

Anmerkungen zu “Foundations of Quantum Mechanics, Naber” [1]

Jürgen Womser-Schütz, <https://github.com/JW-Schuetz>

Mathematisches Pendel

Für den Auslenkungswinkel $\phi(t)$ als Funktion der Zeit t gilt

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \omega^2 \sin \phi(t) = 0 \quad (1)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (2)$$

Dabei ist l die Pendellänge und g die Erdbeschleunigung.

Beispiel 1.0.3.1

Zeige, dass sich die Pendelgleichung (1) wie folgt umformulieren lässt

$$\frac{d}{d\phi} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{d\phi(t)}{dt} \right]^2 \right] + \omega^2 \sin \phi(t) = 0. \quad (3)$$

Zeige durch Integration über ϕ und durch Multiplikation mit ml^2 die Gültigkeit von

$$\left(\frac{1}{2} ml^2 \right) \left[\frac{d\phi(t)}{dt} \right]^2 - mgl \cos \phi(t) = E,$$

wobei E eine Konstante bezeichnet.

Lösung 1.0.3.1

Durch Anwendung der Kettenregel

$$\frac{d}{d\phi} [f(g(\phi))] = \frac{df(g)}{dg} \frac{dg(\phi)}{d\phi} \quad (4)$$

folgt für die 2. Ableitung von $\phi(t)$ nach der Zeit

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{d\dot{\phi}}{dt} \\ &= \frac{d\dot{\phi}}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} \\ &= \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}. \end{aligned}$$

Ebenso durch Anwendung der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \right) &= \frac{d}{d\phi} [f(g(\phi))] \\ &= \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}.\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t) \right) = \frac{d^2 \phi(t)}{dt^2}$$

und damit gilt die modifizierte Pendelgleichung (3).

Integration von

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \right) + \omega^2 \sin \phi(t) = 0$$

über ϕ liefert

$$\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \omega^2 \cos \phi(t) = C(t)$$

und nach Multiplikation mit ml folgt mit der Definition von ω nach Gleichung (2)

$$E(t) = \frac{ml^2}{2} \dot{\phi}^2 - gml \cos \phi(t).$$

Differentiation nach der Zeit t ergibt

$$\begin{aligned}\dot{E}(t) &= \frac{ml^2}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\phi}^2) - gml \frac{d}{dt} \cos \phi(t) \\ &= ml^2 \dot{\phi} \ddot{\phi} + gml \dot{\phi} \sin \phi(t) \\ &= ml \left[l \ddot{\phi} + g \sin \phi(t) \right] \dot{\phi}.\end{aligned}$$

Einsetzen der Pendelgleichung liefert

$$\begin{aligned}\dot{E}(t) &= ml [-l\omega^2 \sin \phi(t) + g \sin \phi(t)] \dot{\phi} \\ &= ml [g - l\omega^2] \dot{\phi} \sin \phi(t) \\ &= ml \left[g - l \frac{g}{l} \right] \dot{\phi} \sin \phi(t) \\ &= 0.\end{aligned}$$

E ist also eine zeitliche Konstante.

Beispiel 1.0.3.2

Zeige, dass $E(t)$ die Summe aus kinetischer und potentieller Energie des Pendels ist.

Lösung 1.0.3.2

Klar!

Beispiel 1.0.3.3

Es werden neue Zustandsraum-Variable (x, y) eingeführt: $x = \phi$ und $y = \dot{\phi}$. Gebe das zugehörige Differentialgleichungssystem 1. Ordnung an und skizziere die Trajektorien der Pendelbewegung.

Lösung 1.0.3.3

Aus der Pendelgleichung folgt

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 \sin x.\end{aligned}$$

- Im Koordinatenursprung gilt $\dot{x} = \dot{y} = 0$ - das Pendel ruht
- Für die x -Achse gilt $y = \dot{x} = 0$ - die Trajektorien stehen auf ihr senkrecht
- Für die y -Achse gilt $x = \dot{y} = 0$ - die Trajektorien stehen auf ihr senkrecht
- Für $y > 0$ gilt $\dot{x} > 0$ und für $x > 0$ gilt $\dot{y} > 0$ - die Trajektorien verlaufen im Uhrzeigersinn
- Für $y = -\omega^2 \sin x$ gilt $\dot{x} = \dot{y}\alpha$.

State Space and Lagrangians

Es gilt mit der Teilchenmasse m , der Teilchentrajektorie $\underline{\alpha}(t) = (q^1(t), \dots, q^n(t))$ und der Kraft $\underline{F}(\underline{q})$ das Newtonsche Gesetz

$$m \frac{d^2 \underline{\alpha}(t)}{dt^2} = \underline{F}(\underline{q}).$$

Es wird vorausgesetzt, dass die Kraft \underline{F} konservativ ist, dass sie sich also als Gradient eines reellen Potentials (der potentiellen Energie $V[\underline{\alpha}(t)]$) darstellen lässt

$$\underline{F}(\underline{q}) = -\nabla V[\underline{\alpha}(t)].$$

Dabei ist V eine reellwertige Funktion der n Ortskoordinaten \underline{q} .

Entlang der Trajektorie $\underline{\alpha}(t)$ ist also das Newtonsche Gesetz

$$m \frac{d^2 \underline{\alpha}(t)}{dt^2} = -\nabla V[\underline{\alpha}(t)] \quad (5)$$

erfüllt.

Im folgenden wird eine alternative Formulierung dieser Tatsache gesucht.

Definiert man für die kinetische Energie

$$\begin{aligned}E_k[\underline{\alpha}(t)] &= \frac{m}{2} \left\| \frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt} \right\|^2 \\ &= \frac{m}{2} \frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt} \frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt},\end{aligned}$$

so folgt für die Gesamtenergie

$$E[\underline{\alpha}(t)] = E_k[\underline{\alpha}(t)] + V[\underline{\alpha}(t)] \quad (6)$$

und deren zeitliche Ableitung ¹

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} E[\underline{\alpha}(t)] &= \frac{m}{2} \left[\frac{d^2 \underline{\alpha}(t)}{dt^2} \frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt} + \frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt} \frac{d^2 \underline{\alpha}(t)}{dt^2} \right] + \frac{d}{dt} V[\underline{\alpha}(t)] \\ &= m \frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt} \frac{d^2 \underline{\alpha}(t)}{dt^2} + \nabla V[\underline{\alpha}(t)] \frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt} \\ &= \frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt} \left\{ m \frac{d^2 \underline{\alpha}(t)}{dt^2} + \nabla V[\underline{\alpha}(t)] \right\} \\ &= 0.\end{aligned}$$

¹Die runde Klammer verschwindet wegen der Gültigkeit des Newtonschen Gesetzes (5).

Nun soll die Umwandlung zwischen den beiden Energieformen entlang der Trajektorie $\underline{\alpha}(t)$ untersucht werden, also die Differenz von kinetischer und potentieller Energie

$$L[\underline{\alpha}(t)] = E_k[\underline{\alpha}(t)] - V[\underline{\alpha}(t)]. \quad (7)$$

Es soll gezeigt werden, dass das Funktional

$$S(\underline{\alpha}) = \int_{t=t_0}^{t_1} L[\underline{\alpha}(t)] dt$$

für die Trajektorie $\underline{\alpha}$ stationär ist, dabei sind t_0 und t_1 die Anfangs- und Endpunkte der Bewegung.

Literatur

- [1] Foundations of Quantum Mechanics - An Introduction to the Physical Background and Mathematical Structure; Naber, Gregory; 03.12.2016