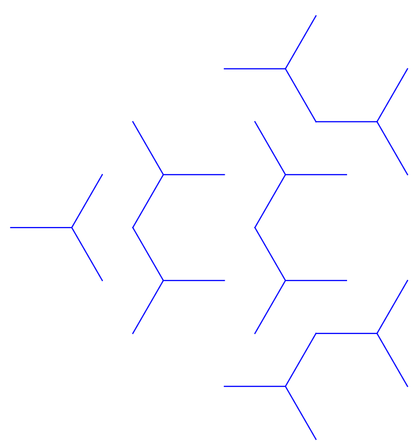
Però les peces es poden reordenar a fi d'obtenir una tessel·lació que sigui invariant per translació. Per tant, no és una tessel·lació de Penrose.

Problema 4. Considerem el fractal definit de la forma següent.

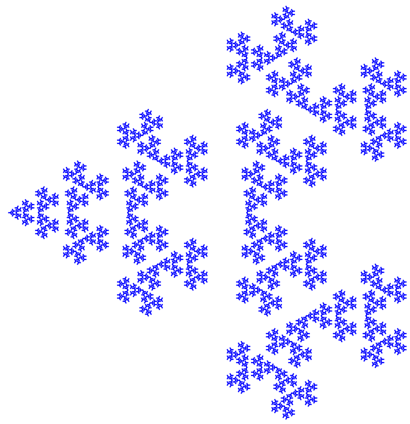
- comencem amb un segment horitzontal
- i dividim la meitat de la dreta del segment en dos separats un angle de $2\pi/3\,rad$.
- Repetim el procés en cada segment dels tres obtinguts.



(a) Dibuixa el tercer pas de la construcció d'aquest fractal.
Apliquem el procés descrit a cadascun dels nou intervals que apareixen en la figura anterior i obtenim la següent figura:



(b) Al cap d'infinites iteracions, obtenim un fractal de la forma següent.

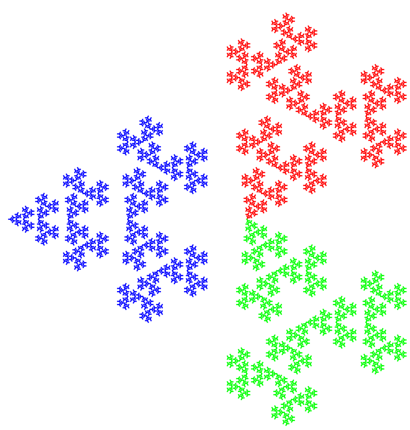


(b.1)] Determina la seva dimensió de semblança. Dóna la definició de dimensió de semblança per a un fractal.

La dimensió de semblança es defineix per a fractals perfectament autosemblants de la manera següent: dividim un costat del fractal en k trossos i obtenim p peces semblants. Aleshores la dimensió de semblança es calcula amb el quocient:

$$\text{dimensió de semblança} = \frac{\ln p}{\ln k}.$$

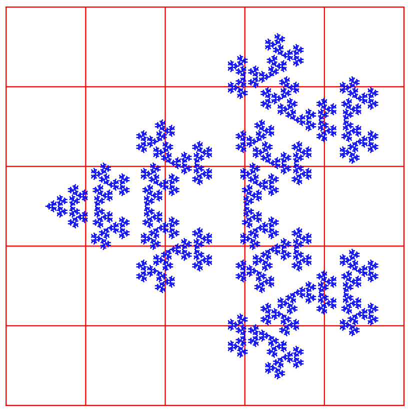
En el nostre cas, podem dividir cada costat del fractal en 2 trossos i obtenim 3 fractals semblants al gran.

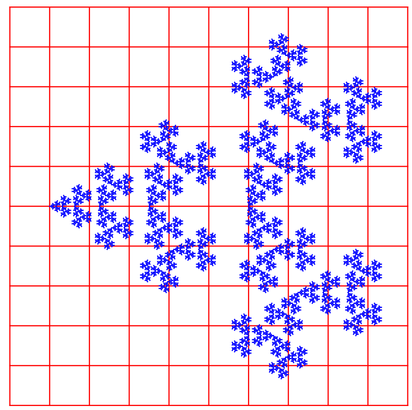


Per tant, la seva dimensió de semblança és:

$$\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.58496.$$

(b.2)] Calcula aproximacions a la seva dimensió fractal mitjançant el mètode de recompte de caixes. Pots fer servir les dues figures següents.





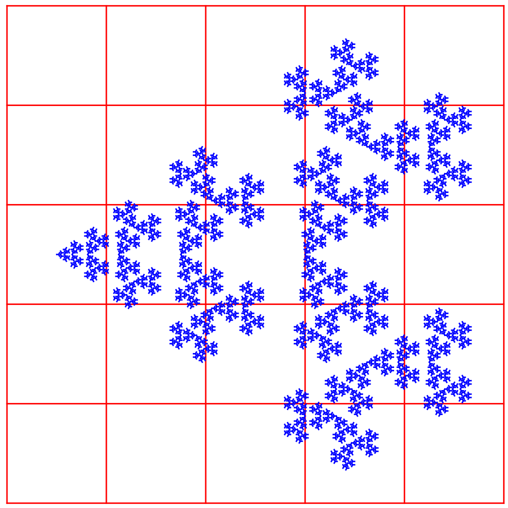
El métode de recompte de caixes ens permet calcular aproximacions a la dimensió fractal de la manera següent. Considerem una quadrícula amb n quadradets per costat que cobreixi el fractal i calculem el nombre $N(n)$ de quadradets ocupats pel fractal. Calculem el quocient

$$\frac{\ln N(n)}{\ln n}.$$

En augmentar la n aquest valor s'aproxima al valor de la dimensió fractal, de manera que

$$\text{dimensió fractal} = \text{límit} \, \frac{\ln N(n)}{\ln n} \quad \text{quan } n \text{ tendeix a } +\infty.$$

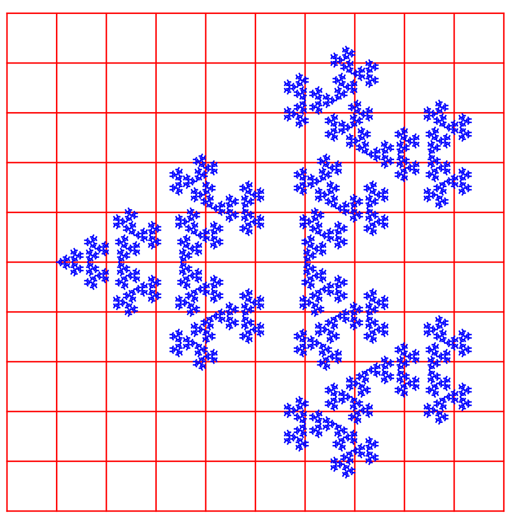
En el primer gràfic



tenim una quadrícula de $n = 5$ quadrats de costat. Aquí és més fàcil comptar quants quadrats **no** estan ocupats pel fractal i veiem que n'hi han 7. Com que la quadrícula té $5^2 = 25$ quadradets, tenim que n'hi han $25 - 7 = 18$ quadradets ocupats i, per tant, $N(5) = 18$. Així l'aproximació a la dimensió fractal ve donada per

$$\frac{\ln N(5)}{\ln 5} = \frac{\ln 18}{\ln 5} = 1,79589\ldots$$

Si prenem ara el segon gràfic:



veiem que tenim una quadrícula de $n = 10$ quadrats per costat. El nombre de quadrats ocupats és $N(10) = 54$. Així l'aproximació a la dimensió fractal ve donada per

$$\frac{\ln N(10)}{\ln 10} = \frac{\ln 54}{\ln 10} = 1.73239\ldots$$

Aquestes aproximacions estan molt allunyades de la dimensió fractal perquè les quadrícules que hem pres tenen pocs quadrats de costat.