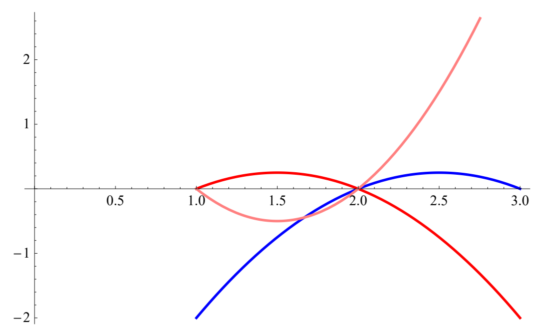
Matemàtiques aplicades a l'art i el disseny digital

Grau en disseny digital i tecnologies creatives

Prova 2. 22 de Gener de 2021

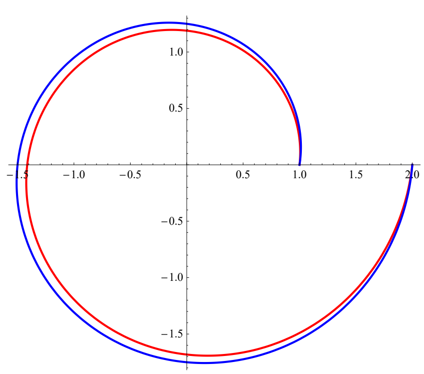
1. (2 *punts*) El següent gràfic mostra la representació de tres de les paràboles següents, totes per x des de 1 fins a 3:

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 3x - 2, \\ y &= 2x^2 - 6x + 4, \\ y &= -x^2 + 5x - 6, \\ y &= -x^2 + 4x - 3. \end{aligned}$$



Digues quina fórmula es correspon a cadascun dels arcs de paràbola representats. Justifica la teva resposta. I representa l'arc de paràbola que no apareix en la figura.

2. (2 *punts*) La gràfica següent mostra dues espirals, una arquimediana i l'altra logarítmica:



Les fórmules, en coordenades polars, d'aquests dos arcs d'espiral són:

$$\begin{aligned} r(\theta) &= 1 + \frac{\theta}{2\pi} && \text{per a } \theta \text{ de } 0 \text{ a } 2\pi, \\ r(\theta) &= 2^{\theta/(2\pi)} && \text{per a } \theta \text{ de } 0 \text{ a } 2\pi. \end{aligned}$$

Recorda que mesurem els angles en radiants.

(a) Si augmentem l'angle (i fem una volta més), quin seria el següent punt de tall amb el semieix horitzontal positiu de cadascuna de les espirals ? Fes un croquis del gràfic resultant per cadascuna de les dues espirals.

(b) Digues quina de les dues fórmules es correspon a l'espiral arquimediana i quina a l'espiral logarítmica. Justifica la teva resposta.

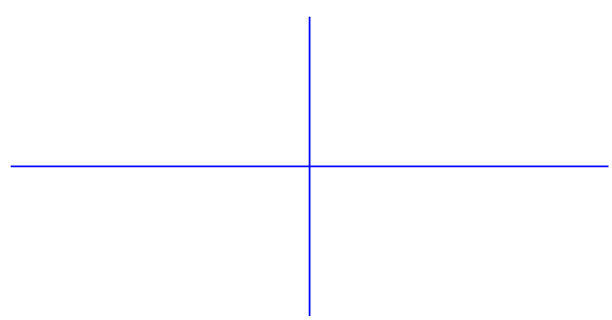
(c) Pots continuar les dues espirals cap endins? Amb quantes voltes cadascuna?

3. (2 *punts*) Descriu la paradoxa de Zenó d'Aquiles i la tortuga. Quin és l'error en el raonament de Zenó? Cal que en la teva descripció donis la fórmula de la suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica i l'apliquis correctament per resoldre la paradoxa.

4. (4 *punts*) Considerem el fractal definit de la forma següent.

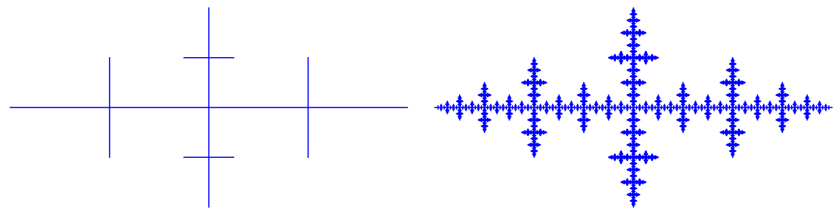
- comencem amb un segment de longitud 2.

- i afegim un segment de longitud meitat i perpendicular en el seu punt mig.



- Repetim el procés en cada segment dels quatre obtinguts.

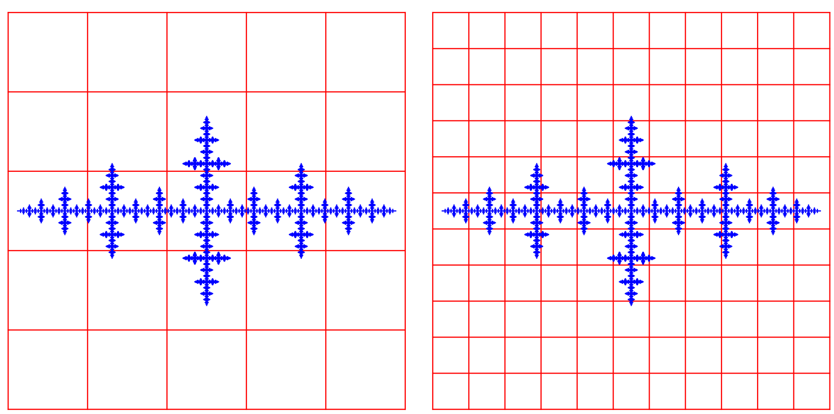
El gràfic de la segona iteració d'aquest procés i el gràfic del fractal resultant del límit del procés iteratiu són les següents:



(a) Representa la tercera iteració d'aquest procés.

(b) Determina la suma de les longituds de totes les rectes de cadascun dels gràfics de la primera, la segona i la tercera iteració.

(c) Calcula aproximacions a la dimensió fractal de l'objecte obtingut mitjançant el mètode de recompte de caixes. Pots fer servir els gràfics següents:



(d) Dóna la definició de dimensió de semblança per a un fractal.

Observacions.-

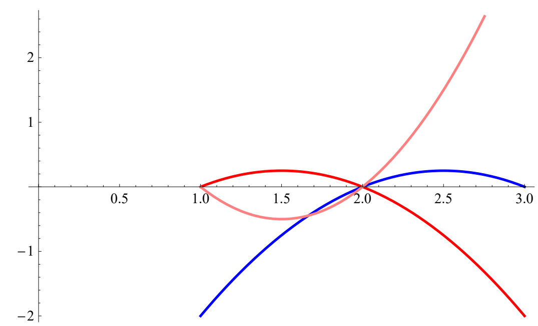
- Recorda d'escriure el teu nom i cognoms i el teu número de DNI en TOTS els fulls de l'examen.

- Disposes d'una hora i mitja per a realitzar aquesta prova.

Resolució de la Prova 2

Problema 1. El següent gràfic mostra la representació de tres de les paràboles següents, totes per x des de 1 fins a 3:

$$\begin{aligned} y &= -x^2+3x-2, \\ y &= 2x^2-6x+4, \\ y &= -x^2+5x-6, \\ y &= -x^2+4x-3. \end{aligned}$$



Digues quina fórmula es correspon a cadascun dels arcs de paràbola representats. Justifica la teva resposta. I representa l'arc de paràbola que no apareix en la figura.

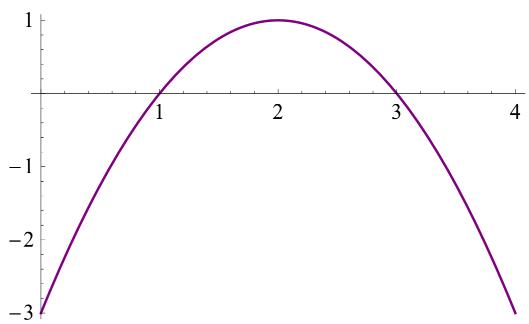
Mirem quines de les paràboles anteriors passen pel punt $(1,0)$. Per la primera fórmula, tenim que quan $x=1$ es té que $y=-1+3-2=0$. Per tant, sí que passa pel punt $(1,0)$. Per la segona fórmula, tenim que quan $x=1$ es té que $y=2-6+4=0$. També passa pel punt $(1,0)$. Per la tercera fórmula, es té que en substituir x per 1 dóna $y=-1+5-6=-2$, pel que no passa pel punt $(1,0)$. I per la quarta fórmula, tenim que quan $x=1$ trobem $y=-1+4-3=0$ i, per tant, passa pel punt $(1,0)$. La paràbola blava no passa pel punt $(1,0)$ pel que concloem que la paràbola blava es correspon a la fórmula tercera $y = -x^2+5x-6$.

Observem ara que una paràbola còncava té el coeficient de x^2 positiu i una de convexa té el coeficient de x^2 negatiu. De les tres expressions que ens queden, només n'hi ha una que sigui còncava i, per tant, es correspon a la paràbola de color rosa; és la segona fórmula $y = 2x^2-6x+4$.

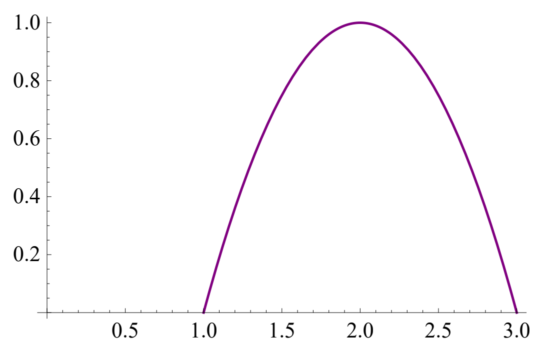
De les dues expressions que ens queden, mirem en quin punt tenen el extrem. Recordem que per una paràbola d'expressió $y=ax^2+bx+c$, on a, b i c són nombres reals, el punt extrem es troba en l'abcissa $x=-b/(2a)$. El punt extrem de la primera fórmula, $y = -x^2+3x-2$, es troba en l'abcissa $x=-3/(-2)=3/2=1.5$ i el punt extrem de la darrera fórmula, $y = -x^2+4x-3$, es troba en l'abcissa $x=-4/(-2)=2$. Per tant, com que el punt extrem de la paràbola vermella es troba entre 1 i 2, concloem que la paràbola vermella és la corresponent a la primera fórmula $y = -x^2 + 3x - 2$ i queda per representar la paràbola d'expressió $y = -x^2 + 4x - 3$ (la darrera fórmula). Per representar aquesta paràbola, sabem que és convexa i que el seu punt extrem es troba en l'abcissa $x = 2$. Avaluem en aquest valor i trobem que $y = -4 + 8 - 3 = 1$. Per tant, el seu punt extrem es troba en $(2, 1)$. Ara avaluem a l'esquerra i la dreta d'aquest punt i trobem la següent taula de valors:

x	$y = -x^2 + 4x - 3$
0	-3
1	0
2	1
3	0
4	-3

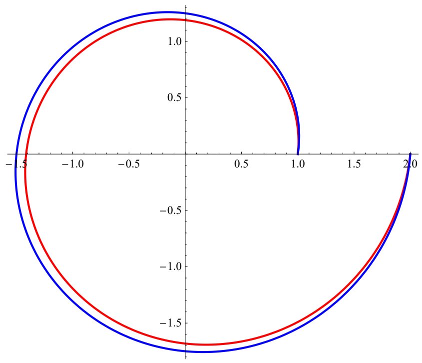
La seva representació gràfica és la següent:



i si només pintem l'arc corresponent a x des de 1 fins a 3 obtenim



Problema 2. La gràfica següent mostra dues espirals, una arquimediana i l'altra logarítmica:



Les fórmules, en coordenades polars, d'aquests dos arcs d'espiral són:

$$r(\theta) \;=\; 1 + \tfrac{\theta}{2\pi} \qquad \text{per a } \theta \text{ de } 0 \text{ a } 2\pi,$$
$$r(\theta) \;=\; 2^{\theta/(2\pi)} \qquad \text{per a } \theta \text{ de } 0 \text{ a } 2\pi.$$

Recorda que mesurem els angles en radiants.

(a) Si augmentem l'angle (i fem una volta més), quin seria el següent punt de tall amb el semieix horitzontal positiu de cadascuna de les espirals? Fes un croquis del gràfic resultant per cadascuna de les dues espirals.

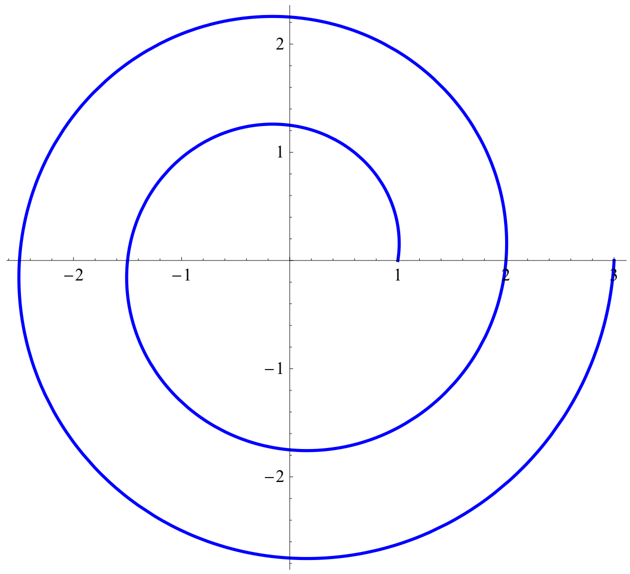
Fer una volta més vol dir que considerem θ de 0 a 4π (la primera volta és de 0 a 2π i la segona volta de 2π a 4π). Observem que la primera espiral, $r(\theta) = 1 + \frac{\theta}{2\pi}$, quan $\theta = 4\pi$ dóna

$$r(4\pi) \;=\; 1 + \frac{4\pi}{2\pi} \;=\; 1 + 2 \;=\; 3.$$

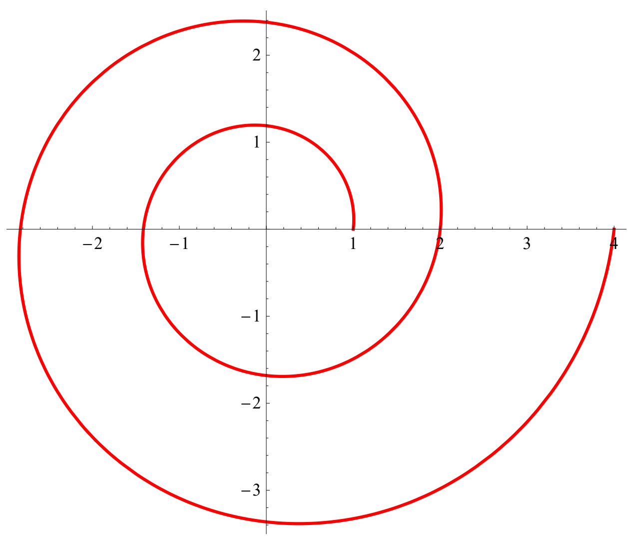
Per tant, talla en el punt $(3, 0)$ al final de la segona volta. La segona espiral, $r(\theta) = 2^{\theta/(2\pi)}$, quan $\theta = 4\pi$ dóna

$$r(4\pi) \;=\; 2^{(4\pi)/(2\pi)} \;=\; 2^2 \;=\; 4.$$

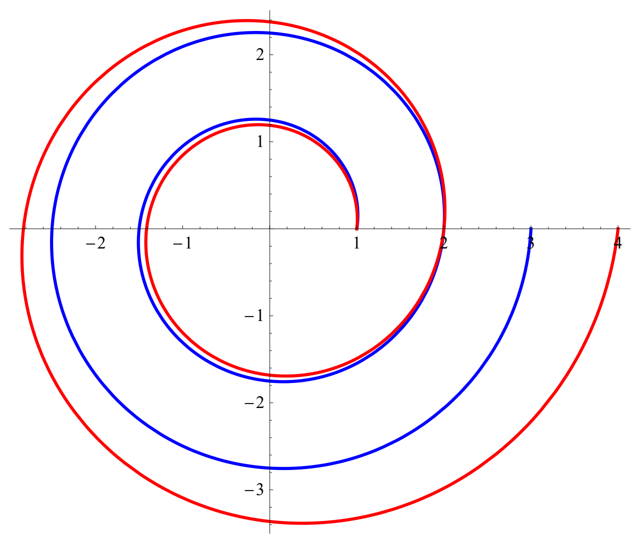
Per tant, talla en el punt $(4, 0)$ al final de la segona volta. La gràfica de dues voltes de la primera espiral, $r(\theta) = 1 + \frac{\theta}{2\pi}$ per θ de 0 a 4π, és:



La gràfica de dues voltes de la segona espiral, $r(\theta) = 2^{\theta/(2\pi)}$ per θ de 0 a 4π, és:



I la gràfica d'ambdues espirals (dues voltes) és:



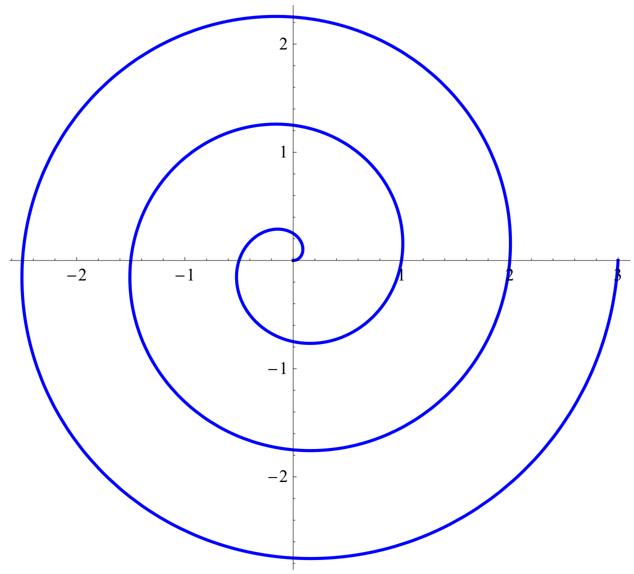
(b) Digues quina de les dues fórmules es correspon a l'espiral arquimediana i quina a l'espiral logarítmica. Justifica la teva resposta.

L'espiral arquimediana es correspon a la fórmula $r(\theta) = 1 + \frac{\theta}{2\pi}$ perquè la fórmula, en coordenades polars, d'una espiral arquimediana és de la forma $r(\theta) = a + b\theta$ on a i b són nombres reals. A més, veiem que els punts de tall amb el semieix horitzontal positiu són 1, 2 i 3, que són els primers termes d'una progressió aritmètica.

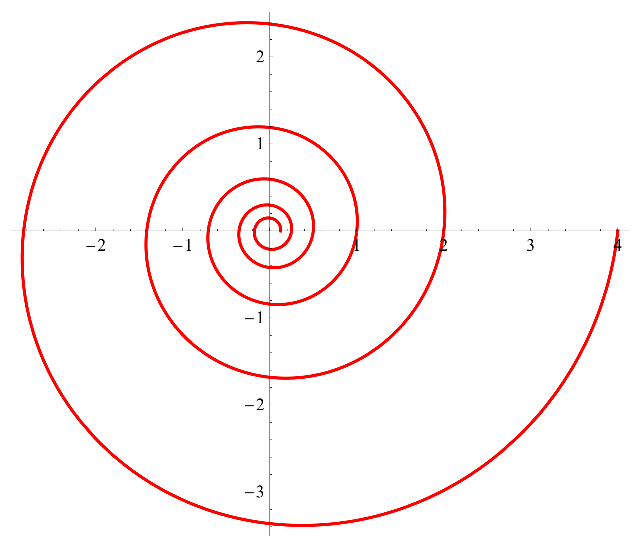
L'altra fórmula, $r(\theta) = 2^{\theta/(2\pi)}$, per tant, es correspon a una espiral logarítmica. Les espirals logarítmiques en coordenades polars s'expressen de la forma $r(\theta) = a\, b^{\theta}$ on a i b són nombres reals. A més, veiem que els punts de tall amb el semieix horitzontal positiu són 1, 2 i 4, que són els primers termes d'una progressió geomètrica.

(c) Pots continuar les dues espirals cap endins? Amb quantes voltes cadascuna?

L'espiral arquimediana (en blau) només es pot continuar cap endins mentre el valor de r sigui positiu. En aquest cas, veiem que només podem fer una volta cap endins corresponent a θ entre -2π i 0. El gràfic d'aquesta espiral, $r(\theta) = 1 + \frac{\theta}{2\pi}$, per θ de -2π a 4π és el següent:



L'espiral logarítmica (en vermell) es pot continuar endins amb infinites voltes, ja que la seva expressió sempre té $r > 0$ i no toca mai el valor 0. El gràfic d'aquesta espiral, $r(\theta) = 2^{\theta/(2\pi)}$, per θ de -6π a 4π és el següent:



Problema 3. Descriu la paradoxa de Zenó d'Aquiles i la tortuga. Quin és l'error en el raonament de Zenó? Cal que en la teva descripció donis la fórmula de la suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica i l'apliquis correctament per resoldre la paradoxa.

Les paradoxes de Zenó són situacions que són absurdes i tantmateix semblen raonables. Va intentar mostrar, mitjançant paradoxes, que la realitat és una i invariable i que tot moviment és il·lusori. La paradoxa d'Aquiles i la tortuga presenta una cursa en la que l'home més ràpid (Aquiles) s'enfronta a l'animal més lent, la tortuga. Aquiles dóna una avantatge inicial a la tortuga i, seguint el raonament de Zenó, Aquiles mai pot atrapar a la tortuga per la que aquesta guanyaria la cursa. El raonament de Zenó és que quan comencen a córrer ambdós personatges, Aquiles necessita un cert temps per arribar a la posició en la que havia començat la tortuga. Durant aquest temps, la tortuga ha recorregut un cert espai i, per tant, encara va per davant d'Aquiles. Llavors Aquiles continua corrent i arriba en aquesta segona posició de la tortuga, però mentrestant la tortuga també ha avançat la seva posició i, per tant, encara va per davant d'Aquiles. Aquest procés es pot repetir infinits cops i en tots ells la tortuga va per davant d'Aquiles. Posem valors a aquest raonament: suposem que tenim un recorregut de $100\,m$ per arribar a la meta. Suposem que Aquiles corre a $10\,m/s$ i la tortuga a $5\,m/s$ (són valors inventats). Suposem que Aquiles dóna un avantatge de $10\,m$ a la tortuga. Així, en el moment inicial, el comptador de temps està a 0, tenim que Aquiles està en la posició 0 i la tortuga en la posició 10. Al cap d'1 segon, Aquiles arriba a la posició 10 i, en aquest temps, la tortuga arriba a la posició 15. Al cap de mig segon més, Aquiles arriba a la posició 15 i, en aquest temps, la tortuga arriba a la posició 17.5. Al cap d'un quart de segon, Aquiles arriba a la posició 17.5 i la tortuga, en aquest temps, arriba a la posició 18.75. I així, podem definir infinits intervals de temps (cadascun la meitat de l'anterior) de manera que Aquiles arriba a la posició anterior de la tortuga i aquesta ha avançat un cert espai (cada cop més petit). Podem veure alguns d'aquests càlculs en la taula següent:

Temps (en segons)	Posició A	Posició T	diferència
$t = 0$	0	10	10
$t = 1$	10	15	$5 = 10/2$
$t = 1 + 1/2$	15	17.5	$2.5 = 10/4$
$t = 1 + 1/2 + 1/4$	17.5	18.75	$1.25 = 10/8$
$t = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8$	18.75	19.375	$0.625 = 10/16$

Així, en el instant de temps

$$t \;=\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n},$$

la diferència entre les posicions d'Aquiles i la tortuga és $\dfrac{10}{2^{n+1}}$.

Ens adonem que l'instant de temps

$$t = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n},$$

és la suma dels termes d'una progressió geomètrica de raó 1/2. La fórmula de la suma dels primers termes d'una progressió geomètrica de raó r és:

$$\frac{(\text{darrer terme}) * \text{raó} - (\text{primer terme})}{\text{raó} - 1}.$$

Per tant, en el nostre cas

$$t = \frac{(1/2^n)(1/2) - 1}{1/2 - 1} = \frac{1/(2^{n+1}) - 1}{-1/2} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

En aquest valor del temps tenim que la diferència entre les posicions d'Aquiles i la tortuga és $10/2^{n+1}$. Així, quan n tendeix a infinit, veiem que t tendeix al valor 2 i la diferència entre les posicions d'Aquiles i la tortuga tendeix a zero. Acabem de provar que al cap de 2 segons, Aquiles aconsegueix a la tortuga i, a partir d'aquest moment la passa i guanya la cursa. De fet, Aquiles tarda 10 segons en recórrer els $100\,m$ del recorregut i la tortuga tarda 18 segons a recórrer els $90\,m$ del recorregut que ha de fer descomptant l'avantatge inicial.

L'error en l'argument de Zenó és que ell suposava que la suma d'un nombre infinit de valors positius, siguin els que siguin, val infinit. Amb la idea de límit, hem vist que aquesta frase és falsa. Per exemple, la suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica de raó r, amb $|r| < 1$, val

$$\frac{(\text{primer terme})}{1 - r}.$$

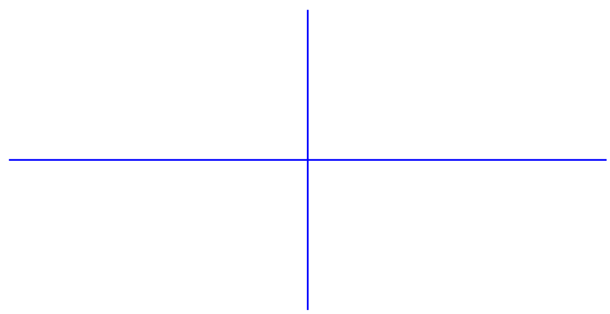
Així, la suma dels infinits termes de la progressió geomètrica de primer terme 1 i raó 1/2 val:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \ldots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2.$$

Problema 4. Considerem el fractal definit de la forma següent.

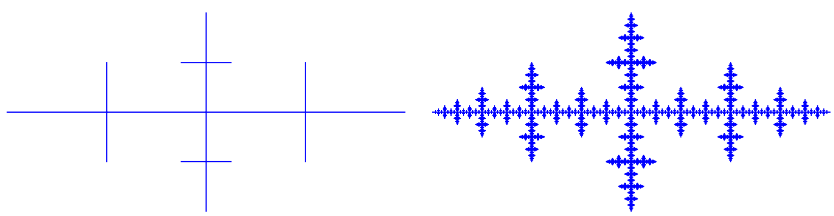
- comencem amb un segment de longitud 2.

- i afegim un segment de longitud meitat i perpendicular en el seu punt mig.

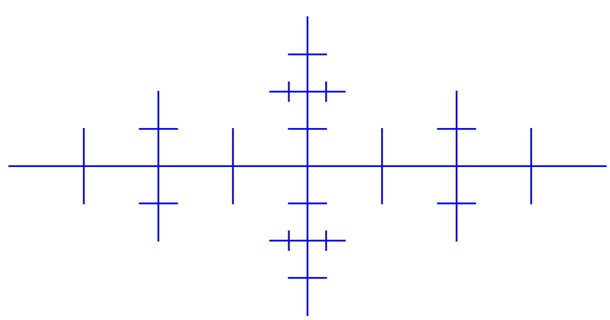


- Repetim el procés en cada segment dels quatre obtinguts.

El gràfic de la segona iteració d'aquest procés i el gràfic del fractal resultant del límit del procés iteratiu són les següents:

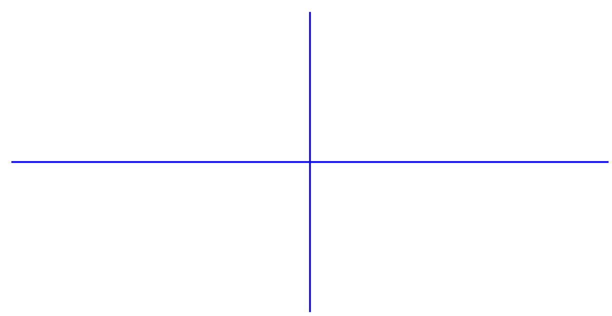


(a) Representa la tercera iteració d'aquest procés. Hem d'afegir segments perpendiculars i de la meitat de longitud en tots els segments de la figura de la segona iteració i el resultat és el següent:



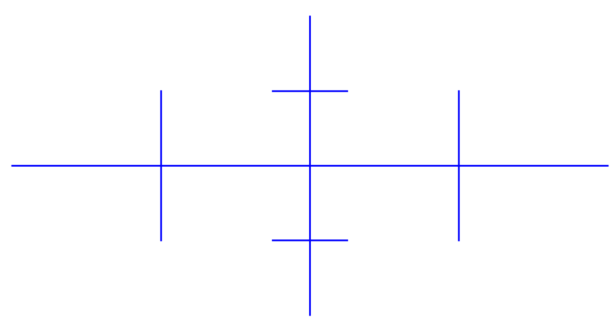
(b) Determina la suma de les longituds de totes les rectes de cadascun dels gràfics de la primera, la segona i la tercera iteració.

En la primera iteració tenim una creu feta per dos segments: un de longitud 2 i l'altre de longitud 1.



Per tant, la suma de les longituds és 3.

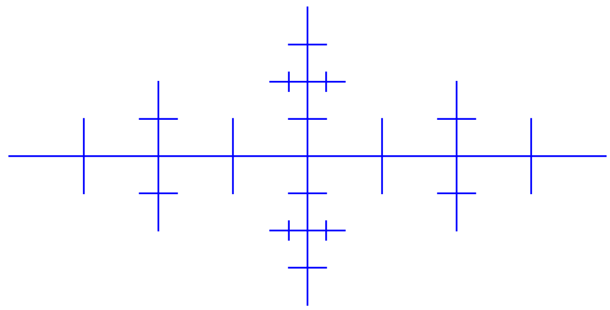
En la segona iteració hem afegit dos segments de longitud 1/2 i dos segments de longitud 1/4.



Per tant, la suma de longituds és

$$2 + 1 + 2\,\frac{1}{2} + 2\,\frac{1}{4} = \frac{9}{2} = 4.5.$$

En la tercera iteració hem afegit 4 segments de longitud 1/4 (tots en vertical), 8 segments de longitud 1/8 (tots en horitzontal) i 4 segments de longitud 1/16 (tots en vertical).

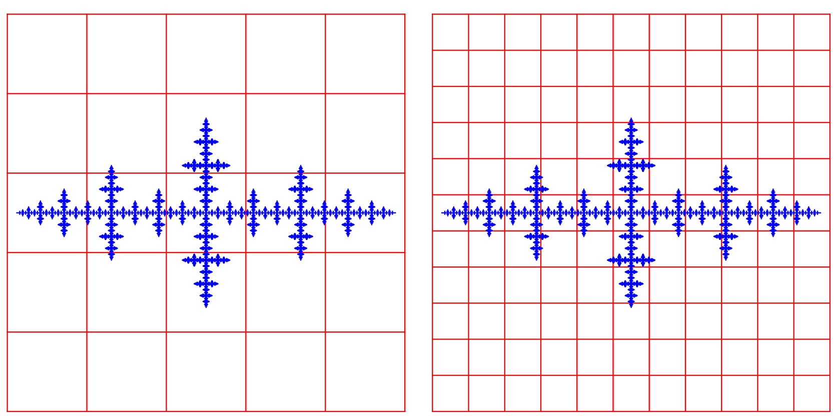


Per tant, la suma de longituds és

$$\frac{9}{2} + 4\,\frac{1}{4} + 8\,\frac{1}{8} + 4\,\frac{1}{16} = \frac{27}{4} = 6.75.$$

Veiem que aquests valors 3, 4.5 i 6.75 són els primers termes d'una progressió geomètrica de raó 1.5.

(c) Calcula aproximacions a la dimensió fractal de l'objecte obtingut mitjançant el mètode de recompte de caixes. Pots fer servir els gràfics següents:



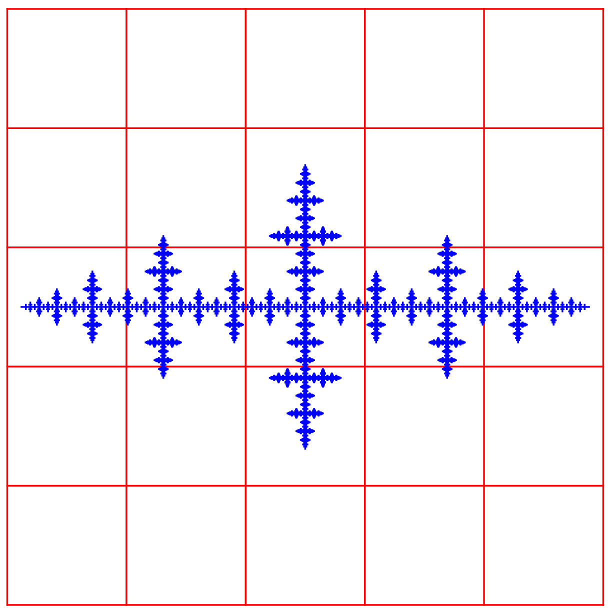
El métode de recompte de caixes ens permet calcular aproximacions a la dimensió fractal de la manera següent. Considerem una quadrícula amb n quadradets per costat que cobreixi el fractal i calculem el nombre $N(n)$ de quadradets ocupats pel fractal. Calculem el quocient

$$\frac{\ln N(n)}{\ln n}.$$

En augmentar la n aquest valor s'aproxima al valor de la dimensió fractal, de manera que

$$\text{dimensió fractal} = \text{límit}\,\frac{\ln N(n)}{\ln n} \quad \text{quan } n \text{ tendeix a } +\infty.$$

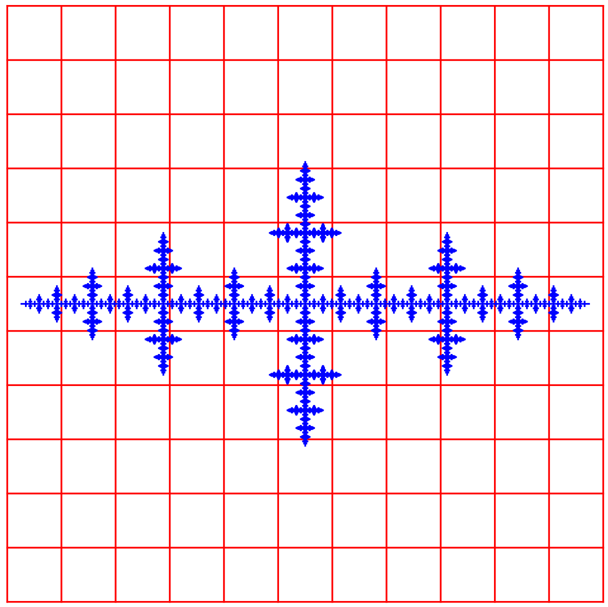
En el primer gràfic



tenim una quadrícula de 5 quadradets a cada costat i el fractal ocupa 11 d'aquests, pel que $N(5) = 11$. Aleshores, el quocient dóna

$$\frac{\ln 11}{\ln 5} = 1.4899\ldots$$

En el segon gràfic



tenim una quadrícula de 11 quadradets a cada costat i el fractal ocupa 33 d'aquests, pel que $N(11) = 33$. Aleshores, el quocient dóna

$$\frac{\ln 33}{\ln 11} = 1.45816\ldots$$

(d) Dóna la definició de dimensió de semblança per a un fractal.

La dimensió de semblança es defineix per a fractals perfectament autosemblants de la manera següent: dividim un costat del fractal en k trossos i obtenim p peces semblants. Aleshores la dimensió de semblança es calcula amb el quocient:

$$\text{dimensió de semblança} = \frac{\ln p}{\ln k}.$$