

# Elektrische und magnetische Monopole

Jürgen Womser-Schütz, <https://github.com/JW-Schuetz>

Vektoren  $v$  werden im folgenden durch einen Unterstrich kenntlich gemacht  $\underline{v}$ , ihr Skalarprodukt sei durch  $\bullet$ , ihr Kreuzprodukt durch  $\times$  bezeichnet.

Weiterhin sollen Kugelkoordinaten  $(\rho, \phi, \Theta)$  zur Anwendung kommen.

## Grundlegendes

### Satz von Stokes

Sei  $S$  eine glatte, orientierte Fläche im  $\mathbb{R}^3$  mit Rand  $\partial S$ . Dann gilt für ein Vektorfeld  $\underline{A}$  mit kontinuierlichen 1. partiellen Ableitungen in einer Umgebung, die  $S$  enthält

$$\iint_S (\text{rot } \underline{A}) \bullet d\underline{a} = \oint_{\partial S} \underline{A} \bullet d\underline{l}. \quad (1)$$

Dabei gilt  $d\underline{a} = \underline{n} dS$  und  $d\underline{l} = \underline{t} ds$  mit dem Normalenvektor  $\underline{n}$  der Fläche  $S$  und dem Tangentialvektor  $\underline{t}$  des Randes  $\partial S$ .

### Maxwellgleichungen

Es gelten die quellenfreien Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \text{div } (\underline{E}) &= 0 \\ \text{div } (\underline{B}) &= 0 \\ \text{rot } (\underline{E}) &= \underline{0} \\ \text{rot } (\underline{B}) &= \underline{0}. \end{aligned} \quad (2)$$

### Potentiale

Aus der Vektoranalysis ist für den dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  hinlänglich bekannt

$$\begin{aligned} \text{rot grad}(\psi) &= \underline{0} \\ \text{div rot}(\underline{A}) &= 0. \end{aligned}$$

Damit gelten die folgenden beiden Aussagen

$$\begin{aligned} \underline{V} = \text{grad}(\psi) &\implies \text{rot } (\underline{V}) = \underline{0} \\ \underline{W} = \text{rot}(\underline{A}) &\implies \text{div } (\underline{W}) = 0. \end{aligned}$$

Aber gilt auch die Umkehrung?

Existiert für jedes rotationsfreie Feld  $\underline{V}$  eine skalare Funktion  $\psi$  mit  $\underline{V} = \text{grad}(\psi)$  und existiert für jedes divergenzfreie Feld  $\underline{W}$  ein Feld  $\underline{A}$  mit  $\underline{W} = \text{rot}(\underline{A})$ ?

Die Antworten auf diese Fragen hängen von der Topologie des betrachteten Definitionsbereich  $\Omega$  ab.

## Definitionsbereich $U$

Der Definitionsbereich der Felder und Potentiale beider Monopole ist der gesamte  $\mathbb{R}^3$  mit Ausnahme des Ortes des Monopoles im Koordinatenursprung, also  $U = \mathbb{R}^3 - \underline{0}$ . Der Ursprung ist ein singulärer Punkt der Betrachtung.

## Topologische Eigenschaften des Definitionsbereiches $U$

- Die erste Homotopiegruppe (die Fundamentalgruppe) von  $U$  ist trivial  $\pi_1(U) = 0$ , d.h. eine beliebige 1-Sphäre  $S^1$  (Kreislinie) in  $U$  kann kontinuierlich auf einen Punkt in  $U$  zusammengezogen werden. Man nennt  $U$  auch einfach zusammenhängend.
- Die zweite Homotopiegruppe von  $U$  ist nicht trivial  $\pi_2(U) \neq 0$ , d.h. es ist nicht möglich, eine beliebige 2-Sphäre  $S^2$  (Kugeloberfläche) in  $U$  kontinuierlich auf einen Punkt in  $U$  zusammenzuziehen - dies scheitert für jede Kugeloberfläche, die den Ursprung umschließt.

Diese beiden Eigenschaften des Definitionsbereiches  $U$  haben Konsequenzen für die Existenz der Potentiale.

1. Im Fall  $\pi_1(U) = 0$  wird sich vermutlich zeigen, dass für jedes rotationsfreie Feld  $\underline{V}$  die Existenz eines skalaren Potentials  $\psi$  folgt.
2. Im Fall  $\pi_1(U) = 0$  existieren aber vermutlich divergenzfreie Felder  $\underline{W}$  die kein Vektorpotential  $\underline{A}$  besitzen.
3. Im Fall  $\pi_2(U) \neq 0$  wird sich vermutlich zeigen, dass jedes divergenzfreie Feld  $\underline{W}$  ein Vektorpotential  $\underline{A}$  besitzt.

Noch zu tun: die Vermutungen beweisen.

## Potentiale des elektrischen Monopols

Sein elektrisches und magnetisches Feld ist auf  $U$  durch

$$\begin{aligned}\underline{E}(\rho, \phi, \Theta) &= \frac{q}{\rho^2} \underline{e}_\rho \\ \underline{B}(\rho, \phi, \Theta) &= \underline{0}\end{aligned}\tag{3}$$

gegeben.

Noch zu tun: skalares Potential und Vektorpotential herleiten.

## Potentiale des magnetischen Monopols

Ein magnetischer Monopol wurde bisher noch nicht beobachtet und ist deshalb hypothetisch.

Sein magnetisches und elektrisches Feld in Kugelkoordinaten ist auf  $U$  analog zum elektrischen Monopol durch

$$\begin{aligned}\underline{E}(\rho, \phi, \Theta) &= \underline{0} \\ \underline{B}(\rho, \phi, \Theta) &= \frac{g}{\rho^2} \underline{e}_\rho\end{aligned}\tag{4}$$

gegeben.

Noch zu tun: skalares Potential herleiten, Dirac-Strings thematisieren.

## Beweis zu Punkt 2 für den Spezialfall „Magnetischer Monopol“

Betrachtet man eine Kugeloberfläche  $S$  des Radius  $R$  um den Ursprung und sei  $\partial S$  ihr Äquator. Weiterhin seien  $S^+$  und  $S^-$  ihre obere und untere Hemisphären.  $\partial S$  sei entgegen des Uhrzeigersinns orientiert und die beiden Hemisphären  $S^+$  und  $S^-$  besitzen einen nach aussen gerichteten Normalenvektor  $\underline{n}$ .

Wir nehmen an, dass ein Vektorpotential  $\underline{A}$  mit kontinuierlichen 1. partiellen Ableitungen in einer Umgebung, die  $S$  enthält, existiert.

Dann erhält man für den Fluss der Rotation des Vektorpotentials  $\underline{A}$  durch  $S$  zusammen mit (4)

$$\begin{aligned} \iint_S (\operatorname{rot} \underline{A}) \bullet d\underline{a} &= \iint_S \underline{B} \bullet d\underline{a} \\ &= \iint_S \left( \frac{g}{\rho^2} \underline{e}_\rho \right) \bullet d\underline{a} \\ &= \frac{g}{R^2} \iint_S \underline{e}_\rho \bullet d\underline{a} \\ &= \frac{g}{R^2} (4\pi R^2) \\ &= 4\pi g. \end{aligned} \tag{5}$$

Andererseits folgt aus dem Satz von Stokes (1) für diesen Fluss

$$\begin{aligned} \iint_S (\operatorname{rot} \underline{A}) \bullet d\underline{a} &= \iint_{S^+} (\operatorname{rot} \underline{A}) \bullet d\underline{a} + \iint_{S^-} (\operatorname{rot} \underline{A}) \bullet d\underline{a} \\ &= \oint_{\partial S} \underline{A} \bullet d\underline{l} + \oint_{-\partial S} \underline{A} \bullet d\underline{l} \\ &= \oint_{\partial S} \underline{A} \bullet d\underline{l} - \oint_{\partial S} \underline{A} \bullet d\underline{l} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Zwischen (5) und (6) besteht ein Widerspruch.

Die getroffene Annahme ist also falsch und es existiert kein solches Vektorpotential  $\underline{A}$  ■

Noch zu tun: 1. und 3. beweisen.

## Helmholtz Zerlegung

Es werden die beiden Räume der „Harmonischen Felder“ definiert

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_m(\Omega) &= \{ \underline{w} \in L_2^3(\Omega) \mid \operatorname{rot}(\underline{w}) = \underline{0}, \operatorname{div}(\underline{w}) = 0, \underline{w} \bullet \underline{n} = 0 \text{ auf } \partial\Omega \} \\ \mathbb{H}_e(\Omega) &= \{ \underline{w} \in L_2^3(\Omega) \mid \operatorname{rot}(\underline{w}) = \underline{0}, \operatorname{div}(\underline{w}) = 0, \underline{w} \times \underline{n} = 0 \text{ auf } \partial\Omega \}. \end{aligned}$$

mit  $L_p^3(\Omega)$  seien die Lebesgue-integrablen Funktionen  $L_p$  in  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  bezeichnet.

### Theorem 1

Nehmen wir an, dass  $\underline{H}$  in  $\Omega$  rotationsfrei ist und dass jede geschlossene Kurve  $C$  in  $\Omega$  der Rand  $\partial S$  einer Fläche  $S \subset \Omega$  ist. Dann existiert eine Funktion  $\psi$  mit  $\underline{H} = \operatorname{grad}(\psi)$  in  $\Omega$ .

### Beweis

Da der Fluss von  $\operatorname{rot}(\underline{H})$  auf jeder Oberfläche  $S$  verschwindet, folgt aus dem Satz von Stokes (1), dass das Linienintegral einer geschlossenen Kurve  $C$  über  $\underline{H}$  verschwindet ■

## Theorem 2

Nehmen wir an, dass  $\underline{B}$  in  $\Omega$  divergenzfrei ist und dass jede geschlossene Oberfläche  $S$  in  $\Omega$  der Rand  $\partial S$  einer Teilmenge  $D \subset \Omega$  ist. Dann existiert ein Vektorfeld  $\underline{A}$  mit  $\underline{A} = \text{rot}(\underline{B})$  in  $\Omega$ .

## Beweis

Da das Integral  $\text{div}(\underline{B})$  auf jeder Teilmenge  $D$  verschwindet, ■

## Theorem 3

Nehmen wir an, dass  $\underline{H}$  in  $\Omega$  rotationsfrei ist und dass  $\underline{H} \times \underline{n} = 0$  auf dem Rand  $\partial\Omega$  von  $\Omega$  gilt. Dann existiert eine Funktion  $\psi$  mit  $\underline{H} = \text{grad}(\psi)$  in  $\Omega$ .

## Beweis

Setzt man  $\underline{H}$  ausserhalb von  $\Omega$  durch 0 fort, dann bleibt  $\underline{H}$  rotationsfrei.  $\underline{H}$  ist also der Gradient eines skalaren Potentials ■

## Theorem 4

Nehmen wir an, dass  $\underline{B}$  in  $\Omega$  divergenzfrei ist und dass  $\underline{B} \bullet \underline{n} = 0$  auf dem Rand  $\partial\Omega$  von  $\Omega$  gilt. Dann existiert ein Vektorfeld  $\underline{A}$  mit  $\underline{B} = \text{rot}(\underline{A})$  in  $\Omega$ .

## Beweis

Setzt man  $\underline{B}$  ausserhalb von  $\Omega$  durch 0 fort, dann bleibt  $\underline{B}$  divergenzfrei.  $\underline{B}$  ist also die Rotation eines Vektorfeldes ■

Noch zu tun: Verstehen! Das ist die Stelle, in der die Topologie ins Spiel kommt! Die Voraussetzungen von Theorem 2 sind für den magnetischen Monopol nicht erfüllt!

# Inhaltsverzeichnis

# Literatur

- [1] Topology, Geometry and Gauge fields; Naber, Gregory; Springer Science+Business Media; 2011
- [2] Scalar and vector potentials, Helmholtz decomposition and de Rham cohomology; Valli, Alberto; University of Trento, Italy