# Anmerkungen zu “Foundations of Quantum Mechanics, Naber” [1]

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz

## Mathematisches Pendel

Für den Auslenkungswinkel $\phi\left(t\right)$ als Funktion der Zeit $t$ gilt

$$\frac{d^2\phi\left(t\right)}{dt^2}+\omega^2\sin\phi\left(t\right) \quad = \quad 0 \tag{1}$$

mit

$$\omega \quad = \quad \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{2}$$

Dabei ist $l$ die Pendellänge und $g$ die Erdbeschleunigung.

### Beispiel 1.0.3.1

Zeige, dass sich die Pendelgleichung (1) wie folgt umformulieren lässt

$$\frac{d}{d\phi}\left[\frac{1}{2}\left[\frac{d\phi\left(t\right)}{dt}\right]^2\right]+\omega^2\sin\phi\left(t\right) \quad = \quad 0. \tag{3}$$

Zeige durch Integration über $\phi$ und durch Multiplikation mit $ml^2$ die Gültigkeit von

$$\left(\frac{1}{2}ml^2\right)\left[\frac{d\phi\left(t\right)}{dt}\right]^2-mgl\cos\phi\left(t\right) \quad = \quad E,$$

wobei $E$ eine Konstante bezeichnet.

### Lösung 1.0.3.1

Durch Anwendung der Kettenregel

$$\frac{d}{d\phi}\left[f\left(g\left(\phi\right)\right)\right] \quad = \quad \frac{df\left(g\right)}{dg}\frac{dg\left(\phi\right)}{d\phi} \tag{4}$$

folgt für die 2. Ableitung von $\phi\left(t\right)$ nach der Zeit

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} \quad &= \quad \frac{d\dot{\phi}}{dt}\\ &= \quad \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}\frac{d\phi}{dt}\\ &= \quad \dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi}.\end{aligned}$$

Ebenso durch Anwendung der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) &= \frac{d}{d\phi}\left[f\left(g\left(\phi\right)\right)\right] \\ &= \dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi}.\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\left(t\right)\right) = \frac{d^2\phi\left(t\right)}{dt^2}$$

und damit gilt die modifizierte Pendelgleichung (3).
Integration von

$$\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) + \omega^2\sin\phi\left(t\right) = 0$$

über $\phi$ liefert

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \omega^2\cos\phi\left(t\right) = C\left(t\right)$$

und nach Multiplikation mit $ml$ folgt mit der Definition von $\omega$ nach Gleichung (2)

$$E\left(t\right) = \frac{ml^2}{2}\dot{\phi}^2 - gml\cos\phi\left(t\right).$$

Differentation nach der Zeit $t$ ergibt

$$\begin{aligned}\dot{E}\left(t\right) &= \frac{ml^2}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\phi}^2\right) - gml\frac{d}{dt}\cos\phi\left(t\right) \\ &= ml^2\dot{\phi}\ddot{\phi} + gml\dot{\phi}\sin\phi\left(t\right) \\ &= ml\left[l\ddot{\phi} + g\sin\phi\left(t\right)\right]\dot{\phi}.\end{aligned}$$

Einsetzen der Pendelgleichung liefert

$$\begin{aligned}\dot{E}\left(t\right) &= ml\left[-l\omega^2\sin\phi\left(t\right) + g\sin\phi\left(t\right)\right]\dot{\phi} \\ &= ml\left[g - l\omega^2\right]\dot{\phi}\sin\phi\left(t\right) \\ &= ml\left[g - l\frac{g}{l}\right]\dot{\phi}\sin\phi\left(t\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

$E$ ist also eine zeitliche Konstante.

**Beispiel 1.0.3.2**

Zeige, dass $E\left(t\right)$ die Summe aus kinetischer und potentieller Energie des Pendels ist.

**Lösung 1.0.3.2**

Klar!

**Beispiel 1.0.3.3**

Es werden neue Zustandsraum-Variable $(x, y)$ eingeführt: $x = \phi$ und $y = \dot{\phi}$. Gebe das zugehörige Differentialgleichungssystem 1. Ordnung an und skizziere die Trajektorien der Pendelbewegung.

**Lösung 1.0.3.3**

Aus der Pendelgleichung folgt

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 \sin x.\end{aligned}$$

- Im Koordinatenursprung gilt $\dot{x} = \dot{y} = 0$ - das Pendel ruht
- Für die $x$-Achse gilt $y = \dot{x} = 0$ - die Trajektorien stehen auf ihr senkrecht
- Für die $y$-Achse gilt $x = \dot{y} = 0$ - die Trajektorien stehen auf ihr senkrecht
- Für $y > 0$ gilt $\dot{x} > 0$ und für $x > 0$ gilt $\dot{y} > 0$ - die Trajektorien verlaufen im Uhrzeigersinn
- Für $y = -\omega^2 \sin x$ gilt $x \doteq \dot{y}\alpha$.

# State Space and Lagrangians

Es gilt mit der Teilchenmasse $m$, der Teilchentrajektorie $\underline{\alpha}(t) = \left(q^1(t), \cdots, q^n(t)\right)$ und der Kraft $\underline{F}\left(\underline{q}\right)$ das Newtonsche Gesetz

$$m\frac{d^2\underline{\alpha}(t)}{dt^2} = \underline{F}\left(\underline{q}\right).$$

Es wird vorausgesetzt, dass die Kraft $\underline{F}$ konservativ ist, dass sie sich also als Gradient eines reellen Potentiales (der potentiellen Energie $V\left[\underline{\alpha}(t)\right]$) darstellen lässt

$$\underline{F}\left(\underline{q}\right) = -\nabla V\left[\underline{\alpha}(t)\right].$$

Dabi ist $V$ eine reellwertige Funktion der $n$ Ortskoordinaten $\underline{q}$.
Entlang der Trajektorie $\underline{\alpha}(t)$ ist also das Newtonsche Gesetz

$$m\frac{d^2\underline{\alpha}(t)}{dt^2} = -\nabla V\left[\underline{\alpha}(t)\right] \tag{5}$$

erfüllt.
Im folgenden wird eine alternative Formulierung dieser Tatsache gesucht.
Definiert man für die kinetische Energie

$$\begin{aligned}E_k\left[\underline{\alpha}(t)\right] &= \frac{m}{2}\left\|\frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt}\right\|^2 \\ &= \frac{m}{2}\frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt}\frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt},\end{aligned}$$

so folgt für die Gesamtenergie

$$E\left[\underline{\alpha}(t)\right] = E_k\left[\underline{\alpha}(t)\right] + V\left[\underline{\alpha}(t)\right] \tag{6}$$

und deren zeitliche Ableitung [1]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E\left[\underline{\alpha}(t)\right] &= \frac{m}{2}\left[\frac{d^2\underline{\alpha}(t)}{dt^2}\frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt} + \frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt}\frac{d^2\underline{\alpha}(t)}{dt^2}\right] + \frac{d}{dt}V\left[\underline{\alpha}(t)\right] \\ &= m\frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt}\frac{d^2\underline{\alpha}(t)}{dt^2} + \nabla V\left[\underline{\alpha}(t)\right]\frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt} \\ &= \frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt}\left\{m\frac{d^2\underline{\alpha}(t)}{dt^2} + \nabla V\left[\underline{\alpha}(t)\right]\right\} \\ &= 0.\end{aligned}$$

[1] Die geschweifte Klammer verschwindet wegen der Gültigkeit des Newtonschen Gesetztes (5).

Nun soll die Umwandlung zwischen den beiden Energieformen entlang der Trajektorie $\underline{\alpha}(t)$ untersucht werden, also die Differenz von kinetischer und potentieller Energie

$$L\left[\underline{\alpha}(t)\right] = E_k\left[\underline{\alpha}(t)\right] - V\left[\underline{\alpha}(t)\right]. \tag{7}$$

Es soll gezeigt werden, dass das Funktional

$$S(\underline{\alpha}) = \int_{t=t_0}^{t_1} L\left[\underline{\alpha}(t)\right] dt$$

für die Trajektorie $\underline{\alpha}$ stationär ist, dabei sind $t_0$ und $t_1$ die Anfangs- und Endpunkte der Bewegung.

# Literatur

[1] Foundations of Quantum Mechanics - An Introduction to the Physical Background and Mathematical Structure; Naber, Gregory; 03.12.2016