

Sonnenkompass

Jürgen Womser-Schütz, <https://github.com/JW-Schuetz/Hobby>

1 Fragestellung

Wie genau ist die bekannte Methode, die Nord-Richtung per Sonnenstand zu bestimmen?

2 Methodenbeschreibung

Die folgenden Aktionen sind zur Durchführung der Methode notwendig

- einen Stab senkrecht in die Erde stecken
- das Ende des Schattens des Stabes mit einem Stein markieren
- einige Zeit abwarten bis der Stabschatten weiter gewandert ist
- das neue Schattenende des Stabes mit einem zweiten Stein markieren.

Man erhält dann die Nordrichtung mittels der folgenden Regeln

- R1: der Schatten des Stab-Endes bewegt sich auf der Verbindungsgeraden der beiden Steine
- R2: die Nordrichtung ist orthogonal zur Verbindungsgeraden
- R3: auf der Nordhalbkugel der Erde zeigt der Schatten Richtung Norden, auf der Südhalbkugel Richtung Süden.

Die Methode wird in der Nähe der Pole scheitern, da das Stabende dort keinen Schatten mehr wirft (und dort keine Erde zum Hineinstecken des Stabes vorhanden ist ☹).

3 Vereinbarungen

Im folgenden werden Basiskenntnisse der Geometrie und der linearen Algebra vorausgesetzt.

Vektoren werden durch einen Unterstrich kenntlich gemacht (\underline{x}) und ihre Transponierten (\underline{x}^T) durch ein hochgestelltes T . Matrizen werden nicht besonders bezeichnet, sie ergeben sich aus ihrem Kontext.

Weiterhin werden Kugelkoordinaten (r, Θ, φ) und kartesische Koordinaten (x_1, x_2, x_3) verwendet, wobei das Koordinatenpaar (x_1, x_2) die Ekliptikalebene aufspannt, der Ursprung des Koordinatensystems ist der Erdmittelpunkt (siehe dazu die Problemskizze in Abbildung 1).

4 Problemformulierung

Es werden die folgenden Annahmen getroffen:

- der Zeitpunkt im Jahr sei die Sommersonnenwende
- die Sonne im Punkt \underline{S} sei durch einen Punktstrahler darstellt
- die Sonne habe den Abstand R_S von der Erde

- die Erde habe ideale Kugelgestalt mit dem Radius R_E
- die Erd-Rotationsachse habe einen Neigungswinkel ψ zur x_3 -Achse
- im Punkt P der Erdoberfläche befinde sich der Fusspunkt des Stabes der Länge L
- die Erdoberfläche um den Fusspunkt des Stabes herum werde durch eine Tangentialebene an die Erdkugel angenähert.

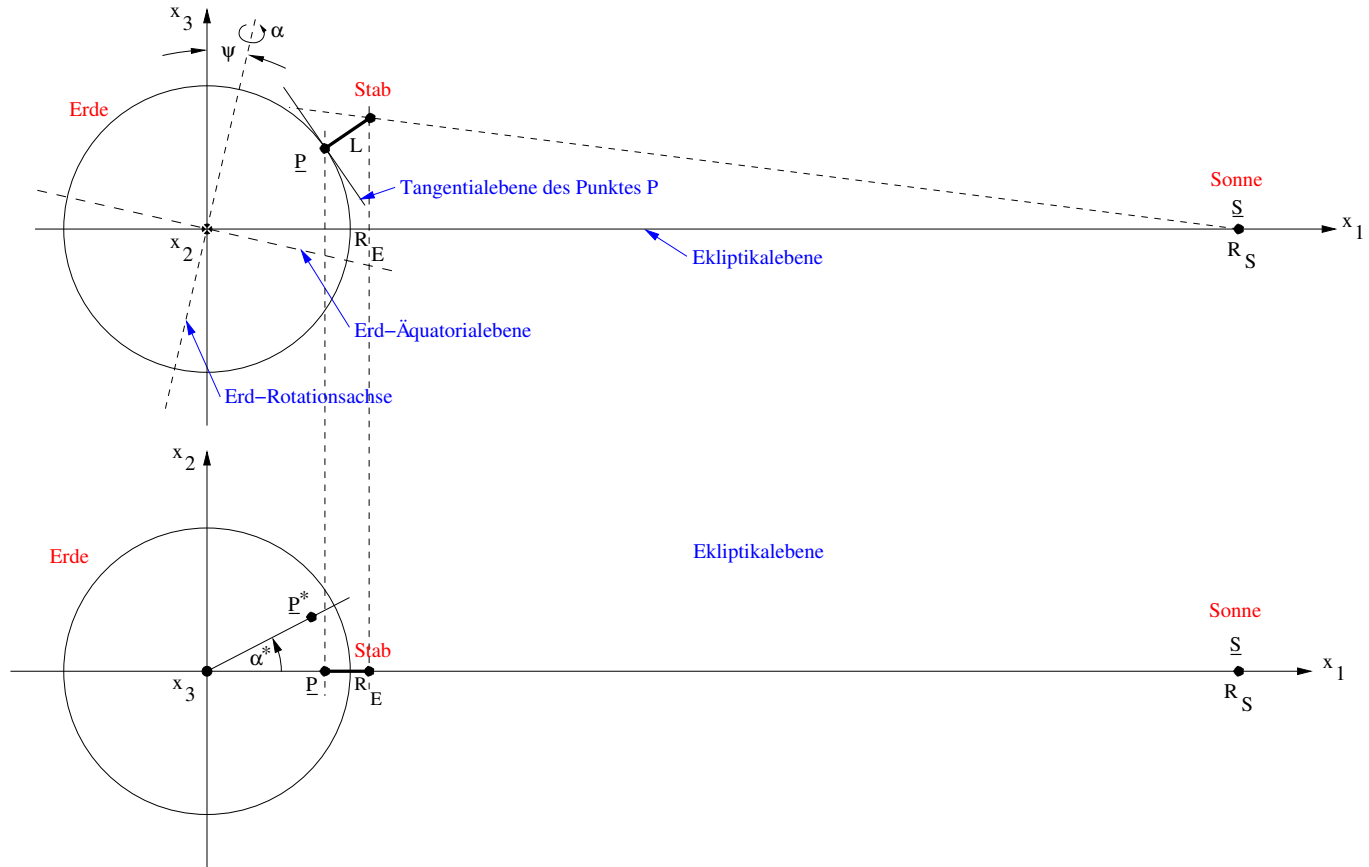


Abbildung 1: Problemskizze (nicht massstäblich, zur Sommersonnenwende)

5 Lösung

Zur Unterstützung der Problemlösung wird MatLab und seine „Symbolic Math Toolbox“ verwendet. Die MatLab-Quellen finden sich im GitHub-Unterverzeichnis „Matlab-Sources“.

Gesucht wird die Trajektorie des Schattens des Stabendes auf der Tangentialebene in Abhängigkeit des Erd-Rotationswinkels α .

Es sind zwei äquivalente Lösungsansätze denkbar, die Erdrotation zu berücksichtigen

- Die mit der Erde verbundenen Orte um den Winkel α zu rotieren und die Sonne fixiert lassen (siehe Abschnitt 11.1).
- Den Ort der Sonne um den Winkel $-\alpha$ zu rotieren und die mit der Erde verbundenen Orte fixiert lassen (siehe Abschnitt 11.2).

6 Erdrotation

Die Rotation der Erde um ihre Rotationsachse wird in Abhängigkeit des Rotationswinkels $\alpha \in [0, 2\pi]$ durch die Drehmatrix

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} e_1^2(1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & e_1 e_2(1 - \cos \alpha) - e_3 \sin \alpha & e_1 e_3(1 - \cos \alpha) + e_2 \sin \alpha \\ e_2 e_1(1 - \cos \alpha) + e_3 \sin \alpha & e_2^2(1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & e_2 e_3(1 - \cos \alpha) - e_1 \sin \alpha \\ e_3 e_1(1 - \cos \alpha) - e_2 \sin \alpha & e_3 e_2(1 - \cos \alpha) + e_1 \sin \alpha & e_3^2(1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \end{pmatrix}$$

beschrieben, dabei ist

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

ein Einheitsvektor, der Richtung und Orientierung der Rotationsachse definiert (siehe dazu z.B. [1]).

In dieser Arbeit soll der Zeitpunkt der Sommersonnenwende betrachtet werden, d.h. die Rotationsachse soll, so wie in Abbildung 1 dargestellt, in der (x_1, x_3) -Ebene liegen. Der Einheitsvektor ist somit durch

$$\begin{aligned} e_1 &= \sin \psi \\ e_2 &= 0 \\ e_3 &= \cos \psi. \end{aligned} \tag{1}$$

gegeben und für die Drehmatrix folgt schliesslich

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \sin^2 \psi (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & -\cos \psi \sin \alpha & \sin \psi \cos \psi (1 - \cos \alpha) \\ \cos \psi \sin \alpha & \cos \alpha & -\sin \psi \sin \alpha \\ \cos \psi \sin \psi (1 - \cos \alpha) & \sin \psi \sin \alpha & \cos^2 \psi (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Die Drehmatrix ist orthogonal, d.h. es gilt

$$D_\alpha^T = D_\alpha^{-1}.$$

Der Winkel ψ hat den numerischen Wert [2]

$$\psi = 23.44^\circ. \tag{3}$$

Für 12 Uhr mittags soll $\alpha = 0$ gelten.

7 Fusspunkt des Stabes

Der Ort $\underline{P} = (p_1, p_2, p_3)^T$ des Stabfusspunktes bestimmt sich aus der geographischen Breite Θ , der geographischen Länge φ , dem Erdradius R_E und dem Achsneigungswinkel ψ zu (siehe dazu z.B. [4])

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit

$$\begin{aligned} p_1 &= R_E \sin \left(\frac{\pi}{2} - \Theta + \psi \right) \cos \varphi \\ p_2 &= R_E \sin \left(\frac{\pi}{2} - \Theta + \psi \right) \sin \varphi \\ p_3 &= R_E \cos \left(\frac{\pi}{2} - \Theta + \psi \right). \end{aligned}$$

Dabei wurde die geographischen Breite durch

$$\Theta - \psi \longrightarrow \frac{\pi}{2} - \Theta + \psi$$

ins Kugelkoordinatensystem umgerechnet (siehe dazu z.B. [4]).

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt für den Ort des Stabfusspunktes

$$\underline{P}^\alpha = D_\alpha \underline{P}. \quad (5)$$

8 Endpunkt des Stabes

Für den Punkt \underline{Q} am Ende des Stabes der Länge L gilt

$$\underline{Q} = \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{P}. \quad (6)$$

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt aus den Gleichungen (5, 6)

$$\begin{aligned} \underline{Q}^\alpha &= \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) D_\alpha \underline{P} \\ &= \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{P}^\alpha. \end{aligned} \quad (7)$$

9 Tangentialebene

Die Kugel mit Radius R_E um den Ursprung ist durch die Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ gegeben, mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_i x_i^2 - R_E^2, \quad (8)$$

für den Index gilt hier und im folgenden $i \in [1, 3]$.

Für die Tangentialebene im Berührungspunkt $\underline{P} = (p_1, p_2, p_3)^T$ gilt (siehe dazu z.B. [3])

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - p_i) = 0.$$

Die Ableitungen sind im Berührungspunkt \underline{P} zu bilden.

Für die implizite Gleichung der Tangentialebene im Berührungspunkt \underline{P} folgt schliesslich für die Kugel nach Gleichung (8) der Ausdruck

$$\sum_i p_i (x_i - p_i) = 0$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\underline{P}^T (\underline{x} - \underline{P}) = 0. \quad (9)$$

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt für die gedrehte Tangentialebene T^α aus den Gleichungen (5, 9)

$$\begin{aligned} (D_\alpha \underline{P})^T (\underline{x} - D_\alpha \underline{P}) &= 0 \\ (\underline{P}^\alpha)^T (\underline{x} - \underline{P}^\alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

10 Verbindungsgerade

Die Sonne befindet sich im Punkt

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} R_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Punkte der Verbindungsgerade \underline{G} der Sonne \underline{S} mit dem Stabende \underline{Q} nach Gleichung (6) sind durch

$$\underline{G} = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S} \quad (11)$$

gegeben, dabei gilt $\mu \geq 0$.

Berücksichtigt man die Drehung der Sonne durch die Drehmatrix $D_{(-\alpha)}$ und fixiert die Erde, dann folgt mit

$$\underline{S}^\alpha = D_{(-\alpha)} \underline{S} \quad (12)$$

aus Gleichung (11)

$$\begin{aligned} \underline{G}_S^\alpha &= \mu \underline{Q} + (1 - \mu) D_{(-\alpha)} \underline{S} \\ &= \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}^\alpha \end{aligned} \quad (13)$$

Hier wird für $\mu = 0$ wird der Punkt \underline{S}^α , für $\mu = 1$ wird der Punkt \underline{Q} beschrieben.

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α , dann folgt aus Gleichung (11)

$$\begin{aligned} \underline{G}_E^\alpha &= \mu D_\alpha \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S} \\ &= \mu \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu) \underline{S}. \end{aligned} \quad (14)$$

Hier wird für $\mu = 0$ der Punkt \underline{S} , für $\mu = 1$ wird der Punkt \underline{Q}^α beschrieben.

11 Problemlösung

11.1 Lösung durch Fixierung der Erde

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden \underline{G}_S^α nach Gleichung (13) mit der Tangentialebene T oder anders formuliert, gesucht wird der Geradenparameter μ , der eine Lösung \underline{x}_0 der Gleichung (9) mit der Bedingung

$$\underline{x}_0 = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}^\alpha \quad (15)$$

zulässt.

11.1.1 Lösungspunkt

Einsetzen von Gleichung (15) in Gleichung (9) liefert

$$\underline{P}^T [\mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}^\alpha - \underline{P}] = 0.$$

Wegen

$$\underline{P}^T \underline{P} = R_E^2$$

folgt nach kurzer Rechnung die zu lösende Gleichung

$$\mu_0(\alpha) = \frac{R^S(\alpha)}{1 + R^S(\alpha)} \quad (16)$$

mit

$$R^S(\alpha) = \frac{1}{L} \left(R_E - \frac{P^T \underline{S}^\alpha}{R_E} \right).$$

Da mit $\mu = 0$ die Sonne und mit $\mu = 1$ das Stabende beschrieben wird, muss wegen Gleichung (13) für die Lösung $\mu_0 > 1$ und damit $R < 0$ gelten.

Der gesuchte Punkt \underline{x}_0 ergibt sich als Funktion des Drehwinkels α mit dem nach Gleichung (16) bestimmten $\mu_0(\alpha)$ durch Einsetzen in Gleichung (15) zu

$$\underline{x}_0^S(\alpha) = \mu_0 \underline{Q} + (1 - \mu_0) \underline{S}^\alpha. \quad (17)$$

11.1.2 Koordinatentransformation

Die gefundenen Trajektorienpunkte $\underline{x}_0(\alpha)$ sind im Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) gegeben. Sie sollen aber auf ein zweidimensionales Koordinatensystem der Tangentialebene T transformiert werden.

Dazu wird der Punkt \underline{P} um seinen negativen Längenwinkel $-\varphi$ um die x_3 -Achse und anschliessend um den Winkel $\frac{\pi}{2} - (\Theta + \psi)$ um die x_2 -Achse gedreht.

Die Drehung um die x_3 -Achse um den Winkel φ wird durch die Matrix

$$D_\varphi^{x_3} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

und die Drehung um die x_2 -Achse um den Winkel Θ wird durch die Matrix

$$D_\Theta^{x_2} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{pmatrix} \quad (19)$$

vermittelt (siehe dazu z.B. [1]).

Der Punkt \underline{P} liegt dann auf dem Äquator, 0° Breite, 0° Länge, und stimmt mit der x_1 -Achse überein. Die Trajektorienpunkte können mittels der Projektionsabbildung¹

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

auf die Tangentialebene T projiziert werden. Der dadurch auftretende Verzerrungsfehler liegt bei Stablängen von einem Meter im Bereich von Mikrometern.

Es ergibt sich also mit den Abbildungen (18, 19 und 20) für die auf die Tangentialebene projizierten Punkte

$$\underline{x}^S(\alpha) = P D_{\left(\frac{\pi}{2} - (\Theta + \psi)\right)}^{x_2} D_{(-\varphi)}^{x_3} \underline{x}_0^S(\alpha). \quad (21)$$

11.2 Lösung durch Fixierung der Sonne

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden \underline{G}_E^α nach Gleichung (14) mit der Tangentialebene T^α oder anders formuliert, gesucht wird der Geradenparameter μ , der eine Lösung \underline{x}_0 der Gleichung (10) mit der Bedingung

$$\underline{x}_0 = \mu \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu) \underline{S} \quad (22)$$

zulässt.

¹Die Projektionsabbildung P bitte nicht verwechseln mit dem Punkt \underline{P} .

11.2.1 Lösungspunkt

Einsetzen von Gleichung (22) in Gleichung (10) liefert

$$(\underline{P}^\alpha)^T [\mu \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu) \underline{S} - \underline{P}^\alpha] = 0.$$

Wegen

$$(\underline{P}^\alpha)^T \underline{P}^\alpha = \underline{P}^T \underline{P} = R_E^2$$

folgt nach kurzer Umformung die zu lösende Gleichung

$$\mu_0(\alpha) = \frac{R^E(\alpha)}{1 + R^E(\alpha)} \quad (23)$$

mit der Abkürzung

$$R^E(\alpha) = \frac{1}{L} \left(R_E - \frac{(\underline{P}^\alpha)^T \underline{S}}{R_E} \right).$$

Da mit $\mu = 0$ die Sonne und mit $\mu = 1$ das Stabende beschrieben wird, muss wegen Gleichung (14) für die Lösung $\mu_0 > 1$ und damit $R < 0$ gelten.

Der gesuchte Punkt \underline{x}_0 ergibt sich als Funktion des Drehwinkels α mit dem nach Gleichung (23) bestimmten $\mu_0(\alpha)$ durch Einsetzen in Gleichung (22) zu

$$\underline{x}_0^E(\alpha) = \mu_0 \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu_0) \underline{S}. \quad (24)$$

11.2.2 Koordinatentransformation

Jeder aufgefundene Punkt $\underline{x}_0^E(\alpha)$ wird um den Winkel $-\alpha$ um die Erd-Rotationsachse zurückgedreht, dann um den Winkel $-\varphi$ um die x_3 -Achse und schliesslich noch um den Winkel $\frac{\pi}{2} - (\Theta + \psi)$ um die x_2 -Achse gedreht.

Die Punkte liegen dann auf dem Äquator, 0° Breite, 0° Länge, und stimmen mit der x_1 -Achse überein. Die Trajektorienpunkte können mittels der Projektionsabbildung (20) auf die Tangentialebene T projiziert werden.

Es ergibt sich also mit den Abbildungen (2, 18, 19 und 20) für die auf die Tangentialebene projizierten Punkte

$$\underline{x}^E(\alpha) = PD_{\left(\frac{\pi}{2} - (\Theta + \psi)\right)}^{x_2} D_{(-\varphi)}^{x_3} D_{(-\alpha)} \underline{x}_0^E(\alpha). \quad (25)$$

12 Äquivalenz der Problemlösungs-Ansätze

Es soll die Äquivalenz der beiden Lösungsansätze „Lösung durch Fixierung der Erde“ und „Lösung durch Fixierung der Sonne“ gezeigt werden.

Für die Gleichheit der Punkte $\underline{x}^S(\alpha)$ und $\underline{x}^E(\alpha)$ ist wegen (21) und (25) die Bedingung

$$\underline{x}^S(\alpha) = D_{(-\alpha)} \underline{x}_0^E(\alpha) \quad (26)$$

hinreichend.

Aus Gleichung (24) folgt aber mit Gleichung (17) die zu beweisende Äquivalenz (26)

$$\begin{aligned} D_{(-\alpha)} \underline{x}_0^E(\alpha) &= \mu_0 D_{(-\alpha)} \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu_0) D_{(-\alpha)} \underline{S} \\ &= \mu_0 \underline{Q} + (1 - \mu_0) \underline{S}^\alpha \\ &= \underline{x}_0^S(\alpha). \end{aligned}$$

Literatur

- [1] <https://de.wikipedia.org/wiki/Drehmatrix>
- [2] <https://de.wikipedia.org/wiki/Erdachse>
- [3] <https://de.wikipedia.org/wiki/Tangentialebene>
- [4] <https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten>