Anmerkungen zu “Topology, Geometry and Gauge fields, Naber” [1]

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz

Kapitel „Physical and Geometrical Motivation“

Elektrischer Monopol

Sein elektrisches und magnetisches Feld in Kugelkoordinaten mit den Einheitsvektoren $\underline{e}_\rho$, $\underline{e}_\phi$ und $\underline{e}_\Theta$ ist auf $\mathbb{R}^3 - \underline{0}$ durch

$$
\begin{aligned}
\underline{E}\left(\rho, \phi, \Theta\right) &= \frac{q}{\rho^2}\underline{e}_\rho \\
\underline{B}\left(\rho, \phi, \Theta\right) &= \underline{0}
\end{aligned}
$$

gegeben und erfüllt dort die quellenfreien Maxwellgleichungen

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\underline{E}\right) &= 0 \\
\operatorname{div}\left(\underline{B}\right) &= 0 \\
\operatorname{rot}\left(\underline{E}\right) &= \underline{0} \\
\operatorname{rot}\left(\underline{B}\right) &= \underline{0}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Potentiale des elektrischen Monopols

Weil $\mathbb{R}^3 - \underline{0}$ einfach zusammenhängend ist und dort $\operatorname{rot}\left(\underline{E}\right) = \underline{0}$ gilt, existiert auf $\mathbb{R}^3 - \underline{0}$ für den elektrischen Monopol ein skalares Potential V mit $\underline{E} = \operatorname{grad}\left(V\right)$ und es gilt

$$
V\left(\rho, \phi, \Theta\right) = -\frac{q}{\rho}.
$$

Das Vektorpotential $\underline{A}$ mit $\underline{B} = \operatorname{rot}\left(\underline{A}\right)$

Magnetischer Monopol

Ein magnetischer Monopol wurde bisher noch nicht beobachtet und ist deshalb hypothetisch.
Sein magnetisches und elektrisches Feld in Kugelkoordinaten ist auf $\mathbb{R}^3 - \underline{0}$ analog zum elektrischen Monopol durch

$$
\begin{aligned}
\underline{B}\left(\rho, \phi, \Theta\right) &= \frac{g}{\rho^2}\underline{e}_\rho \\
\underline{E}\left(\rho, \phi, \Theta\right) &= \underline{0}
\end{aligned}
$$

gegeben und erfüllt dort ebenfalls (1).

Potentiale des magnetischen Monopols

Weil $\mathbb{R}^3 - \underline{0}$ einfach zusammenhängend ist und dort $\operatorname{rot}\left(\underline{B}\right) = \underline{0}$ gilt, existiert auf $\mathbb{R}^3 - \underline{0}$ für den magnetischen Monopol ein skalares Potential V mit $\underline{B} = \operatorname{grad}\left(V\right)$ und es gilt

$$
V\left(\rho, \phi, \Theta\right) = -\frac{g}{\rho}.
$$

Aus der Sicht der Quantenmechanik ist es aber sehr wünschenswert auch ein Vektorpotential zu haben.

Literatur

[1] Topology, Geometry and Gauge fields; Naber, Gregory; Springer Science+Business Media; 2011