# Pendelsimulation

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz

## Mathematisches Pendel

Für den Auslenkungswinkel $\phi\left(t\right)$ als Funktion der Zeit $t$ gilt

$$\frac{d^2\phi\left(t\right)}{dt^2}+\omega^2\sin\phi\left(t\right) = 0 \tag{1}$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{2}$$

dabei ist $L$ die Pendellänge und $g$ die Erdbeschleunigung.

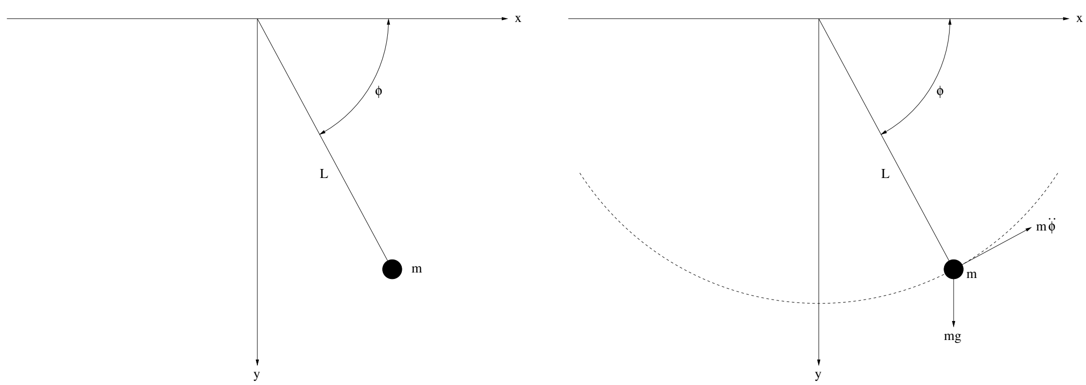


Abbildung 1: Mathematisches Pendel der Länge $L$ und der Masse $m$

Für die kartesischen Koordinaten des Pendels folgt

$$\begin{aligned} x &= L\sin\phi \\ y &= L\cos\phi. \end{aligned}$$

# Beschreibung als dynamisches Sytem

## Definition

In Anlehnung an [1] wird ein dynamisches System (Fluss) auf $X$ durch

- einen metrischen Raum $X$ mit der Metrik $d$
- eine additive Halbgruppe $I$ über den reellen Zahlen [1]
- und eine stetige Abbildung $\pi : X \times I \to X$ mit den beiden Eigenschaften
  $\forall x \in X : \pi(x,0) = x$ (Identitätseigenschaft)
  $\pi(\pi(x,t), s) = \pi(x, t+s)$ (Halbgruppeneigenschaft)

definiert.

## Motivation

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= x(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3}$$

besitzt die eindeutige Lösung

$$x(t) = x_0 \exp(t) \,. \tag{4}$$

Beschreibt man diese Lösung durch die Abbildung $\pi$, so gilt

$$\pi(x,t) = x \exp(t) \,.$$

### Behauptung Halbgruppeneigenschaft

Es gilt die Halbgruppeneigenschaft

$$\pi(\pi(x,t), s) = \pi(x, t+s) \,.$$

### Beweis Halbgruppeneigenschaft

Wegen (4) gilt für $x$ und $t$

$$\pi(x,t) = x \exp(t) \tag{5}$$

und dann gilt für $x \to \pi(x,t)$ und $t \to s$

$$\pi(x,t) = \pi(x,t) \exp(s)$$

und somit durch Einsetzen von (5)

$$\begin{aligned} \pi(x,t) &= x \exp(t) \exp(s) \\ &= x \exp(t+s) \ \blacksquare \end{aligned}$$

# Literatur


[1] Dynamical Systems - Stability, Controllability and Chaotic Behaviour; Werner Krabs, Stefan Pickl; Springer-Verlag, 2010


[1] D.h. es gilt $0 \in I$ und für $r, s, t \in I$ besitzt die Addition $+ : I \times I \to I$ die beiden Eigenschaften
$r + s = s + r$ und $(r+s) + t = r + (s+t)$ .