# Sonnenkompass

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz/Hobby

## 1 Fragestellung

Wir genau ist die bekannte Methode, die Nord-Richtung per Sonnenstand zu bestimmen?

## 2 Methodenbeschreibung

- einen Stab senkrecht in die Erde stecken
- das Ende des Schattens des Stabes mit einen Stein markieren
- einige Zeit abwarten bis der Stabschatten weiter gewandert ist
- das neue Schattenende des Stabes mit einem zweiten Stein markieren.

Man erhält die Nordrichtung mittels der folgenden Regeln

- R1: der Schatten des Stab-Endes bewegt sich auf der Verbindungsgeraden der beiden Steine
- R2: die Nordrichtung ist orthogonal zur Verbindungsgeraden
- R3: auf der Nordhalbkugel der Erde zeigt der Schatten Richtung Norden, auf der Südhalbkugel Richtung Süden.

## 3 Problemformulierung

Es werden kartesische Koordinaten $(x_1, x_2, x_3)$ verwendet, wobei das Koordinatenpaar $(x_1, x_2)$ die Ekliptikalebene aufspannt, der Ursprung des Koordinatensystems ist der Erdmittelpunkt (siehe dazu die Problemskizze in Abbildung 1).

Es werden die folgenden Annahmen getroffen:

- der Zeitpunkt im Jahr sei die Sommersonnenwende
- die Sonne im Punkt $\underline{S}$ sei durch einen Punktstrahler darstellt
- die Sonne habe den Abstand $R_S$ von der Erde
- die Erde habe ideale Kugelgestalt mit dem Radius $R_E$
- die Erd-Rotationsachse habe einen Neigungswinkel $\phi$ zur $x_3$-Achse
- im Punkt $\underline{P}$ der Erdoberfläche befinde sich der Fusspunkt des Stabes der Länge $L$
- die Erdoberfläche um den Fusspunkt des Stabes herum werde durch eine Tangentialebene an die Erdkugel angenähert.

Die Methode wird allerdings in der Nähe der Pole scheitern, da das Stabende dort evtl. keinen Schatten mehr wirft.

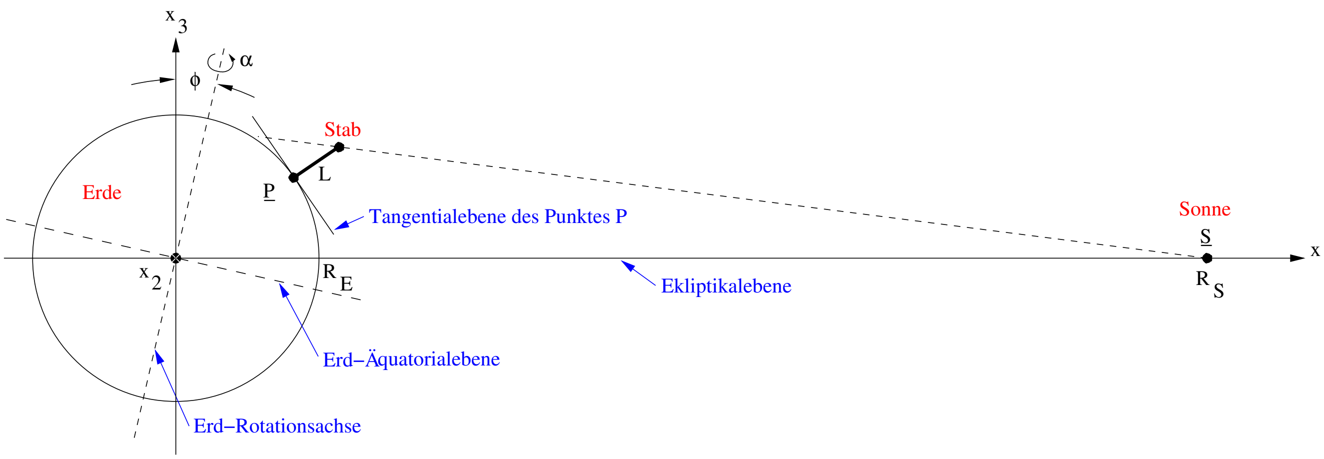


Abbildung 1: Nicht massstäbliche Problemskizze (Sommersonnenwende)

## 4 Vereinbarungen

Im folgenden wird Kenntnis der linearen Algebra vorausgesetzt.
Vektoren werden durch einen Unterstrich kenntlich gemacht $\underline{x}$ und ihre Transposition $\underline{x}^T$ durch ein hochgestelltes $T$. Matrizen werden nicht besonders bezeichnet.

# Teil I
# Gemeinsamkeiten beider Lösungsansätze

## Erdrotation

Die Rotation der Erde um ihre Rotationsachse wird in Abhängigkeit des Rotationswinkels $\alpha \in [0, 2\pi]$ durch die Drehmatrix

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} n_1^2\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha & n_1 n_2\,(1-\cos\alpha)-n_3\sin\alpha & n_1 n_3\,(1-\cos\alpha)+n_2\sin\alpha \\ n_2 n_1\,(1-\cos\alpha)+n_3\sin\alpha & n_2^2\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha & n_2 n_3\,(1-\cos\alpha)-n_1\sin\alpha \\ n_3 n_1\,(1-\cos\alpha)-n_2\sin\alpha & n_3 n_2\,(1-\cos\alpha)+n_1\sin\alpha & n_3^2\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha \end{pmatrix} \quad (1)$$

beschrieben (siehe dazu z.B. [1]), dabei ist

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

der Einheitsvektor, der Richtung und Orientierung der Rotationsachse definiert.
In dieser Arbeit soll der Zeitpunkt der Sommersonnenwende betrachtet werden, d.h. die Rotationsachse soll, so wie in Abbildung 1 dargestellt, in der $(x_1, x_3)$-Ebene liegen. Der Einheitsvektor ist somit durch

$$\begin{aligned} n_1 &= \sin\phi \\ n_2 &= 0 \\ n_3 &= \cos\phi. \end{aligned}$$

gegeben, der Winkel $\phi$ hat den numerischen Wert [2]

$$\phi = 23.44°. \quad (2)$$

Für mittags 12 Uhr soll $\alpha = 0$ gelten.

## Fusspunkt des Stabes

Der Ort $\underline{P} = (p_1, p_{2,} p_3)^T$ des Fusses des Stabes bestimmt sich aus der geographischen Breite $\Theta$, der Länge $\varphi$ (siehe dazu z.B. [4]), dem Erdradius $R_E$ und dem Achsneigungswinkel $\phi$ (2) zu

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

mit

$$\begin{aligned} p_1 &= R_E \cos(\Theta + \phi) \cos\varphi \\ p_2 &= R_E \cos(\Theta + \phi) \sin\varphi \\ p_3 &= R_E \sin(\Theta + \phi) \, . \end{aligned}$$

## Endpunkt des Stabes

Für den Punkt $\underline{Q}$ am Ende des Stabes der Länge $L$ gilt

$$\underline{Q} = \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{P}. \tag{4}$$

## Tangentialebene

Die Kugel mit Radius $R_E$ um den Ursprung ist durch die Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ gegeben, mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_i x_i^2 - R_E^2, \tag{5}$$

für den Index gilt $i \in [1, 3]$.
Für die Tangentialebene im Berührpunkt $\underline{P} = (p_1, p_{2,} p_3)^T$ gilt (siehe dazu z.B. [3])

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - p_i) = 0,$$

die Ableitungen sind im Berührpunkt $\underline{P}$ zu bilden.
Für die implizite Gleichung der Tangentialebene im Berührpunkt $\underline{P}$ folgt schliesslich für die Kugel (5) der Ausdruck

$$\sum_i p_i (x_i - p_i) = 0$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\underline{P}^T (\underline{x} - \underline{P}) = 0. \tag{6}$$

## Verbindungsgerade

Die Sonne befindet sich im Punkt

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} R_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Punkte der Verbindungsgerade $\underline{G}$ der Sonne $\underline{S}$ mit dem Stabende $\underline{Q}$ nach Gleichung (4) sind durch

$$\underline{G} = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S} \tag{7}$$

gegeben, dabei gilt $\mu \geq 0$.

## Lösung

Zur Unterstützung der Problemlösung wird MatLab und seine „Symbolic Math Toolbox“ verwendet, die MatLab-Quellen finden sich im GitHub-Unterverzeichnis „Matlab-Sources“.

Gesucht wird die Trajektorie des Schattens des Stabendes auf der Tangentialebene in Abhängigkeit des Erd-Rotationswinkels $\alpha$.

# Teil II

# Rotation der Erde bei fixer Sonne

## Fusspunkt des Stabes

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix $D_\alpha$ so folgt für den Ort des Stabfusspunktes aus Gleichung (3)

$$\underline{P}^\alpha = D_\alpha \underline{P}. \tag{8}$$

## Endpunkt des Stabes

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix $D_\alpha$ so folgt aus Gleichung (4)

$$\begin{aligned} \underline{Q}^\alpha &= \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) D_\alpha \underline{P} \\ \underline{Q}^\alpha &= \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{P}^\alpha. \end{aligned} \tag{9}$$

## Tangentialebene

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix $D_\alpha$ so folgt für die gedrehte Tangentialebene $T^\alpha$ aus Gleichung (6)

$$\begin{aligned} (D_\alpha \underline{P})^T (\underline{x} - D_\alpha \underline{P}) &= 0 \\ (\underline{P}^\alpha)^T (\underline{x} - \underline{P}^\alpha) &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

## Verbindungsgerade

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix $D_\alpha$ so folgt[1] aus Gleichung (7)

$$\begin{aligned} \underline{G}^\alpha &= \mu D_\alpha \underline{Q} + (1-\mu)\, \underline{S} \\ \underline{G}^\alpha &= \mu \underline{Q}^\alpha + (1-\mu)\, \underline{S}. \end{aligned} \tag{11}$$

## Lösung

Gesucht ist also der Schnittpunkt der Geraden $\underline{G}^\alpha$ nach Gleichung (11) mit der Tangentialebene $T^\alpha$ oder anders formuliert, gesucht wird der Geradenparameter $\mu$, der eine Lösung $\underline{x}_0$ der Gleichung (10) mit der Bedingung[2]

$$\underline{x}_0 = \mu \underline{Q}^\alpha + (1-\mu)\, \underline{S} \tag{12}$$

[1] Für $\mu = 0$ wird der Punkt $\underline{S}$, für $\mu = 1$ wird der Punkt $\underline{Q}^\alpha$ beschrieben.
[2] D.h. $x_0$ soll auf der Verbindungsgeraden liegen.

zulässt.

### Lösungspunkt

Einsetzen von Gleichung (12) in Gleichung (10) liefert

$$\left(\underline{P}^{\alpha}\right)^{T}\left[\mu\underline{Q}^{\alpha}+\left(1-\mu\right)\underline{S}-\underline{P}^{\alpha}\right] = 0.$$

Wegen

$$\left(\underline{P}^{\alpha}\right)^{T}\underline{P}^{\alpha}=\underline{P}^{T}\underline{P}=R_{E}^{2}$$

folgt nach kurzer Umformung die zu lösende Gleichung

$$\mu_{0}\left(\alpha\right) = \frac{R}{R+L} \tag{13}$$

mit der Abkürzung

$$R\left(\alpha\right) = R_{E}-\frac{\left(\underline{P}^{\alpha}\right)^{T}\underline{S}}{R_{E}}.$$

Da mit $\mu=0$ die Sonne und mit $\mu=1$ das Stabende beschrieben wird, muss wegen Gleichung (11) für die Lösung $\mu_{0}>1$ und damit $R<0$ gelten.
Der gesuchte Punkt $\underline{x}_{0}$ ergibt sich als Funktion des Drehwinkels $\alpha$ mit dem nach Gleichung (13) bestimmten $\mu_{0}\left(\alpha\right)$ durch Einsetzen in Gleichung (12) zu

$$\underline{x}_{0}\left(\alpha\right) = \mu_{0}\underline{Q}^{\alpha}+\left(1-\mu_{0}\right)\underline{S}. \tag{14}$$

# Teil III

# Rotation der Sonne bei fixer Erde

## Sonne

Still to do!

## Literatur

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Drehmatrix

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Erdachse

[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Tangentialebene

[4] https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten