Sonnenkompass

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz

1 Fragestellung

Wir genau ist die verbreitete Methode, die Nord-Richtung per Sonnenstand zu bestimmen?

2 Methodenbeschreibung

- einen Stab senkrecht in die Erde stecken
- das Ende des Schattens des Stabes mit einen Stein markieren
- einige Zeit abwarten bis der Stabschatten weiter gewandert ist
- das neue Schattenende des Stabes mit einem zweiten Stein markieren.

Man erhält die Nordrichtung mittels der folgenden Regeln (R1, R2, R3)

1. der Schatten des Stab-Endes bewegt sich auf der Verbindungsgeraden der beiden Steine
2. die Nordrichtung ist orthogonal zur Verbindungsgeraden
3. auf der Nordhalbkugel der Erde zeigt der Schatten Richtung Norden, auf der Südhalbkugel Richtung Süden.

3 Problemformulierung

Es werden kartesische Koordinaten (x_1, x_2, x_3) verwendet, wobei das Koordinatenpaar (x_1, x_2) die Ekliptikalebene aufspannt, der Ursprung des Koordinatensystems ist der Erdmittelpunkt (siehe dazu die Problemskizze in Abbildung 1).

Es werden die folgenden Annahmen getroffen:

- die Sonne im Punkt $\underline{S}$ sei durch einen Punktstrahler darstellt
- die Sonne habe den Abstand R_S von der Erde
- die Erde habe ideale Kugelgestalt mit dem Radius R_E
- im Punkt $\underline{P}$ der Erdoberfläche befinde sich der Stab der Länge L
- die Erd-Rotationsachse habe einen Neigungswinkel ϕ zur x_3-Achse
- die Erdoberfläche um den Stab wird durch eine Tangentialebene [1] an die Erdkugel angenähert.

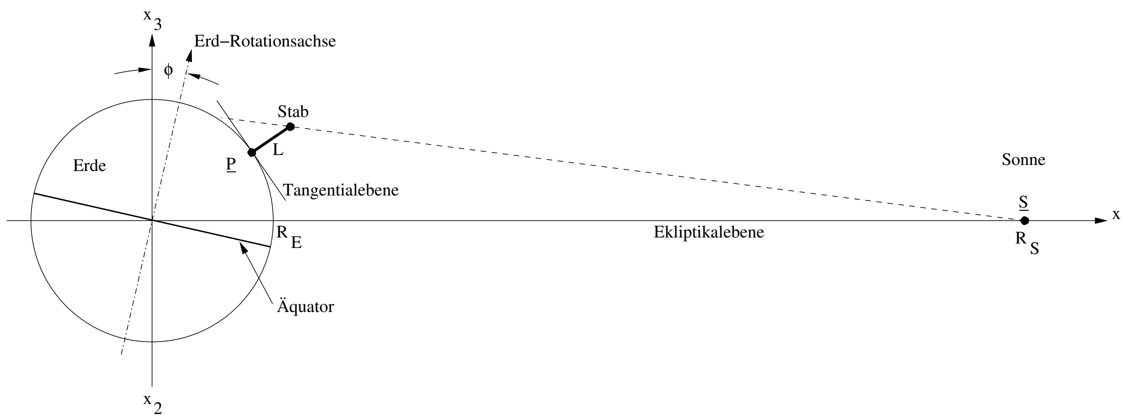

Abbildung 1: Problemskizze

Rotationsachse

Die Erde rotiert um ihre Rotationsachse. Durch diese Rotation werden Punkte der Erdoberfläche auf andere Punkte der Erdoberfläche abgebildet. Diese Abbildung wird in Abhängigkeit des Drehwinkels α durch die Drehmatrix D_α beschrieben. Für die Drehmatrix gilt [2]

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} n_1^2\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha & n_1 n_2\,(1-\cos\alpha)-n_3\sin\alpha & n_1 n_3\,(1-\cos\alpha)+n_2\sin\alpha \\ n_2 n_1\,(1-\cos\alpha)+n_3\sin\alpha & n_2^2\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha & n_2 n_3\,(1-\cos\alpha)-n_1\sin\alpha \\ n_3 n_1\,(1-\cos\alpha)-n_2\sin\alpha & n_3 n_2\,(1-\cos\alpha)+n_1\sin\alpha & n_3^2\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Dabei ist

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

ein Einheitsvektor, der Richtung und Orientierung der Rotationsachse definiert.

In dieser Arbeit soll die Rotationsachse, so wie in Abbildung 1 dargestellt, in der (x_1, x_3)-Ebene liegen. Es wird somit gewählt

$$\begin{aligned} n_1 &= \sin\phi \\ n_2 &= 0 \\ n_3 &= \cos\phi. \end{aligned}$$

Tangentialebene

Die Kugel mit Radius R_E um den Ursprung ist durch die Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ gegeben, mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_i x_i^2 + R_E^2.$$

Für die Tangentialebene im Berührpunkt $\underline{P} = (p_1, p_{2,} p_3)$ gilt allgemein (siehe dazu [3])

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - p_i) \quad = \quad 0.$$

Dabei sind die Ableitungen im Berührpunkt $\underline{P}$ zu bilden, für den Index gilt $i \in [1, 3]$.
Für die implizite Gleichung der Tangentialebene im Berührpunkt $\underline{P}$ folgt schliesslich in unserem speziellen Fall

$$\sum_i p_i (x_i - p_i) \quad = \quad 0$$

oder in Vektorschreibweise

$$\underline{P}(\underline{x} - \underline{P}) \quad = \quad 0.$$

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt für die gedrehte Tangentialebene T^α die Gleichung

$$(D_\alpha \underline{P})\, \underline{x} = (D_\alpha \underline{P})^2 = D_{2\alpha} \underline{P}^2. \tag{1}$$

Stabende

Für den Punkt $\underline{Q}$ am Ende des Stabes der Länge L gilt

$$\underline{Q} \quad = \quad \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{P}.$$

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt

$$\underline{Q}^\alpha \quad = \quad \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) D_\alpha \underline{P}. \tag{2}$$

Verbindungsgerade

Die Sonne befinde sich im Punkt

$$\underline{S} \quad = \quad \begin{pmatrix} R_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Punkte der Verbindungsgerade $\underline{G}$ der Sonne $\underline{S}$ mit dem Stabende $\underline{Q}$ nach Gleichung (2) sind durch

$$\underline{G} \quad = \quad \mu \underline{Q} + (1 - \mu)\, \underline{S}$$

gegeben, dabei gilt $\mu \in [0, 1]$.
Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt

$$\underline{G}^\alpha \quad = \quad \mu D_\alpha \underline{Q} + (1 - \mu)\, D_\alpha \underline{S}.$$

Lösung

Gesucht wird die Trajektorie des Schattens des Stabendes auf der Tangentialebene T^α in Abhängigkeit des Rotationswinkels α, der im Verlauf eines Tages den Wertebereich von 0 bis 2π durchläuft.

Gesucht ist also der Schnittpunkt der Geraden $\underline{G}^\alpha$ mit der Tangentialebene T^α.

Literatur

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Tangentialebene

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Drehmatrix

[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Tangentialebene