Matemàtiques aplicades a l'art i el disseny digital

Grau en disseny digital i tecnologies creatives

PROVA 2. 14 de Gener de 2022

1. (3 *punts*)

   (a) Defineix què és una tessel·lació regular. Quines peces es poden fer servir per a construir una tessel·lació regular? Dibuixa exemples de tots els tipus i demostra que són els únics que hi ha.

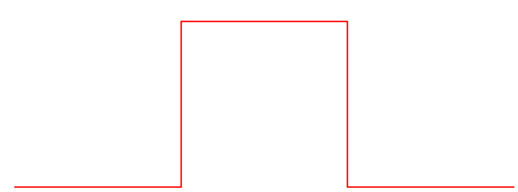
   (b) Pren una de les peces que conformen una tessel·lació regular i modifica els seus costats seguint el mètode d'Escher a fi d'obtenir una tessel·lació del pla per translacions i rotacions de 180^o. Cal que expliquis amb detall com has aplicat el mètode i cal que dibuixis almenys sis peces de la tessel·lació obtinguda a fi de veure que efectivament tessel·len el pla.

   (c) Què és una tessel·lació aleatòria? Dibuixa'n un exemple i explica com l'has construïda.

2. (5 *punts*) Considerem el fractal definit de la forma següent.

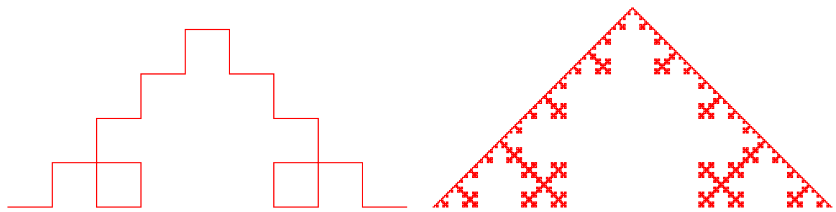
   - comencem amb un segment de longitud 1.

   - i afegim tres costats d'un quadrat en el seu terç central.



   - Repetim el procés en cada segment dels cinc obtinguts.

El gràfic de la segona iteració d'aquest procés i el gràfic del fractal resultant del límit del procés iteratiu són els següents:

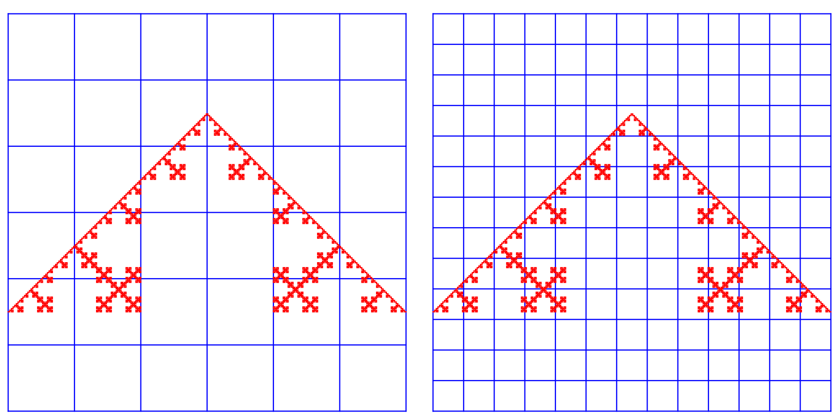


(a) Representa la tercera iteració d'aquest procés.

(b) Calcula la longitud de la corba que defineix la figura en la primera, la segona i la tercera iteració. Quina és la longitud del fractal resultant?

(c) Calcula l'alçada de la corba que defineix la figura de la primera, la segona i la tercera iteració. Quina és l'alçada del fractal resultant?

(d) Calcula aproximacions a la dimensió fractal de l'objecte obtingut mitjançant el mètode de recompte de caixes. Pots fer servir els gràfics següents:



(e) Dóna la definició de dimensió de semblança per a un fractal. I calcula-la pel fractal descrit en aquest exercici.

3. (2 *punts*) Descriu la diferència entre caos i atzar. Cal que defineixis què és el caos matemàtic i donis exemples de fenòmens caòtics i exemples de fenòmens aleatoris.

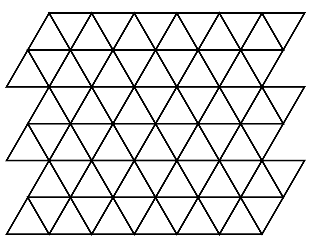
Observacions.-

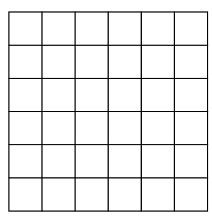
- Recorda d'escriure el teu nom i cognoms i el teu número de DNI en TOTS els fulls de l'examen.
- Disposes d'una hora i mitja per a realitzar aquesta prova.

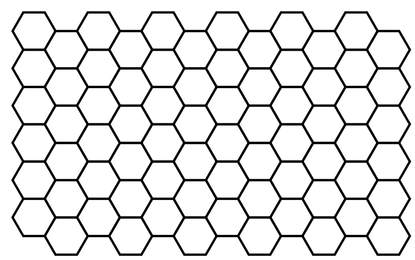
Resolució de la Prova 2

Problema 1. (a) Defineix què és una tessel·lació regular. Quines peces es poden fer servir per a construir una tessel·lació regular? Dibuixa exemples de tots els tipus i demostra que són els únics que hi ha.

Una tessel·lació és un recobriment del pla amb figures que no es superposen ni deixen forats sense cobrir. Considerem només tessel·lacions que siguin aresta a aresta. És a dir, que les arestes coincideixin en tota la seva longitud i es trobin en vèrtexos. Les tessel·lacions regulars estan formades per polígons regulars, és a dir, polígons amb tots els costats i tots els angles iguals. Només es pot fer servir un tipus de peça. Només hi han tres polígons que puguin formar una tessel·lació regular: triangles equilàters, quadrats i hexàgons regulars. Les figures següents mostren exemples d'aquests tres tipus de tessel·lacions regulars:







Per a poder conformar una tessel·lació cal que en cada vèrtex es trobin peces tals que la suma dels seus angles interiors sigui 360^o. Recordem que la suma dels angles interiors d'un polígon de n costats és $(n-2)\cdot 180^o$. En polígons regulars, cada vèrtex té associat el mateix angle, pel que en cada vèrtex el angle medeix

$$\frac{(n-2)\cdot 180^o}{n}.$$

- Prenem $n = 3$, que és el cas del triangle equilàter. Veiem que els angles interns medeixen 60^o i amb sis triangles equilàters podem fer el vèrtex d'una tessel·lació.

- Prenem $n = 4$, que és el cas del quadrat. Veiem que els angles interns medeixen 90^o i amb quatre quadrats podem fer el vèrtex d'una tessel·lació.

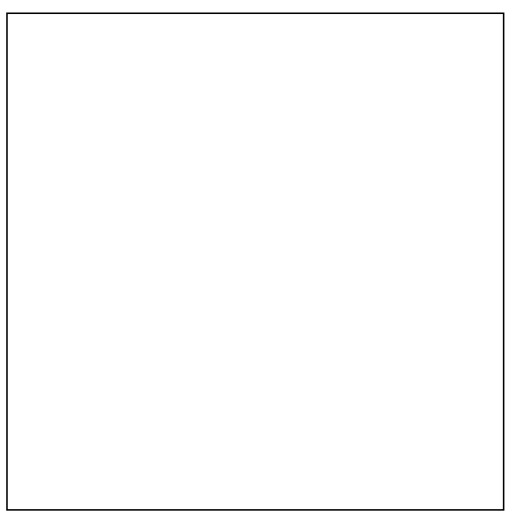
- Prenem $n = 5$, que és el cas del pentàgon regular. Veiem que els angles interns medeixen 108^o i en multiplicar aquest nombre per valors naturals no podem arribar a 360^o. Amb tres pentàgons regulars en un vèrtex sumem 324^o i amb quatre pentàgons regulars sumem 432^o. Per aquest motiu no es pot fer una tessel·lació amb pentàgons regulars.

- Prenem $n = 6$, que és el cas de l'hexàgon regular. Veiem que els angles interns medeixen 120^o i amb tres hexàgons regulars podem fer el vèrtex d'una tessel·lació.

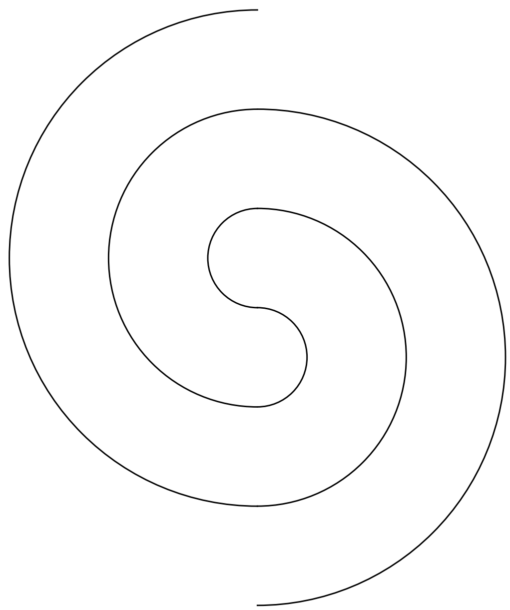
- A partir de 7 costats (és a dir, $n \geq 7$), tenim que els angles interns són majors de 120^o i menors de 180^o pel que amb dues peces no s'arriba a sumar 360^o i amb tres peces la suma sobrepassa els 360^o. Per tant, a partir de 7 costats, els polígons regulars no produeixen una tessel·lació regular.

(b) Pren una de les peces que conformen una tessel·lació regular i modifica els seus costats seguint el mètode d'Escher a fi d'obtenir una tessel·lació del pla per translacions i rotacions de 180^o. Cal que expliquis amb detall com has aplicat el mètode i cal que dibuixis almenys sis peces de la tessel·lació obtinguda a fi de veure que efectivament tessel·len el pla.

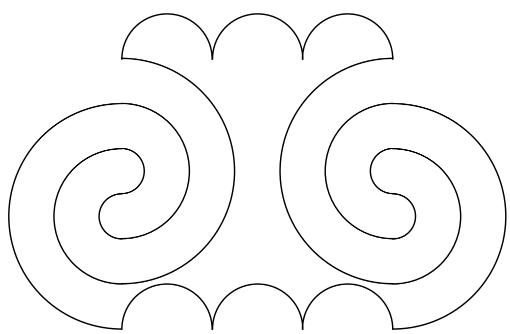
Prenem un quadrat:



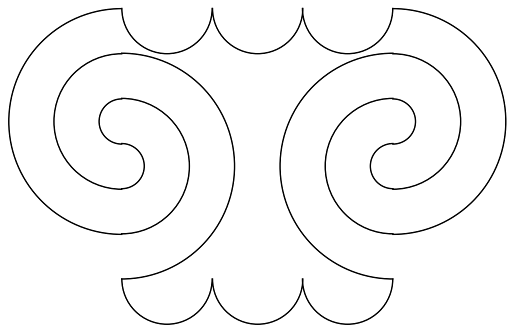
i modifiquem els costats de l'esquerra i la dreta amb dues corbes centrosimètriques. Prenem, per exemple dues espirals formades amb arcs de circumferència:



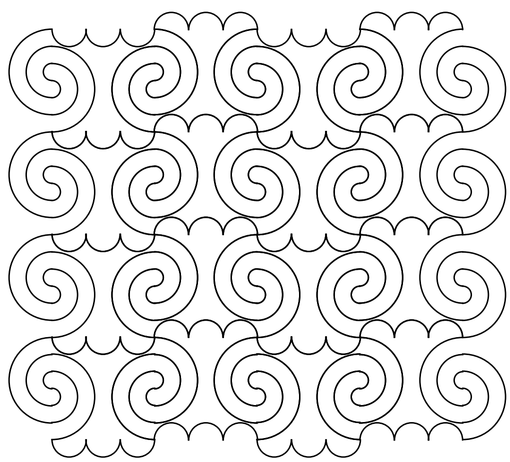
i en el costat de l'esquerra prenem una altra d'aquestes dues espirals. Modifiquem el costat inferior amb tres mitges circumferències i en el costat superior també mitjançant una translació. Així obtenim una peca que permet tessel·lar per translacions i girs de 180^o. La peca obtinguda és la següent:



Fixem-nos que per a poder tessel·lar l'haurem de girar 180^o per a poder recobrir bé el pla:

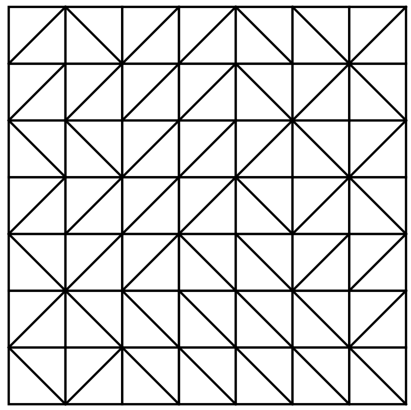


I la tessel·lació del pla amb aquesta peça queda:



(c) Què és una tessel·lació aleatòria? Dibuixa'n un exemple i explica com l'has construïda.

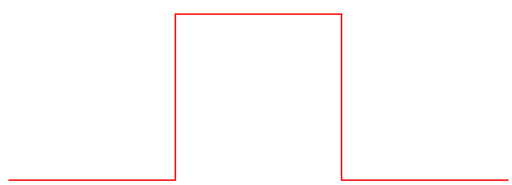
Una tessel·lació aleatòria és un cas de tessel·lació no periòdica, és a dir, que les peces no es repeteixen en el mosaic per translació. A més, cal **disposar les peces a l'atzar**, de manera que veure el patró en una zona del mosaic no ens permet deduir com serà el patró de les peces en una altra zona. Per exemple, podem tessel·lar fent servir una quadrícula i en cada quadrat dibuixem una diagonal cap a la dreta si en llençar una moneda obtenim cara i una diagonal cap a l'esquerra si obtenim creu. Tirem una moneda per cada quadrat i obtenim la següent tessel·lació aleatòria.



Problema 2. Considerem el fractal definit de la forma següent.

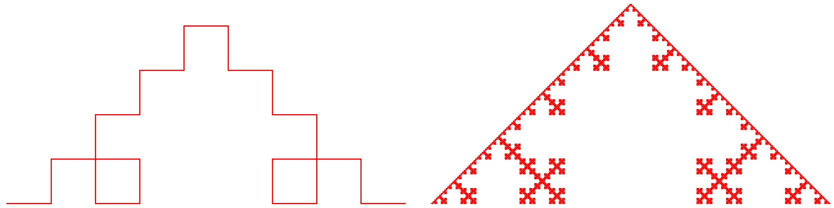
- comencem amb un segment de longitud 1.

- i afegim tres costats d'un quadrat en el seu terç central.

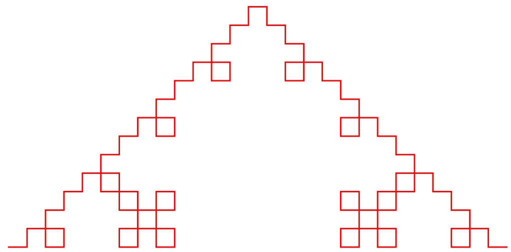


- Repetim el procés en cada segment dels cinc obtinguts.

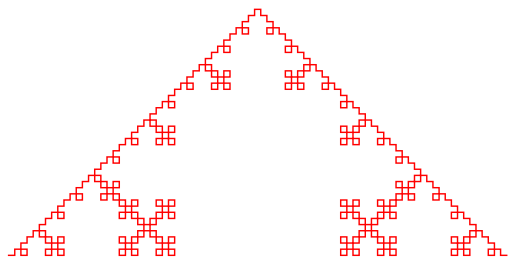
El gràfic de la segona iteració d'aquest procés i el gràfic del fractal resultant del límit del procés iteratiu són els següents:



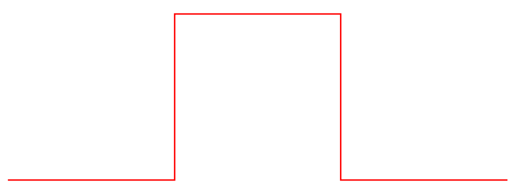
(a) Representa la tercera iteració d'aquest procés.
El gràfic de la tercera iteració és:



I el de la quarta iteració és:

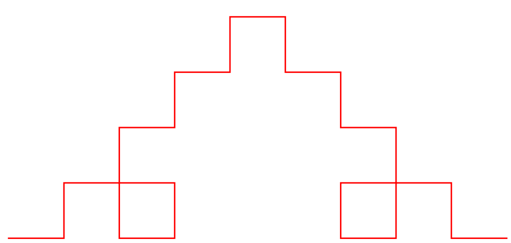


(b) Calcula la longitud de la corba que defineix la figura en la primera, la segona i la tercera iteració. Quina és la longitud del fractal resultant? En aquest procés comencem amb un segment de longitud 1 i afegim tres costats d'un quadrat en el seu terç central:



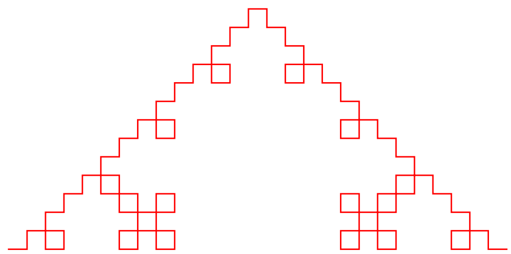
Veiem que en aquesta primera iteració tenim 5 segments, tots ells de llargada 1/3. Per tant, la longitud és 5/3.

En la segona iteració, per cada segment dels cinc anteriors, afegim tres costats d'un quadrat en el seu terç central:



Per tant, tenim $5^2 = 25$ segments, tots ells de llargada $1/9$. La longitud total queda, doncs, $25/9$.

En la tercera iteració:

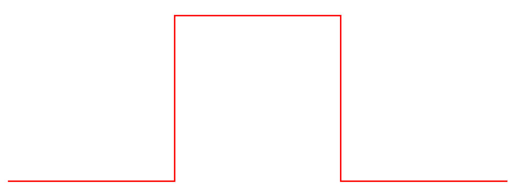


cadacun dels 25 segments anteriors genera cinc segments més, pel que tenim 5^3 segments, cadascun d'ells de longitud $1/3^3 = 1/27$. La longitud queda així $5^3/3^3 = 125/27$.

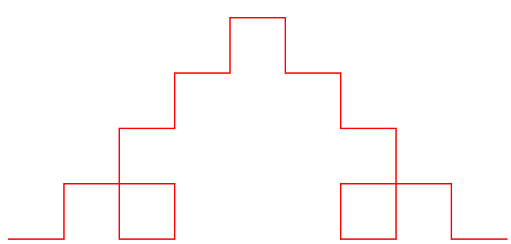
Observem que en la iteració n-èssima tindrem 5^n segments, cadascun d'ells de longitud $1/3^n$. D'aquesta manera, la longitud de la corba en la iteració n-èssima és $5^n/3^n = (5/3)^n$. Quan n tendeix a infinit, aquest valor també tendeix a infinit perquè $5/3 > 1$. Trobem, doncs, que el fractal resultant d'aquest procés iteratiu és una corba de longitud infinita.

(c) Calcula l'alçada de la corba que defineix la figura de la primera, la segona i la tercera iteració. Quina és l'alçada del fractal resultant?

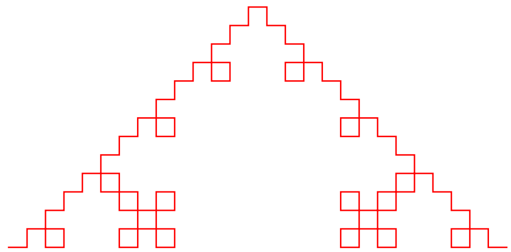
En la primera iteració



l'alçada és $1/3$. En la segona iteració:



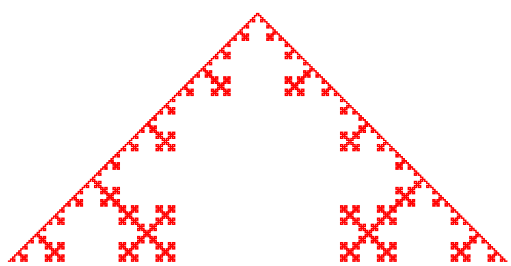
l'alçada és $1/3 + 1/9$. Aquí hem fet servir els mateixos raonaments que en l'apartat anterior. En la tercera iteració:



veiem que l'alçada és $1/3 + 1/9 + 1/27$. Notem, així, que en la iteració n-èssima l'alçada és el resultat de sumar els primers n termes d'una progressió geomètrica de primer terme $1/3$ i raó $1/3$. Com que la raó és un valor positiu menor que 1, tenim que la seva potència n-èssima tendeix a 0 quan n tendeix a infinit, pel que l'alçada del fractal resultant d'aquest procés iteratiu ve donada per la fórmula de la suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica de raó r, tal que $|r| < 1$, i dóna

$$\frac{\text{primer terme}}{1 - r}.$$

En el cas d'aquest fractal:



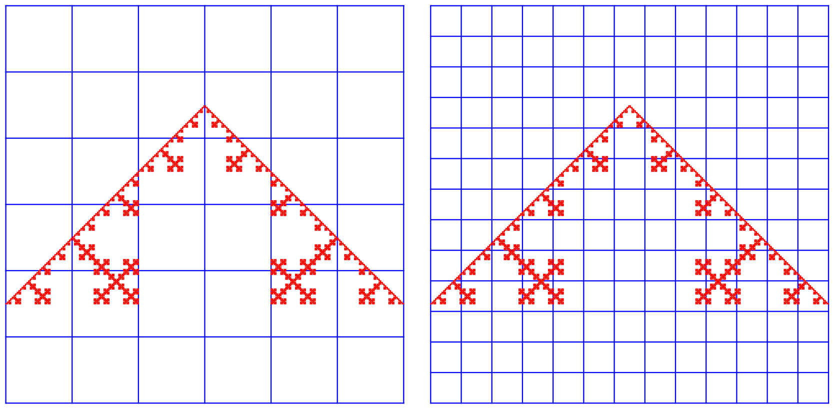
com que la raó és $1/3$ i el primer terme és $1/3$ queda:

$$\frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

Per tant, l'alçada és $1/2$.

D'aquests dos apartats veiem que el fractal d'aquest problema és una corba de longitud infinita, però que l'alçada del seu punt màxim és $1/2$.

(d) Calcula aproximacions a la dimensió fractal de l'objecte obtingut mitjançant el mètode de recompte de caixes. Pots fer servir els gràfics següents:



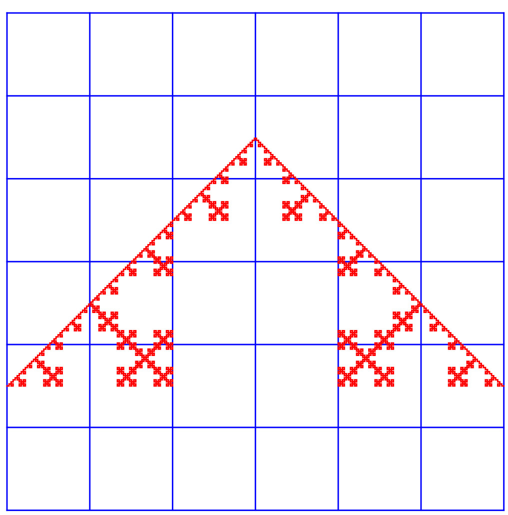
El mètode de recompte de caixes ens permet calcular aproximacions a la dimensió fractal de la manera següent. Considerem una quadrícula amb n quadradets per costat que cobreixi el fractal i calculem el nombre $N(n)$ de quadradets ocupats pel fractal. Calculem el quocient

$$\frac{\ln N(n)}{\ln n}.$$

En augmentar la n aquest valor s'aproxima al valor de la dimensió fractal, de manera que

$$\text{dimensió fractal} = \text{límit} \frac{\ln N(n)}{\ln n} \quad \text{quan } n \text{ tendeix a } +\infty.$$

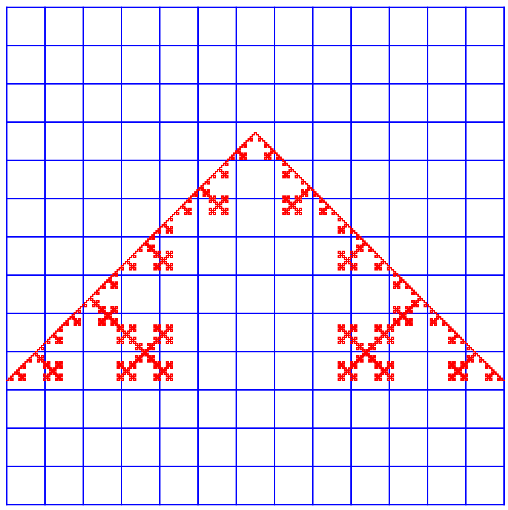
En el primer gràfic



tenim una quadrícula de 6 quadradets a cada costat i el fractal ocupa 14 d'aquests, pel que $N(6) = 14$. Aleshores, el quocient dóna

$$\frac{\ln 14}{\ln 6} = 1.47289\ldots$$

En el segon gràfic



tenim una quadrícula de 13 quadradets a cada costat i el fractal ocupa 43 d'aquests, pel que $N(13) = 43$. Aleshores, el quocient dóna

$$\frac{\ln 43}{\ln 13} = 1.46638\ldots$$

(e) Dóna la definició de dimensió de semblança per a un fractal. I calcula-la pel fractal descrit en aquest exercici.

La dimensió de semblança es defineix per a fractals perfectament auto-semblants de la manera següent: dividim un costat del fractal en k trossos i obtenim p peces semblants. Aleshores la dimensió de semblança es calcula amb el quocient:

$$\text{dimensió de semblança} = \frac{\ln p}{\ln k}.$$

En aquest exemple, veiem que si dividem cada costat en 3 trossos obtenim 5 còpies del fractal que són més petites, pel que

$$\text{dimensió de semblança} = \frac{\ln 5}{\ln 3} = 1.46497\ldots$$

Problema 3. Descriu la diferència entre caos i atzar. Cal que defineixis què és el caos matemàtic i donis exemples de fenòmens caòtics i exemples de fenòmens aleatoris.
El caos matemàtic és sensibilitat a condicions inicials. Els fenòmens caòtics són fenòmens pels que es pot determinar el seu resultat sempre i quan es coneguin amb exactitud les dades inicials. Una petita variació de les dades inicials dóna lloc a resultats molt diferents. Un exemple de fenòmen caòtic és el moviment d'almenys n cossos, amb $n \geq 3$, sotmesos a la força d'atracció gravitacional descrita per Isaac Newton. Les equacions de Newton permeten determinar la posició i la velocitat de cada cos si coneixem la posició i la velocitat inicials. Però una petita variació de les condicions inicials dóna lloc a posicions i velocitats molt diferents al llarg del temps. De fet, com en molts fenòmens caòtics, tenim un horitzó de prediccions, és a dir, les solucions no comencen a diferir fins al cap d'un temps. D'aquesta manera, com que mesurar la posició i la velocitat dels cossos en un moment inicial de manera exacta és impossible per als humans, no podem predir el resultat al llarg del temps. Un altre exemple de fenòmen caòtic ve donat per l'aplicació logística que és el resultat d'un procés iteratiu que comença per un valor real x amb $0 < x < 1$ al qual li apliquem la funció $f(x) = rx(1-x)$ on r és un valor donat. Apliquem aquesta funció f al resultat i iterem el procés. D'aquesta manera obtenim una successió de valors tal que el primer terme és el valor x inicial. Per alguns valors de r es dóna que aquesta successió és caòtica, és a dir, que per valors inicials de x lleugerament diferents s'obtenen successions molt diferents. L'aplicació logística és un model poblacional que dóna el nombre d'individus al llarg del temps. El valor de r correspon al ratio de creixement en aquesta població. Si r entra en el rang caòtic, com que no podem calcular amb total precisió la quantitat inicial d'individus, tenim que no podem predir quina és l'evolució d'aquest nombre seguint l'aplicació logística. Així, el caos és determinista però a la pràctica, no ens permet deduir els valors futurs ja que no podem conèixer les condicions inicials amb total precisió. En canvi, en els fenòmens a l'atzar, no podem predir cap esdeveniment malgrat conèixer un o molts resultats de l'esdeveniment. En els fenòmens a l'atzar i juga la probabilitat. Els esdeveniments tenen una certa probabilitat de succeir. Un fenòmen a l'atzar, per exemple, és llençar una moneda a l'aire. No podem predir quin serà el resultat de cap tirada, malgrat que n'haguem fet una o moltes i les haguem anotat. Un altre fenòmen a l'atzar és els números guanyadors del primer premi de la Loteria de Nadal: malgrat conèixer quins són els resultsts en els darrers anys, no podem predir cap de les xifres del

nombre guanyador del proper any. No depen de cap mesura: és aleatori.