Matemàtiques aplicades a l'art i el disseny digital

Grau en disseny digital i tecnologies creatives

PROVA 1. 5 de Novembre de 2019

1. (3 *punts*) Construïm una espiral amb quarts de circumferència de la forma següent. Considerem uns eixos coordenats i

   - prenem com a centre el punt $(0,0)$ i fem un arc de circumferència de radi 1 de 0^o a 90^o;
   - prenem com a centre el punt $(0,-1)$ i fem un arc de circumferència de radi 2 de 90^o a 180^o;
   - prenem com a centre el punt $(1,-1)$ i fem un arc de circumferència de radi 3 de 180^o a 270^o;
   - prenem com a centre el punt $(1,0)$ i fem un arc de circumferència de radi 4 de 270^o a 360^o;
   - continuem aquest procés prenent arcs que en cada quart de circumferència tinguin el radi una unitat més gran que en l'anterior.

   (a) Dibuixa **dues voltes** de l'espiral anterior, marcant els punts de tall amb el semieix $x > 0$, $y = 0$.

   (b) Suposem que fem 25 voltes de l'espiral anterior, quines són les coordenades del darrer punt?

   (c) Quina és la longitud de l'espiral de 25 voltes anterior?

   (d) Enlloc d'augmentar el radi en 1 en el procés anterior, **multipliquem** el radi per 2 en cada quart de circumferència. Descriu quins serien els centres i els radis de cada quart de circumferència en la primera volta.

   (e) L'espiral anterior també es pot continuar per dins, és a dir, dividint el radi per 2 a cada pas? Quantes voltes podem fer cap endins?

2. (3 *punts*) Considerem un rectangle i el dividim en quatre rectangles iguals, de dues maneres diferents.

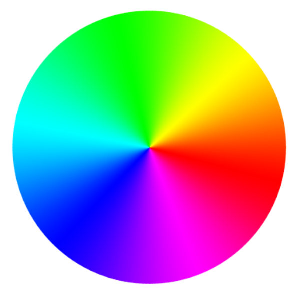
    (a) Fent dos talls en forma de creu.

    (b) Fent tres talls paral·lels al costat curt.

    Respon, per cada manera, si hi ha alguna relació entre la base i l'alçada del rectangle per tal que el rectangle inicial i un dels petits siguin semblants. Si és que sí, digues quina. Si és que no, justifica per quin motiu no n'hi ha.

3. (3 *punts*) Com es defineix l'angle d'or? Dóna exemples en la natura on aparegui aquest angle.

    Isaac Newton va estudiar els colors que conformen el segment de la llum visible de l'espectre solar i els va distribuir en un cercle cromàtic, de manera que el vermell es troba a 0^o i els colors es distribueixen de forma correlativa. D'aquesta manera el matís d'un color es pot identificar de forma numèrica a partir de l'angle que ocupa en el cercle cromàtic. Veure la figura.



Autor de la imatge: The original uploader was MaxPower de Wikipedia en inglés. - Transferido desde en.wikipedia a Commons., CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=343117

    Suposem que volem prendre molts colors contrastats en un disseny, per exemple, per a fer un diagrama de sectors. Podem començar per un color, posem 0^o i girem l'angle d'or (fem 137^o per arrodonir a valors d'angle exactes). D'aquesta manera, prenem la successió d'angles:

$$0^o,\ 137^o,\ 274^o,\ 411^o \sim 51^o,\ 188^o,\ 325^o, \ldots$$

    (a) Quin és el següent angle de la llista?

    (b) Si enlloc de 137^o, prenguessim 90^o, en quin pas trobaríem un matís repetit?

(c) En quin pas trobem un matís repetit prenent 137^o? Raona la teva resposta.

4. (1 *punt*) En quin conjunt hi ha més punts: en una circumferència de radi 1 o en una circumferència de radi 2? En la resposta, cal que usis els conceptes de *cardinal* i *bijecció* tal com els va definir Georg Cantor.

Observacions.-

- Recorda d'escriure el teu nom i cognoms i el teu número de DNI en TOTS els fulls de l'examen.
- Disposes d'una hora i mitja per a realitzar aquesta prova.

Resolució de la Prova 1

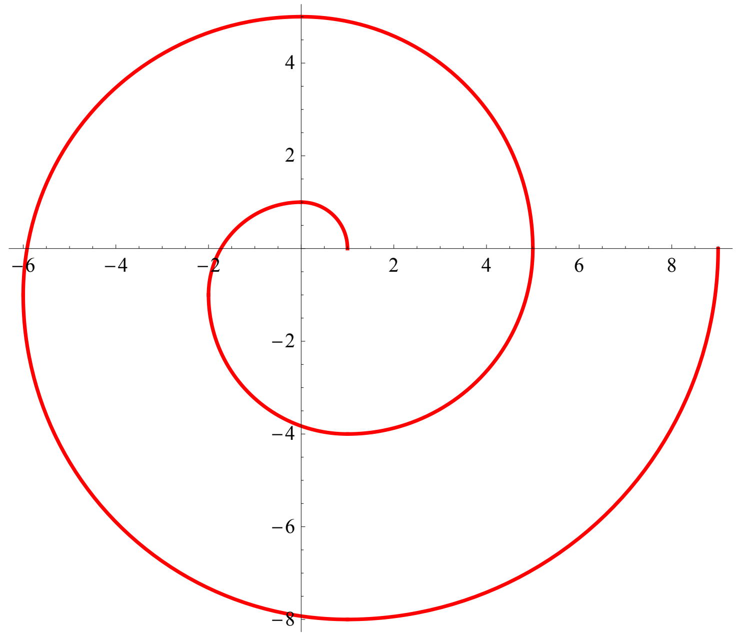
Problema 1. Construïm una espiral amb quarts de circumferència de la forma següent. Considerem uns eixos coordenats i

- prenem com a centre el punt $(0,0)$ i fem un arc de circumferència de radi 1 de 0^o a 90^o;
- prenem com a centre el punt $(0,-1)$ i fem un arc de circumferència de radi 2 de 90^o a 180^o;
- prenem com a centre el punt $(1,-1)$ i fem un arc de circumferència de radi 3 de 180^o a 270^o;
- prenem com a centre el punt $(1,0)$ i fem un arc de circumferència de radi 4 de 270^o a 360^o;
- continuem aquest procés prenent arcs que en cada quart de circumferència tinguin el radi una unitat més gran que en l'anterior.

(a) Dibuixa **dues voltes** de l'espiral anterior, marcant els punts de tall amb el semieix $x > 0$, $y = 0$. En la descripció hi ha la primera volta; la segona volta ve donada per

- prenem com a centre el punt $(0,0)$ i fem un arc de circumferència de radi 5 de 0^o a 90^o;
- prenem com a centre el punt $(0,-1)$ i fem un arc de circumferència de radi 6 de 90^o a 180^o;
- prenem com a centre el punt $(1,-1)$ i fem un arc de circumferència de radi 7 de 180^o a 270^o;
- prenem com a centre el punt $(1,0)$ i fem un arc de circumferència de radi 8 de 270^o a 360^o.

Els punts de tall amb el semieix $x > 0$, $y = 0$ es donen en els punts $(1,0)$, $(5,0)$ i $(9,0)$. La gràfica de l'espiral és:



(b) Suposem que fem 25 voltes de l'espiral anterior, quines són les coordenades del darrer punt? En fer 25 voltes haurem fet 100 arcs de quart de circumferència, pel que el darrer serà prendre com a centre el punt $(1, 0)$ i fem un arc de circumferència de radi 100 de 270^o a 360^o. Aquest arc de circumferència acaba en el punt $(101, 0)$.

(c) Quina és la longitud de l'espiral de 25 voltes anterior? La longitud de cada arc de quart circumferència és

$$\frac{2\pi}{4}\, r \;=\; \frac{\pi}{2}\, r$$

on r és el radi de l'arc. Per tant, la longitud en 25 voltes és:

$$\frac{\pi}{2}\left(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100\right).$$

La suma que s'obté és la suma d'una progressió aritmètica i val

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100 \;=\; \frac{1 + 100}{2}\, 100 \;=\; 101 \cdot 50 \;=\; 5050.$$

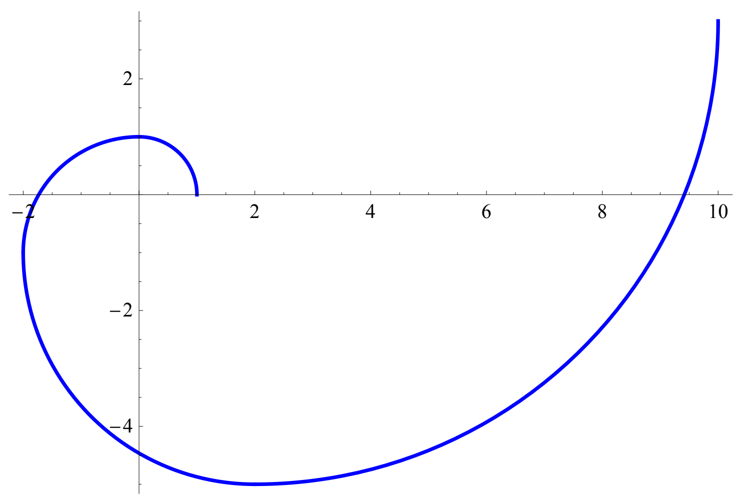
Per tant, la longitud de l'espiral de 25 voltes és

$$\frac{\pi}{2}\, 5050 \;=\; 2525\, \pi.$$

(d) Enlloc d'augmentar el radi en 1 en el procés anterior, **multipliquem** el radi per 2 en cada quart de circumferència. Descriu quins serien els centres i els radis de cada quart de circumferència en la primera volta. Per tal que els arcs de quarts de circumferència de radis 1, 2, 4 i 8 enganxin bé cal prendre els passos següents:

- prenem com a centre el punt $(0, 0)$ i fem un arc de circumferència de radi 1 de 0^o a 90^o;
- prenem com a centre el punt $(0, -1)$ i fem un arc de circumferència de radi 2 de 90^o a 180^o;
- prenem com a centre el punt $(2, -1)$ i fem un arc de circumferència de radi 4 de 180^o a 270^o;
- prenem com a centre el punt $(2, 3)$ i fem un arc de circumferència de radi 8 de 270^o a 360^o.

El resultat d'aquesta espiral és la figura següent:



(e) L'espiral anterior també es pot continuar per dins, és a dir, dividint el radi per 2 a cada pas? Quantes voltes podem fer cap endins? Sí, aquesta espiral també es pot continuar per dins prenent radis cada cop la meitat de l'anterior: 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, ... Cap endins podem fer infinites voltes.

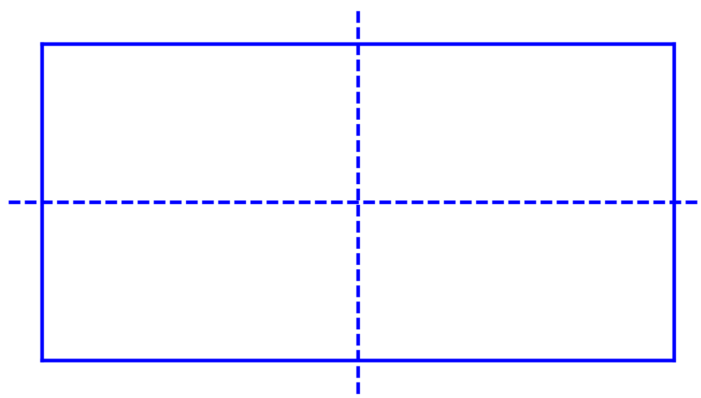
Problema 2. Considerem un rectangle i el dividim en quatre rectangles iguals, de dues maneres diferents.

(a) Fent dos talls en forma de creu.

(b) Fent tres talls paral·lels al costat curt.

Respon, per cada manera, si hi ha alguna relació entre la base i l'alçada del rectangle per tal que el rectangle inicial i un dels petits siguin semblants. Si és que sí, digues quina. Si és que no, justifica per quin motiu no n'hi ha.

Denotem per B la longitud de la base del rectangle inicial i per A la longitud de l'alçada. Observem que si fem dos talls en forma de creu

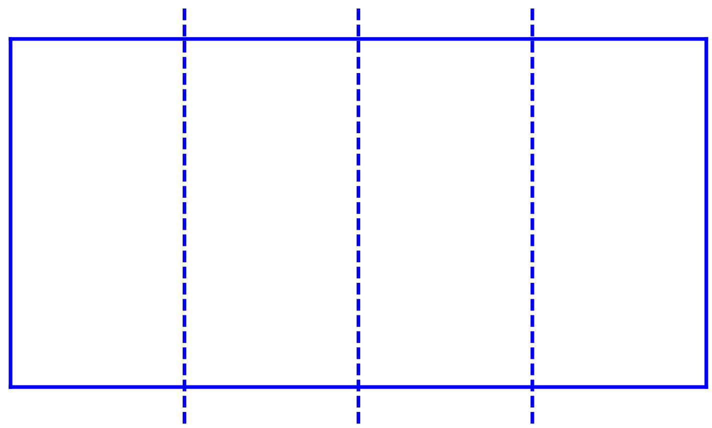


els rectangles petits obtinguts tenen una base que medeix $B/2$ i una alçada que medeix $A/2$. Per tant, el quocient entre la base i l'alçada del rectangle incial B/A coincideix amb el quocient de la base i l'alçada dels rectangles petits ja que

$$\frac{\frac{B}{2}}{\frac{A}{2}} = \frac{B}{A}.$$

Per tant, ja són semblants. Per qualsevol rectangle, si el dividim en quatre d'aquesta manera els rectangles obtinguts són semblants a l'original. Una altra manera de veure-ho és que la diagonal del rectangle original també és la diagonal dels rectangles petits en fer aquest tall en creu.

Si fem tres talls paral·lels al costat curt,



observem que la base dels rectangles petits medeix A i l'alçada medeix $B/4$. Per tant, per tal que els rectangles obtinguts siguin semblants a l'inicial cal que

$$\frac{B}{A} = \frac{A}{\frac{B}{4}}.$$

Si diem $q = B/A$, és a dir $B = qA$, tenim que

$$q = \frac{4}{q},$$

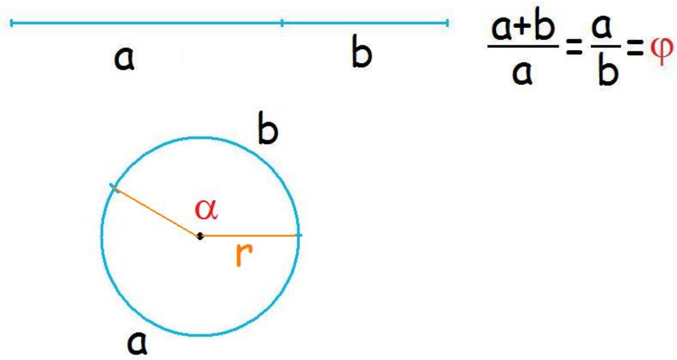
d'on $q^2 = 4$ i, per tant, $q = 2$. Per tal que en fer aquests talls obtinguem rectangles semblants a l'inicial, cal que la base del rectangle inicial medeixi 2 cops l'alçada.

Problema 3. Com es defineix l'angle d'or? Dóna exemples en la natura on aparegui aquest angle.

L'angle d'or es defineix a partir de seccionar una circumferència seguint la raó àurea, és a dir, prenem tota una circumferència i marquem dos arcs consecutius de longituds a i b, amb $a > b$, de manera que $a + b$ és la longitud de tota la circumferència i

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Si es verifica aquesta relació es pot demostrar que $a/b = \varphi$, el nombre d'or. Llavors l'angle d'or és el més petit dels dos angles creats, és a dir, és l'angle corresponent a l'arc b. És l'angle α marcat en la figura següent:



Es pot veure que el seu valor és $(3-\sqrt{5})\pi$ radiants o bé $137.507764\ldots$ graus sexagesimals, i.e.

$$\alpha \approx 137^o\,30'\,28''.$$

La distribució de les fulles que creixen en una branca, els pètals en una flor o les escates d'una pinya segueixen l'angle d'or.

Suposem que volem prendre molts colors contrastats en un disseny, per exemple, per a fer un diagrama de sectors. Podem començar per un color, posem 0^o i girem l'angle d'or (fem 137^o per arrodonir a valors d'angle exactes). D'aquesta manera, prenem la successió d'angles:

$$0^o,\ 137^o,\ 274^o,\ 411^o \sim 51^o,\ 188^o,\ 325^o, \ldots$$

(a) Quin és el següent angle de la llista? Sumem 137^o al darrer angle

$$325^o + 137^0 = 462^o.$$

Com que ens ha donat un resultat major de 360^o, restem 360^o a aquest nombre per obtenir un angle entre 0^o i 360^o

$$462^o - 360^o = 102^o.$$

El següent angle de la llista és 102^o.

(b) Si enlloc de 137^o, prenguessim 90^o, en quin pas trobaríem un matís repetit? El trobaríem al cinquè pas ja que

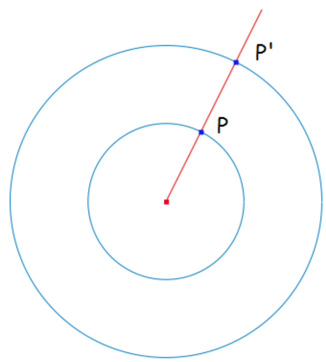
$$0^o, 90^o, 180^o, 270^o, 360^o \sim 0^o.$$

(c) En quin pas trobem un matís repetit prenent 137^o? Raona la teva resposta. No trobem un matís repetit fins al cap del pas 360 ja que el nombre 137 i el nombre 360 són coprimers, és a dir, no comparteixen cap divisor. Per a tenir un múltiple de 360 si anem sumant 137 cal sumar 360 cops.

Problema 4. En quin conjunt hi ha més punts: en una circumferència de radi 1 o en una circumferència de radi 2? En la resposta, cal que usis els conceptes de *cardinal* i *bijecció* tal com els va definir Georg Cantor.

El *cardinal* d'un conjunt és una generalització del concepte de "nombre d'elements" que tenim per un conjunt finit a un conjunt infinit. Es defineix a partir de comparació: dos conjunts tenen el mateix cardinal si tenen el mateix "nombre d'elements". Per veure si dos conjuts tenen el mateix "nombre d'elements" cal demostrar que hi ha una *bijecció* entre ells. Una bijecció és una correspondència que a cada element del primer conjunt li fa correspondre un únic element del segon conjunt i viceversa, és a dir, a cada element del segon conjunt li fa correspondre un element del primer conjunt. Per exemple, es pot demostrar que el cardinal del conjunt dels nombres naturals i del conjunt dels nombres parells és el mateix. A aquest valor infinit se l'anomena $\aleph_0$. En canvi, el conjunt dels nombres reals té un cardinal major que el dels nombres naturals i al seu cardinal se l'anomena $\aleph_1$.

Anem a veure que en una circumferència de radi 1 i en una circumferència de radi 2 hi ha el mateix nombre de punts. Per a fer-ho, hem de definir una bijecció entre aquestes dues corbes. Podem suposar que les dues circumferències són concèntriques i considerar l'aplicació definida per prendre rajos que surten del centre de les circumferències i que fan correspondre entre sí els punts de tall amb les circumferències. Per exemple, fem correspondre els punts P i P' de la figura de sota.



D'aquesta manera, a cada punt de la circumferència de radi 1 li fem correspondre un punt de la circumferència de radi 2 i viceversa. Tenim que els dos conjunts tenen el mateix cardinal, és a dir, el mateix "nombre de punts".