

# Sonnenkompass

Jürgen Womser-Schütz, <https://github.com/JW-Schuetz/Hobby>

## Widmung

Für Waldemar, meinem netten Gastgeber in Las Palmas.

## 1 Fragestellung

Wie genau ist die bekannte Methode, die Nord-Richtung per Sonnenstand zu bestimmen?

## 2 Methodenbeschreibung

Die folgenden Aktionen sind zur Durchführung der Methode notwendig

- einen Stab senkrecht in die Erde stecken
- das Ende des Schattens des Stabes mit einem Stein markieren
- einige Zeit abwarten bis der Schatten weiter gewandert ist
- das neue Schattenende des Stabes mit einem zweiten Stein markieren.

Man erhält dann die Nordrichtung mittels der folgenden Regeln

- R1: der Schatten des Stab-Endes bewegt sich auf der Verbindungsgeraden der beiden Steine
- R2: die Nordrichtung ist orthogonal zur Verbindungsgeraden
- R3: auf der Nordhalbkugel der Erde zeigt der Schatten Richtung Norden, auf der Südhalbkugel Richtung Süden.

Die Methode wird in der Nähe der Pole scheitern, da das Stabende dort keinen Schatten mehr wirft (und natürlich auch, weil dort keine Erde zum Hineinstecken des Stabes vorhanden ist ☺).

## 3 Vereinbarungen

Im folgenden werden Basiskenntnisse der Geometrie und der linearen Algebra vorausgesetzt.

Vektoren werden durch einen Unterstrich kenntlich gemacht ( $\underline{x}$ ) und ihre Transponierten ( $\underline{x}^T$ ) durch ein hochgestelltes  $T$ . Matrizen werden nicht besonders bezeichnet, sie ergeben sich aus ihrem Kontext.

Weiterhin werden Kugelkoordinaten  $(r, \Theta, \varphi)$  und kartesische Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  verwendet, der Ursprung der Koordinatensysteme ist der Erdmittelpunkt (siehe dazu die Problemskizzen in den Abbildungen 1 2).

Das kartesische Koordinatenpaar  $(x_1, x_2)$  spannt die Ekliptikalebene auf.

## 4 Problemformulierung

Es werden die folgenden Annahmen getroffen:

- die Sonne im Punkt  $\underline{S}$  sei ein Punktstrahler
- die Erde bewege sich in der Ekliptikalebene auf einer idealen Kreisbahn mit Radius  $R_S$  um die Sonne
- die Erde habe ideale Kugelgestalt mit dem Radius  $R_E$
- die Erd-Rotationsachse habe einen Neigungswinkel  $\psi$  zur  $x_3$ -Achse
- im Punkt  $\underline{P}$  der Erdoberfläche befinde sich der Fusspunkt des Stabes der Länge  $L$
- für die geographische Länge des Punktes  $\underline{P}$  wird stets  $\varphi = 0$  angenommen
- die Erdoberfläche um den Fusspunkt des Stabes herum werde durch eine Tangentialebene an die Erdkugel im Punkt  $\underline{P}$  angenähert
- es werden zwei Zeiten betrachtet: die Jahreszeit  $T^* \in [0, 365)$ , gemessen in Tagen und die Tageszeit  $t^* \in [0, 24)$ , gemessen in Stunden
- der Ablauf der Tageszeit  $t^*$  soll die Jahreszeit  $T^*$  unbeeinflusst lassen, die beiden Zeiten seien also voneinander entkoppelt
- der lokale tägliche Sonnenhöchststand wird für 12 Uhr mittags angenommen
- die Sommersonnenwende (SSW) ist am 21. Juni
- die Wintersonnenwende (WSW) ist am 21. Dezember.

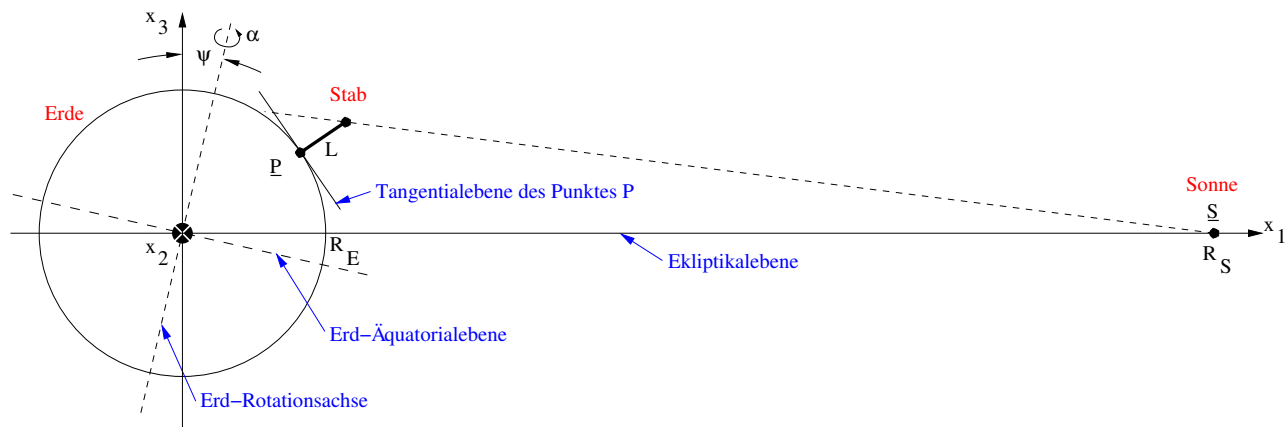


Abbildung 1: Problemskizze, SSW, Sonnenhöchststand



Abbildung 2: Problemskizze, WSW, Sonnenhöchststand

## 5 Lösung

Zur Unterstützung der Problemlösung wird MatLab und seine „Symbolic Math Toolbox“ verwendet.

Die MatLab-Quellen finden sich in meinem GitHub-Verzeichnis „<https://github.com/JW-Schuetz>“ im Unterverzeichnis „Hobby/Matlab-Sources“.

Gesucht wird die Trajektorie des Schattens des Stabendes auf der Tangentialebene in Abhängigkeit von der Tageszeit  $t^*$ . Die Jahreszeit  $T^*$  hat ebenfalls Einfluss auf die Trajektorie und soll als weiterer Parameter betrachtet werden.

Es sind zwei äquivalente Lösungsansätze denkbar, die Erdrotation zu berücksichtigen

- Die Erde um den Winkel  $\alpha$  zu rotieren und die Sonne fixiert lassen.
- Den Ort der Sonne um den Winkel  $-\alpha$  zu rotieren und die Erde fixiert lassen.

Im folgenden wird nur der zweite Fall behandelt (siehe dazu den Unterabschnitt 11.2).

## 6 Tageszeitabhängigkeit

Die tägliche Rotation der Erde um ihre Rotationsachse wird in Abhängigkeit des Rotationswinkels  $\alpha \in [0, 2\pi]$  durch die Drehmatrix (siehe dazu z.B. [1])

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} e_1^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & e_1 e_2 (1 - \cos \alpha) - e_3 \sin \alpha & e_1 e_3 (1 - \cos \alpha) + e_2 \sin \alpha \\ e_2 e_1 (1 - \cos \alpha) + e_3 \sin \alpha & e_2^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & e_2 e_3 (1 - \cos \alpha) - e_1 \sin \alpha \\ e_3 e_1 (1 - \cos \alpha) - e_2 \sin \alpha & e_3 e_2 (1 - \cos \alpha) + e_1 \sin \alpha & e_3^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \end{pmatrix}$$

beschrieben. Dabei ist

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

ein Vektor mit  $\|\underline{e}\| = 1$ , der Richtung und Orientierung der Rotationsachse definiert.

Zum Zeitpunkt der SSW, am 21. Juni, liegt die Rotationsachse in der  $(x_1, x_3)$ -Ebene (siehe die nicht massstäbliche Abbildung 1), der Einheitsvektor  $\underline{e}$  ist somit durch

$$\begin{aligned} e_1 &= \sin \psi \\ e_2 &= 0 \\ e_3 &= \cos \psi. \end{aligned} \tag{1}$$

gegeben.

Die Erd-Rotationsachse  $\underline{e}$  ist wegen des Satzes der Drehimpulserhaltung zeitinvariant.

Für die Drehmatrix folgt mit Gleichung (1)

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \sin^2 \psi (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & -\cos \psi \sin \alpha & \sin \psi \cos \psi (1 - \cos \alpha) \\ \cos \psi \sin \alpha & \cos \alpha & -\sin \psi \sin \alpha \\ \cos \psi \sin \psi (1 - \cos \alpha) & \sin \psi \sin \alpha & \cos^2 \psi (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \end{pmatrix}, \tag{2}$$

der Winkel  $\psi$  hat den numerischen Wert  $\psi = 23.44^\circ$  (siehe dazu z.B. [2]).

Die zum Rotationswinkel  $\alpha$  gehörige Tageszeit in Stunden ist durch  $t^* = 12 \frac{\alpha}{\pi}$  gegeben.

## 7 Jahreszeitabhängigkeit

Der jahreszeitliche Einfluss wird durch eine Kreisbewegung der Sonne um die Erde berücksichtigt. Die Erde bewegt sich rechtshändig um die Sonne (siehe dazu z.B. [3], und die nicht massstäbliche Abbildung 3). Man kann deshalb den Ort der Sonne als Funktion des jahreszeitlichen Umlaufwinkels  $\omega T^*$  mit  $\omega = \frac{2\pi}{365}$  durch

$$\underline{S}(T^*) = R_S \begin{pmatrix} \cos(\omega T^*) \\ -\sin(\omega T^*) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

beschreiben. Dabei ist  $T^* \in [0, 365)$  die Jahreszeit, gemessen in Tagen seit der SSW am 21. Juni.

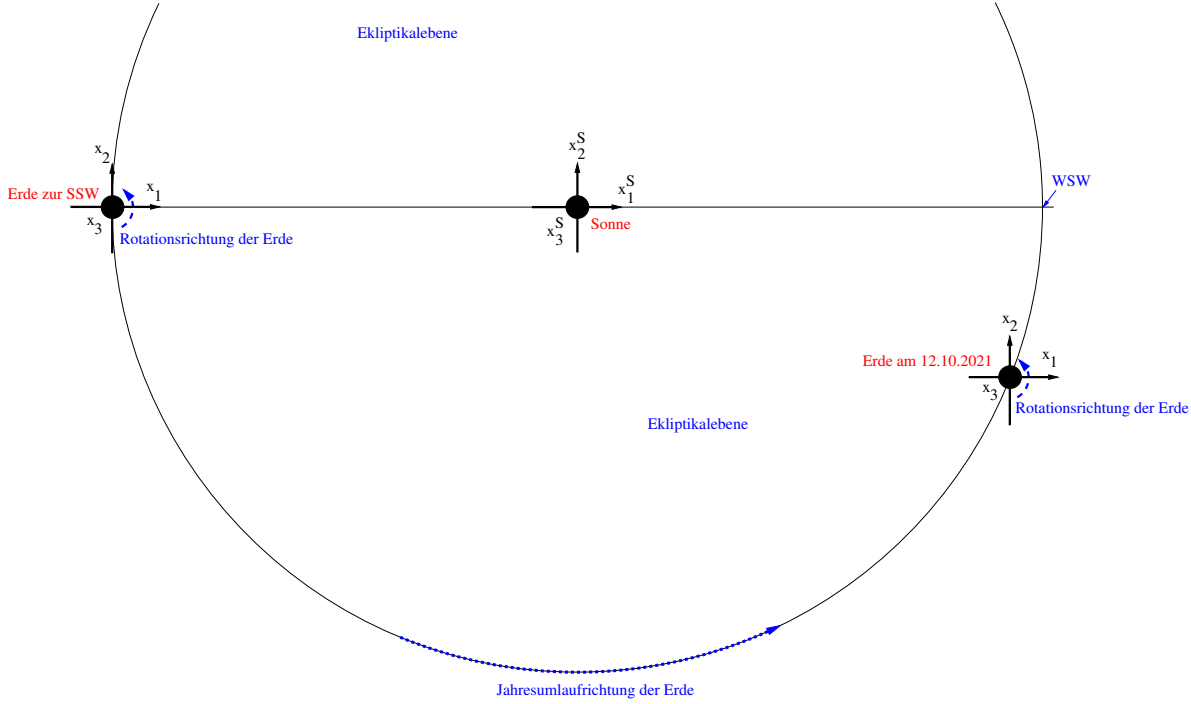


Abbildung 3: Umlauf der Erde um die Sonne

## 8 Fuss- und Endpunkt des Stabes

Der Ort des Stabfusspunktes

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

bestimmt sich aus der geographischen Breite  $\Theta$ , der geographischen Länge  $\varphi = 0$ , dem Erdradius  $R_E$  und dem Achsneigungswinkel  $\psi$  zu (siehe dazu z.B. [3])

$$\begin{aligned} p_1 &= R_E \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Theta + \psi\right) \\ p_2 &= 0 \\ p_3 &= R_E \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Theta + \psi\right). \end{aligned}$$

Dabei wurde die geographischen Breite durch  $\Theta - \psi \rightarrow \frac{\pi}{2} - \Theta + \psi$  ins Kugelkoordinatensystem  $(r, \Theta, \varphi)$  umgerechnet (siehe dazu z.B. [4]).

Für den Punkt  $\underline{Q}$  am Ende des Stabes der Länge  $L$  gilt damit

$$\underline{Q} = \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{P}. \quad (5)$$

## 9 Tangentialebene $T$

Die Kugel mit Radius  $R_E$  um den Ursprung ist durch die Gleichung  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  gegeben, mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_i x_i^2 - R_E^2. \quad (6)$$

Für den Index gilt hier und im folgenden  $i \in [1, 3]$ .

Für die Tangentialebene im Berührungspunkt  $\underline{P} = (p_1, p_2, p_3)^T$  gilt (siehe dazu z.B. [5])

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - p_i) = 0.$$

Dabei sind die Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  im Berührungspunkt  $\underline{P}$  zu bilden.

Für die implizite Gleichung der Tangentialebene  $T$  im Berührungspunkt  $\underline{P}$  folgt schliesslich für die Kugel der Ausdruck

$$\sum_i p_i (x_i - p_i) = 0.$$

In vektorieller Schreibweise lässt sich die Tangentialebene durch

$$\forall \underline{x} \in T : \underline{P}^T (\underline{x} - \underline{P}) = 0 \quad (7)$$

charakterisieren.

## 10 Verbindungsgerade

Die Sonne befindet sich nach Gleichung (3) im Punkt  $\underline{S}(T^*)$ .

Die Punkte der Verbindungsgerade  $G$  der Sonne  $\underline{S}(T^*)$  mit dem Stabende  $\underline{Q}$  nach Gleichung (5) sind durch

$$\forall \underline{x} \in G : \underline{x} = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}(T^*) \quad (8)$$

gegeben. Für  $\mu = 0$  wird der Punkt  $\underline{S}^\alpha(T^*)$  beschrieben, für  $\mu = 1$  der Punkt  $\underline{Q}$ .

## 11 Analytische Problemlösung

### 11.1 Lösung durch Fixierung der Erde

Berücksichtigt man die Drehung der Sonne durch die Drehmatrix  $D_{(-\alpha)}$  und fixiert die Erde, dann folgt mit der Abkürzung

$$\underline{S}^\alpha(T^*) = D_{(-\alpha)} \underline{S}(T^*) \quad (9)$$

aus Gleichung (8) die Darstellung

$$\forall \underline{x} \in G_S^\alpha : \underline{x} = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}^\alpha(T^*). \quad (10)$$

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden  $G_S^\alpha$  nach Gleichung (10) mit der Tangentialebene  $T$  oder anders formuliert, gesucht wird der Geradenparameter  $\mu$ , der eine Lösung  $\underline{x}_0$  der Gleichung (7) mit der Bedingung

$$\underline{x}_0 = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}^\alpha(T^*) \quad (11)$$

zulässt.

### 11.1.1 Lösungspunkt

Einsetzen von Gleichung (11) in Gleichung (7) liefert

$$\underline{P}^T [\underline{\mu} \underline{Q} + (1 - \underline{\mu}) \underline{S}^\alpha(T^*) - \underline{P}] = 0.$$

Wegen  $\underline{P}^T \underline{P} = R_E^2$  folgt nach kurzer Rechnung die Bestimmungsgleichung

$$\mu_0(\alpha) = \frac{\Omega^S(\alpha)}{1 + \Omega^S(\alpha)} \quad (12)$$

mit der Abkürzung

$$\Omega^S(\alpha) = \frac{1}{L} \left[ R_E - \frac{\underline{P}^T \underline{S}^\alpha(T^*)}{R_E} \right].$$

Da im Ausdruck der Verbindungsgeraden mit  $\mu = 0$  die Sonne und mit  $\mu = 1$  das Stabende beschrieben wird, muss für die Lösung  $\mu_0 > 1$  gelten.

Der gesuchte Punkt  $\underline{x}_0$  ergibt sich als Funktion des Drehwinkels  $\alpha$  mit dem nach Gleichung (12) bestimmten  $\mu_0(\alpha)$  zu

$$\underline{x}_0^S(\alpha) = \mu_0 \underline{Q} + (1 - \mu_0) \underline{S}^\alpha(T^*). \quad (13)$$

### 11.1.2 Projektion auf die Tangentialebene

Die gefundenen Trajektorienpunkte  $\underline{x}_0^S(\alpha)$  sind im Koordinatensystem  $(x_1, x_2, x_3)$  gegeben. Sie sollen aber auf ein zweidimensionales Koordinatensystem der Tangentialebene abgebildet werden. Dieses Koordinatensystem soll eine identische Metrik besitzen und sein Ursprung soll im Stabfußpunkt  $\underline{P}$  liegen.

Zur Bestimmung dieses Koordinatensystemes wird zunächst der Punkt  $\underline{P}$  um den Winkel  $\frac{\pi}{2} - (\Theta + \psi)$  um die  $x_2$ -Achse gedreht. Diese Drehung wird durch die Matrix

$$D_\Theta^{x_2} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{pmatrix} \quad (14)$$

vermittelt (siehe dazu z.B. [1]).

Der Punkt  $\underline{P}$  liegt nach dieser Drehung auf dem Äquator ( $0^\circ$  Breite und  $0^\circ$  Länge) und befindet sich somit auf der  $x_1$ -Achse. Die Trajektorienpunkte können nun mittels der Projektionsabbildung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

auf die Tangentialebene  $T$  projiziert werden. Es ergibt sich also

$$\underline{x}^S(\alpha) = A D_{\left[\frac{\pi}{2} - (\Theta + \psi)\right]}^{x_2} \underline{x}_0^S(\alpha). \quad (16)$$

## 11.2 Lösung durch Fixierung der Sonne

Dieser äquivalente Ansatz ist analog zum obigen Unterabschnitt (11.1) lösbar und wird hier nicht näher behandelt.

## 12 Ergebnisse

### 12.1 Vergleich mit empirisch ermittelten Resultaten

#### 12.1.1 Las Palmas de Gran Canaria

Die Schattentrajektorie und den Standort des Stabes für den Strand in Las Palmas de Gran Canaria ( $28.136746041614316^\circ$  Breite) für die SSW am 21.06.2021 und für die WSW am 21.12.2021 findet sich in den Abbildungen 4 und 5. Zwischen den Markierungen der Trajektorien liegen jeweils 10 Minuten. Für die Stablänge wurde 1.5 m angenommen. Man beachte die unterschiedlichen Skalierungen der beiden Abbildungen.

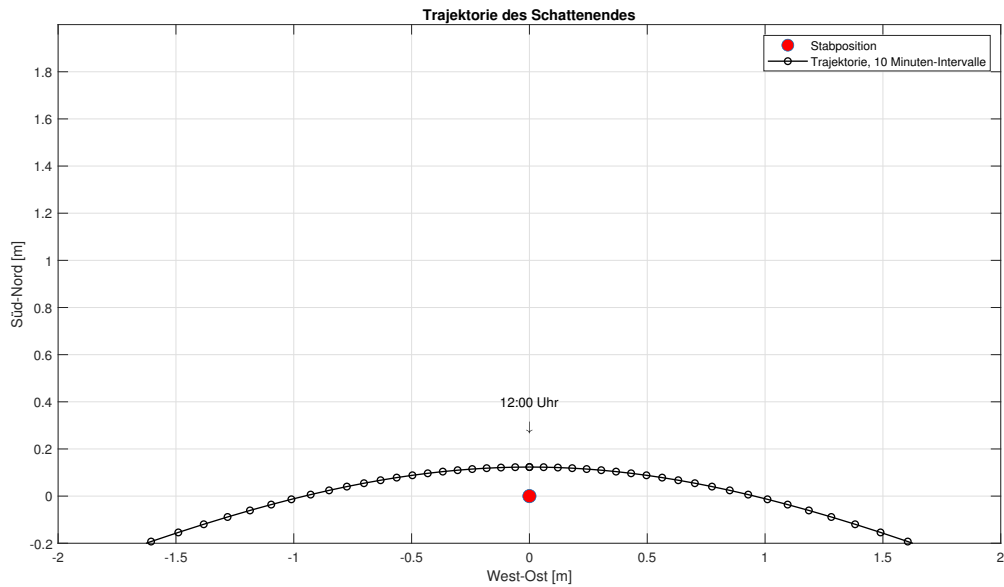


Abbildung 4: Schattentrajektorie zur SSW am 21.06.2021 in Las Palmas

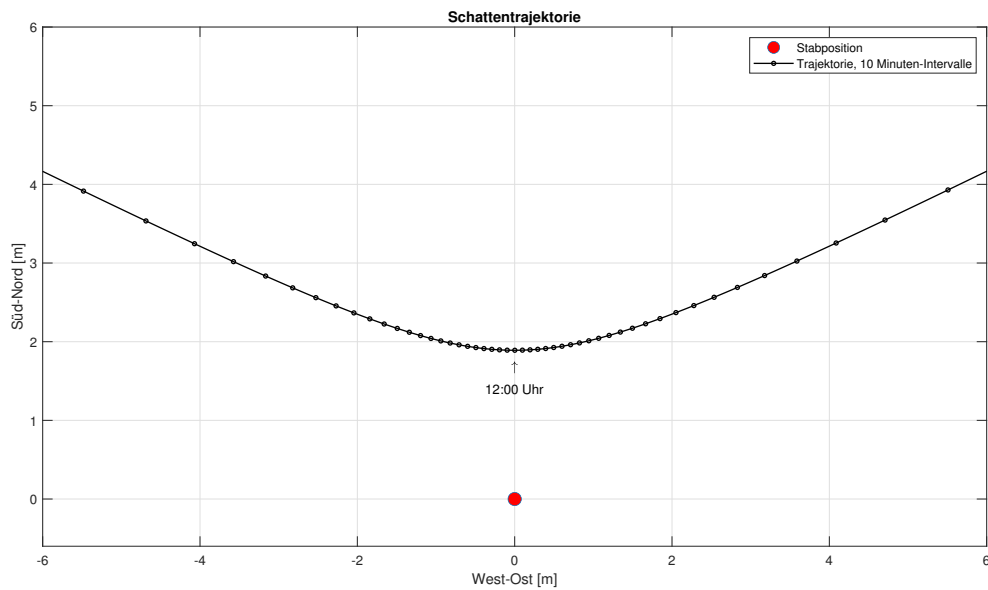


Abbildung 5: Schattentrajektorie zur WSW am 21.12.2021 in Las Palmas

Abbildung 6 zeigt die berechnete Schattentrajektorie ebenfalls für Las Palmas, aber für den 12.10.2021. Die Koordinaten der beiden markierten Punkte sind dargestellt, ihr geometrischer Abstand beträgt 20.33 cm, ihr zeitlicher Abstand beträgt 20 Minuten (13:30 Uhr und 13:50 Uhr).

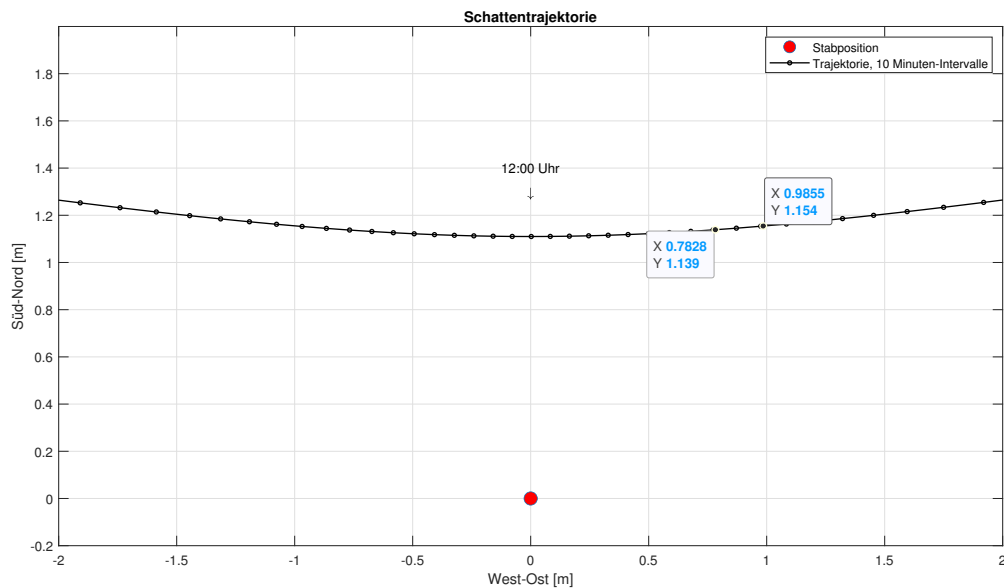


Abbildung 6: Schattentrajektorie am 12.10.2021 in Las Palmas

Korrespondierend zur Abbildung 6 sind am 12.10.2021 die nachfolgenden Fotos entstanden. Im ersten der beiden Fotos der Abbildung 7 sieht man am unteren Bildrand das gelbe Fussende des Stabes. Der Zeitunterschied beider Aufnahmen beträgt 22 Minuten. In dieser Zeit ist der Schatten ca. 20 cm weiter gewandert. Dieses Ergebnis passt recht gut zum rechnerisch ermittelten Abstand<sup>1</sup>.



Abbildung 7: Schatten in Las Palmas am 12.10.2021 um 13:33 Uhr und um 13:55 Uhr

<sup>1</sup>Leider habe ich vor Ort weder die genaue Länge des Stabes noch die genaue Länge der Trajektorie gemessen.



## 12.2 Bewertung der Genauigkeit

Entgegen der obigen Annahme der oben beschriebenen Methode zur Bestimmung der Nord-Richtung per Sonnenstand, ist die Schattentrajektorie keine Gerade - nicht einmal näherungsweise.

Die dadurch verursachte Missweisung zur Nordrichtung ist durchaus nicht vernachlässigbar.

Die genaue Nordrichtung erhält man nur, wenn man Schattenzeitpunkte untersucht, die symmetrisch um den Mittagszeitpunkt liegen.

## Literatur

- [1] <https://de.wikipedia.org/wiki/Drehmatrix>
- [2] <https://de.wikipedia.org/wiki/Erdachse>
- [3] <https://de.wikipedia.org/wiki/Sonnensystem>
- [4] <https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten>
- [5] <https://de.wikipedia.org/wiki/Tangentialebene>