

Sonnenkompass

Jürgen Womser-Schütz, <https://github.com/JW-Schuetz/Hobby>

1 Fragestellung

Wir genau ist die bekannte Methode, die Nord-Richtung per Sonnenstand zu bestimmen?

2 Methodenbeschreibung

- einen Stab senkrecht in die Erde stecken
- das Ende des Schattens des Stabes mit einem Stein markieren
- einige Zeit abwarten bis der Stabschatten weiter gewandert ist
- das neue Schattenende des Stabes mit einem zweiten Stein markieren.

Man erhält die Nordrichtung mittels der folgenden Regeln

- R1: der Schatten des Stab-Endes bewegt sich auf der Verbindungsgeraden der beiden Steine
- R2: die Nordrichtung ist orthogonal zur Verbindungsgeraden
- R3: auf der Nordhalbkugel der Erde zeigt der Schatten Richtung Norden, auf der Südhalbkugel Richtung Süden.

3 Problemformulierung

Es werden kartesische Koordinaten (x_1, x_2, x_3) verwendet, wobei das Koordinatenpaar (x_1, x_2) die Ekliptikalebene aufspannt, der Ursprung des Koordinatensystems ist der Erdmittelpunkt (siehe dazu die Problemskizze in Abbildung 1).

Es werden die folgenden Annahmen getroffen:

- der Zeitpunkt im Jahr sei die Sommersonnenwende
- die Sonne im Punkt \underline{S} sei durch einen Punktstrahler darstellt
- die Sonne habe den Abstand R_S von der Erde
- die Erde habe ideale Kugelgestalt mit dem Radius R_E
- die Erd-Rotationsachse habe einen Neigungswinkel ϕ zur x_3 -Achse
- im Punkt \underline{P} der Erdoberfläche befinde sich der Fusspunkt des Stabes der Länge L
- die Erdoberfläche um den Fusspunkt des Stabes herum werde durch eine Tangentialebene an die Erdkugel angenähert.

Die Methode wird allerdings in der Nähe der Pole scheitern, da das Stabende dort keinen Schatten mehr wirft.

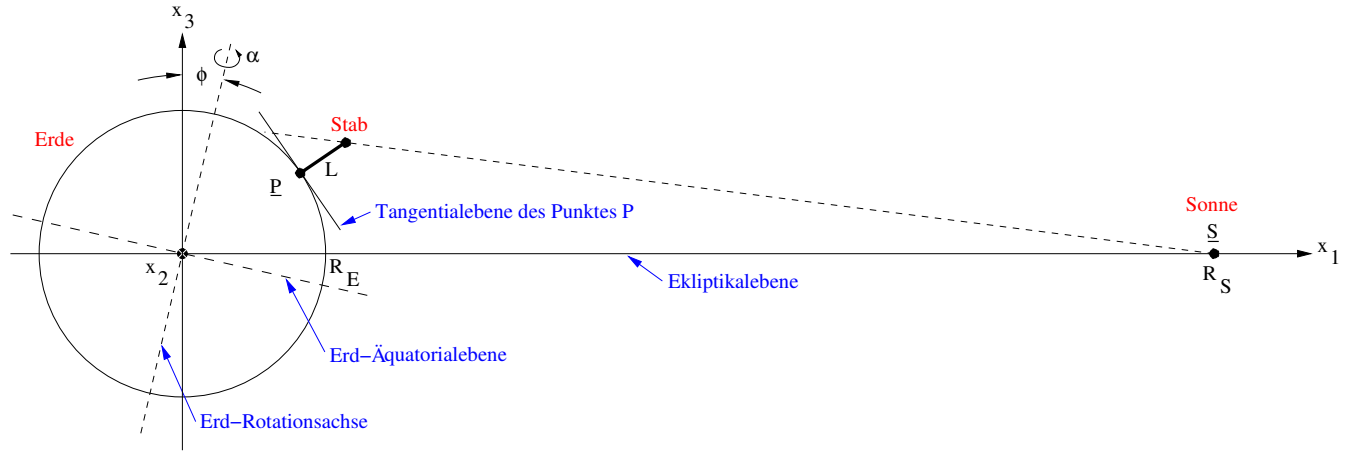


Abbildung 1: Nicht massstäbliche Problemskizze (Sommersonnenwende)

4 Vereinbarungen

Im folgenden wird Kenntnis der linearen Algebra vorausgesetzt.

Vektoren werden durch einen Unterstrich kenntlich gemacht (\underline{x}) und ihre Transposition (\underline{x}^T) durch ein hochgestelltes T . Matrizen werden nicht besonders bezeichnet.

5 Lösung

Zur Unterstützung der Problemlösung wird MatLab und seine „Symbolic Math Toolbox“ verwendet, die MatLab-Quellen finden sich im GitHub-Unterverzeichnis „Matlab-Sources“.

Gesucht wird die Trajektorie des Schattens des Stabendes auf der Tangentialebene in Abhängigkeit des Erd-Rotationswinkels α .

Es sind zwei äquivalente Lösungsansätze denkbar, die Erdrotation (siehe dazu Abschnitt 6) zu berücksichtigen

- Die mit der Erde verbundenen Orte um den Winkel α zu rotieren und die Sonne fixiert lassen.
- Den Ort der Sonne um den Winkel $-\alpha$ zu rotieren und die mit der Erde verbundenen Orte fixiert lassen.

6 Erdrotation

Die Rotation der Erde um ihre Rotationsachse wird in Abhängigkeit des Rotationswinkels $\alpha \in [0, 2\pi]$ durch die Drehmatrix

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} e_1(1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & e_1 e_2(1 - \cos \alpha) - e_3 \sin \alpha & e_1 e_3(1 - \cos \alpha) + e_2 \sin \alpha \\ e_2 e_1(1 - \cos \alpha) + e_3 \sin \alpha & e_2(1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & e_2 e_3(1 - \cos \alpha) - e_1 \sin \alpha \\ e_3 e_1(1 - \cos \alpha) - e_2 \sin \alpha & e_3 e_2(1 - \cos \alpha) + e_1 \sin \alpha & e_3(1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1)$$

beschrieben (siehe dazu z.B. [1]), dabei ist

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

ein Einheitsvektor, der Richtung und Orientierung der Rotationsachse definiert. Die Drehmatrix ist orthogonal, d.h. es gilt mit der Einheitsmatrix E

$$D_\alpha^T D_\alpha = E.$$

In dieser Arbeit soll der Zeitpunkt der Sommersonnenwende betrachtet werden, d.h. die Rotationsachse soll, so wie in Abbildung 1 dargestellt, in der (x_1, x_3) -Ebene liegen. Der Einheitsvektor ist somit durch

$$\begin{aligned} e_1 &= \sin \phi \\ e_2 &= 0 \\ e_3 &= \cos \phi. \end{aligned}$$

gegeben, der Winkel ϕ hat den numerischen Wert [2]

$$\phi = 23.44^\circ. \quad (2)$$

Für 12 Uhr mittags soll $\alpha = 0$ gelten.

7 Fusspunkt des Stabes

Der Ort $\underline{P} = (p_1, p_2, p_3)^T$ des Fusses des Stabes bestimmt sich aus der geographischen Breite Θ , der Länge φ , dem Erdradius R_E und dem Achsneigungswinkel nach Gleichung ϕ (2) zu (siehe dazu z.B. [4])

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

mit

$$\begin{aligned} p_1 &= R_E \cos(\Theta + \phi) \cos \varphi \\ p_2 &= R_E \cos(\Theta + \phi) \sin \varphi \\ p_3 &= R_E \sin(\Theta + \phi). \end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt für den Ort des Stabfusspunktes aus Gleichung (3)

$$\underline{P}^\alpha = D_\alpha \underline{P}. \quad (4)$$

8 Endpunkt des Stabes

Für den Punkt \underline{Q} am Ende des Stabes der Länge L gilt

$$\underline{Q} = \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{P}. \quad (5)$$

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt aus den Gleichungen (4, 5)

$$\begin{aligned} \underline{Q}^\alpha &= \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) D_\alpha \underline{P} \\ \underline{Q}^\alpha &= \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{P}^\alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

9 Tangentialebene

Die Kugel mit Radius R_E um den Ursprung ist durch die Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ gegeben, mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_i x_i^2 - R_E^2, \quad (7)$$

für den Index gilt $i \in [1, 3]$.

Für die Tangentialebene im Berührungspunkt $\underline{P} = (p_1, p_2, p_3)^T$ gilt (siehe dazu z.B. [3])

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - p_i) = 0,$$

die Ableitungen sind im Berührungspunkt \underline{P} zu bilden.

Für die implizite Gleichung der Tangentialebene im Berührungspunkt \underline{P} folgt schliesslich für die Kugel nach Gleichung (7) der Ausdruck

$$\sum_i p_i (x_i - p_i) = 0$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\underline{P}^T (\underline{x} - \underline{P}) = 0. \quad (8)$$

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt für die gedrehte Tangentialebene T^α aus den Gleichungen (4, 8)

$$\begin{aligned} (D_\alpha \underline{P})^T (\underline{x} - D_\alpha \underline{P}) &= 0 \\ (\underline{P}^\alpha)^T (\underline{x} - \underline{P}^\alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

10 Verbindungsgerade

Die Sonne befindet sich im Punkt

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} R_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Punkte der Verbindungsgerade \underline{G} der Sonne \underline{S} mit dem Stabende \underline{Q} nach Gleichung (5) sind durch

$$\underline{G} = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S} \quad (10)$$

gegeben, dabei gilt $\mu \geq 0$.

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α und fixiert die Sonne, dann folgt aus Gleichung (10)

$$\begin{aligned} \underline{G}^\alpha &= \mu D_\alpha \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S} \\ \underline{G}^\alpha &= \mu \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu) \underline{S}. \end{aligned} \quad (11)$$

Berücksichtigt man die Drehung der Sonne durch die Drehmatrix $D_{(-\alpha)}$ und fixiert die Erde, dann folgt mit

$$\underline{S}^\alpha = D_{(-\alpha)} \underline{S} \quad (12)$$

aus Gleichung (10)

$$\begin{aligned}\underline{G}^\alpha &= \mu \underline{Q} + (1 - \mu) D_{(-\alpha)} \underline{S} \\ \underline{G}^\alpha &= \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}^\alpha\end{aligned}\tag{13}$$

In Gleichung (11) wird für $\mu = 0$ der Punkt \underline{S} , für $\mu = 1$ wird der Punkt \underline{Q}^α beschrieben. In Gleichung (13) wird für $\mu = 0$ wird der Punkt \underline{S}^α , für $\mu = 1$ wird der Punkt \underline{Q} beschrieben.

Teil I

Lösung durch Fixierung der Sonne

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden \underline{G}^α nach Gleichung (11) mit der Tangentialebene T^α oder anders formuliert, gesucht wird der Geradenparameter μ , der eine Lösung \underline{x}_0 der Gleichung (9) mit der Bedingung

$$\underline{x}_0 = \mu \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu) \underline{S}\tag{14}$$

zulässt.

Lösungspunkt

Einsetzen von Gleichung (14) in Gleichung (9) liefert

$$(\underline{P}^\alpha)^T [\mu \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu) \underline{S} - \underline{P}^\alpha] = 0.$$

Wegen

$$(\underline{P}^\alpha)^T \underline{P}^\alpha = \underline{P}^T \underline{P} = R_E^2$$

folgt nach kurzer Umformung die zu lösende Gleichung

$$\mu_0(\alpha) = \frac{R}{R + L}\tag{15}$$

mit der Abkürzung

$$R(\alpha) = R_E - \frac{(\underline{P}^\alpha)^T \underline{S}}{R_E}.$$

Da mit $\mu = 0$ die Sonne und mit $\mu = 1$ das Stabende beschrieben wird, muss wegen Gleichung (11) für die Lösung $\mu_0 > 1$ und damit $R < 0$ gelten.

Der gesuchte Punkt \underline{x}_0 ergibt sich als Funktion des Drehwinkels α mit dem nach Gleichung (15) bestimmten $\mu_0(\alpha)$ durch Einsetzen in Gleichung (14) zu

$$\underline{x}_0(\alpha) = \mu_0 \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu_0) \underline{S}.\tag{16}$$

Teil II

Lösung durch Fixierung der Erde

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden \underline{G}^α nach Gleichung (13) mit der Tangentialebene T oder anders formuliert, gesucht wird der Geradenparameter μ , der eine Lösung \underline{x}_0 der Gleichung (8) mit der Bedingung

$$\underline{x}_0 = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}^\alpha\tag{17}$$

zulässt.

Lösungspunkt

Einsetzen von Gleichung (17) in Gleichung (8) liefert

$$\underline{P}^T [\mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}^\alpha - \underline{P}] = 0.$$

Wegen

$$\underline{P}^T \underline{P} = R_E^2$$

folgt nach kurzer Umformung die zu lösende Gleichung

$$\mu_0(\alpha) = \frac{R}{R + L} \quad (18)$$

mit der Abkürzung

$$R(\alpha) = R_E - \frac{\underline{P}^T \underline{S}^\alpha}{R_E}.$$

Da mit $\mu = 0$ die Sonne und mit $\mu = 1$ das Stabende beschrieben wird, muss wegen Gleichung (13) für die Lösung $\mu_0 > 1$ und damit $R < 0$ gelten.

Der gesuchte Punkt \underline{x}_0 ergibt sich als Funktion des Drehwinkels α mit dem nach Gleichung (18) bestimmten $\mu_0(\alpha)$ durch Einsetzen in Gleichung (17) zu

$$\underline{x}_0(\alpha) = \mu_0 \underline{Q} + (1 - \mu_0) \underline{S}^\alpha. \quad (19)$$

Anhang Koordinatentransformation

Die Punkte der oben konstruierten Tangentialebene nach Gleichung (16) sind im (x_1, x_2, x_3) -Kordinatensystem beschrieben. Es ist aber wünschenswert, die Punkte im intrinsischen, zweidimensionalen Koordinatensystem der Ebene zu kennen. Dieses (y_1, y_2) -Koordinatensystem soll hier bestimmt werden.

Ein Punkt \underline{x} ist orthogonal zum Punkt \underline{P} , falls $\underline{P}^T \underline{x} = 0$ gilt, also

$$(p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0.$$

Die zu \underline{P} orthogonalen Punkte bilden somit eine Ebene durch den Ursprung, die man im Fall $p_1 \neq 0$ ¹ auch durch

$$x_1 = -\frac{1}{p_1} (p_2 x_2 + p_3 x_3) \quad (20)$$

charakterisieren kann. Durch Auswahl zweier linear unabhängiger (x_1, x_2) -Kombinationen (b_1, c_1) und (b_2, c_2) werden mit (20) zwei Punkte dieser Ursprungsebene konstruiert. Es folgt

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{p_2}{p_1} b_1 - \frac{p_3}{p_1} c_1 \\ a_2 &= -\frac{p_2}{p_1} b_2 - \frac{p_3}{p_1} c_2. \end{aligned}$$

Für die Darstellung einer Ursprungsebene gilt allgemein

$$b_i y_1 + c_i y_2 = a_i$$

¹Wegen $p_1 \neq 0$ folgt für den Winkel α (für $\phi = 0$) die Einschränkung $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

und für die Koordinaten (y_1, y_2) folgt mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

das lineare Gleichungssystem

$$A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Die Kombinationen (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) müssen so gewählt werden, dass die Determinante von A ungleich 0 ist, dass also $b_1 c_2 \neq b_2 c_1$ gilt.

Auswahl der Kombination

Ich wähle die Kombinationen (b_1, c_1) und (b_2, c_2) zu

$$\begin{aligned} b_1 &= p_2 + \lambda R_E \\ c_1 &= p_3 + \lambda R_E \\ b_2 &= p_2 - \lambda R_E \\ c_2 &= p_3 - \lambda R_E. \end{aligned}$$

und erhalte für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} p_2 + \lambda R_E & p_3 + \lambda R_E \\ p_2 - \lambda R_E & p_3 - \lambda R_E \end{pmatrix}.$$

Literatur

- [1] <https://de.wikipedia.org/wiki/Drehmatrix>
- [2] <https://de.wikipedia.org/wiki/Erdachse>
- [3] <https://de.wikipedia.org/wiki/Tangentialebene>
- [4] <https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten>