

# Pendelsimulation

Jürgen Womser-Schütz, <https://github.com/JW-Schuetz>

## Mathematisches Pendel

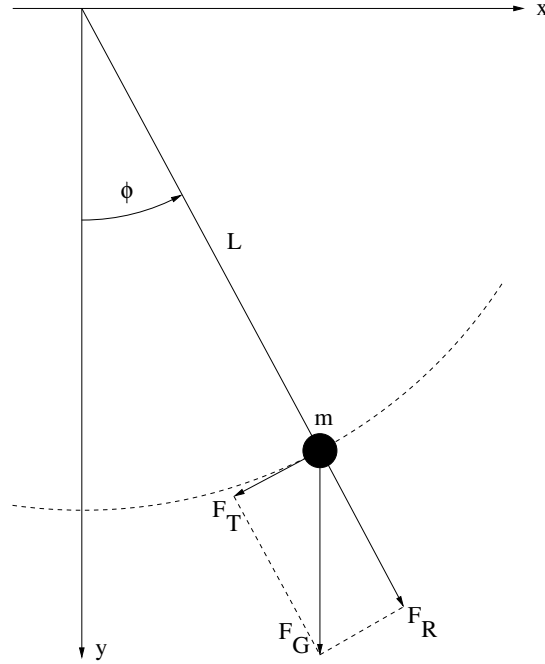


Abbildung 1: Mathematisches Pendel der Länge  $L$  und der Masse  $m$

Auf das Pendel der Länge  $L$  und mit der Masse  $m$  (siehe Abbildung 1) wirkt zunächst mit der Erdbeschleunigung  $g$  die Gewichtskraft  $F_G = mg$ . Man kann sie in einen radialen Anteil  $F_R$  und einen tangentialen Anteil  $F_T$  zerlegen. Für die Dynamik des Pendels ist nur die tangentiale Komponente relevant. Es gilt für sie

$$F_T = F_G \sin \phi.$$

Mit den Newtonschen Gesetzen gilt

$$F_T = -mL \frac{d^2 \phi}{dt^2}.$$

Damit folgt für den Auslenkungswinkel  $\phi(t)$  als Funktion der Zeit  $t$  die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} + \omega^2 \sin \phi(t) = 0 \quad (1)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (2)$$

## Phasenraumdarstellung

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \phi(t) \\x_2(t) &= \frac{d}{dt}\phi(t)\end{aligned}\tag{3}$$

folgt aus (1) die Phasenraumdarstellung

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1(t) &= x_2(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= -\omega^2 \sin x_1(t).\end{aligned}\tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt

$$\frac{d^2}{dt^2}x_1(t) = -\omega^2 \sin x_1(t)$$

und durch Anwendung der Kettenregel (siehe dazu z.B. [2])

$$\frac{d}{d\phi}[f(g(\phi))] = \frac{df(g)}{dg} \frac{dg(\phi)}{d\phi}\tag{5}$$

ergibt sich daraus

$$\frac{d^2}{dt^2}x_1(t) = -\omega^2 \sin x_1(t).$$

## Beschreibung als dynamisches System

Es sei ein metrischer Raum  $X$  mit der Metrik  $d$  sowie eine additive Halbgruppe  $I$  über den reellen Zahlen vorgegeben. D.h. es gelte  $I \subseteq \mathbb{R}$  und mit  $0 \in I$  und  $r, s, t \in I$  besitzt die Addition  $+: I \times I \rightarrow I$  die beiden Eigenschaften

$$\begin{aligned}\text{Kommutativgesetz:} \quad & r + s = s + r \\ \text{Assoziativgesetz:} \quad & (r + s) + t = r + (s + t).\end{aligned}$$

In Anlehnung an [1] wird ein dynamisches System auf  $X$  (auch Fluss genannt) durch eine stetige Abbildung  $\pi: X \times I \rightarrow X$  mit den für alle  $x \in X$  geltenden Eigenschaften

$$\begin{aligned}\text{Identitätseigenschaft:} \quad & \pi(x, 0) = x \\ \text{Halbgruppeneigenschaft:} \quad & \pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s)\end{aligned}$$

definiert.

## Definitionen

**Trajektorie (auch Orbit genannt) durch Punkt  $x \in X$**

$$\gamma_I(x) = \cup_{t \in I} \{\pi(x, t)\}$$

**Limitmenge im Punkt  $x \in X$**

$$L_I(x) = \cap_{t \in I} \overline{\gamma_I(\pi(x, t))}$$

Im folgenden wird auf  $I$  die Existenz von Ordnungsrelationen  $\leq$  und  $\geq$  auf  $I$  vorausgesetzt. Aus diesem Grund wird nur noch der Spezialfall  $I = \mathbb{R}$  betrachtet.

## Positive und negative Halbtrajektorien

$$\begin{aligned}\gamma_{-}(x) &= \{\pi(x, t) \mid t \leq 0\} \\ \gamma_{+}(x) &= \{\pi(x, t) \mid t \geq 0\}\end{aligned}$$

## Alpha- und Omegalimits

$$\begin{aligned}A(x) &= \overline{\cap_{t \in I} \gamma_{-}(\pi(x, t))} \\ \Omega(x) &= \overline{\cap_{t \in I} \gamma_{+}(\pi(x, t))}\end{aligned}$$

## Invarianz

Eine Teilmenge  $A \subseteq X$  ist invariant, falls  $\gamma_{\mathbb{R}}(x) \subseteq A$  für alle  $x \in A$ .

## Bewegung

Für jedes  $x \in X$  nennen wir die Funktion  $t \rightarrow \pi(x, t)$  mit  $t \in \mathbb{R}$  eine Bewegung durch  $x$ .

## Minimalität

Eine Teilmenge  $M \subseteq X$  wird minimal genannt, falls sie nichtleer, abgeschlossen und invariant ist und falls keine ihrer echten Untermengen diese Eigenschaften besitzt.

## Stationärer Punkt

Ein Punkt  $x \in X$  wird ein stationärer Punkt des Flusses  $\pi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  genannt, falls für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$\pi(x, t) = x.$$

## Periodizität, Periode

Ein Punkt  $x \in X$  und eine Bewegung  $\pi(x, t)$  mit  $t \in \mathbb{R}$  wird periodisch genannt, falls eine reelle Zahl  $p > 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  mit

$$\pi(x, t + p) = \pi(x, t)$$

existiert. Diese Zahl  $p$  wird Periode der Bewegung  $\pi(x, t)$  durch  $x$  genannt.

## Sätze

- $A$  ist genau dann invariant, falls  $A = \cup_{x \in A} \gamma_{\mathbb{R}}(x)$  gilt (Lemma 1.2).
- Mit  $A$  ist auch  $\overline{A}$  invariant (Proposition 1.3).
- Für alle  $x$  ist  $\Omega(x)$  invariant.  $\Omega(x)$  ist abgeschlossen (Proposition 1.4).

## Literatur

- [1] Dynamical Systems - Stability, Controllability and Chaotic Behaviour; Werner Krabs, Stefan Pickl; Springer-Verlag, 2010
- [2] <https://de.wikipedia.org/wiki/Kettenregel>