João Felipe V.

Solução da equação da onda por meio de um ansatz.

Exercício 3a

$u(0,t) = 0$, $u(L,t) = 0$ (BVP)

(I) Ansatz: $u(x,t) = \phi(x) e^{i\omega t}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(Outra forma também é possível para Fourier).

(II) $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi(x) e^{i\omega t}\right) = i\omega \phi(x) e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(i\omega \phi(x) e^{i\omega t}\right) = -\omega^2 \phi e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi(x) e^{i\omega t}\right) = \frac{\partial \phi}{\partial x} e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} e^{i\omega t}\right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} e^{i\omega t}$$

(III) O que nos leva a

$$c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cancel{e^{i\omega t}} = -\omega^2 \phi \cancel{e^{i\omega t}}$$

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \alpha \phi(x) \quad \text{, onde} \quad \alpha = \frac{\omega^2}{c^2}$$

(IV) Há várias formas de resolver, como por exemplo Laplace ou a teoria conhecida para E.D.O linear de segunda ordem.

(v) Optamos por fazer a partir de uma eq. característica:

$$\lambda^2 + w^2 = 0,$$

cuja raiz é negativa e é dada por

$$\lambda = \pm \underbrace{w}_{\beta} i$$

(VI) Assim, pela solução conhecida para $\lambda < 0$, temos que

$$\phi(x) = e^{\hat{\alpha} t} \left[A \cos(\beta x) + B \operatorname{sen}(\beta x) \right]$$

$$\phi(x) = A \cos(w x) + B \operatorname{sen}(w x).$$

(VII) Aplicando as condições de contorno, temos que,

$$u(0, t) = \phi(0) e^{iwt} = 0 \Rightarrow \phi(0) = 0$$
$$u(L, t) = \phi(L) e^{iwt} = 0$$

e assim

$$A = 0.$$

(VIII) Portanto,

$$\boxed{\phi(x) = B \operatorname{sen}(w x).}$$

Exercício 36

Pela equação encontrada, temos que

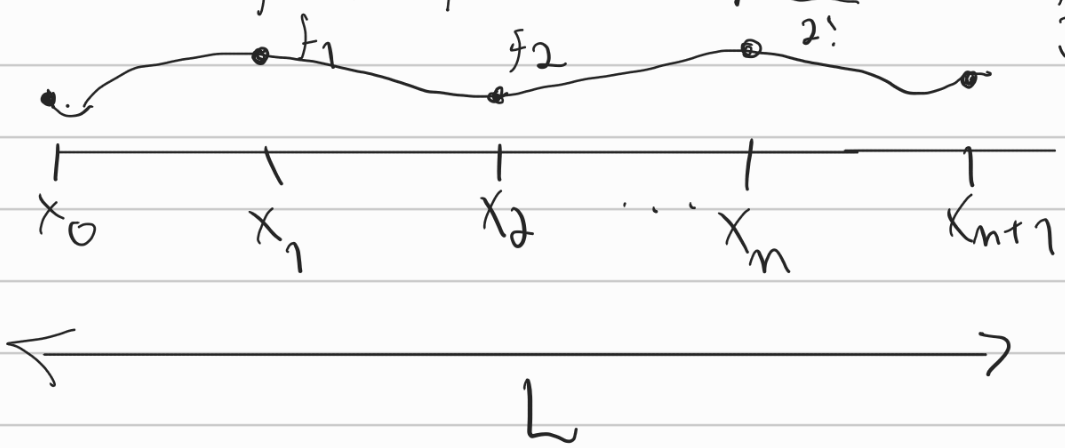
$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \alpha \phi(x),$$

O que se trata de uma eq. de autovetores e autovalores.

(1) Utilizando diferenças finitas, podemos representar o operador d^2/dx^2 na forma de uma matriz. Para isso, é feito a expansão em série de Taylor de $f(x+\Delta x)$ para $\Delta x \to 0$

(eq. 1) $$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)\Delta x^2}{2!} + \frac{f'''\Delta x^3}{3!} + \dots + O(\varepsilon_1)$$

(eq. 2) $$f(x-\Delta x) \approx f(x) - f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)\Delta x^2}{2!} - \frac{\Delta x^3 f'''(x)}{3!} + O(\varepsilon_2)$$



$$\Delta x = \frac{L}{N+1}$$

Derivada para frente:

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

Derivada para trás:

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$$

Derivada simétrica

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$

Somando a (eq. 1) e (eq. 2) obtemos que

$$f(x+\Delta x) + f(x-\Delta x) = 2f(x) + f''(x)\Delta x^2 + \overbrace{O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_2)}^{\text{Erro}}$$

Assim,

$$f''(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2}$$

ou também

$$f''_m = \frac{f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1}}{\Delta x^2}$$

Com isso, podemos representar matricialmente como

$$(Au)_i = \frac{1}{\Delta x^2}\left(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}\right)$$

onde

$$A_{ij} = \begin{cases} -2/h^2, & i = j \\ 1/h^2, & i = j+1 \text{ ou } i = j-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} + \overset{0}{\cancel{\frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \\ \vdots \\ f_{m+1} \end{pmatrix}}}$$

$$\downarrow$$

$$f_0 = f_{m+1} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

Para a equação da onda, temos que

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) = \alpha\, y(x),$$

$$-\frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha \Delta x^2\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}}$$