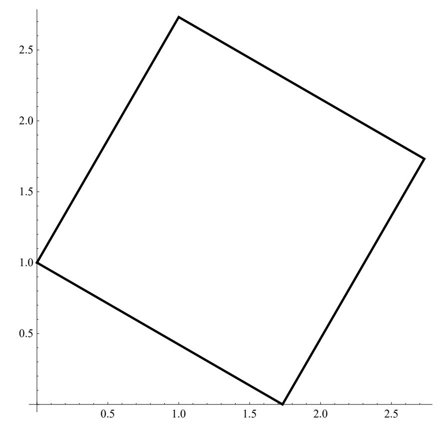
Matemàtiques aplicades a l'art i el disseny digital
Grau en disseny digital i tecnologies creatives

PROVA DE RECUPERACIÓ. 2 de Febrer de 2022

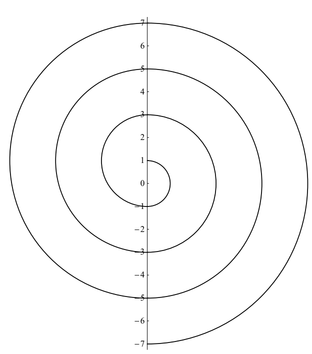
1. (2 *punts*)

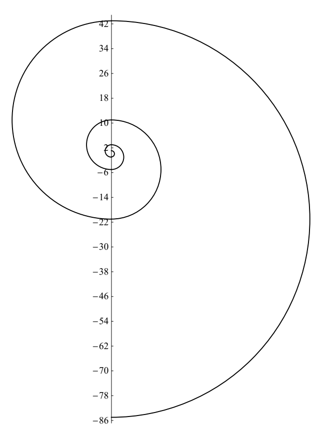
   (a) La figura següent mostra un quadrat amb dos vèrtexs en els punts de coordenades $(0, 1)$ i $(\sqrt{3}, 0)$. Calcula les coordenades dels altres dos vèrtexs.



   (b) Realitzem una rotació de centre el punt $(0, 1)$ de manera que els costats queden paral·lels als eixos de coordenades. De quin angle és aquesta rotació? Justifica la teva resposta. Escriu la matriu associada a la rotació d'aquest angle.

2. (3 *punts*) Considerem les espirals següents, definides ambdues per arcs de mitges circumferències.





(a) Les taules següents mostren les coordenades dels centres, els radis i els arcs necessaris per a dibuixar cadascuna de les espirals anteriors. Digues quina espiral es correspon a cada taula i justifica la teva resposta. Dóna també el centre, el radi i l'arc de la mitja circumferència següent que permet continuar cadascuna de les espirals per fóra.

(b) Calcula la longitud de cadascuna de les espirals dibuixades.

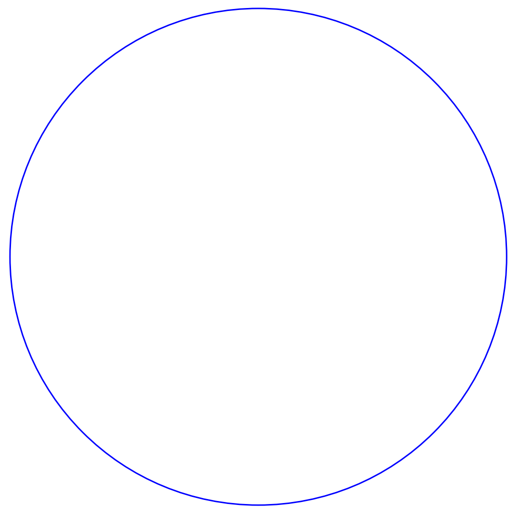
(c) Podem continuar per fóra cadascuna de les espirals anteriors? Amb quantes voltes? I podem continuar per dins cadascuna de les espirals anteriors? Amb quantes voltes?

(d) Defineix què és una espiral arquimediana i què és una espiral logarítmica. Cal que descriguis quines són les seves característiques principals: forma, descripció mitjançant coordenades polars, continuació per dins i per fóra i també cal que donis exemples d'aquests tipus d'espirals en la natura, l'art o l'enginyeria.

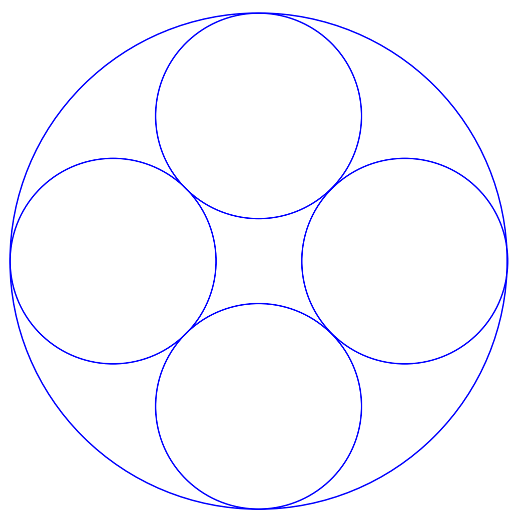
Taula 1			Taula 2		
centre	radi	arc	centre	radi	arc
(0,0)	1	des de -90^o a 90^o,	(0,0)	1	des de -90^o a 90^o,
(0,1)	2	des de 90^o a 270^o,	(0,1)	2	des de 90^o a 270^o,
(0,0)	3	des de -90^o a 90^o,	(0,-1)	4	des de -90^o a 90^o,
(0,1)	4	des de 90^o a 270^o,	(0,3)	8	des de 90^o a 270^o,
(0,0)	5	des de -90^o a 90^o,	(0,-5)	16	des de -90^o a 90^o,
(0,1)	6	des de 90^o a 270^o,	(0,11)	32	des de 90^o a 270^o,
(0,0)	7	des de -90^o a 90^o.	(0,-21)	64	des de -90^o a 90^o.

3. (3 *punts*) Considerem el fractal definit de la forma següent.

- comencem amb una circumferència de radi 1.

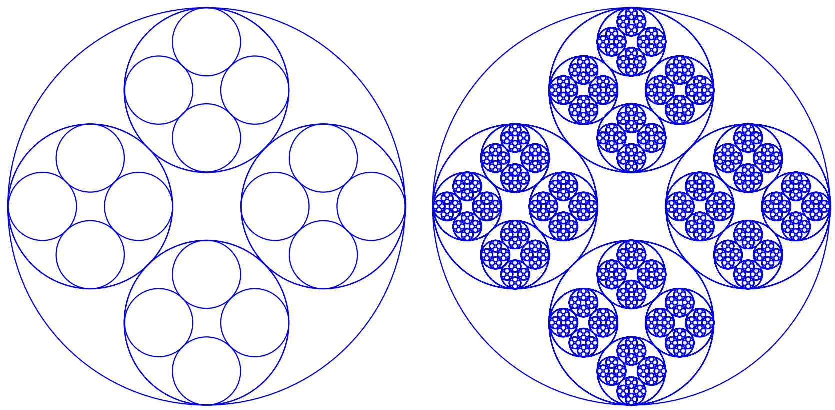


- i afegim quatre circumferències en el seu interior que siguin tangents entre elles i tangents a l'anterior.



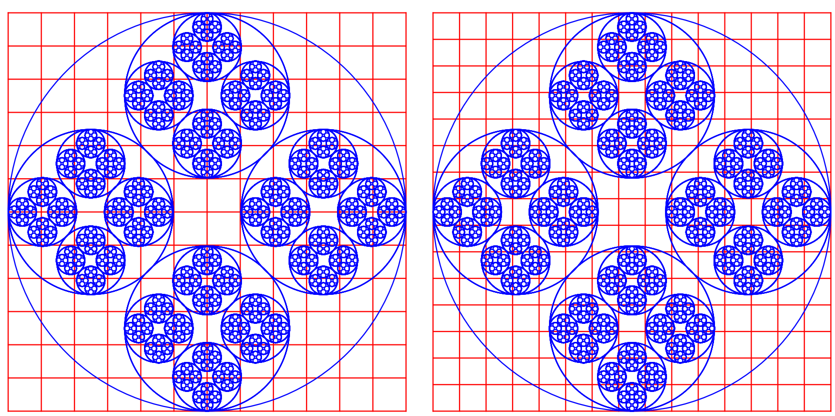
- Repetim el procés en cadascuna de les circumferències de l'interior.

El gràfic de la segona iteració d'aquest procés i el gràfic del fractal resultant del límit del procés iteratiu són els següents:



(a) Representa la tercera iteració d'aquest procés.

(b) Calcula aproximacions a la dimensió fractal de l'objecte obtingut mitjançant el mètode de recompte de caixes. Pots fer servir els gràfics següents:



(c) Dóna la definició de dimensió de semblança per a un fractal.

4. (2 *punts*) Les sanefes es classifiquen segons els moviments rígids que les deixen invariants. Hi han 7 tipus de sanefes i les indiquem de la forma següent:

T Quan hi ha translació respecte la direcció de la sanefa (i res més).

R Quan hi ha rotació de 180^o respecte d'un punt (i res més a part de T).

V Quan hi ha simetria respecte un eix vertical (i res més a part de T).

G Quan hi ha *glide reflection* (i res més a part de T).

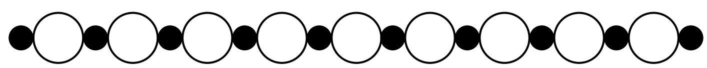
HG Quan hi ha simetria respecte la recta horitzontal central (i res més a part de T i G).

VRG Quan hi ha simetria respecte un eix vertical, rotació de 180^o respecte d'un punt, *glide reflection* i translació, però no hi ha simetria respecte la recta horitzontal central.

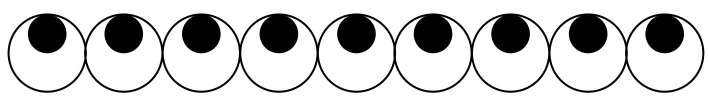
VHRG Quan hi ha simetria respecte un eix vertical, rotació de 180^o respecte d'un punt, *glide reflection*, simetria respecte la recta horitzontal central i translació.

Digues de quin tipus són cadascuna de les quatre sanefes següents i dibuixa sanefes dels tipus que falten, indicant de quin tipus són. Cal que el motiu surti almenys quatre cops en cada sanefa.

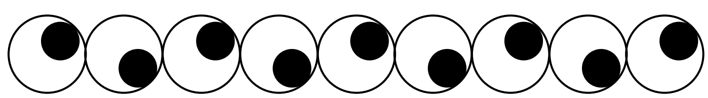
(a)



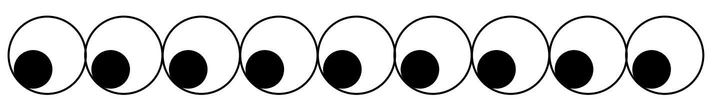
(b)



(c)



(d)

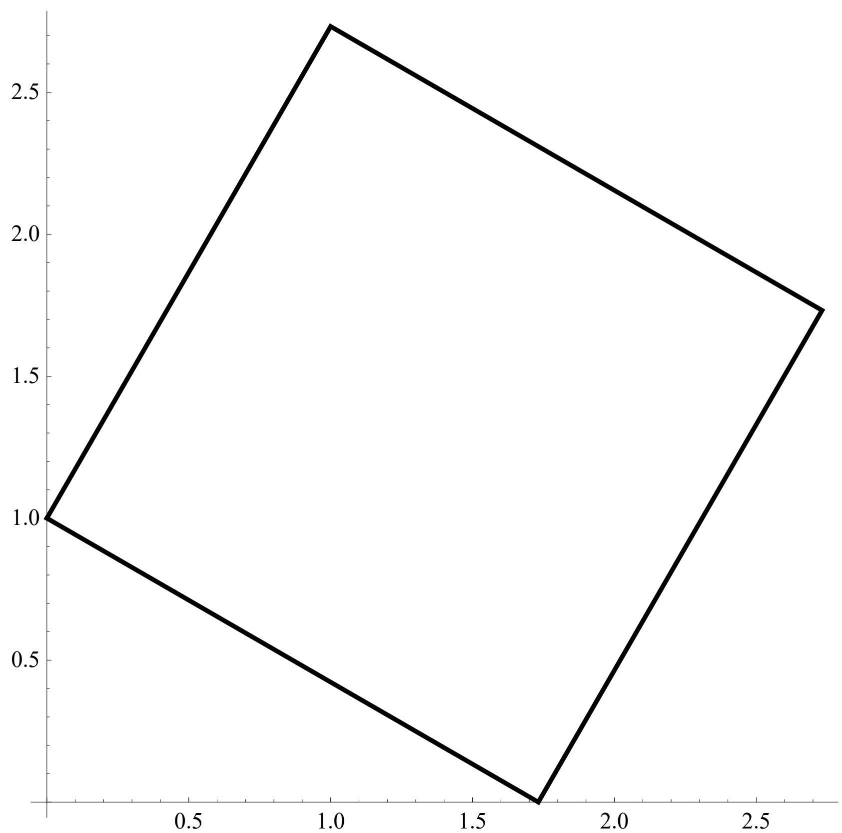


Observacions.-

- Recorda d'escriure el teu nom i cognoms i el teu número de DNI en TOTS els fulls de l'examen.
- Disposes de dues hores per a realitzar aquesta prova.

Resolució de la Prova de recuperació.

Problema 1. (a) La figura següent mostra un quadrat amb dos vèrtexs en els punts de coordenades $(0,1)$ i $(\sqrt{3},0)$. Calcula les coordenades dels altres dos vèrtexs.



Anomenem als vèrtexs A, B, C i D en sentit antihorari i començant pel vèrtex $A = (0,1)$. Així $B = (\sqrt{3},0)$, C és el vèrtex que té l'abcissa més gran (el que està més a la dreta) i D és el vèrtex que que té l'ordenada més gran (el que està més amunt). Per calcular el vèrtex D ens adonem que aquest punt és la rotació del punt B un angle de 90^o respecte del punt $(0,1)$. La matriu de la rotació de 90^o és:

$$R_{90^o} = \begin{pmatrix} \cos 90^o & -\sin 90^o \\ \sin 90^o & \cos 90^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La fórmula de la rotació d'un punt P un angle α respecte d'un centre O és

$$P \mapsto O + R_\alpha [P - O] .$$

En el nostre cas, calculem prenent com a centre el punt $(0,1)$ i girem el punt $(\sqrt{3}, 0)$ i tenim:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] =$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} .$$

Així el punt $D = (1, 1+\sqrt{3})$.

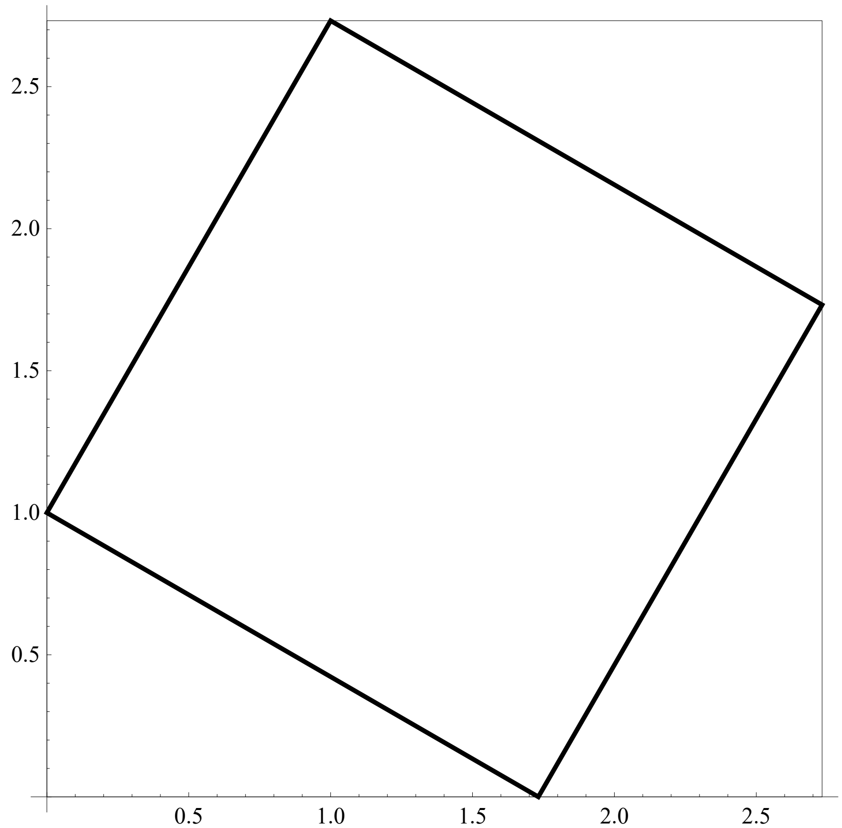
Per a calcular les coordenades del punt C, prenem els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ i observem que $C = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Calculem les coordenades dels vectors:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (\sqrt{3}, 0) - (0,1) = (\sqrt{3}, -1), \\ \overrightarrow{AD} &= (1, 1+\sqrt{3}) - (0,1) = (1, \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Així el punt C és:

$$C = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (0,1) + (\sqrt{3}, -1) + (1, \sqrt{3}) = (1+\sqrt{3}, \sqrt{3}).$$

Una altra manera de resoldre'l és adonar-se que els punts $A = (0,1)$, $B = (\sqrt{3}, 0)$ i l'origen de coordenades $(0,0)$ formen un triangle rectangle, tal que el catet més llarg medeix $\sqrt{3}$ i el catet més curt medeix 1. Aquest triangle es pot moure a la resta dels costats del quadrat:



de manera que s'observa que els vèrtexs del quadrat es troben en: $C = (1+\sqrt{3}, \sqrt{3})$ i $D = (1, 1+\sqrt{3})$.

(b) Realitzem una rotació de centre el punt $(0,1)$ de manera que els costats queden paral·lels als eixos de coordenades. De quin angle és aquesta rotació? Justifica la teva resposta. Escriu la matriu associada a la rotació d'aquest angle.

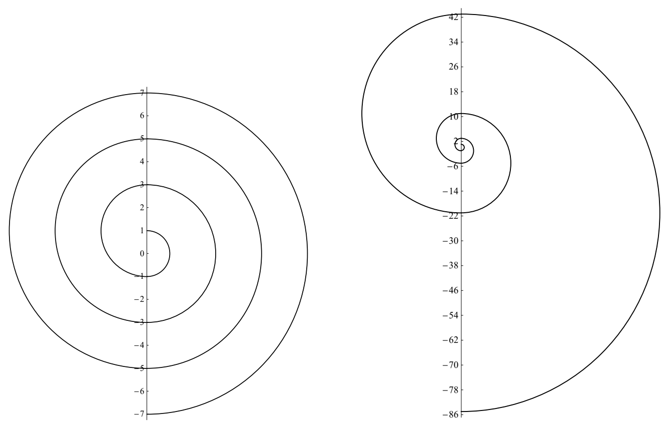
A partir de la figura observem que l'angle α a girar es correspon a l'angle d'un triangle rectagle de catet oposat 1 i catet contigu $\sqrt{3}$. Per tant, $\tan\alpha = 1/\sqrt{3}$ i, posant a la calculadora,

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^o.$$

La matriu de rotació d'aquest angle és:

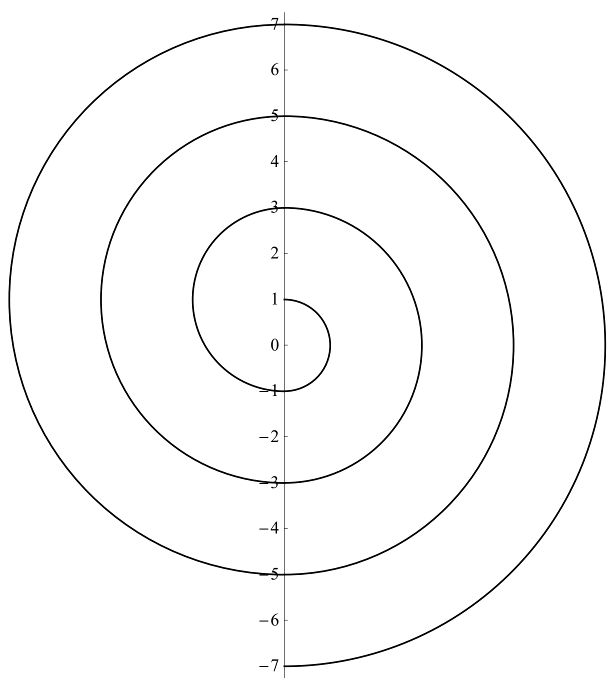
$$R_{30^o} = \begin{pmatrix} \cos 30^o & -\sin 30^o \\ \sin 30^o & \cos 30^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Problema 2. Considerem les espirals següents, definides ambdues per arcs de mitges circumferències.



(a) Les taules següents mostren les coordenades dels centres, els radis i els arcs necessaris per a dibuixar cadascuna de les espirals anteriors. Digues quina espiral es correspon a cada taula i justifica la teva resposta. Dóna també el centre, el radi i l'arc de la mitja circumferència següent que permet continuar cadascuna de les espirals per fóra.

L'espiral de l'esquerra

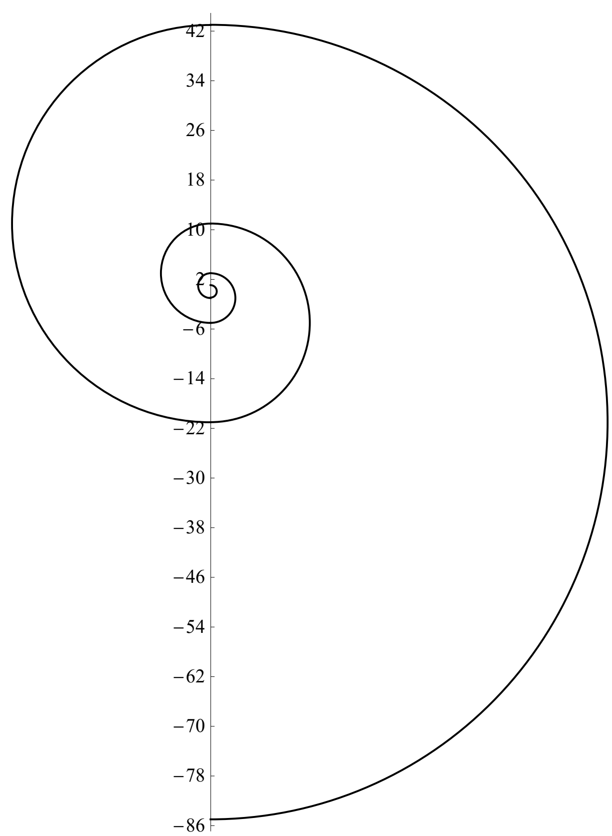


talla cadascun dels semieixos verticals seguint una progressió aritmètica, pel que la taula que li correspon és la Taula 1.

Taula 1		
centre	radi	arc
(0,0)	1	des de -90^o a 90^o,
(0,1)	2	des de 90^o a 270^o,
(0,0)	3	des de -90^o a 90^o,
(0,1)	4	des de 90^o a 270^o,
(0,0)	5	des de -90^o a 90^o,
(0,1)	6	des de 90^o a 270^o,
(0,0)	7	des de -90^o a 90^o.

Per continuar l'espiral, hauriem de prendre com a centre el punt $(0, 1)$, de radi el valor 8 i dibuixar l'arc des de 90^o a 270^o.

L'espiral de la dreta



talla cadascun dels semieixos verticals seguint una progressió geomètrica, pel que la taula que li correspon és la Taula 2.

Taula 2		
centre	radi	arc
(0,0)	1	des de -90^o a 90^o,
(0,1)	2	des de 90^o a 270^o,
(0,-1)	4	des de -90^o a 90^o,
(0,3)	8	des de 90^o a 270^o,
(0,-5)	16	des de -90^o a 90^o,
(0,11)	32	des de 90^o a 270^o,
(0,-21)	64	des de -90^o a 90^o.

Ens adonem que el darrer arc que hi ha dibuixat comença en el punt de coordenades $(0,-21)+(0,64) = (0,43)$ i acaba en el punt de coordenades $(0,-21)-(0,64) = (0,-85)$. Ara volem fer un arc de circumferència de radi $64 \cdot 2 = 128$ pel que, punxem en el punt $(0,43)$ prenem radi 128 i fem un arc que comença en el $(0,-85)$ va de l'angle 90^o a 270^o i acaba en el punt $(0,171)$.

(b) Calcula la longitud de cadascuna de les espirals dibuixades.

Recordem que la longitud de mitja circumferència de radi r és πr. Per l'espiral de la Taula 1 tenim que la seva longitud és la suma

$$\pi \cdot 1 + \pi \cdot 2 + \pi \cdot 3 + \pi \cdot 4 + \pi \cdot 5 + \pi \cdot 6 + \pi \cdot 7.$$

També podem escriure aquesta suma com

$$\pi \left(1+2+3+4+5+6+7\right) = \pi \left(\frac{1+7}{2} \cdot 7\right) = 28\pi.$$

Hem fet servir la fórmula de la suma de k termes d'una prograssió aritmètica:

$$\text{suma de } k \text{ termes d'una progressió aritmètica} = \frac{\text{primer} + \text{últim}}{2} \cdot k.$$

Per l'espiral de la Taula 2, tenim que la longitud és la suma

$$\pi \cdot 1 + \pi \cdot 2 + \pi \cdot 4 + \pi \cdot 8 + \pi \cdot 16 + \pi \cdot 32 + \pi \cdot 64.$$

Treiem factor comú π i també podem escriure aquesta suma com

$$\pi \left(1+2+4+8+16+32+64\right) = \pi \left(\frac{64 \cdot 2 - 1}{2-1}\right) = 127\pi.$$

Hem fet servir la fórmula de la suma dels termes d'una progressió geomètrica de raó r:

$$\text{suma dels termes d'una progressió geomètrica de raó } r = \frac{\text{últim} \cdot r - \text{primer}}{r-1}.$$

(c) Podem continuar per fóra cadascuna de les espirals anteriors? Amb quantes voltes? I podem continuar per dins cadascuna de les espirals anteriors? Amb quantes voltes?

Podem continuar ambdues espirals anterior per fóra amb infinites voltes. La primera creix més a poc a poc que l'altra però ambdues es poden continuar. Per dins, la primera no la podem continuar perquè en seguir la progressió aritmètica dels radis enrera, el següent valor seria 0 que no dóna lloc a cap arc de circumferència. En canvi, la segona espiral sí que la podem continuar per dins i amb infinites voltes perquè si seguim la progressió geomètrica cap enrera, tindriem radis $1/2$, $1/4$, $1/8$, ... i podem dividir per 2 qualsevol valor positiu, donant com a resultat un altre valor positiu.

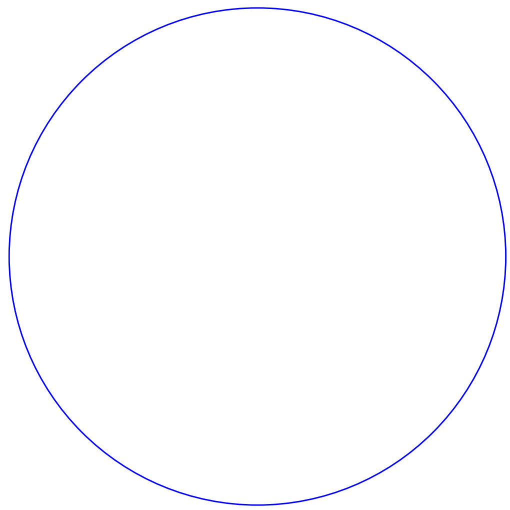
(d) Defineix què és una espiral arquimediana i què és una espiral logarítmica. Cal que descriguis quines són les seves característiques principals: forma, descripció mitjançant coordenades polars, continuació per dins i per fóra i també cal que donis exemples d'aquests tipus d'espirals en la natura, l'art o l'enginyeria.

Una espiral és una corba descrita per un punt que gira al voltant d'un altre (centre) allunyant-se'n continuament. Una espiral llisa és àquella en què la velocitat d'allunyament del centre és continua. Hi han dos tipus destacats d'espirals llises: l'arquimediana i la logarítmica. En una espiral arquimediana la velocitat d'allunyament del centre és lineal. Els talls amb una recta transversal segueixen una progressió aritmètica. La seva fórmula en coordenades polars és $r(\theta) = a + b\theta$ on a i b són nombres reals amb $b > 0$. En una espiral logarítmica la velocitat d'allunyament del centre és exponencial. Els talls amb una recta transversal segueixen una progressió geomètrica. La seva fórmula en coordenades polars és $r(\theta) = a\, b^{\theta}$ on a i b són nombres reals positius. En una espiral arquimediana la corba s'inicia en el centre i es va fent gran. Sempre es pot continuar per fóra però no per dins. En canvi, en una espiral logarítmica la corba mai toca el centre. Sempre es pot continuar per fóra i per dins. La distància entre el centre de l'espiral i el punt que gira és finita tant per l'espiral arquimediana com per la logarítmica. En una espiral logarítmica cal que el punt que gira doni infinites voltes per arribar al centre. En aquest sentit, les espirals que es descriuen en aquest problema mitjançant arcs de mitges circumferències es poden assimilar la primera a una espiral arquimediana i la segona a una espiral logarítmica, però no ho són ja que en els punts on s'enganxen dues mitges circumferències hi ha un canvi de corbatura i, per tant, no són corbes llises.

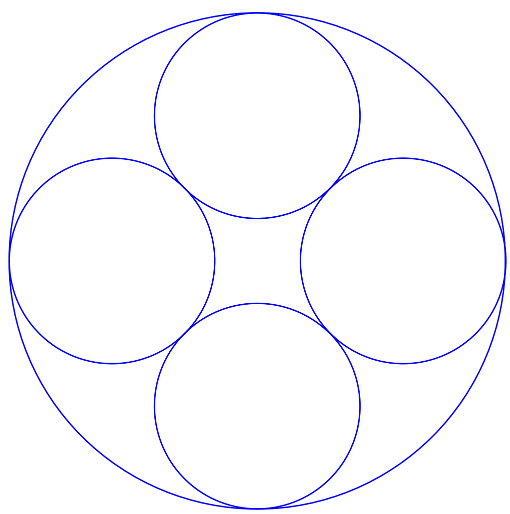
El tipus d'espiral que trobem de manera més habitual en la natura és l'espiral logarítmica. La trobem en closques de moluscs (com el caragol), en la forma de borrasques i ciclons, en la disposició de les estrelles en algunes galàxies ... En canvi, l'espiral arquimediana la trobem de manera més habitual en objectes fets per l'home, com les volutes d'una columna jònica o en decoracions de forjats. També apareixen espirals arquimedianes en la maquinària dels rellotges de corda. Com a exemple en la natura, les papallones pleguen les seves llengues en forma d'espiral arquimediana per poder-les guardar dins la boca. Les espirals tenen la característica que permeten contenir molt volum respecte la superfície exterior que ocupen o, si les pensem com a figura plana, contenen molta àrea respecte la longitud del seu perímetre. Un altre exemple d'espiral logarítmica és en l'obra titulada *L'Arbre de la Vida* pintada per Gustav Klimt l'any 1909, on fa servir espirals àurees. L'espiral d'or és el cas particular d'espiral logarítmica en el que la raó és el nombre d'or $\phi = (1+\sqrt{5})/2$. La següent imatge és una reproducció d'aquesta obra a partir d'un arxiu de Wikimedia Commons, un dipòsit de contingut lliure allotjat per la Fundació Wikimedia.

Problema 3. Considerem el fractal definit de la forma següent.

- comencem amb una circumferència de radi 1.

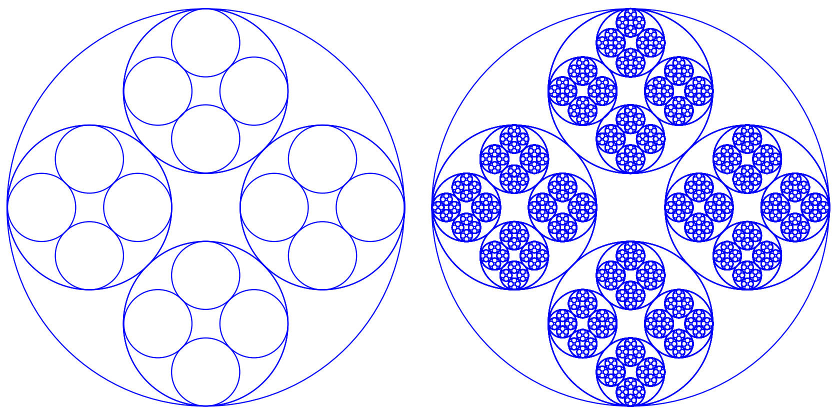


- i afegim quatre circumferències en el seu interior que siguin tangents entre elles i tangents a l'anterior.

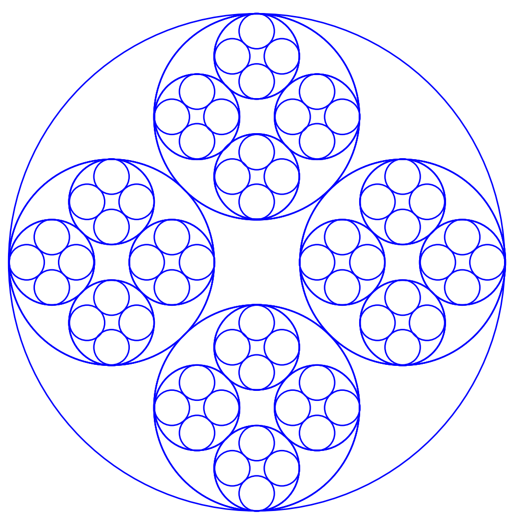


- Repetim el procés en cadascuna de les circumferències de l'interior.

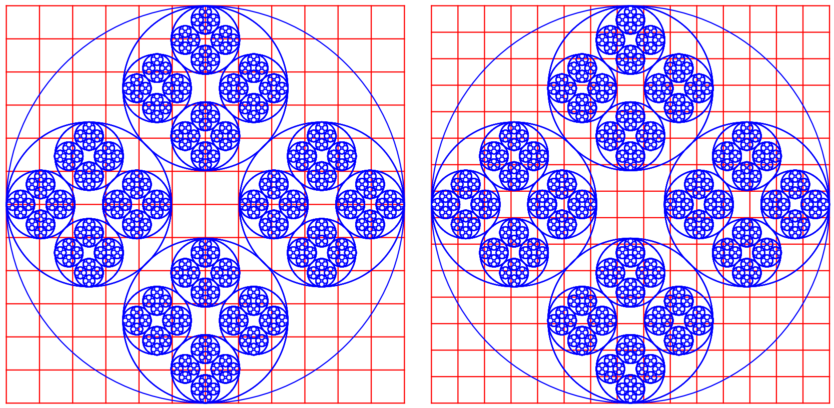
El gràfic de la segona iteració d'aquest procés i el gràfic del fractal resultant del límit del procés iteratiu són els següents:



(a) Representa la tercera iteració d'aquest procés. En cadascuna de les 16 circumferències petites que tenim en la segona iteració hi hem d'afegir quatre circumferències interiors que siguin tangents entre elles i tangents amb la seva circundant. En total, hem de dibuixar 64 circumferències noves.



(b) Calcula aproximacions a la dimensió fractal de l'objecte obtingut mitjançant el mètode de recompte de caixes. Pots fer servir els gràfics següents:



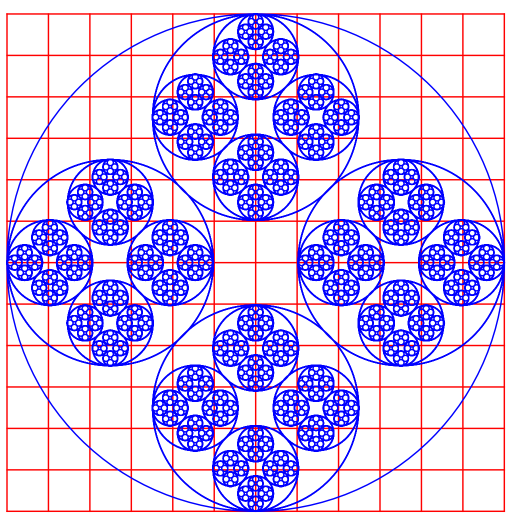
El mètode de recompte de caixes ens permet calcular aproximacions a la dimensió fractal de la manera següent. Considerem una quadrícula amb n quadradets per costat que cobreixi el fractal i calculem el nombre $N(n)$ de quadradets ocupats pel fractal. Calculem el quocient

$$\frac{\ln N(n)}{\ln n}.$$

En augmentar la n aquest valor s'aproxima al valor de la dimensió fractal, de manera que

$$\text{dimensió fractal} = \text{límit}\,\frac{\ln N(n)}{\ln n} \quad \text{quan } n \text{ tendeix a } +\infty.$$

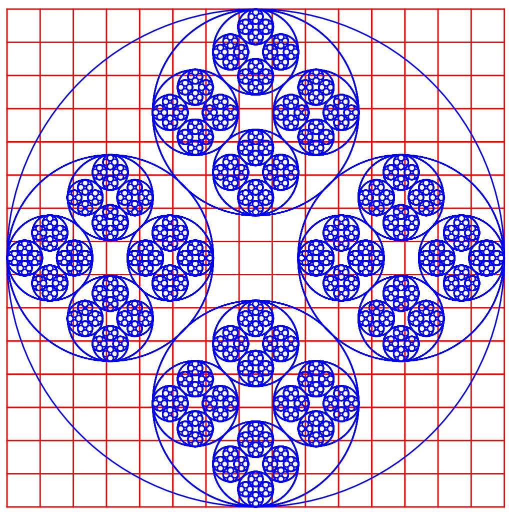
En el primer gràfic



tenim una quadrícula de $n = 12$ quadrats de costat. Aquí és més fàcil comptar quants quadrats **no** estan ocupats pel fractal i veiem que n'hi han 20. Com que la quadrícula té $12^2 = 144$ quadradets, tenim que n'hi han $144 - 20 = 124$ quadradets ocupats i, per tant, $N(12) = 124$. Així l'aproximació a la dimensió fractal ve donada per

$$\frac{\ln N(12)}{\ln 12} = \frac{\ln 124}{\ln 12} = 1.93982\ldots$$

Si prenem ara el segon gràfic:



veiem que tenbim una quadrícula de $n = 15$ quadrats per costat. Observem que n'hi han 37 sense ocupar, pel que el nombre de quadrats ocupats és $N(15) = 15^2 - 37 = 225 - 37 = 188$. Així l'aproximació a la dimensió fractal ve donada per

$$\frac{\ln N(15)}{\ln 15} = \frac{\ln 188}{\ln 15} = 1.93366\ldots$$

(d) Dóna la definició de dimensió de semblança per a un fractal. La dimensió de semblança es defineix per a fractals perfectament autosemblants de la manera següent: dividim un costat del fractal en k trossos i obtenim p peces semblants. Aleshores la dimensió de semblança es calcula amb el quocient:

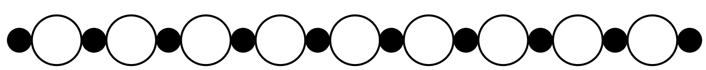
$$\text{dimensió de semblança} = \frac{\ln p}{\ln k}.$$

Problema 4. Les sanefes es classifiquen segons els moviments rígids que les deixen invariants. Hi han 7 tipus de sanefes i les indiquem de la forma següent:

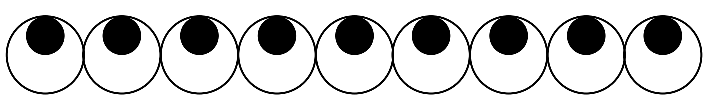
- T Quan hi ha translació respecte la direcció de la sanefa (i res més).
- R Quan hi ha rotació de 180^o respecte d'un punt (i res més a part de T).
- V Quan hi ha simetria respecte un eix vertical (i res més a part de T).
- G Quan hi ha *glide reflection* (i res més a part de T).
- HG Quan hi ha simetria respecte la recta horitzontal central (i res més a part de T i G).
- VRG Quan hi ha simetria respecte un eix vertical, rotació de 180^o respecte d'un punt, *glide reflection* i translació, però no hi ha simetria respecte la recta horitzontal central.
- VHRG Quan hi ha simetria respecte un eix vertical, rotació de 180^o respecte d'un punt, *glide reflection*, simetria respecte la recta horitzontal central i translació.

Digues de quin tipus són cadascuna de les quatre sanefes següents i dibuixa sanefes dels tipus que falten, indicant de quin tipus són. Cal que el motiu surti almenys quatre cops en cada sanefa.

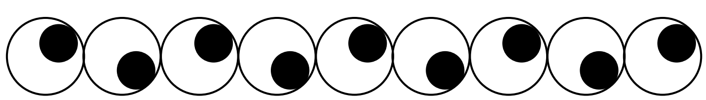
(a)



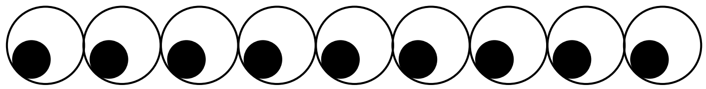
(b)



(c)

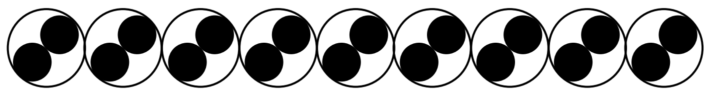


(d)

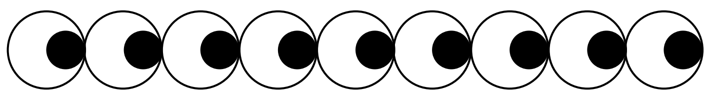


Observem que la sanefa (a) és del tipus VHRG, la sanefa (b) és del tipus V, la sanefa (c) és del tipus G i la sanefa (d) és del tipus T. Falta dibuixar sanefes dels tipus R, HG i VRG.

Un exemple de sanefa de tipus R és:



Un exemple de sanefa de tipus HG és:



I un exemple de sanefa de tipus VRG és: