Sonnenkompass

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz/Hobby

1 Fragestellung

Wir genau ist die bekannte Methode, die Nord-Richtung per Sonnenstand zu bestimmen?

2 Methodenbeschreibung

- einen Stab senkrecht in die Erde stecken
- das Ende des Schattens des Stabes mit einen Stein markieren
- einige Zeit abwarten bis der Stabschatten weiter gewandert ist
- das neue Schattenende des Stabes mit einem zweiten Stein markieren.

Man erhält die Nordrichtung mittels der folgenden Regeln

- R1: der Schatten des Stab-Endes bewegt sich auf der Verbindungsgeraden der beiden Steine
- R2: die Nordrichtung ist orthogonal zur Verbindungsgeraden
- R3: auf der Nordhalbkugel der Erde zeigt der Schatten Richtung Norden, auf der Südhalbkugel Richtung Süden.

3 Problemformulierung

Es werden kartesische Koordinaten (x_1, x_2, x_3) verwendet, wobei das Koordinatenpaar (x_1, x_2) die Ekliptikalebene aufspannt, der Ursprung des Koordinatensystems ist der Erdmittelpunkt (siehe dazu die Problemskizze in Abbildung 1).

Es werden die folgenden Annahmen getroffen:

- der Zeitpunkt im Jahr sei die Sommersonnenwende
- die Sonne im Punkt $\underline{S}$ sei durch einen Punktstrahler darstellt
- die Sonne habe den Abstand R_S von der Erde
- die Erde habe ideale Kugelgestalt mit dem Radius R_E
- im Punkt $\underline{P}$ der Erdoberfläche befinde sich der Stab der Länge L
- die Erd-Rotationsachse habe einen Neigungswinkel ϕ zur x_3-Achse
- die Erdoberfläche um den Stab wird durch eine Tangentialebene an die Erdkugel angenähert.

Vermutlich wird die Methode allerdings auf zwei Kugelkalotten[1] um den Nord- und Südpol scheitern, da das Stabende dort keinen Schatten mehr wirft.

[1] Interessant wäre es, diese Kalotten näher zu kennen, evtl. gilt für ihre Höhe h=L?

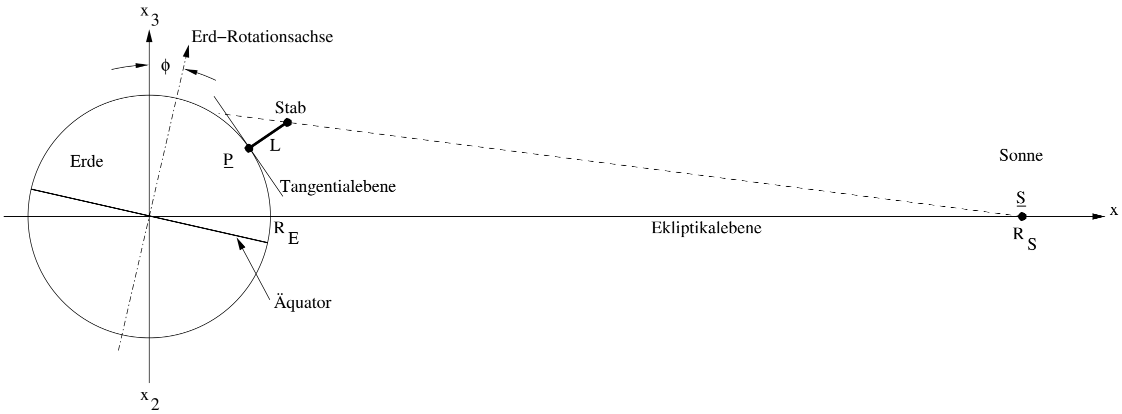

Abbildung 1: Problemskizze zur Zeit der Sommersonnenwende

Erd-Rotation

Die Erde rotiert um ihre Rotationsachse. Diese Rotation wird in Abhängigkeit des Rotationswinkels α durch die Drehmatrix D_α beschrieben. Für die Drehmatrix gilt (siehe dazu z.B. [2])

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} n_1^2\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha & n_1 n_2\,(1-\cos\alpha)-n_3\sin\alpha & n_1 n_3\,(1-\cos\alpha)+n_2\sin\alpha \\ n_2 n_1\,(1-\cos\alpha)+n_3\sin\alpha & n_2^2\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha & n_2 n_3\,(1-\cos\alpha)-n_1\sin\alpha \\ n_3 n_1\,(1-\cos\alpha)-n_2\sin\alpha & n_3 n_2\,(1-\cos\alpha)+n_1\sin\alpha & n_3^2\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha \end{pmatrix}$$

dabei ist

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

der Einheitsvektor, der Richtung und Orientierung der Rotationsachse definiert.
In dieser Arbeit soll Zeit der Sommersonnenwende betrachtet werden, d.h. die Rotationsachse soll, so wie in Abbildung 1 dargestellt, in der (x_1, x_3)-Ebene liegen. Es wird somit gewählt

$$\begin{aligned} n_1 &= \sin\phi \\ n_2 &= 0 \\ n_3 &= \cos\phi. \end{aligned}$$

Tangentialebene

Die Kugel mit Radius R_E um den Ursprung ist durch die Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ gegeben, mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_i x_i^2 - R_E^2.$$

Für die Tangentialebene im Berührpunkt $\underline{P} = (p_1, p_{2,} p_3)$ gilt allgemein (siehe dazu z.B. [1])

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,(x_i - p_i) = 0.$$

Dabei sind die Ableitungen im Berührpunkt $\underline{P}$ zu bilden, für den Index gilt $i \in [1, 3]$.
Für die implizite Gleichung der Tangentialebene im Berührpunkt $\underline{P}$ folgt schliesslich in unserem speziellen Fall

$$\sum_i p_i\,(x_i - p_i) = 0$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\underline{P}\left(\underline{x}-\underline{P}\right) = 0.$$

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt für die gedrehte Tangentialebene T^α

$$\begin{aligned} D_\alpha \underline{P}\left(\underline{x}-D_\alpha \underline{P}\right) &= 0 \\ \underline{P}^\alpha\left(\underline{x}-\underline{P}^\alpha\right) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Stabende

Für den Punkt $\underline{Q}$ am Ende des Stabes der Länge L gilt

$$\underline{Q} = \left(1+\frac{L}{R_E}\right)\underline{P}.$$

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt

$$\begin{aligned} \underline{Q}^\alpha &= \left(1+\frac{L}{R_E}\right) D_\alpha \underline{P} \\ &= \left(1+\frac{L}{R_E}\right)\underline{P}^\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

Verbindungsgerade

Die Sonne befinde sich im Punkt

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} R_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Punkte der Verbindungsgerade $\underline{G}$ der Sonne $\underline{S}$ mit dem Stabende $\underline{Q}$ nach Gleichung (2) sind durch

$$\underline{G} = \mu\underline{Q} + (1-\mu)\,\underline{S}$$

gegeben, dabei gilt $\mu \geq 0$.
Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt

$$\begin{aligned} \underline{G}^\alpha &= \mu D_\alpha \underline{Q} + (1-\mu)\,\underline{S} \\ &= \mu\underline{Q}^\alpha + (1-\mu)\,\underline{S}. \end{aligned}$$

Problemlösung

Gesucht wird die Trajektorie des Schattens des Stabendes auf der Tangentialebene T^α in Abhängigkeit des Erd-Rotationswinkels $\alpha \in [0, 2\pi]$ - α durchläuft im Verlauf eines Tages seinen Wertebereich.
Gesucht ist also der Schnittpunkt der Geraden $\underline{G}^\alpha$ mit der Tangentialebene T^α oder anders formuliert, gesucht wird der Geradenparameter $\mu \geq 0$, der eine Lösung $\underline{x}_0$ der Gleichung

$$\underline{P}^\alpha\left(\underline{x}_0-\underline{P}^\alpha\right) = 0$$

mit der Bedingung

$$\underline{x}_0 = \mu\underline{Q}^\alpha + (1-\mu)\,\underline{S}$$

zulässt. Da mit $\mu = 1$ das Stabende beschrieben wird, muss für eine Lösung sogar $\mu > 1$ gelten.

Zur Problemlösung wird MatLab verwendet, wobei zur analytischen Lösung der Gleichungen die „Symbolic Math Toolbox“ benutzt wird. Die MatLab-Quellen finden sich im GitHub-Unterverzeichnis „Matlab-Sources“.

Literatur

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Tangentialebene

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Drehmatrix