Sonnenkompass

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz/Hobby

Widmung

Für das Geburtstags-“Kind“ Waldemar, meinem netten Gastgeber in Las Palmas, zu seinem 73. Geburtstag.

1 Fragestellung

Wir genau ist die bekannte Methode, die Nord-Richtung per Sonnenstand zu bestimmen?

2 Methodenbeschreibung

Die folgenden Aktionen sind zur Durchführung der Methode notwendig

- einen Stab senkrecht in die Erde stecken
- das Ende des Schattens des Stabes mit einen Stein markieren
- einige Zeit abwarten bis der Schatten weiter gewandert ist
- das neue Schattenende des Stabes mit einem zweiten Stein markieren.

Man erhält dann die Nordrichtung mittels der folgenden Regeln[1]

- R1: der Schatten des Stab-Endes bewegt sich auf der Verbindungsgeraden der beiden Steine
- R2: die Nordrichtung ist orthogonal zur Verbindungsgeraden
- R3: auf der Nordhalbkugel der Erde zeigt der Schatten Richtung Norden, auf der Südhalbkugel Richtung Süden.

3 Vereinbarungen

Im folgenden werden Basiskenntnisse der Mathematik und Physik auf Abitur-Niveau des naturwissenschaftlichen Zweiges vorausgesetzt.

Vektoren werden durch einen Unterstrich kenntlich gemacht ($\underline{x}$) und ihre Transponierten ($\underline{x}^T$) durch ein hochgestelltes T. Es wird die L_2-Norm $\|\underline{x}\|$ benutzt.
Matrizen werden nicht besonders bezeichnet, sie sind von Skalaren durch den Kontext unterscheidbar.

Weiterhin werden Kugelkoordinaten (r, Θ, φ) und kartesische Koordinaten (x_1, x_2, x_3) verwendet, der Ursprung beider Koordinatensysteme ist der Erdmittelpunkt. Das kartesische Koordinatenpaar (x_1, x_2) spannt die Ekliptikalebene auf. Siehe dazu die Problemskizzen in den Abbildungen 1 und 2.

[1] Die Methode wird in der Nähe der Pole scheitern, da das Stabende in Abhängigkeit der Jahreszeit evtl. keinen Schatten wirft (und natürlich auch, weil dort nicht immer Erde zum Hineinstecken des Stabes vorhanden ist ☺).

4 Annahmen

Es werden die folgenden Annahmen getroffen:

- die Sonne im Punkt $\underline{S}$ sei ein Punktstrahler
- die Erde bewege sich in der Ekliptikalebene auf einer idealen Kreisbahn mit Radius R_S um die Sonne
- die Erde benötige 365 Tage für einen Umlauf um die Sonne
- die Erde habe ideale Kugelgestalt mit dem Radius R_E
- die Erd-Rotationsachse habe den Neigungswinkel ψ zur Achse senkrecht auf der Ekliptikalebene
- die Erd-Präzession und Erd-Nutation werden vernachlässigt
- im Punkt $\underline{P}$ der Erdoberfläche befinde sich der Fusspunkt des senkrecht orientierten Stabes der Länge L
- für die geographische Länge des Punktes $\underline{P}$ wird stets $\varphi = 0$ angenommen
- die Erdoberfläche um den Fusspunk des Stabes $\underline{P}$ herum werde durch eine Tangentialebene an die Erdkugel angenähert
- es werden zwei Zeiten betrachtet: die Jahreszeit $T^* \in [0, 365)$, gemessen in Tagen und die Tageszeit $t^* \in [0, 24)$, gemessen in Stunden
- der Ablauf der Tageszeit t^* soll die Jahreszeit T^* unbeeinflusst lassen, die beiden Zeiten seien also voneinander entkoppelt
- die Sommersonnenwende (SSW) ist am 21. Juni, die Wintersonnenwende (WSW) ist am 21. Dezember.

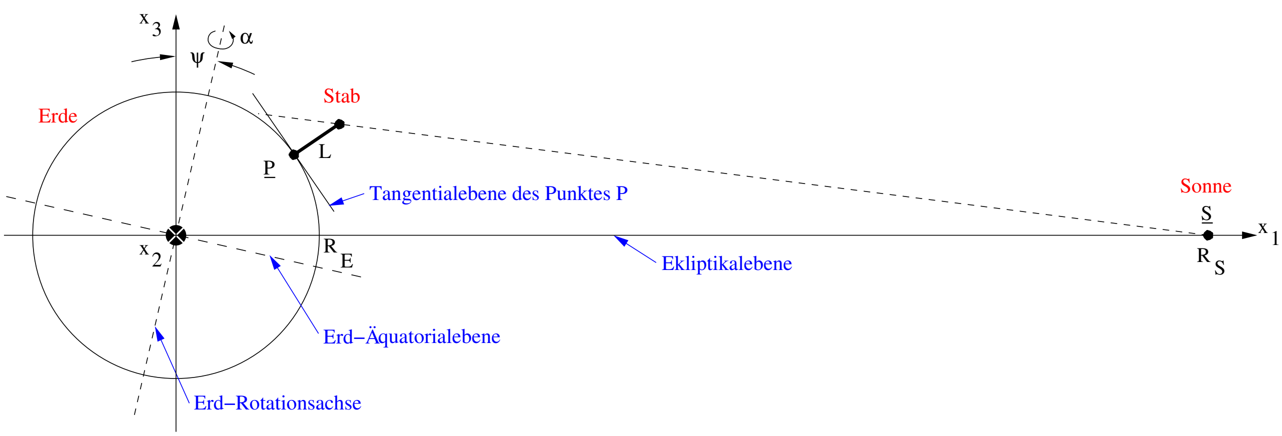

Abbildung 1: Problemskizze, SSW, astronomischer Mittag

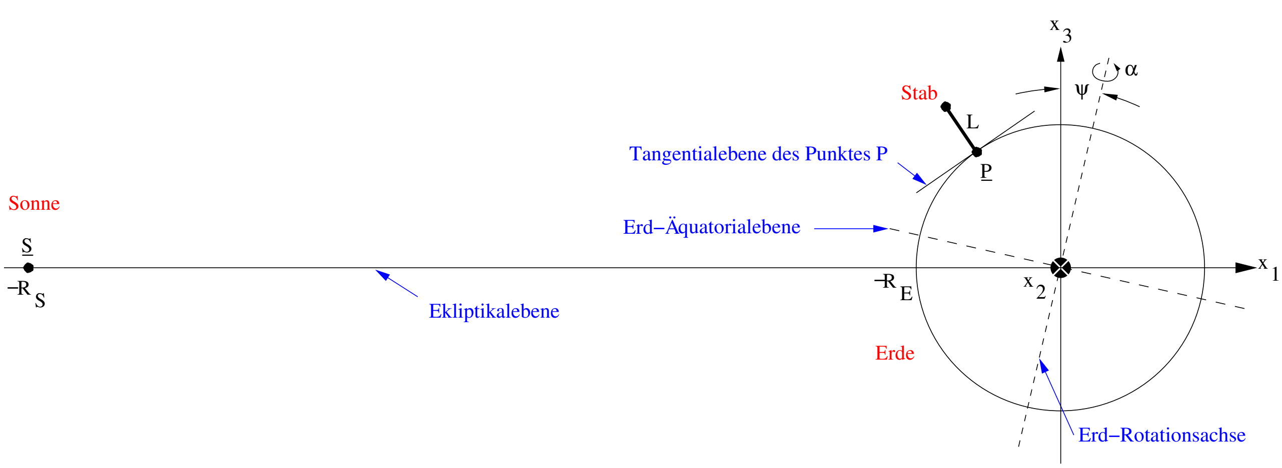

Abbildung 2: Problemskizze, WSW, astronomischer Mittag

5 Generelles zur Lösung

In der folgenden Arbeit soll der Verlauf des Schattens des Stabendpunktes als Funktion der Tageszeit für einen vorgegebenen Tag im Jahr berechnet werden.

Dazu wird zunächst die Verbindungsgerade zwischen der Sonne und dem Endpunkt des Stabes konstruiert. Dann werden die Schnittpunkte der verlängerten Verbindungsgeraden mit der Tangentialebene der Erdoberfläche im Fusspunkt des Stabes als Funktion der Tageszeit bestimmt. Schlussendlich werden die gefundenen Schnittpunkte im 3-dimensionealen Raum orthogonal auf die Tangentialebene projiziert. Man erhält damit die 2-dimensionale Darstellung des Schattenverlaufes.

Es sind zwei äquivalente Lösungsansätze denkbar, die Rotation der Erde um ihre Rotationsachse zu berücksichtigen

- Die Erde um den Winkel α rotieren und die Sonne fixiert lassen.
- Den Ort der Sonne um den Winkel $-\alpha$ rotieren und die Erde fixiert lassen.

Hier wird der zweite Fall behandelt.

Zur Unterstützung der Problemlösung wird „MatLab“ und seine „Symbolic Math Toolbox“ verwendet.

Die MatLab-Quellen finden sich in meinem GitHub-Verzeichnis „https://github.com/JW-Schuetz“ im Unterverzeichnis „Hobby/Matlab-Sources“.

6 Tageszeitabhängigkeit

Die tägliche Rotation der Erde um ihre Rotationsachse wird in Abhängigkeit des Rotationswinkels $\alpha \in [0, 2\pi)$ durch die Drehmatrix (siehe dazu z.B. [1])

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} e_1^2\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha & e_1e_2\,(1-\cos\alpha)-e_3\sin\alpha & e_1e_3\,(1-\cos\alpha)+e_2\sin\alpha \\ e_2e_1\,(1-\cos\alpha)+e_3\sin\alpha & e_2^2\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha & e_2e_3\,(1-\cos\alpha)-e_1\sin\alpha \\ e_3e_1\,(1-\cos\alpha)-e_2\sin\alpha & e_3e_2\,(1-\cos\alpha)+e_1\sin\alpha & e_3^2\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha \end{pmatrix}$$

beschrieben. Dabei ist

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

ein Vektor mit $\|\underline{e}\| = 1$, der Richtung und Orientierung der Rotationsachse definiert.

Zum Zeitpunkt der SSW, am 21. Juni, liegt die Rotationsachse in der (x_1, x_3)-Ebene (siehe die nicht massstäbliche Abbildung 1), der Einheitsvektor $\underline{e}$ ist somit durch

$$\begin{aligned} e_1 &= \sin\psi \\ e_2 &= 0 \\ e_3 &= \cos\psi \end{aligned}$$

gegeben. Für die Drehmatrix folgt damit

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \sin^2\psi\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha & -\cos\psi\sin\alpha & \sin\psi\cos\psi\,(1-\cos\alpha) \\ \cos\psi\sin\alpha & \cos\alpha & -\sin\psi\sin\alpha \\ \cos\psi\sin\psi\,(1-\cos\alpha) & \sin\psi\sin\alpha & \cos^2\psi\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha \end{pmatrix}, \tag{1}$$

der Winkel ψ hat den numerischen Wert $\psi = 23.44°$ (siehe dazu z.B. [2]). Die zum Rotationswinkel α gehörige Tageszeit in Stunden ist durch

$$t^* = \frac{12}{\pi}\alpha \tag{2}$$

gegeben.

Die Erd-Rotationsachse $\underline{e}$ ist wegen des Drehimpuls-Erhaltungsatzes zeitinvariant.

7 Jahreszeitabhängigkeit

Die Erde bewegt sich rechtshändig, also entgegen dem Uhrzeigersinn, um die Sonne (siehe dazu z.B. [3], und die nicht massstäbliche Abbildung 3).

In dieser Arbeit wird der jahreszeitliche Einfluss durch eine Kreisbewegung der Sonne um die als fixiert angenommene Erde berücksichtigt. Man kann deshalb im Erd-Koordinatensystem den Ort der Sonne als Funktion des jahreszeitlichen Umlaufwinkels

$$\Omega\left(T^*\right) = \frac{2\pi}{365} T^* \tag{3}$$

durch

$$\underline{S}\left(T^*\right) = R_S \begin{pmatrix} \cos\Omega\left(T^*\right) \\ \sin\Omega\left(T^*\right) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

beschreiben. Dabei ist $T^* \in [0, 365)$ die Jahreszeit, gemessen in Tagen seit der SSW am 21. Juni.

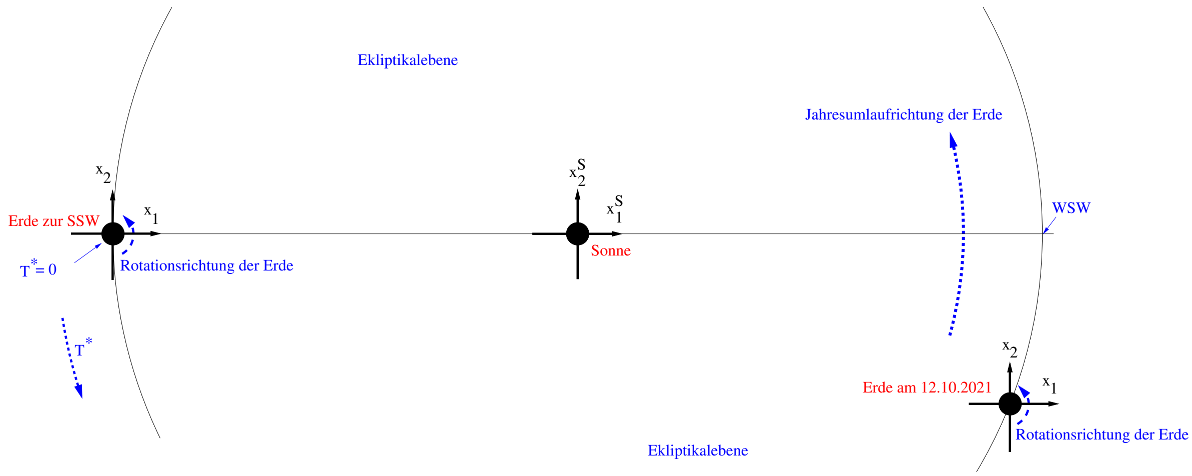

Abbildung 3: Umlauf der Erde um die Sonne

Es soll nun noch der tageszeitliche Erd-Rotationswinkel α für jeden Jahreszeitpunkt T^* so gewählt werden, dass sich für ihn gerade der Sonnenhöchststand einstellt. Der dazu notwendige Winkel ist durch Gleichung (3) gegeben (siehe dazu die Abbildung 4).

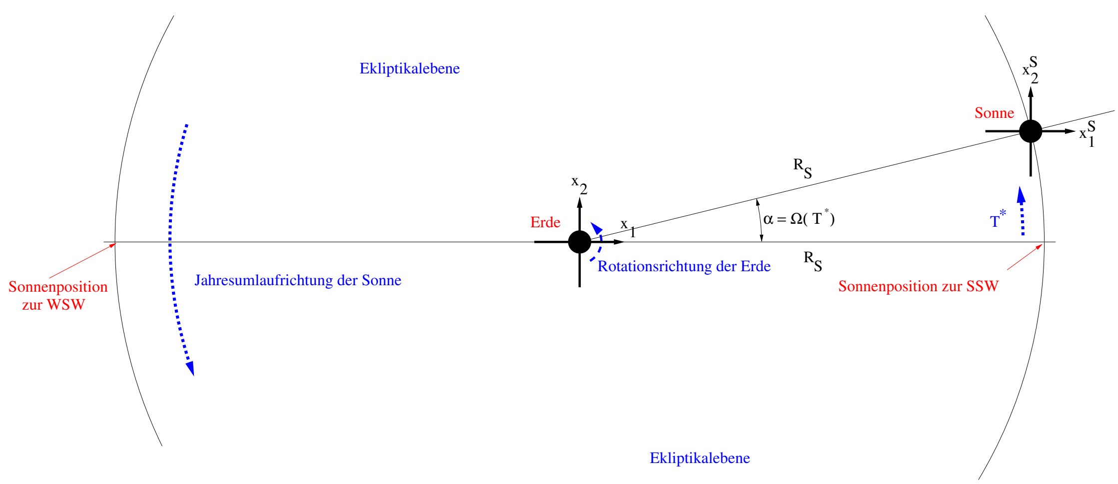

Abbildung 4: Umlauf der Sonne um die Erde

8 Fuss- und Endpunkt des Stabes

Aus der vorgegebenen geographischen Breite Θ_G des Stabfusspunktes folgt für den Winkel zur Erd-Rotationsachse $\frac{\pi}{2} - \Theta_G$ (siehe dazu [4]). Berücksichtigt man noch den Neigungswinkel ψ der Erdrotationsachse zur Ekliptik, dann folgt für den Polarwinkel im Erd-Kugelkoordinatensystem (r, Θ, φ) der Ausdruck $\Theta = \frac{\pi}{2} - \Theta_G + \psi = \frac{\pi}{2} - (\Theta_G - \psi)$.
Für die Komponenten des Stab-Fusspunkts

$$\underline{P} = (p_1, p_2, p_3)^T \tag{5}$$

gelten damit wegen der in Abschnitt 4 getroffenen Annahme $\varphi = 0$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} p_1 &= R_E \sin\left[\frac{\pi}{2} - (\Theta_G - \psi)\right] \\ p_2 &= 0 \\ p_3 &= R_E \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\Theta_G - \psi)\right]. \end{aligned}$$

Mit der Stablänge L gilt für den Stabendpunkt $\underline{Q}$

$$\underline{Q} = \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{P}. \tag{6}$$

9 Tangentialebene T

Die Kugel mit Radius R_E um den Ursprung ist mit der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_i x_i^2 - R_E^2$$

durch die Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ gegeben. Für den Index gilt hier und im folgenden $i \in [1, 3]$.
Für die Tangentialebene im Berührpunkt $\underline{P} = (p_1, p_2, p_3)^T$ gilt (siehe dazu z.B. [5])

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - p_i) = 0.$$

Dabei sind die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i}$ im Berührpunkt $\underline{P}$ zu bilden.
Für die implizite Gleichung der Tangentialebene T im Berührpunkt $\underline{P}$ folgt schliesslich für die Kugel der Ausdruck

$$\sum_i p_i (x_i - p_i) = 0.$$

In vektorieller Schreibweise lässt sich die Tangentialebene im Erd-Koordinatensystem durch

$$\underline{P}^T (\underline{x} - \underline{P}) = 0 \tag{7}$$

charakterisieren.

10 Verbindungsgerade

Die Punkte der Verbindungsgerade G der Sonne $\underline{S}(T^*)$, nach Gleichung (4), mit dem Stabende $\underline{Q}$, nach Gleichung (6), sind durch

$$\underline{x} = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}(T^*) \tag{8}$$

gegeben. Der reelle Geradenparameter μ beschreibt für $\mu = 0$ den Punkt $\underline{S}^\alpha(T^*)$ (also die Sonne) und für $\mu = 1$ den Punkt $\underline{Q}$ (also das Stabende).

11 Analytische Problemlösung

11.1 Lösung durch Fixierung der Erde

Berücksichtigt man die Drehung der Sonne durch die Drehmatrix $D_{(-\alpha)}$ nach Gleichung (1) und fixiert die Erde, dann folgt mit dem gedrehten Ort der Sonne

$$\underline{S}^{\alpha}\left(T^{*}\right) = D_{(-\alpha)}\underline{S}\left(T^{*}\right) \tag{9}$$

aus Gleichung (8) die Darstellung

$$\underline{x} = \mu\underline{Q} + (1-\mu)\,\underline{S}^{\alpha}\left(T^{*}\right).$$

Gesucht ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Tangentialebene T oder anders formuliert, gesucht wird der Geradenparameter μ, der eine Lösung $\underline{x}_0$ der Gleichung (7) mit der Bedingung

$$\underline{x}_0 = \mu\underline{Q} + (1-\mu)\,\underline{S}^{\alpha}\left(T^{*}\right) \tag{10}$$

zulässt.

11.1.1 Lösungspunkt

Einsetzen von Gleichung (10) in Gleichung (7) liefert

$$\underline{P}^{T}\left[\mu\underline{Q} + (1-\mu)\,\underline{S}^{\alpha}\left(T^{*}\right) - \underline{P}\right] = 0.$$

Wegen $\underline{P}^{T}\underline{P} = R_E^2$ folgt nach kurzer Rechnung die Bestimmungsgleichung für den Geradenparameter

$$\mu_0\left(\alpha\right) = \frac{\Omega^{S}\left(\alpha\right)}{1+\Omega^{S}\left(\alpha\right)} \tag{11}$$

mit der Abkürzung

$$\Omega^{S}\left(\alpha\right) = \frac{1}{L}\left[R_E - \frac{\underline{P}^{T}\underline{S}^{\alpha}\left(T^{*}\right)}{R_E}\right]. \tag{12}$$

Da im Ausdruck der Verbindungsgeraden mit $\mu = 0$ die Sonne und mit $\mu = 1$ das Stabende beschrieben wird, muss $\mu_0\left(\alpha\right) > 1$, und damit $\Omega^{S}\left(\alpha\right) < -1$ gelten (siehe dazu den Beweis im Anhang 14.2).

Der gesuchte Lösungspunkt $\underline{x}_0$ ergibt sich als Funktion des Drehwinkels α mit dem nach Gleichung (11) bestimmten $\mu_0\left(\alpha\right)$ zu

$$\underline{x}_0^{S}\left(\alpha\right) = \mu_0\left(\alpha\right)\underline{Q} + \left[1-\mu_0\left(\alpha\right)\right]\underline{S}^{\alpha}\left(T^{*}\right). \tag{13}$$

Die mit dem Winkel α parametrierten Lösungspunkte $\underline{x}_0^{S}\left(\alpha\right)$ bilden eine Trajektorie im $\mathbb{R}^3$.

11.1.2 Die zweidimensionale Trajektorie

Die gefundenen 3-dimensionalen Trajektorienpunkte $\underline{x}_0^{S}\left(\alpha\right)$ der Gleichung (13) sind im Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) der Erde gegeben. Sie sollen orthogonal auf ein zweidimensionales Koordinatensystem der Tangentialebene T abgebildet werden, dessen Ursprung im Stabfusspunkt $\underline{P}$ liegen soll.

Zur Bestimmung dieser Abbildung wird der Punkt $\underline{P}$ so um die x_2-Achse gedreht, dass er in der Ekliptik zu liegen kommt. Mitgedreht werden die Trajektorienpunkte $\underline{x}_0^{S}\left(\alpha\right)$ und die Tangentialebene T - damit ist dann die Tangentialebene parallel zur (x_2, x_3)-Ebene angeordnet. Anschliessend werden die Trajektorienpunkte $\underline{x}_0^{S}\left(\alpha\right)$ auf die (x_2, x_3)-Ebene, oder dazu äquivalent: die Tangentialebene T, projiziert.

Der notwendige Drehwinkel um die x_2-Achse ist durch $\Theta = \Theta_G - \psi$, die Drehmatrix um die x_2-Achse ist durch

$$D_{\Theta}^{x_2} = \begin{pmatrix} \cos\Theta & 0 & \sin\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

gegeben (siehe dazu z.B. [1]). Der Punkt $\underline{P}$ wird durch diese Drehung auf $x_1 = R_E$ und $x_2 = x_3 = 0$ abgebildet. Die 3-dimensionalen gedrehten Trajektorienpunkte $D^{x_2}_{(\Theta_G-\psi)}\underline{x}^S_0(\alpha)$ können nun mittels der Projektionsabbildung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

auf die (x_2, x_3)-Ebene bzw. die Tangentialebene T projiziert werden. Der Punkt $\underline{P}$ wird durch A auf den Ursprung $\underline{0}$ abgebildet.

Es ergibt sich schliesslich für die Punkte der gesuchten zweidimensionalen Trajektorie die Gleichung

$$\underline{x}^S(\alpha) = AD^{x_2}_{(\Theta_G-\psi)}\underline{x}^S_0(\alpha). \tag{15}$$

12 Ergebnisse

12.1 Las Palmas de Gran Canaria

12.1.1 Vergleich mit empirisch ermittelten Resultaten

Abbildung 5 zeigt die berechnete Schattentrajektorie für Las Palmas am 12. Oktober. Die Koordinaten der beiden markierten Punkte (13:28 Uhr und 13:48 Uhr Ortszeit) sind dargestellt, ihr geometrischer Abstand beträgt 16.16 cm, ihr zeitlicher Abstand beträgt 20 Minuten. Für die Stablänge wurde 1.5 m angenommen.

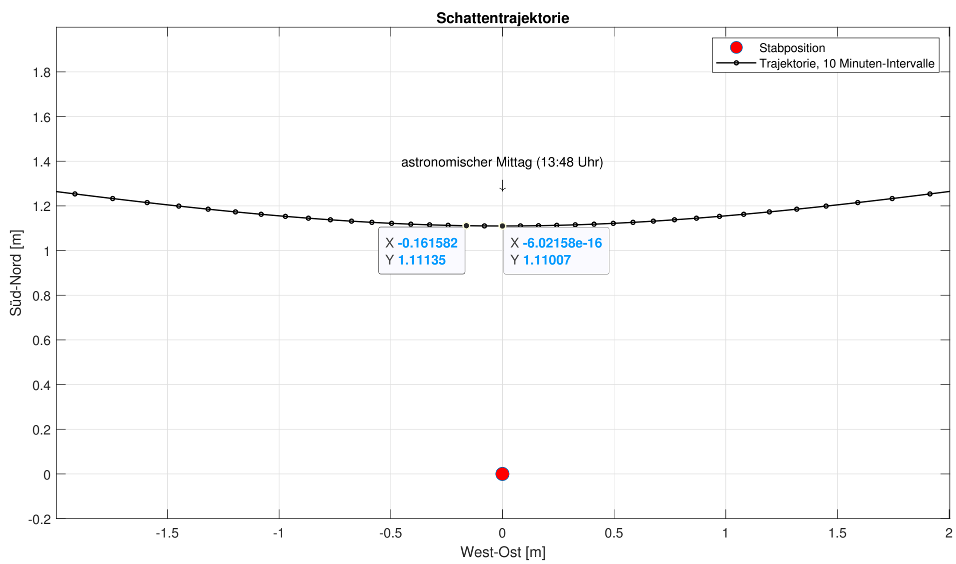

Abbildung 5: Schattentrajektorie am 12. Oktober in Las Palmas. Der Sonnenhöchststand ist an diesem Tag in Las Palmas um 13:48 Uhr (siehe z.B. [8]).

Korrespondierend zur Abbildung 5 sind in Las Palmas am 12. Oktober 2021 die nachfolgenden Fotos entstanden.

Abbildung 6: Schatten in Las Palmas am 12. Oktober 2021 um 13:33 Uhr und um 13:55 Uhr Ortszeit

Im ersten der beiden Fotos der Abbildung 6 sieht man am unteren Bildrand das gelbe Fussende des Stabes. Der Zeitunterschied beider Aufnahmen beträgt 22 Minuten. In dieser Zeit ist der Schatten ca. 20 cm weiter gewandert. Dieses Ergebnis passt recht gut zum rechnerisch ermittelten Abstand von ca. 17 cm[2].

12.1.2 SSW und WSW

Die Schattentrajektorie und den Standort des Stabes für den Strand in Las Palmas (28.136746041614316° Breite) für die SSW am 21. Juni findet sich in der Abbildung 7 - die WSW unterscheidet sich nicht.

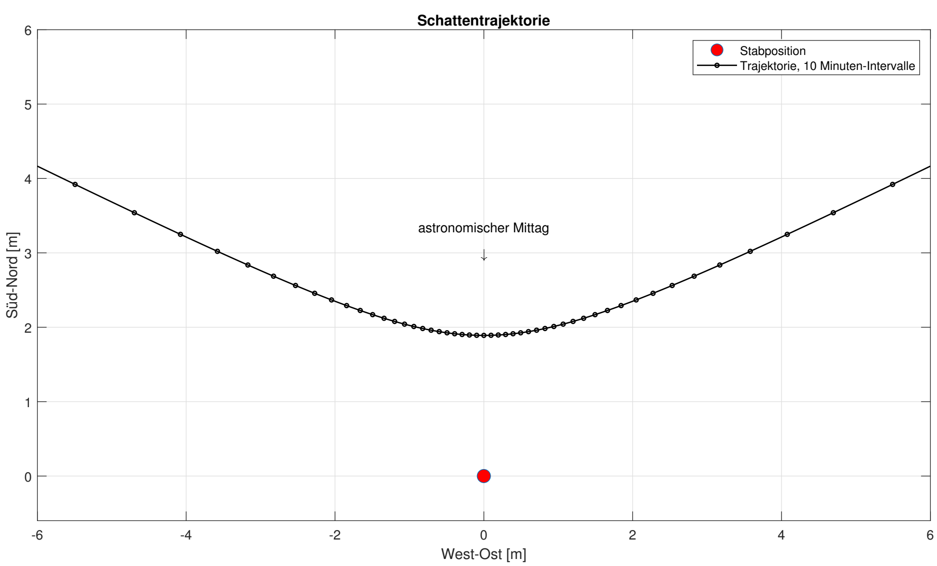

Abbildung 7: Schattentrajektorie zur SSW am 21. Juni in Las Palmas

[2]Leider habe ich vor Ort weder die genaue Länge des Stabes noch die genaue Länge der Trajektorie gemessen.

12.1.3 Frühlings- und Herbst-Äquinoktikum

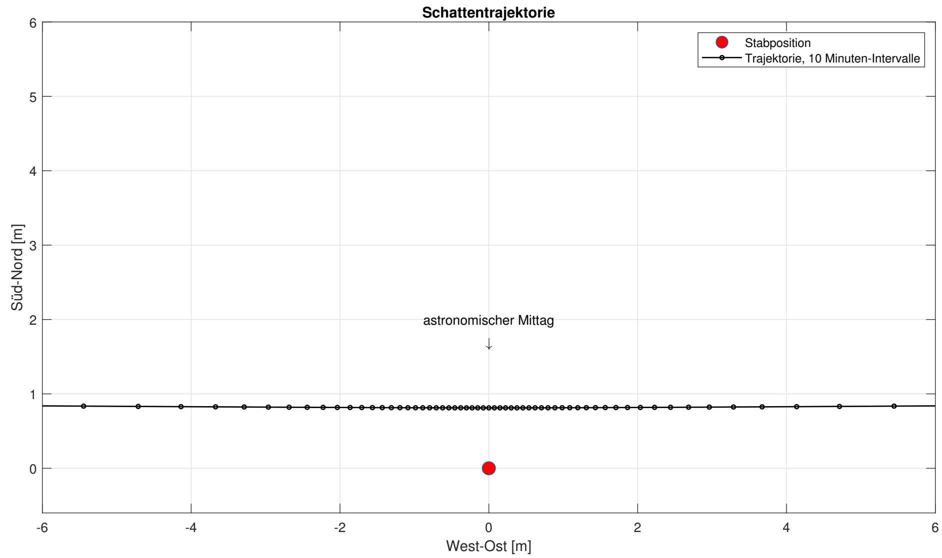

Abbildung 8: Schattentrajektorie zum Frühlings-Äquinoktikum am 21. März in Las Palmas

Abbildung 8 zeigt die berechnete Schattentrajektorie für den 21. März, dem Frühlings-Äquinoktikum - das Herbst-Äquinoktikum hat eine identische Trajektorie.

13 Bewertung der Genauigkeit

Entgegen der Annahme der oben beschriebenen Methode zur Bestimmung der Nord-Richtung per Sonnenstand, ist die Schattentrajektorie keine Gerade - nicht einmal näherungsweise.

Die dadurch verursachte Missweisung zur Nordrichtung ist durchaus nicht vernachlässigbar - sie kann z.B. in Las Palmas je nach Tages- und Jahreszeit um 45° betragen!

Die genaue Nordrichtung erhält man, z.B. wenn man Schattenzeitpunkte untersucht, die symmetrisch um den Zeitpunkt des astronomischen Mittags liegen.

14 Anhang

In diesem Anhang werden einige triviale, aber rechen- und schreibintensive Zusammenhänge und Überprüfungen dargestellt, die den obigen Gedankenfluss zu sehr gestört hätten.

14.1 Trigonometrische Überprüfung

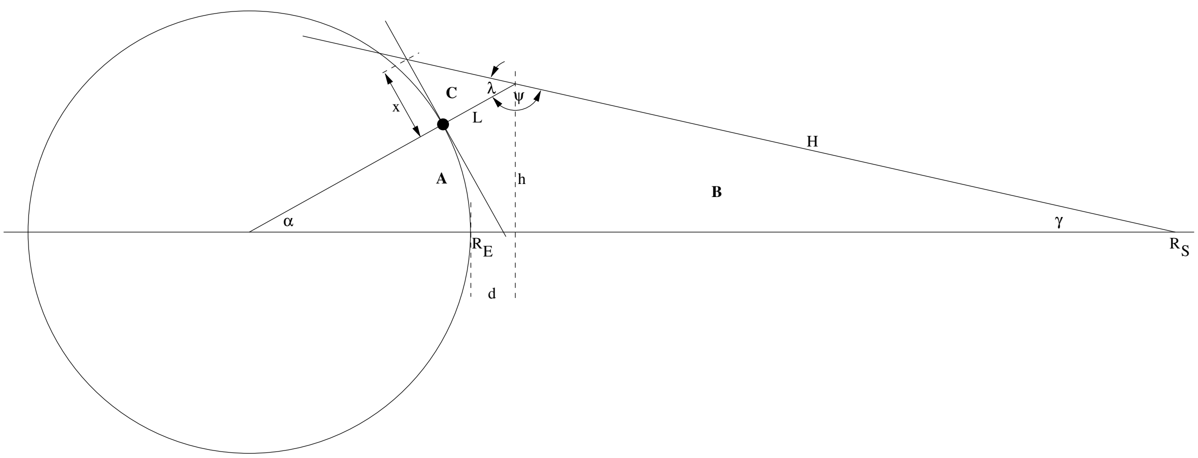

Abbildung 9: Überprüfung per Trigonometrie

Für das linke rechtwinklige Dreieck (A) mit dem Winkel α, der Hypotenuse $R_E + L$ und den Katheten h und $R_E + d$ gilt

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{h}{R_E + L} \\ h &= (R_E + L)\sin\alpha \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{R_E + d}{R_E + L} \\ d &= (R_E + L)\cos\alpha - R_E \end{aligned}$$

Für die Hypotenuse H des rechten rechtwinkligen Dreiecks (B) mit dem Winkel γ, der Hypotenuse H und den Katheten h und $R_S - R_E - d$ gilt

$$H^2 = h^2 + (R_S - R_E - d)^2$$

und für γ gilt

$$\begin{aligned} \sin\gamma &= \frac{h}{H} \\ \gamma &= \arcsin\left(\frac{h}{H}\right). \end{aligned}$$

Für ψ folgt wegen der Winkelsumme $\alpha + \psi + \gamma = \pi$ im Dreieck (A,B) die Gleichung $\psi = \pi - \alpha - \gamma$. Für λ folgt damit wegen $\lambda + \psi = \pi$ die Gleichung $\lambda = \pi - \psi$. Wir haben ein rechtwinkliges Dreieck (C) mit dem Winkel λ, und mit den Katheten L und x. Es gilt weiterhin für den gesuchten Punkt x auf der Tangente $\tan\lambda = \frac{x}{L}$ oder umgeformt

$$x = L\tan\left[\alpha + \arcsin\left(\frac{h}{H}\right)\right]. \qquad (16)$$

Die numerische Ergebnisse dieser Gleichung stimmen mit den oben errechneten Ergebnissen überein (siehe MatLab-Quelle „TigonometrischerTest.m“).

14.2 Beweis der Ungleichung $\Omega^S < -1$

Behauptung

Aus

$$\frac{\Omega^S}{1+\Omega^S} > 1 \tag{17}$$

folgt $\Omega^S < -1$.

Beweis

- Fall $1+\Omega^S = 0$

  Also gilt $\Omega^S = -1$ und damit folgt aus (17) der Widerspruch $\frac{-1}{0} > 1$. Es existiert für diesen Fall keine Lösung.

- Fall $1+\Omega^S > 0$

  Es folgt aus (17) $\Omega^S > 1 + \Omega^S$ oder $0 > 1$. Dies ist offensichtlich falsch. Es existiert für diesen Fall keine Lösung.

- Fall $1+\Omega^S < 0$

  Es folgt aus (17) $\Omega^S < 1 + \Omega^S$ oder $0 < 1$. Dies ist offensichtlich richtig. Also existiert für diesen Fall eine Lösung, nämlich $\Omega^S < -1$. ■

14.3 Steigungen der Trajektorie

Die Steigung $S(x)$ der Trajektorie $\underline{x}^S(\alpha) = \frac{y(\alpha)}{x(\alpha)}$ nach Gleichung (15) errechnet sich zu (siehe dazu z.B. [6])

$$S(x) \quad = \quad \frac{dy(x)}{dx} = \frac{\frac{\partial y(\alpha)}{\partial \alpha}}{\frac{\partial x(\alpha)}{\partial \alpha}}. \tag{18}$$

Der Ausdruck für die Steigung wird mittels der „Symbolic Math Toolbox“ von MatLab berechnet (siehe dazu die MatLab-Quelldatei „SonnenKompassSymbolic.m“).

14.4 Astronomischer Mittag

Der astronomische Mittag ist durch den Erdrotationswinkel α_M gekennzeichnet, der zu einer verschwindenden Steigung der Tajektorie $y(x)$ gehört. Mit $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\alpha_M \quad = \quad \arctan\left(\frac{\tan\Omega}{\cos\psi}\right) + n\pi.$$

14.5 Alternative zur Bestimmung der zweidimensionalen Trajektorie

Die Trajektorienpunkte nach Gleichung (10) liegen alle in einem Tangentialraum der Erdkugel (Radius R_E), einem affinen Unterraum des $\mathbb{R}^3$, den man durch

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = R_E$$

beschreiben kann. Die Parameter a, b, c dieses Unterraumes können aus den N Trajektorienpunkten (x_1^n, x_2^n, x_3^n) für $n = 1, \cdots, N$ durch eine Least-Squares-Optimierung bestimmt werden. Dazu wird das LS-Problem

$$\min_{a,b,c} \sum_{n=1}^{N} \mid ax_1^n + bx_2^n + cx_3^n - R_E \mid^2$$

gelöst (siehe dazu zB. [9]). Man kann das Problem umformulieren als

$$\min_{a,b,c} \|M\underline{x} - \underline{R}_E\|^2 \tag{19}$$

mit der $N \times 3$-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^N & x_2^N & x_3^N \end{pmatrix},$$

dem Vektor $\underline{R}_E = (R_E, \cdots, R_E)^T$ und mit $\underline{x} = (a, b, c)^T$. Die Matrix M habe kein Rangdefizit.

Allgemeines LS-Problem

Das allgemeine LS-Problem ist nach [9] beschrieben durch

$$\min_{\underline{x}} \|A\underline{x} - \underline{b}\|^2 \tag{20}$$

mit der $m \times n$-Matrix A und dem m-Vektor $\underline{b}$. Die Matrix A habe den Rang $k \leq \max(n, m)$.

Allgemeine Lösung des LS-Problems

Folgt man in [9] dem Theorem 3.19, so existiert für A eine Zerlegung $A = HRK^T$ in eine orthogonale $m \times m$-Matrix H, eine orthogonale $n \times n$-Matrix K und eine $m \times n$-Matrix R der Form

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit der invertierbaren $k \times k$-Matrix R_{11}.
Nach Theorem 2.3 in [9] definiert man zur Problemlösung einerseits

$$\begin{pmatrix} \underline{g}_1 \\ \underline{g}_2 \end{pmatrix} = H^T \underline{b} \tag{21}$$

mit dem k-Vektor $\underline{g}_1$ und dem $(m-k)$-Vektor $\underline{g}_2$ und andererseits

$$\begin{pmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \end{pmatrix} = K^T \underline{x}$$

mit dem k-Vektor $\underline{y}_1$ und dem $(n-k)$-Vektor $\underline{y}_2$.
Bezeichnet man mit $\underline{\widetilde{y}}_1$ die eindeutige Lösung von $R_{11}\underline{y}_1 = \underline{g}_1$, so ist jede Lösung $\underline{x}_0$ von (20) durch

$$\underline{x}_0 = K \begin{pmatrix} \underline{\widetilde{y}}_1 \\ \underline{y}_2 \end{pmatrix} \tag{22}$$

darstellbar. Dabei ist der $(n-k)$-Vektor $\underline{y}_2$ beliebig wählbar. Wählt man $\underline{y}_2 = \underline{0}$, so erhält man die Lösung mit kleinster Nom $\|\underline{x}_0\|$.

Beweis von (22)

Aus (20) folgt mit $A = HRK^T$ aufgrund der Orthogonalität von H

$$\|A\underline{x} - \underline{b}\|^2 = \left\|RK^T\underline{x} - H^T\underline{b}\right\|^2.$$

Einsetzen der Lösung (22) in $RK^T\underline{x}$ liefert aufgrund der Orthogonalität von K

$$\begin{aligned} RK^T\underline{x} &= RK^TK \begin{pmatrix} \underline{\widetilde{y}}_1 \\ \underline{y}_2 \end{pmatrix} \\ &= R \begin{pmatrix} \underline{\widetilde{y}}_1 \\ \underline{y}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\widetilde{y}}_1 \\ \underline{y}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_{11}\underline{\widetilde{y}}_1 \\ \underline{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Einsetzen von (21) in liefert

$$\begin{aligned}
\|A\underline{x} - \underline{b}\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} R_{11}\underline{\widetilde{y}}_1 \\ \underline{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underline{g}_1 \\ \underline{g}_2 \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&= \left\| \begin{pmatrix} R_{11}\underline{\widetilde{y}}_1 - \underline{g}_1 \\ -\underline{g}_2 \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&= \left\| R_{11}\underline{\widetilde{y}}_1 - \underline{g}_1 \right\|^2 + \left\| \underline{g}_2 \right\|^2 .
\end{aligned}$$

Das Minimum $\left\| \underline{g}_2 \right\|^2$ wird für $R_{11}\underline{\widetilde{y}}_1 = \underline{g}_1$ angenommen.

Spezialisierte Lösung des LS-Problems

Die Matrix M des zu lösenden LS-Problem (19) hat Rang 3. Deshalb ist die Matrix R wegen $k = n$ eine linke obere Dreiecksmatrix.

Literatur

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Drehmatrix; Abschnitt: Drehmatrizen des Raumes $\mathbb{R}^3$

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Erdrotation; Abschnitt: Rotationsachse

[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Erdrotation

[4] https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten; Abschnitt: Andere Konventionen

[5] https://de.wikipedia.org/wiki/Tangentialebene; Abschnitt: Tangentialebene an eine implizit gegebene Fläche

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Parametric_derivative, Abschnitt: First derivative

[7] https://de.wikipedia.org/wiki/Gleichschenkliges_Dreieck, Abschnitt: Berechnung und Konstruktion

[8] https://www.cactus2000.de/sun/city.php?id=Las+Palmas+de+Gran+Canaria&year=2021&month=10&c=ES

[9] Solving Least Squares Problems; Lawson, C.L.; Hanson, R.J.; SIAM Classics in Applied Mathematics 15; 1995