

Sonnenkompass

Jürgen Womser-Schütz, <https://github.com/JW-Schuetz/Hobby>

Widmung

Für das Geburtstags-“Kind“ Waldemar, meinem netten Gastgeber in Las Palmas, zu seinem 73. Geburtstag.

1 Fragestellung

Wie genau ist die bekannte Methode, die Nord-Richtung per Sonnenstand zu bestimmen?

2 Methodenbeschreibung

Die folgenden Aktionen sind zur Durchführung der Methode notwendig

- einen Stab senkrecht in die Erde stecken
- das Ende des Schattens des Stabes mit einem Stein markieren
- einige Zeit abwarten bis der Schatten weiter gewandert ist
- das neue Schattenende des Stabes mit einem zweiten Stein markieren.

Man erhält dann die Nordrichtung mittels der folgenden Regeln¹

- R1: der Schatten des Stab-Endes bewegt sich auf der Verbindungsgeraden der beiden Steine
- R2: die Nordrichtung ist orthogonal zur Verbindungsgeraden
- R3: auf der Nordhalbkugel der Erde zeigt der Schatten Richtung Norden, auf der Südhalbkugel Richtung Süden.

3 Vereinbarungen

Im folgenden werden Basiskenntnisse der Geometrie und der linearen Algebra vorausgesetzt.

Vektoren werden durch einen Unterstrich kenntlich gemacht (\underline{x}) und ihre Transponierten (\underline{x}^T) durch ein hochgestelltes T .

Matrizen werden nicht besonders bezeichnet, sie sind von Skalaren durch den Kontext unterscheidbar.

Weiterhin werden Kugelkoordinaten (r, Θ, φ) und kartesische Koordinaten (x_1, x_2, x_3) verwendet, der Ursprung beider Koordinatensysteme ist der Erdmittelpunkt. Das kartesische Koordinatenpaar (x_1, x_2) spannt die Ekliptikalebene auf. Siehe dazu die Problemskizzen in den Abbildungen 1 und 2.

¹Die Methode wird in der Nähe der Pole scheitern, da das Stabende dort keinen Schatten mehr wirft (und natürlich auch, weil dort keine Erde zum Hineinstecken des Stabes vorhanden ist ☺).

4 Annahmen

Es werden die folgenden Annahmen getroffen:

- die Sonne im Punkt \underline{S} sei ein Punktstrahler
- die Erde bewege sich in der Ekliptikalebene auf einer idealen Kreisbahn mit Radius R_S um die Sonne
- die Erde habe ideale Kugelgestalt mit dem Radius R_E
- die Erd-Rotationsachse habe einen Neigungswinkel ψ zur Achse senkrecht auf der Ekliptikalebene
- im Punkt \underline{P} der Erdoberfläche befinde sich der Fusspunkt des senkrecht orientierten Stabes der Länge L
- für die geographische Länge des Punktes \underline{P} wird stets $\varphi = 0$ angenommen
- die Erdoberfläche um den Fusspunkt des Stabes herum werde durch eine Tangentialebene an die Erdkugel im Punkt \underline{P} angenähert
- es werden zwei Zeiten betrachtet: die Jahreszeit $T^* \in [0, 365)$, gemessen in Tagen und die Tageszeit $t^* \in [0, 24)$, gemessen in Stunden
- der Ablauf der Tageszeit t^* soll die Jahreszeit T^* unbeeinflusst lassen, die beiden Zeiten seien also voneinander entkoppelt
- der astronomische Mittag, also die Zeit des Sonnenhöchststandes wird mit „12 Uhr“ identifiziert
- die Sommersonnenwende (SSW) ist am 21. Juni, die Wintersonnenwende (WSW) ist am 21. Dezember
- das Frühlings- und Herbst-Äquinoktium ist am 21. März bzw. am 21. September.

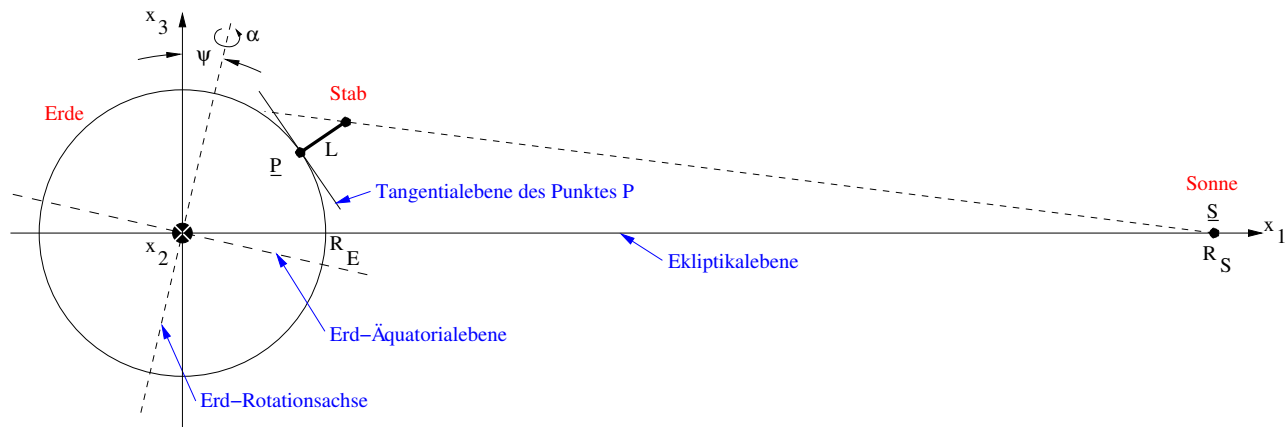


Abbildung 1: Problemskizze, SSW, astronomischer Mittag



Abbildung 2: Problemskizze, WSW, astronomischer Mittag

5 Generelles zur Lösung

In der folgenden Arbeit wird zunächst die Verbindungsgerade zwischen der Sonne und dem Stabendpunkt konstruiert. Dann werden die Schnittpunkte der verlängerten Verbindungsgeraden mit der Tangentialebene als Funktion der Tageszeit bestimmt. Schlussendlich werden die gefundenen Schnittpunkte orthogonal auf die Tangentialebene projiziert. Man erhält damit eine 2-dimensionale Darstellung.

Es sind zwei äquivalente Lösungsansätze denkbar, die Erdrotation zu berücksichtigen

- Die Erde um den Winkel α rotieren und die Sonne fixiert lassen.
- Den Ort der Sonne um den Winkel $-\alpha$ rotieren und die Erde fixiert lassen.

Hier wird der zweite Fall behandelt.

Zur Unterstützung der Problemlösung wird MatLab und seine „Symbolic Math Toolbox“ verwendet.

Die MatLab-Quellen finden sich in meinem GitHub-Verzeichnis „<https://github.com/JW-Schuetz>“ im Unterverzeichnis „Hobby/Matlab-Sources“.

6 Tageszeitabhängigkeit

Die tägliche Rotation der Erde um ihre Rotationsachse wird in Abhängigkeit des Rotationswinkels $\alpha \in [0, 2\pi)$ durch die Drehmatrix (siehe dazu z.B. [1])

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} e_1^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & e_1 e_2 (1 - \cos \alpha) - e_3 \sin \alpha & e_1 e_3 (1 - \cos \alpha) + e_2 \sin \alpha \\ e_2 e_1 (1 - \cos \alpha) + e_3 \sin \alpha & e_2^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & e_2 e_3 (1 - \cos \alpha) - e_1 \sin \alpha \\ e_3 e_1 (1 - \cos \alpha) - e_2 \sin \alpha & e_3 e_2 (1 - \cos \alpha) + e_1 \sin \alpha & e_3^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \end{pmatrix}$$

beschrieben. Dabei ist

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

ein Vektor mit $\|\underline{e}\| = 1$, der Richtung und Orientierung der Rotationsachse definiert.

Zum Zeitpunkt der SSW, am 21. Juni, liegt die Rotationsachse in der (x_1, x_3) -Ebene (siehe die nicht massstäbliche Abbildung 1), der Einheitsvektor \underline{e} ist somit durch

$$\begin{aligned} e_1 &= \sin \psi \\ e_2 &= 0 \\ e_3 &= \cos \psi \end{aligned}$$

gegeben. Für die Drehmatrix folgt damit

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \sin^2 \psi (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & -\cos \psi \sin \alpha & \sin \psi \cos \psi (1 - \cos \alpha) \\ \cos \psi \sin \alpha & \cos \alpha & -\sin \psi \sin \alpha \\ \cos \psi \sin \psi (1 - \cos \alpha) & \sin \psi \sin \alpha & \cos^2 \psi (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (1)$$

der Winkel ψ hat den numerischen Wert $\psi = 23.44^\circ$ (siehe dazu z.B. [2]). Die zum Rotationswinkel α gehörige Tageszeit in Stunden ist durch

$$t^* = \frac{12}{\pi} \alpha \quad (2)$$

gegeben.

Die Erd-Rotationsachse \underline{e} ist wegen des Drehimpuls-Erhaltungssatzes zeitinvariant.

7 Jahreszeitabhängigkeit

Die Erde bewegt sich rechtshändig um die fixierte Sonne (siehe dazu z.B. [3], und die nicht massstäbliche Abbildung 3).

In dieser Arbeit wird der jahreszeitliche Einfluss durch eine Kreisbewegung der Sonne um die fixierte Erde berücksichtigt. Man kann deshalb im Erd-Koordinatensystem den Ort der Sonne als Funktion des jahreszeitlichen Umlaufwinkels

$$\Omega = \omega T^* \quad (3)$$

durch

$$\underline{S}(T^*) = R_S \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

beschreiben. Dabei ist $\omega = \frac{2\pi}{365}$ und $T^* \in [0, 365)$ die Jahreszeit, gemessen in Tagen seit der SSW am 21. Juni.

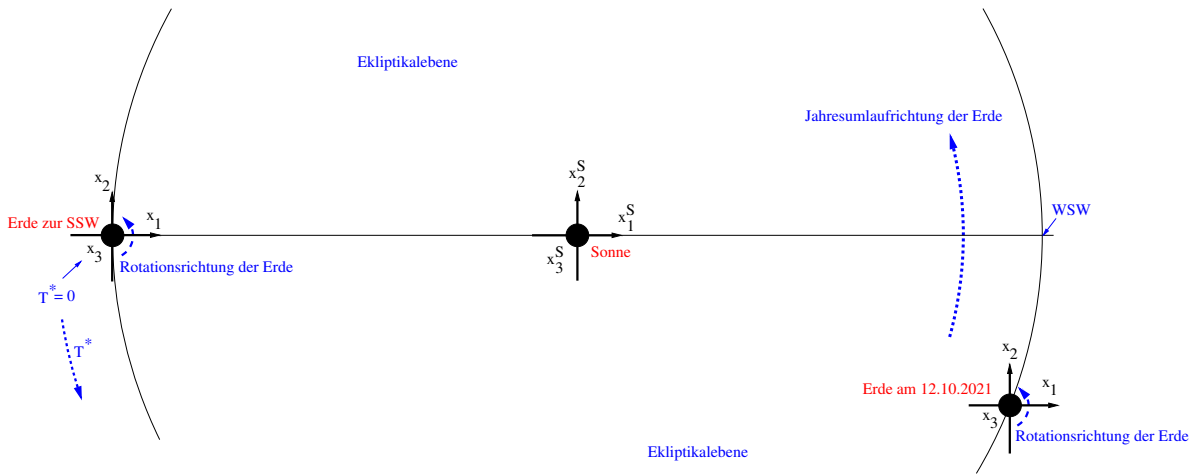


Abbildung 3: Umlauf der Erde um die Sonne

8 Fuss- und Endpunkt des Stabes

Der Ort des Stabfusspunktes im Erd-Koordinatensystem

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

bestimmt sich aus der geographischen Breite Θ_G , der geographischen Länge $\varphi = 0$, dem Erdradius R_E und dem Achsneigungswinkel ψ zu (siehe dazu z.B. [3])

$$p_1 = R_E \sin \left[\frac{\pi}{2} - (\Theta_G - \psi) \right] \quad (5)$$

$$p_2 = 0$$

$$p_3 = R_E \cos \left[\frac{\pi}{2} - (\Theta_G - \psi) \right].$$

Dabei wurde die um ψ korrigierte geographischen Breite $\Theta_G - \psi$ durch $\Theta = \frac{\pi}{2} - (\Theta_G - \psi)$ ins Kugelkoordinatensystem (r, Θ, φ) umgerechnet (siehe dazu z.B. [4]).

Mit der Stablänge L gilt für den Stabendpunkt \underline{Q} im Erd-Koordinatensystem

$$\underline{Q} = \left(1 + \frac{L}{R_E} \right) \underline{P}. \quad (6)$$

9 Tangentialebene T

Die Kugel mit Radius R_E um den Ursprung ist mit der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_i x_i^2 - R_E^2$$

durch die Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ gegeben. Für den Index gilt hier und im folgenden $i \in [1, 3]$.

Für die Tangentialebene im Berührungspunkt $\underline{P} = (p_1, p_2, p_3)^T$ gilt (siehe dazu z.B. [5])

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - p_i) = 0.$$

Dabei sind die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i}$ im Berührungspunkt \underline{P} zu bilden.

Für die implizite Gleichung der Tangentialebene T im Berührungspunkt \underline{P} folgt schliesslich für die Kugel der Ausdruck

$$\sum_i p_i (x_i - p_i) = 0.$$

In vektorieller Schreibweise lässt sich die Tangentialebene im Erd-Koordinatensystem durch

$$\forall \underline{x} \in T : \underline{P}^T (\underline{x} - \underline{P}) = 0 \quad (7)$$

charakterisieren.

10 Verbindungsgerade

Die Punkte der Verbindungsgerade G der Sonne $\underline{S}(T^*)$, nach Gleichung (4), mit dem Stabende \underline{Q} , nach Gleichung (6), sind durch

$$\forall \underline{x} \in G : \underline{x} = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}(T^*) \quad (8)$$

gegeben. Der reelle Geradenparameter μ beschreibt für $\mu = 0$ den Punkt $\underline{S}^\alpha(T^*)$ und für $\mu = 1$ den Punkt \underline{Q} .

11 Analytische Problemlösung

11.1 Lösung durch Fixierung der Erde

Berücksichtigt man die Drehung der Sonne durch die Drehmatrix $D_{(-\alpha)}$ nach Gleichung (1) und fixiert die Erde, dann folgt mit dem gedrehten Ort der Sonne

$$\underline{S}^\alpha(T^*) = D_{(-\alpha)} \underline{S}(T^*) \quad (9)$$

aus Gleichung (8) die Darstellung

$$\forall \underline{x} \in G_S^\alpha : \underline{x} = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}^\alpha(T^*).$$

Gesucht ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Tangentialebene T oder anders formuliert, gesucht wird der Geradenparameter μ , der eine Lösung \underline{x}_0 der Gleichung (7) mit der Bedingung

$$\underline{x}_0 = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}^\alpha(T^*) \quad (10)$$

zulässt.

11.1.1 Lösungspunkt

Einsetzen von Gleichung (10) in Gleichung (7) liefert

$$\underline{P}^T [\underline{\mu Q} + (1 - \underline{\mu}) \underline{S}^\alpha(T^*) - \underline{P}] = 0.$$

Wegen $\underline{P}^T \underline{P} = R_E^2$ folgt nach kurzer Rechnung die Bestimmungsgleichung für den Geradenparameter

$$\mu_0(\alpha) = \frac{\Omega^S(\alpha)}{1 + \Omega^S(\alpha)} \quad (11)$$

mit der Abkürzung

$$\Omega^S(\alpha) = \frac{1}{L} \left[R_E - \frac{\underline{P}^T \underline{S}^\alpha(T^*)}{R_E} \right]. \quad (12)$$

Da im Ausdruck der Verbindungsgeraden mit $\mu = 0$ die Sonne und mit $\mu = 1$ das Stabende beschrieben wird, muss $\mu_0 > 1$ und dazu äquivalent $\Omega^S < -1$ gelten (siehe dazu Abschnitt 14).

Der gesuchte Lösungspunkt \underline{x}_0 ergibt sich als Funktion des Drehwinkels α mit dem nach Gleichung (11) bestimmten $\mu_0(\alpha)$ zu

$$\underline{x}_0^S(\alpha) = \mu_0 \underline{Q} + (1 - \mu_0) \underline{S}^\alpha(T^*). \quad (13)$$

Die mit dem Winkel α parametrisierten Lösungspunkte $\underline{x}_0^S(\alpha)$ bilden eine Trajektorie im \mathbb{R}^3 .

11.1.2 Projektion auf die Tangentialebene

Die gefundenen 3-dimensionalen Trajektorienpunkte $\underline{x}_0^S(\alpha)$ der Gleichung (13) sind im Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) der Erde gegeben. Sie sollen orthogonal auf ein zweidimensionales Koordinatensystem der Tangentialebene T abgebildet werden. Sein Ursprung soll im Stabfußpunkt \underline{P} liegen.

Zur Bestimmung dieser Abbildung wird der Punkt \underline{P} so um die x_2 -Achse gedreht, dass er in der Ekliptik zu liegen kommt. Mitgedreht werden die Trajektorienpunkte $\underline{x}_0^S(\alpha)$ und die Tangentialebene T - damit ist dann die Tangentialebene parallel zur (x_2, x_3) -Ebene angeordnet. Anschliessend werden die Trajektorienpunkte $\underline{x}_0^S(\alpha)$ auf die (x_2, x_3) -Ebene, oder dazu äquivalent, die Tangentialebene T , projiziert.

Der notwendige Drehwinkel um die x_2 -Achse ist durch $\Theta_G - \psi$, die Drehmatrix um die x_2 -Achse ist durch

$$D_{\Theta}^{x_2} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

gegeben (siehe dazu z.B. [1]). Der Punkt \underline{P} wird durch diese Drehung auf $x_1 = R_E$ und $x_2 = x_3 = 0$ abgebildet.

Die 3-dimensionalen gedrehten Trajektorienpunkte $D_{(\Theta_G - \psi)}^{x_2} \underline{x}_0^S(\alpha)$ können nun mittels der Projektionsabbildung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

auf die (x_2, x_3) -Ebene bzw. Tangentialebene T projiziert werden. Der Punkt \underline{P} wird durch A auf den Ursprung $\underline{0}$ abgebildet.

Es ergibt sich schliesslich für die Punkte der gesuchten 2-dimensionalen Trajektorie

$$\underline{x}^S(\alpha) = A D_{(\Theta_G - \psi)}^{x_2} \underline{x}_0^S(\alpha) \in \mathbb{R}^2. \quad (15)$$

12 Ergebnisse

12.1 Vergleich mit empirisch ermittelten Resultaten

12.1.1 Las Palmas de Gran Canaria

Die Schattentrajektorie und den Standort des Stabes für den Strand in Las Palmas (28.136746041614316° Breite) für die SSW am 21. Juni und für die WSW am 21. Dezember findet sich in den Abbildungen 4 und 5. Zwischen den Markierungen der Trajektorien liegen jeweils 10 Minuten. Für die Stablänge wurde 1.5 m angenommen. Man beachte die unterschiedlichen Skalierungen der beiden Abbildungen.

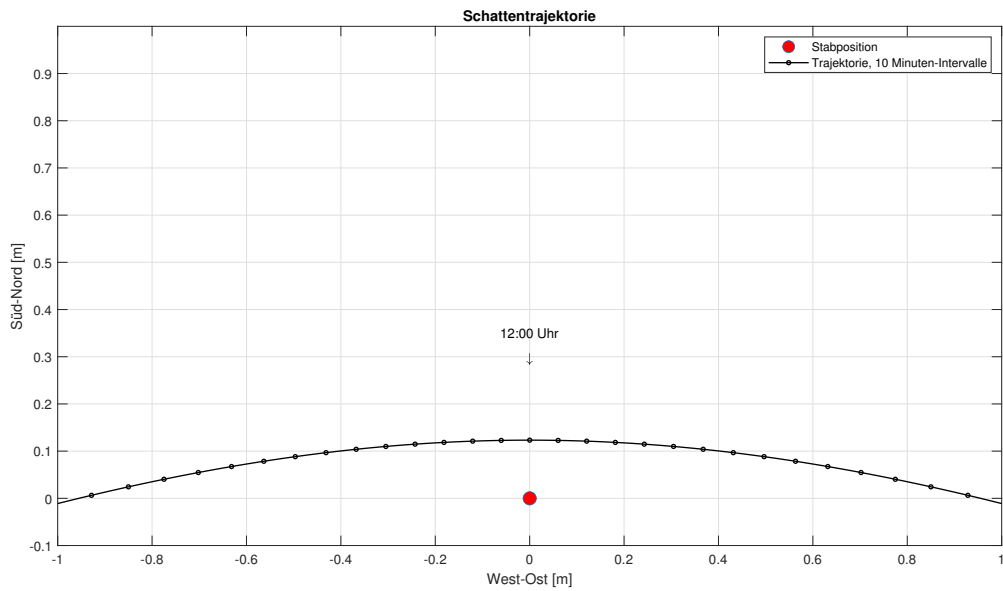


Abbildung 4: Schattentrajektorie zur SSW am 21. Juni in Las Palmas

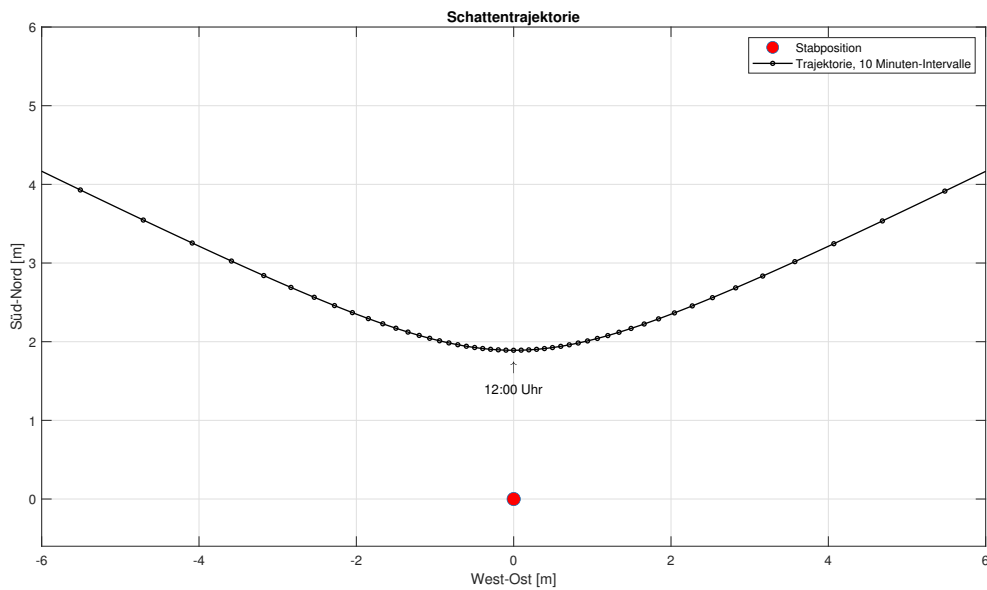


Abbildung 5: Schattentrajektorie zur WSW am 21. Dezember in Las Palmas

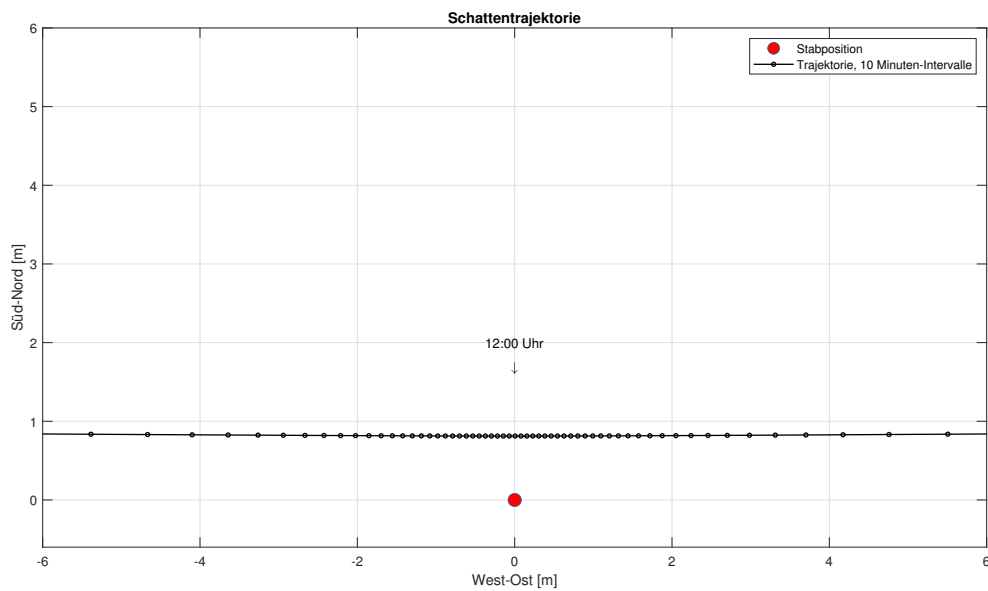


Abbildung 6: Schattentrajektorie zum Frühlings-Äquinoktium am 21. März in Las Palmas

Abbildung 6 zeigt die berechnete Schattentrajektorie für den 21. März, dem Frühlings-Äquinoktium - das Herbst-Äquinoktium hat eine identische Trajektorie.

Abbildung 7 zeigt die berechnete Schattentrajektorie ebenfalls für Las Palmas, aber für den 12. Oktober. Die Koordinaten der beiden markierten Punkte sind dargestellt, ihr geometrischer Abstand beträgt 20.18 cm, ihr zeitlicher Abstand beträgt 20 Minuten (13:30 Uhr und 13:50 Uhr).

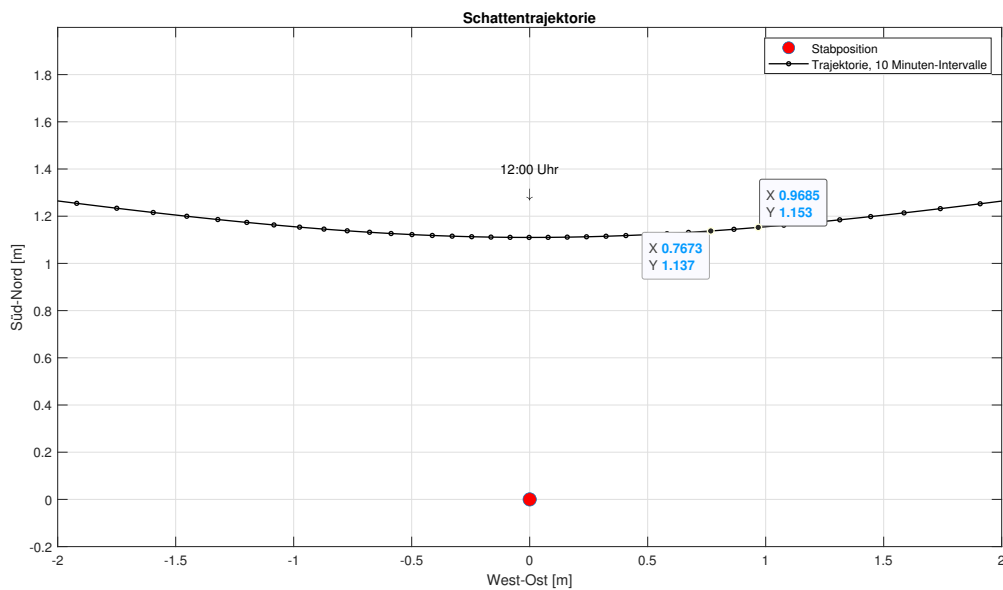


Abbildung 7: Schattentrajektorie am 12. Oktober in Las Palmas mit den Punkten für 13:30 Uhr und 13:50 Uhr

Korrespondierend zur Abbildung 7 sind in Las Palmas am 12. Oktober 2021 die nachfolgenden Fotos entstanden. Im ersten der beiden Fotos der Abbildung 8 sieht man am unteren Bildrand das gelbe Fussende des Stabes. Der Zeitunterschied beider Aufnahmen beträgt 22 Minuten. In dieser Zeit ist der Schatten ca. 20 cm weiter gewandert. Dieses Ergebnis passt recht gut zum rechnerisch ermittelten Abstand².

²Leider habe ich vor Ort weder die genaue Länge des Stabes noch die genaue Länge der Trajektorie gemessen.



Abbildung 8: Schatten in Las Palmas am 12. Oktober 2021 um 13:33 Uhr und um 13:55 Uhr

13 Bewertung der Genauigkeit

Entgegen der Annahme der oben beschriebenen Methode zur Bestimmung der Nord-Richtung per Sonnenstand, ist die Schattentrajektorie keine Gerade - nicht einmal näherungsweise.

Die dadurch verursachte Missweisung zur Nordrichtung ist durchaus nicht vernachlässigbar - sie kann z.B. in Las Palmas bis zu 45° betragen!

Die genaue Nordrichtung erhält man z.B., wenn man Schattenzeitpunkte untersucht, die symmetrisch um den Zeitpunkt des astronomischen Mittags liegen.

14 Anhang

14.1 Behauptung

Aus $\frac{\Omega^S}{1+\Omega^S} > 1$ folgt $\Omega^S < -1$.

Beweis

- Fall $1 + \Omega^S = 0$
 $\Omega^S = -1$ und damit folgt der Widerspruch $\frac{\Omega^S}{0} > 1$.
- Fall $1 + \Omega^S > 0$
Es folgt $\Omega^S > 1 + \Omega^S$ oder $0 > 1$. Dies ist offensichtlich falsch. Also existiert für diesen Fall keine Lösung.
- Fall $1 + \Omega^S < 0$
Es folgt $\Omega^S < 1 + \Omega^S$ oder $0 < 1$. Dies ist offensichtlich richtig. Also existiert für diesen Fall eine Lösung, nämlich $\Omega^S < -1$.

14.2 Limits für den Erddrehwinkel α

Für welchen Bereich des Drehwinkels α sind zulässige Lösungen (also solche mit $\Omega^S < -1$) zu erwarten? Untersucht werden soll zunächst der Fall der Gleichheit $\Omega^S = -1$. Multiplikation mit LR_E liefert

$$LR_E \Omega^S = -LR_E. \quad (16)$$

Mit dem gedrehten Ort der Sonne nach (9), mit dem Ort der Sonne nach (4) und mit der Drehmatrix als Funktion des negativen Erdrotations-Winkels $-\alpha$ nach (1) kann man für die linke Seite der Ungleichung schreiben

$$LR_E \Omega^S = \tilde{A} \sin \alpha + \tilde{B} \cos \alpha + \tilde{C}.$$

Dabei gilt für die Abkürzungen (siehe dazu die MatLab-Quelldatei „SonnenKompassSymbolicAddon.m“)

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= -p_1 R_S \cos \psi \sin \Omega + p_2 R_S \cos \psi \cos \Omega + p_3 R_S \sin \psi \sin \Omega \\ \tilde{B} &= -p_1 R_S \cos^2 \psi \cos \Omega - p_2 R_S \sin \Omega + p_3 R_S \sin \psi \cos \psi \cos \Omega \\ \tilde{C} &= R_E^2 + p_1 R_S (\cos^2 \psi - 1) \cos \Omega - p_3 R_S \sin \psi \cos \psi \cos \Omega. \end{aligned}$$

Wegen Gleichung (16) folgt $f(\alpha) = 0$ mit

$$f(\alpha) = \tilde{A} \sin \alpha + \tilde{B} \cos \alpha + \tilde{C} + LR_E$$

oder umformuliert

$$f(\alpha) = A \sin \alpha + B \cos \alpha + C. \quad (17)$$

Mit $p_2 = 0$ aus (5) folgt

$$\begin{aligned} A &= -R_S (p_1 \cos \psi - p_3 \sin \psi) \sin \Omega \\ B &= -R_S (p_1 \cos \psi - p_3 \sin \psi) \cos \psi \cos \Omega \\ C &= R_E^2 - R_S (p_1 \sin^2 \psi + p_3 \sin \psi \cos \psi) \cos \Omega. \end{aligned}$$

Gleichung (17) hat für $k \in \mathbb{N}$ die Lösungen (siehe dazu z.B. die MatLab-Quelldatei „SolveEquation.m“)

$$\alpha_{\pm} = 2\pi k + 2 \arctan \left(\frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B - C} \right).$$

Die beiden physikalisch richtigen Lösungen sind

$$\begin{aligned} \alpha_+ &= 2 \arctan \left(\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B - C} \right) \\ \alpha_- &= 2\pi + 2 \arctan \left(\frac{A - \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B - C} \right). \end{aligned}$$

Literatur

- [1] <https://de.wikipedia.org/wiki/Drehmatrix>
- [2] <https://de.wikipedia.org/wiki/Erdachse>
- [3] <https://de.wikipedia.org/wiki/Sonnensystem>
- [4] <https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten>
- [5] <https://de.wikipedia.org/wiki/Tangentialebene>