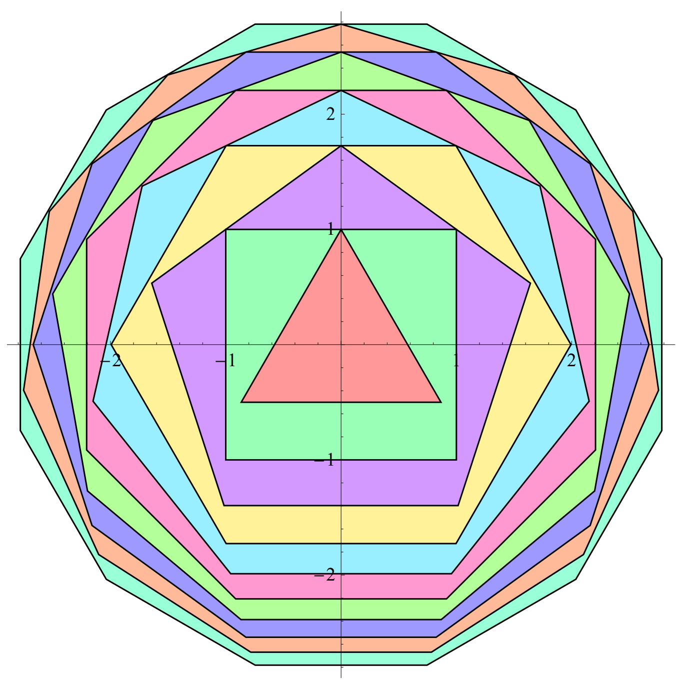
Matemàtiques aplicades a l'art i el disseny digital

Grau en disseny digital i tecnologies creatives

PROVA 1. 10 de Novembre de 2021

1. (3 *punts*) La figura següent mostra deu polígons regulars tots centrats en l'origen i amb un nombre consecutiu de costats: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 i 12. Cada polígon està inscrit en el polígon que té un costat més.



(a) Un dels vèrtexs del triangle es troba en el punt de coordenades cartesianes $(0, 1)$. Troba les coordenades cartesianes dels altres dos vèrtexs. Recorda que totes les figures estan centrades en l'origen de coordenades.

(b) Es pot demostrar que el pentàgon té un vèrtex en el punt de coordenades cartesianes $(0, a_5)$ on

$$a_5 = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\,\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}.$$

Recorda que mesurem tots els angles en radiants. Calcula les coordenades cartesianes del vèrtex de l'hexàgon que es troba en el primer quadrant. Atenció: els vèrtexs de l'hexàgon **no** estan a distància 2 de l'origen de coordenades.

(c) Podem fer girar el triangle dins del quadrat sense que surti d'aquest amb rotacions centrades en l'origen de coordenades. Troba les coordenades cartesianes dels vèrtexs del triangle girat $\pi/4$ radiants respecte de l'origen i dibuixa el triangle i el quadrat resultants (no cal que dibuixis la resta de polígons). Dóna la matriu de rotació corresponent a aquest angle.

2. (2 *punts*) Descriu el modulor de Le Corbusier i quina relació té amb el nombre d'or. Descriu com es construeixen els valors de la sèrie blava i la sèrie vermella per a un home que medeix $183\,cm$ d'alçada. Dóna almenys tres nombres de cadascuna de les sèries. Descriu alguns usos del modulor de Le Corbusier en el disseny i l'arquitectura. Dóna la teva opinió sobre la utilitat del modulor de Le Corbusier i la implicació que té en acceptar la diversitat.

3. (1 *punt*) Com es construeix un triangle de Reuleux? Calcula el seu perímetre i la seva àrea.

4. (2 *punts*) Defineix què és un poliedre arquimedià i descriu-ne almenys un exemple. Cal que donis el nombre i forma de les cares del poliedre que has donat d'exemple. Digues també el nom del poliedre, si el saps. Com és el poliedre dual del que has donat d'exemple? Cal que descriguis amb detall com has construït el dual del poliedre arquimedià que has donat d'exemple. També cal que dibuixis el poliedre arquimedià que has descrit i el seu dual.

5. (2 *punts*) Les sanefes es classifiquen segons els moviments rígids que les deixen invariants. Hi han 7 tipus de sanefes i les indiquem de la forma següent:

   T Quan hi ha translació respecte la direcció de la sanefa (i res més).

   R Quan hi ha rotació de 180^o respecte d'un punt (i res més a part de T).

   V Quan hi ha simetria respecte un eix vertical (i res més a part de T).

   G Quan hi ha *glide reflection* (i res més a part de T).

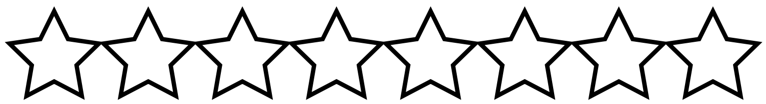
   HG Quan hi ha simetria respecte la recta horitzontal central (i res més a part de T i G).

   VRG Quan hi ha simetria respecte un eix vertical, rotació de 180^o respecte d'un punt, *glide reflection* i translació, però no hi ha simetria respecte la recta horitzontal central.

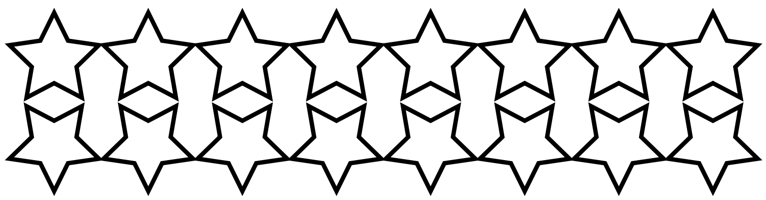
VHRG Quan hi ha simetria respecte un eix vertical, rotació de 180^o respecte d'un punt, *glide reflection*, simetria respecte la recta horitzontal central i translació.

Digues de quin tipus són cadascuna de les quatre sanefes següents i dibuixa sanefes dels tipus que falten, indicant de quin tipus són. Cal que el motiu surti almenys quatre cops en cada sanefa. No cal que el motiu sigui una estrella, pot ser el que tu vulguis.

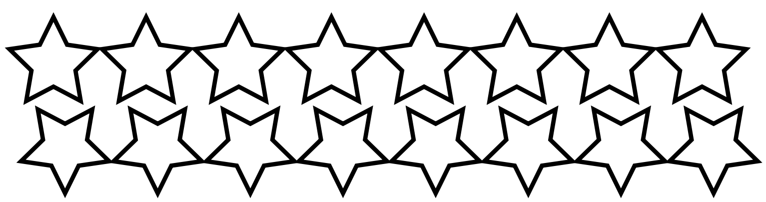
(a)



(b)



(c)



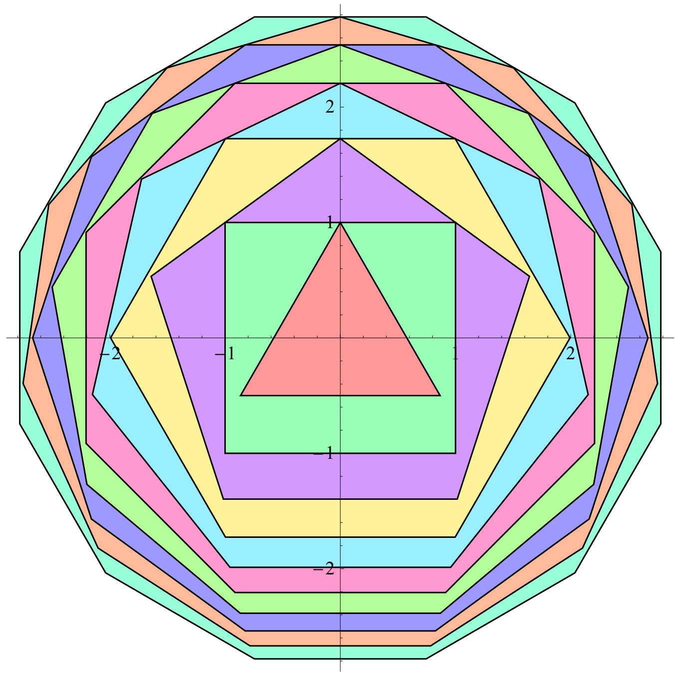
(d)

Observacions.-

- Recorda d'escriure el teu nom i cognoms i el teu número de DNI en TOTS els fulls de l'examen.
- Disposes d'una hora i mitja per a realitzar aquesta prova.

Resolució de la Prova 1

Problema 1. La figura següent mostra deu polígons regulars tots centrats en l'origen i amb un nombre consecutiu de costats: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 i 12. Cada polígon està inscrit en el polígon que té un costat més.



(a) Un dels vèrtexs del triangle es troba en el punt de coordenades cartesianes $(0, 1)$. Troba les coordenades cartesianes dels altres dos vèrtexs. Recorda que totes les figures estan centrades en l'origen de coordenades.

Considerem tres radis que uneixen l'origen de coordenades amb els vèrtexs del triangle. Tenim que els angles entre aquests tres radis són $2\pi/3$ radiants. I que cada vèrtex està situat a distància 1 de l'origen de coordenades, ja que un dels vèrtexs en coordenades cartesianes és el $(0, 1)$. Per tant, les coordenades polars del vèrtex $(0, 1)$ són $r = 1$ i $\theta = \pi/2$. Les coordenades polars dels altres dos vèrtexos són

$$r = 1 \text{ i } \theta = \pi/2 - 2\pi/3 \,=\, -\pi/6; \quad r = 1 \text{ i } \theta = \pi/2 + 2\pi/3 \,=\, 7\pi/6.$$

Per passar a coordenades cartesianes usem les fòrmules $x = r\cos\theta$ i $y = r\sin\theta$ i trobem els punts

$$(x, y) \,=\, (\sqrt{3}/2,\, -1/2) \,\approx\, (0.866025,\, -0.5)$$

$$(x,y) = (-\sqrt{3}/2,\ -1/2) \approx (-0.866025,\ -0.5).$$

(b) Es pot demostrar que el pentàgon té un vèrtex en el punt de coordenades cartesianes $(0, a_5)$ on

$$a_5 = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\,\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}.$$

Recorda que mesurem tots els angles en radiants. Calcula les coordenades cartesianes del vèrtex de l'hexàgon que es troba en el primer quadrant. Atenció: els vèrtexs de l'hexàgon **no** estan a distància 2 de l'origen de coordenades.

Considerem el triangle rectangle que té per vèrtexos l'origen de coordenades, el punt $(0, a_5)$ i el vèrtex de l'hexàgon que estem buscant, que anomenem V. A partir del dibuix veiem que la coordenada y del vèrtex V és a_5. Notem que l'angle corresponent a l'origen de coordenades del triangle rectangle que estem considerant és $2\pi/12 = \pi/6$. Diem v_x a la coordenada x del vèrtex V i tenim que un dels catets del triangle rectangle que estem considerant medeix v_x i l'altre medeix a_5. Per tant,

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{v_x}{a_5},$$

i d'aquí trobem que

$$v_x = a_5 \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\,\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 0.99682.$$

Per tant, les coordenades cartesianes del vèrtex V són $\approx (0.99682, 1.72654)$.

(c) Podem fer girar el triangle dins del quadrat sense que surti d'aquest amb rotacions centrades en l'origen de coordenades. Troba les coordenades cartesianes dels vèrtexs del triangle girat $\pi/4$ radiants respecte de l'origen i dibuixa el triangle i el quadrat resultants (no cal que dibuixis la resta de polígons). Dóna la matriu de rotació corresponent a aquest angle.

La matriu de rotació és

$$R_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Donat un punt P, les coordenades del punt resultant d'aplicar una rotació de dentre el punt O i angle θ venen donades per $O + R_\theta(P - O)$ on R_θ és la matriu de rotació d'angle θ. Com que apliquem una rotació centrada en l'origen de coordenades, per trobar les coordenades dels punts girats, hem de multiplicar aquesta matriu per les coordenades. Així el punt $(0, 1)$ es transforma en

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.707107 \\ 0.707107 \end{pmatrix}.$$

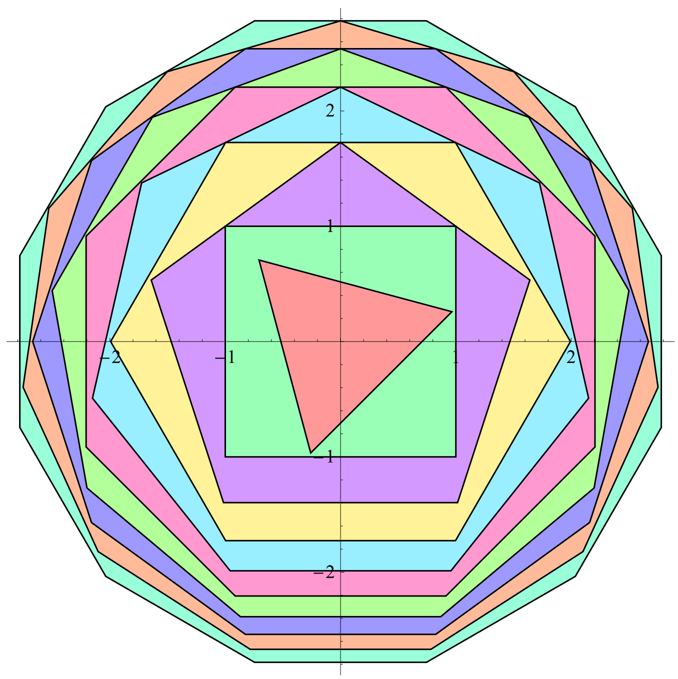
El punt $(\sqrt{3}/2, -1/2)$, que hem trobat en el primer apartat, es transforma en

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sqrt{6}+\sqrt{2})/4 \\ (\sqrt{6}-\sqrt{2})/4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.965926 \\ 0.258819 \end{pmatrix}.$$

I el punt $(-\sqrt{3}/2, -1/2)$, que hem trobat en el primer apartat, es transforma en

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\sqrt{6}+\sqrt{2})/4 \\ -(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.258819 \\ -0.965926 \end{pmatrix}.$$

El gràfic amb el triangle girat és:



Podeu trobar dibuixos d'aquest estil en el compte de twitter de mathladyhazel `https://twitter.com/i/status/1373325714880040962`.

Problema 2. Descriu el modulor de Le Corbusier i quina relació té amb el nombre d'or. Descriu com es construeixen els valors de la sèrie blava i la sèrie vermella per a un home que medeix 183 cm d'alçada. Dóna almenys tres nombres de cadascuna de les sèries. Descriu alguns usos del modulor de Le Corbusier en el disseny i l'arquitectura. Dóna la teva opinió sobre la utilitat del modulor de Le Corbusier i la implicació que té en acceptar la diversitat.

Le Corbusier és un dels arquitectes més cèlebres del segle XX i va idear una sèrie de mesures basades en el nombre d'or que es poden aplicar en el disseny d'objectes a escala humana. Es va basar en un home de 183 cm d'alçada, pel que el seu melic ha d'estar a alçada $183/\varphi$ on φ és el nombre d'or. Fent els càlculs i tenint en compte que $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$, trobem

$$\frac{183}{\varphi} = 113.1002199,$$

valor que arrodonim a 113 cm. Que l'alçada d'un home i l'alçada del seu melic són mesures que es troben en proporció àurea apareix ja en el llibre de Luca Pacioli anomenat *La Divina Proporció*. Aquest llibre va ser il·lustrat per Leonardo da Vinci i una de les seves il·lustracions més famoses és *L'home de Vitruvi*. En aquesta s'observa que el melic de l'home és el centre d'una circumferència que circumscriu la figura de l'home estirat i amb els braços aixecats. Per tant, l'alçada de l'home amb la mà aixecada és 226 cm. A partir del valor 183, multipliquem i dividim per φ i arrodonim al sencer més proper i trobem els valors de la sèrie vermella i de manera anàloga trobem els valors de la sèrie blava a partir del nombre 226. Així, la sèrie vermella és:

$$\ldots,\ 2,\ 4,\ 6,\ 10,\ 16,\ 27,\ 43,\ 70,\ 113,\ 183,\ 296,\ 479,\ 775,\ \ldots$$

I la sèrie blava és

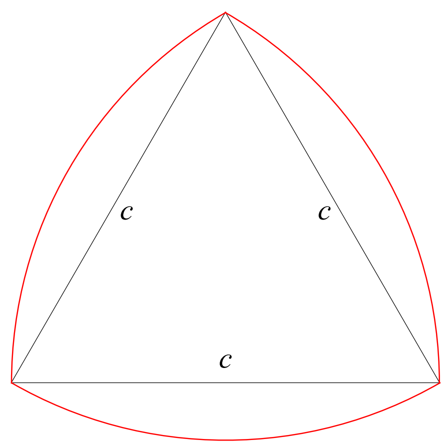
$$\ldots,\ 7,\ 13,\ 20,\ 33,\ 53,\ 86,\ 140,\ 226,\ 366,\ 592,\ 958,\ 1550,\ \ldots$$

El modulor dóna lloc a una sèrie de mides estàndar per als objectes quotidians: l'alçada habitual de taules, cadires, taulells, esglaons, . . . segueixen les mides donades pel modulor. De fet, Le Corbusier va fer-les servir en moltes de les seves obres arquitectòniques, com per exemple, les *Unitats d'habitació* que són un concepte de tipologia residencial basada en el modulor i que s'han fet servir arreu d'Europa i del món. Potser la més famosa és la de Marsella.

La idea de Le Corbusier de fer servir un seguit de mides estàndar i adaptades a la mida humana permet que els mateixos objectes s'adaptin a moltes persones i, per tant, es poden fabricar de manera sostenible. També permet igualar a les persones sense tenir en compte la seva capacitat adquisitiva ni la seva procedència: un ric s'asseu a la mateixa alçada que un pobre. Per contra, el fet de prendre com a base un home (i força alt) provoca una idealització de les mides humanes i molt poca atenció a la diversitat. Hi han poques dones que medeixin 183 cm d'alçada. I també hi han moltes persones (homes i dones) que no satisfan els estàndars ni d'alçada ni de seguir la proporció àurea. Com en moltes altres disciplines, la classificació en categories i la normalització han esdevingut sistemàtiques. Hi han diversos artistes que han criticat el modulor de Le Corbusier, com per exemple, Thomas Carpentier amb la seva obra titulada Modulor.

Problema 3. Com es construeix un triangle de Reuleux? Calcula el seu perímetre i la seva àrea.

El triangle de Reuleux és una corba d'amplada constant, és a dir, una corba tal que la separació entre dues rectes paral·leles tangents a la corba és independent de la seva orientació. El triangle de Reuleux es construeix a partir d'un triangle equilàter, del qual anomenem c a la mida del seu costat. Prenem un compàs i punxem a cada vèrtex del triangle equilàter i fem un arc de circumferència de radi c que uneixi els dos vèrtexs oposats. La corba descrita per aquests tres arcs de circumferència és un triangle de Reuleux.



Per calcular el seu perímetre usem la fórmula de la longitud d'un arc de circumferència: un arc de circumferència de radi r i angle α, mesurat en radiants, medeix $\alpha\, r$. El triangle de Reuleux està format per tres arcs de circumferència, tots ells de radi c i angle 60^o, que en radiants és $\pi/3$. Per tant, cada arc medeix $c\pi/3$ i la suma dels tres arcs dóna el perímetre $c\pi$. De fet, notem que c és el diàmetre del triangle de Reuleux, pel que el seu perímetre és el producte del diàmetre per π. Es pot demostrar que aquest fet es dóna en totes les corbes d'amplada constant.

Per calcular la seva àrea, anem a calcular l'àrea del triangle equilàter de costat c. Fent servir el Teorema de Pitàgores amb el triangle que resulta de partir el triangle equilàter inicial per la meitat seguint la línea que defineix la seva altura, trobem que l'altura del triangle equilàter és $h = c\sqrt{3}/2$. Per tant, l'àrea del triangle equilàter és

$$\frac{c}{2} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}.$$

Ara usem la fórmula de l'àrea d'un sector circular de radi r i angle α mesurat en radiants: $\alpha r^2/2$. Per tant, el sector circular que definim per construir un dels tres costats del triangle de Reuleux té àrea

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{c^2}{2} = \frac{c^2\,\pi}{6}.$$

Si a aquest valor li restem l'àrea del triangle equilàter, trobem l'àrea d'una de les figures en forma de lluna que envolten el triangle equilàter fins a la corba que defineix el triangle de Reuleux:

$$\text{àrea lluna} = \frac{c^2\,\pi}{6} - \frac{c^2\sqrt{3}}{4}.$$

L'àrea que envolta el triangle de Reuleux és la suma de les tres llunes i el triangle equilàter interior i dóna

$$3\left(\frac{c^2\,\pi}{6} - \frac{c^2\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{c^2\sqrt{3}}{4}.$$

Simplificant aquesta expressió queda:

$$\frac{c^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right).$$

Es pot demostrar que entre totes les corbes d'amplada constant i mateix diàmetre, el triangle de Reuleux és el que té àrea mínima.

Problema 4. Defineix què és un poliedre arquimedià i descriu-ne almenys un exemple. Cal que donis el nombre i forma de les cares del poliedre que has donat d'exemple. Digues també el nom del poliedre, si el saps. Com és el poliedre dual del que has donat d'exemple? Cal que descriguis amb detall com has construït el dual del poliedre arquimedià que has donat d'exemple. També cal que dibuixis el poliedre arquimedià que has descrit i el seu dual.

Un poliedre és un cos geomètric, la superfície del qual es compon d'una quantitat finita de polígons plans. Aquests polígons no es superposen i els seus costats es troben en els extrems. Els poliedres es poden classificar segons la seva regularitat. Els més regulars són els sòlids platònics que són poliedres convexos formats per polígons regulars iguals en totes les seves cares i que els vèrtexs són homogenis, és a dir, que cada vèrtex es pot transformar en un altre mitjançant una simetria del sòlid. El segon grup per ordre de regularitat són els poliedres arquimedians i es defineixen:

- són convexos;
- tenen totes les cares formades per polígons regulars (amb totes les arestes i els angles iguals)–les cares no tenen perquè ser totes iguals;
- els vèrtex són homogenis, és a dir, per cada parell de vèrtexs hi ha una simetria del sòlid que transforma el primer en el segon. En particular, en els vèrtexs es troben el mateix nombre de cares.

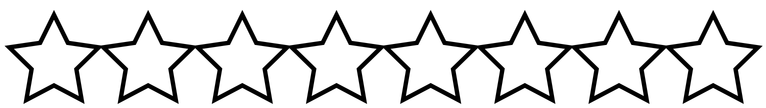
- no són ni un *prisma* ni un *antiprisma*.

De prismes i d'antiprismes n'hi han infinits. De poliedres arquimedians es pot demostrar que n'hi han 13. Es pot trobar una descripció de cadascun dels poliedres arquimedians a: `https://suportdocent.udl.cat/apunts/solids/arquimedians/`

Donat un poliedre convex, definim el seu *poliedre dual* com el poliedre que intercanvia el paper de vèrtexos i cares. És a dir, fem correspondre un vèrtex a cada cara de l'altre i els unim amb una aresta si les cares eren adjacents. També hi ha una descripció dels poliedres duals dels sòlids arquimedians en l'enllaç anterior.

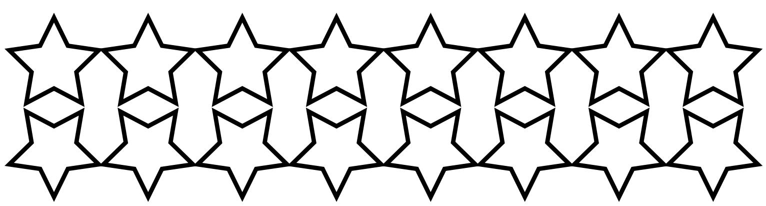
Problema 5. Digues de quin tipus són cadascuna de les quatre sanefes següents i dibuixa sanefes dels tipus que falten, indicant de quin tipus són. Cal que el motiu surti almenys quatre cops en cada sanefa. No cal que el motiu sigui una estrella, pot ser el que tu vulguis.

(a)



És del tipus V.

(b)



És del tipus VHRG.

(c)

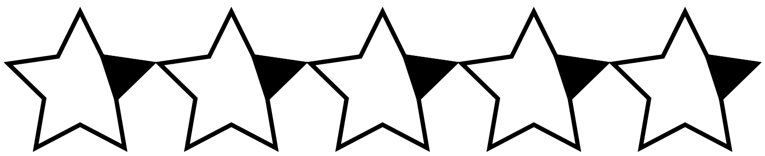
És del tipus R. Observem que no és de tipus G perquè si fem una simetria horitzontal, no hi ha cap distància que puguem traslladar de manera que coincideixin les estrelles tant de dalt com de baix, és a dir, si traslladem una distància podem fer que coicideixin les estrelles de baix, per exemple, però no les de dalt.

(d)

És del tipus VRG.

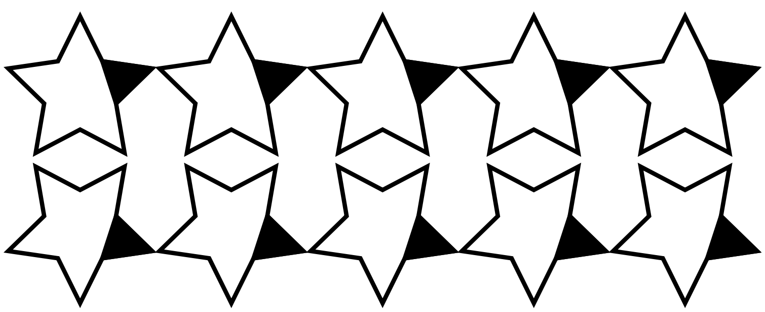
Hem de construir sanefes dels tipus T, G i HG.

La següent sanefa és de tipus T:



La següent sanefa és de tipus G:

La següent sanefa és de tipus HG:



Afegim també una sanefa de tipus R, per distingir entre tipus R i tipus G: