

# Sonnenkompass

Jürgen Womser-Schütz, <https://github.com/JW-Schuetz/Hobby>

## 1 Fragestellung

Wie genau ist die bekannte Methode, die Nord-Richtung per Sonnenstand zu bestimmen?

## 2 Methodenbeschreibung

- einen Stab senkrecht in die Erde stecken
- das Ende des Schattens des Stabes mit einem Stein markieren
- einige Zeit abwarten bis der Stabschatten weiter gewandert ist
- das neue Schattenende des Stabes mit einem zweiten Stein markieren.

Man erhält die Nordrichtung mittels der folgenden Regeln

- R1: der Schatten des Stab-Endes bewegt sich auf der Verbindungsgeraden der beiden Steine
- R2: die Nordrichtung ist orthogonal zur Verbindungsgeraden
- R3: auf der Nordhalbkugel der Erde zeigt der Schatten Richtung Norden, auf der Südhalbkugel Richtung Süden.

## 3 Problemformulierung

Es werden kartesische Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  verwendet, wobei das Koordinatenpaar  $(x_1, x_2)$  die Ekliptikalebene aufspannt, der Ursprung des Koordinatensystems ist der Erdmittelpunkt (siehe dazu die Problemskizzen in Abbildungen 1, ??).

Es werden die folgenden Annahmen getroffen:

- der Zeitpunkt im Jahr sei die Sommersonnenwende
- die Sonne im Punkt  $\underline{S}$  sei durch einen Punktstrahler darstellt
- die Sonne habe den Abstand  $R_S$  von der Erde
- die Erde habe ideale Kugelgestalt mit dem Radius  $R_E$
- die Erd-Rotationsachse habe einen Neigungswinkel  $\psi$  zur  $x_3$ -Achse
- im Punkt  $\underline{P}$  der Erdoberfläche befinde sich der Fusspunkt des Stabes der Länge  $L$
- die Erdoberfläche um den Fusspunkt des Stabes herum werde durch eine Tangentialebene an die Erdkugel angenähert.

Die Methode wird allerdings in der Nähe der Pole scheitern, da das Stabende dort keinen Schatten mehr wirft.

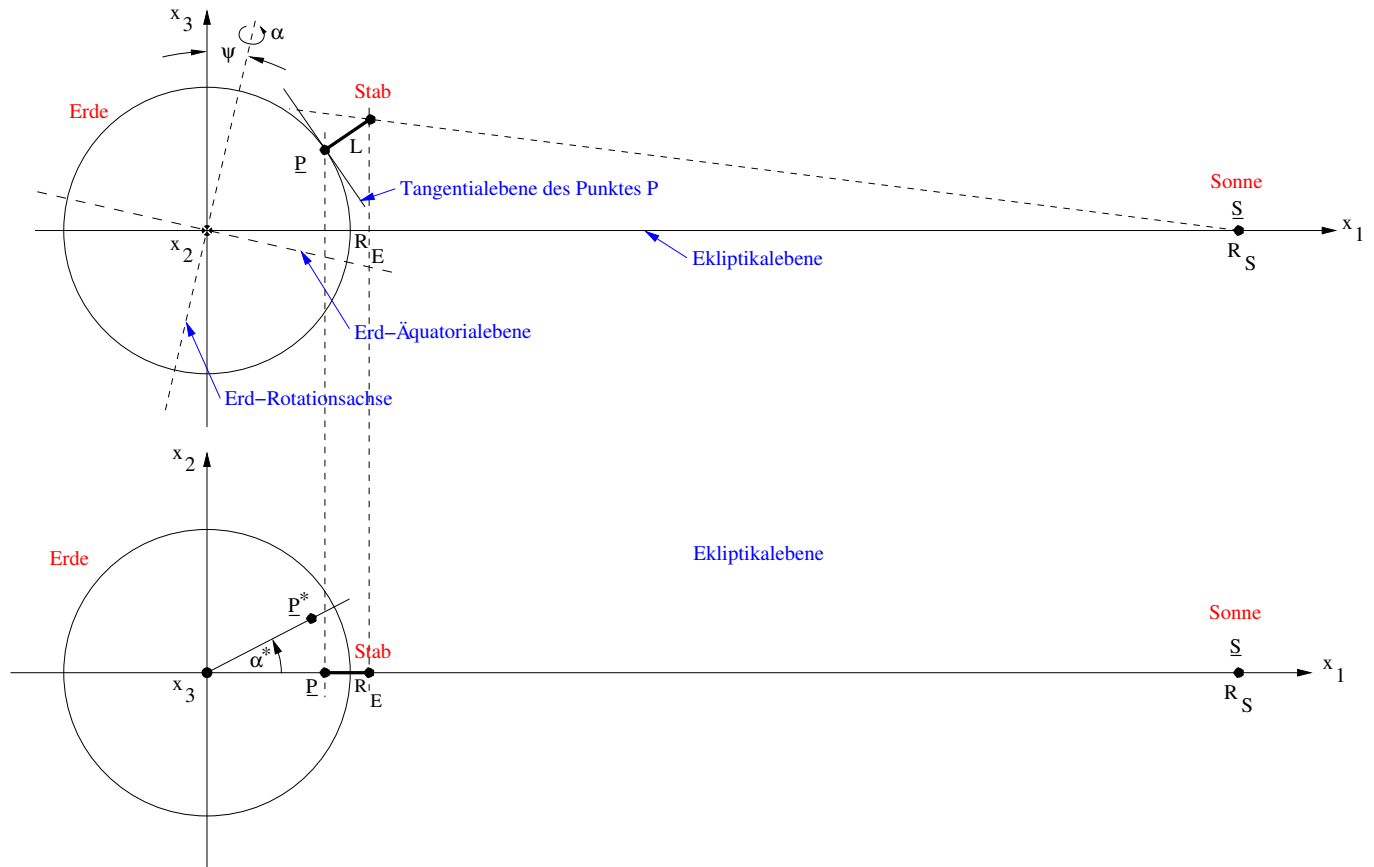


Abbildung 1: Nicht massstäbliche Problemskizze (Sommersonnenwende)

## 4 Vereinbarungen

Im folgenden werden zum Verständnis Basiskonzepte der Geometrie und der linearen Algebra vorausgesetzt.

Vektoren werden durch einen Unterstrich kenntlich gemacht ( $\underline{x}$ ) und ihre Transponierten ( $\underline{x}^T$ ) durch ein hochgestelltes  $T$ . Matrizen werden nicht besonders bezeichnet.

## 5 Lösung

Zur Unterstützung der Problemlösung wird MatLab und seine „Symbolic Math Toolbox“ verwendet, die MatLab-Quellen finden sich im GitHub-Unterverzeichnis „Matlab-Sources“.

Gesucht wird die Trajektorie des Schattens des Stabendes auf der Tangentialebene in Abhängigkeit des Erd-Rotationswinkels  $\alpha$ .

Es sind zwei äquivalente Lösungsansätze denkbar, die Erdrotation zu berücksichtigen

- Die mit der Erde verbundenen Orte um den Winkel  $\alpha$  zu rotieren und die Sonne fixiert lassen.
- Den Ort der Sonne um den Winkel  $-\alpha$  zu rotieren und die mit der Erde verbundenen Orte fixiert lassen.

Im folgenden wird der zweite Fall gewählt.

## 6 Erdrotation

Die Rotation der Erde um ihre Rotationsachse wird in Abhängigkeit des Rotationswinkels  $\alpha \in [0, 2\pi]$  durch die Drehmatrix

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} e_1^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & e_1 e_2 (1 - \cos \alpha) - e_3 \sin \alpha & e_1 e_3 (1 - \cos \alpha) + e_2 \sin \alpha \\ e_2 e_1 (1 - \cos \alpha) + e_3 \sin \alpha & e_2^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & e_2 e_3 (1 - \cos \alpha) - e_1 \sin \alpha \\ e_3 e_1 (1 - \cos \alpha) - e_2 \sin \alpha & e_3 e_2 (1 - \cos \alpha) + e_1 \sin \alpha & e_3^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \end{pmatrix}$$

beschrieben, dabei ist

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

ein Einheitsvektor, der Richtung und Orientierung der Rotationsachse definiert (siehe dazu z.B. [1]).

In dieser Arbeit soll der Zeitpunkt der Sommersonnenwende betrachtet werden, d.h. die Rotationsachse soll, so wie in Abbildung 1 dargestellt, in der  $(x_1, x_3)$ -Ebene liegen. Der Einheitsvektor ist somit durch

$$\begin{aligned} e_1 &= \sin \psi \\ e_2 &= 0 \\ e_3 &= \cos \psi. \end{aligned} \tag{1}$$

gegeben und für die Drehmatrix folgt schliesslich

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \sin^2 \psi (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & -\cos \psi \sin \alpha & \sin \psi \cos \psi (1 - \cos \alpha) \\ \cos \psi \sin \alpha & \cos \alpha & -\sin \psi \sin \alpha \\ \cos \psi \sin \psi (1 - \cos \alpha) & \sin \psi \sin \alpha & \cos^2 \psi (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Die Drehmatrix ist orthogonal, d.h. es gilt mit der Einheitsmatrix  $E$

$$D_\alpha^T D_\alpha = E.$$

Der Winkel  $\psi$  hat den numerischen Wert [2]

$$\psi = 23.44^\circ. \tag{3}$$

Für 12 Uhr mittags soll  $\alpha = 0$  gelten.

## 7 Fusspunkt des Stabes

Der Ort  $\underline{P}_G = (p_1, p_2, p_3)^T$  des Fusses des Stabes bestimmt sich aus der geographischen Breite  $\Theta$ , der geographischen Länge  $\varphi$ , dem Erdradius  $R_E$  und dem Achsneigungswinkel nach Gleichung  $\psi$  (3) zu (siehe dazu z.B. [4])

$$\underline{P}_G = \begin{pmatrix} p_1^G \\ p_2^G \\ p_3^G \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} p_1^G &= R_E \sin(\Theta - \psi) \cos \varphi \\ p_2^G &= R_E \sin(\Theta - \psi) \sin \varphi \\ p_3^G &= R_E \cos(\Theta - \psi). \end{aligned}$$

Im Kugelkoordinatensystem gilt wegen der Umrechnung der geographischen Breite (siehe dazu z.B. [4])

$$\Theta - \psi \longrightarrow \frac{\pi}{2} - \Theta + \psi$$

für den Fusspunkt

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

mit

$$\begin{aligned} p_1 &= R_E \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Theta + \psi\right) \cos \varphi \\ p_2 &= R_E \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Theta + \psi\right) \sin \varphi \\ p_3 &= R_E \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Theta + \psi\right). \end{aligned}$$

## 8 Endpunkt des Stabes

Für den Punkt  $\underline{Q}$  am Ende des Stabes der Länge  $L$  gilt

$$\underline{Q} = \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{P}. \quad (5)$$

## 9 Tangentialebene

Die Kugel mit Radius  $R_E$  um den Ursprung ist durch die Gleichung  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  gegeben, mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_i x_i^2 - R_E^2, \quad (6)$$

für den Index gilt hier und im folgenden  $i \in [1, 3]$ .

Für die Tangentialebene im Berührungspunkt  $\underline{P} = (p_1, p_2, p_3)^T$  gilt (siehe dazu z.B. [3])

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - p_i) = 0.$$

Die Ableitungen sind im Berührungspunkt  $\underline{P}$  zu bilden.

Für die implizite Gleichung der Tangentialebene im Berührungspunkt  $\underline{P}$  folgt schliesslich für die Kugel nach Gleichung (6) der Ausdruck

$$\sum_i p_i (x_i - p_i) = 0$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\underline{P}^T (\underline{x} - \underline{P}) = 0. \quad (7)$$

## 10 Verbindungsgerade

Die Sonne befindet sich im Punkt

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} R_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Punkte der Verbindungsgerade  $\underline{G}$  der Sonne  $\underline{S}$  mit dem Stabende  $\underline{Q}$  nach Gleichung (5) sind durch

$$\underline{G} = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S} \quad (8)$$

gegeben, dabei gilt  $\mu \geq 0$ .

Berücksichtigt man die Drehung der Sonne durch die Drehmatrix  $D_{(-\alpha)}$  und fixiert die Erde, dann folgt mit

$$\underline{S}^\alpha = D_{(-\alpha)} \underline{S} \quad (9)$$

aus Gleichung (8)

$$\begin{aligned} \underline{G}_S^\alpha &= \mu \underline{Q} + (1 - \mu) D_{(-\alpha)} \underline{S} \\ &= \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}^\alpha \end{aligned} \quad (10)$$

In Gleichung (10) wird für  $\mu = 0$  wird der Punkt  $\underline{S}^\alpha$ , für  $\mu = 1$  wird der Punkt  $\underline{Q}$  beschrieben.

## 11 Lösung durch Fixierung der Erde

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden  $\underline{G}_S^\alpha$  nach Gleichung (10) mit der Tangentialebene  $T$  oder anders formuliert, gesucht wird der Geradenparameter  $\mu$ , der eine Lösung  $\underline{x}_0$  der Gleichung (7) mit der Bedingung

$$\underline{x}_0 = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}^\alpha \quad (11)$$

zulässt.

### 11.1 Lösungspunkt

Einsetzen von Gleichung (11) in Gleichung (7) liefert

$$\underline{P}^T [\mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}^\alpha - \underline{P}] = 0.$$

Wegen

$$\underline{P}^T \underline{P} = R_E^2$$

folgt nach kurzer Umformung die zu lösende Gleichung

$$\mu_0(\alpha) = \frac{R}{R(\alpha) + L} \quad (12)$$

mit

$$R(\alpha) = R_E - \frac{\underline{P}^T \underline{S}^\alpha}{R_E}.$$

Da mit  $\mu = 0$  die Sonne und mit  $\mu = 1$  das Stabende beschrieben wird, muss wegen Gleichung (10) für die Lösung  $\mu_0 > 1$  und damit  $R < 0$  gelten.

Der gesuchte Punkt  $\underline{x}_0$  ergibt sich als Funktion des Drehwinkels  $\alpha$  mit dem nach Gleichung (12) bestimmten  $\mu_0(\alpha)$  durch Einsetzen in Gleichung (11) zu

$$\underline{x}_0^S(\alpha) = \mu_0 \underline{Q} + (1 - \mu_0) \underline{S}^\alpha. \quad (13)$$

## 11.2 Koordinatentransformation

Die gefundenen Trajektorienpunkte  $\underline{x}_0(\alpha)$  sind im Koordinatensystem  $(x_1, x_2, x_3)$  gegeben. Sie sollen aber auf ein zweidimensionales Koordinatensystem der Tangentialebene  $T$  transformiert werden.

Dazu wird der Punkt  $\underline{P}$  um seinen negativen Längenwinkel  $-\varphi$  um die  $x_3$ -Achse und anschliessend um den Winkel  $\Theta + \psi$  um die  $x_2$ -Achse gedreht. Er stimmt danach mit der  $x_1$ -Achse überein und die Trajektorienpunkte können mittels der Projektionsabbildung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

auf die Tangentialebene  $T$  projiziert werden<sup>1</sup>.

Die Drehung um die  $x_3$ -Achse um den Winkel  $\varphi$  wird durch die Matrix

$$D_\varphi^{x_3} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

und die Drehung um die  $x_2$ -Achse um den Winkel  $\Theta$  wird durch die Matrix

$$D_\Theta^{x_2} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{pmatrix} \quad (16)$$

vermittelt (siehe dazu z.B. [1]).

---

<sup>1</sup>Der dadurch auftretende Verzerrungsfehler liegt bei Stablängen von einem Meter im Bereich von Mikrometern.

## 12 Überprüfung

Es werden Spezialfälle daraufhin untersucht, ob die obige Herleitung erwartungsgemäße Ergebnisse liefert.

### 12.1 Neigung Erdachse 0, geographische Breite und Länge 0

Es wird angenommen  $\psi = \Theta = \varphi = 0$ .

Damit folgt wegen  $e_1 = 0, e_2 = 0, e_3 = 1$  aus Gleichung (2) für die Drehmatrix

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### 12.1.1 Erde fixiert, Sonne gedreht

Aus Gleichung (4) folgt im Kugelkoordinatensystem

$$\underline{P} = R_E \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und für das Stabende Gleichung (5)

$$\begin{aligned} \underline{Q} &= \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{P} \\ &= (R_E + L) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Tangentialebene  $T$  folgt aus Gleichung (7)

$$\begin{aligned} \underline{P}^T (\underline{x} - \underline{P}) &= 0 \\ (R_E, 0, 0) \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= 0 \\ (R_E, 0, 0) \begin{pmatrix} x_1 - R_E \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} x_1 &= R_E \\ x_2 &= \text{beliebig} \\ x_3 &= \text{beliebig.} \end{aligned} \tag{17}$$

Für die Verbindungsgerade folgt aus Gleichung (10)

$$\underline{G}_S^\alpha = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) D_{(-\alpha)} \underline{S}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\underline{G}_S^\alpha &= \mu \underline{Q} + (1 - \mu) D_{(-\alpha)} \underline{S} \\
&= \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \mu \underline{Q} + (1 - \mu) R_S \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \mu (R_E + L) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \mu) R_S \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mu (R_E + L) + (1 - \mu) R_S \cos \alpha \\ -(1 - \mu) R_S \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Einsetzen in Gleichung (17) liefert

$$\begin{aligned}
\underline{P}^T (\underline{x} - \underline{P}) &= 0 \\
(R_E, 0, 0) \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= 0 \\
(R_E, 0, 0) \left( \begin{pmatrix} \mu_0 (R_E + L) + (1 - \mu_0) R_S \cos \alpha \\ -(1 - \mu_0) R_S \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= 0 \\
(R_E, 0, 0) \begin{pmatrix} \mu_0 (R_E + L) + (1 - \mu_0) R_S \cos \alpha - R_E \\ -(1 - \mu_0) R_S \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\
R_E [\mu_0 (R_E + L) + (1 - \mu_0) R_S \cos \alpha - R_E] &= 0 \\
\mu_0 (R_E + L) + (1 - \mu_0) R_S \cos \alpha - R_E &= 0 \\
\mu_0 (R_E + L - R_S \cos \alpha) + R_S \cos \alpha - R_E &= 0
\end{aligned}$$

mit der Lösung

$$\mu_0 = \frac{R_E - R_S \cos \alpha}{R_E + L - R_S \cos \alpha}.$$

Einsetzen in  $\underline{x}_0$  liefert wegen

$$1 - \mu = \frac{1}{L + R_E - R_S \cos \alpha}$$

den Zusammenhang

$$\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} R_E \\ -\frac{LR_S \sin \alpha}{L + R_E - R_S \cos \alpha} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Drehen des Punktes um  $\Theta + \psi \rightarrow 0$  um die  $x_2$ -Achse lässt  $\underline{x}_0$  unverändert.

Durch die Projektion (14) folgt für die Koordinaten der Tangentialebene

$$\begin{aligned}
\underline{x}_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_E \\ -\frac{LR_S \sin \alpha}{L + R_E - R_S \cos \alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{LR_S \sin \alpha}{R_S \cos \alpha - (L + R_E)} \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist erwartungskonform, denn richtig ist, dass  $\underline{x}_0$  auf der Tangentialebene mit  $x_1 = R_E$  liegt und richtig ist, dass für  $\alpha = 0$  die Trajektorie durch  $x_2 = 0$  führt.



## Literatur

- [1] <https://de.wikipedia.org/wiki/Drehmatrix>
- [2] <https://de.wikipedia.org/wiki/Erdachse>
- [3] <https://de.wikipedia.org/wiki/Tangentialebene>
- [4] <https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten>