

# Sonnenkompass

Jürgen Womser-Schütz, <https://github.com/JW-Schuetz/Hobby>

## 1 Fragestellung

Wie genau ist die bekannte Methode, die Nord-Richtung per Sonnenstand zu bestimmen?

## 2 Methodenbeschreibung

- einen Stab senkrecht in die Erde stecken
- das Ende des Schattens des Stabes mit einem Stein markieren
- einige Zeit abwarten bis der Stabschatten weiter gewandert ist
- das neue Schattenende des Stabes mit einem zweiten Stein markieren.

Man erhält die Nordrichtung mittels der folgenden Regeln

- R1: der Schatten des Stab-Endes bewegt sich auf der Verbindungsgeraden der beiden Steine
- R2: die Nordrichtung ist orthogonal zur Verbindungsgeraden
- R3: auf der Nordhalbkugel der Erde zeigt der Schatten Richtung Norden, auf der Südhalbkugel Richtung Süden.

## 3 Problemformulierung

Es werden kartesische Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  verwendet, wobei das Koordinatenpaar  $(x_1, x_2)$  die Ekliptikalebene aufspannt, der Ursprung des Koordinatensystems ist der Erdmittelpunkt (siehe dazu die Problemskizze in Abbildung 1).

Es werden die folgenden Annahmen getroffen:

- der Zeitpunkt im Jahr sei die Sommersonnenwende
- die Sonne im Punkt  $\underline{S}$  sei durch einen Punktstrahler dargestellt
- die Sonne habe den Abstand  $R_S$  von der Erde
- die Erde habe ideale Kugelgestalt mit dem Radius  $R_E$
- im Punkt  $\underline{P}$  der Erdoberfläche befinde sich der Stab der Länge  $L$
- die Erd-Rotationsachse habe einen Neigungswinkel  $\phi$  zur  $x_3$ -Achse
- die Erdoberfläche um den Stab wird durch eine Tangentialebene an die Erdkugel angenähert.

Vermutlich wird die Methode allerdings auf zwei Kugelkalotten<sup>1</sup> um den Nord- und Südpol scheitern, da das Stabende dort keinen Schatten mehr wirft.

---

<sup>1</sup>Interessant wäre es, diese Kalotten näher zu kennen, evtl. gilt für ihre Höhe  $h=L$ ?

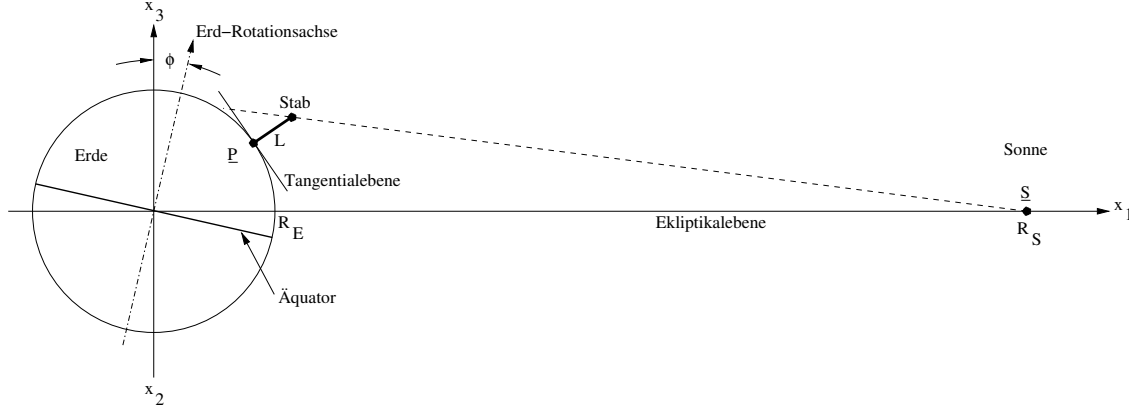


Abbildung 1: Problemskizze zur Zeit der Sommersonnenwende

## Erd-Rotation

Die Erde rotiert um ihre Rotationsachse. Diese Rotation wird in Abhängigkeit des Rotationswinkels  $\alpha$  durch die Drehmatrix  $D_\alpha$  beschrieben. Für die Drehmatrix gilt (siehe dazu z.B. [2])

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} n_1^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & n_1 n_2 (1 - \cos \alpha) - n_3 \sin \alpha & n_1 n_3 (1 - \cos \alpha) + n_2 \sin \alpha \\ n_2 n_1 (1 - \cos \alpha) + n_3 \sin \alpha & n_2^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & n_2 n_3 (1 - \cos \alpha) - n_1 \sin \alpha \\ n_3 n_1 (1 - \cos \alpha) - n_2 \sin \alpha & n_3 n_2 (1 - \cos \alpha) + n_1 \sin \alpha & n_3^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \end{pmatrix}$$

dabei ist

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

der Einheitsvektor, der Richtung und Orientierung der Rotationsachse definiert.

In dieser Arbeit soll Zeit der Sommersonnenwende betrachtet werden, d.h. die Rotationsachse soll, so wie in Abbildung 1 dargestellt, in der  $(x_1, x_3)$ -Ebene liegen. Es wird somit gewählt

$$\begin{aligned} n_1 &= \sin \phi \\ n_2 &= 0 \\ n_3 &= \cos \phi. \end{aligned}$$

## Tangentialebene

Die Kugel mit Radius  $R_E$  um den Ursprung ist durch die Gleichung  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  gegeben, mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_i x_i^2 - R_E^2.$$

Für die Tangentialebene im Berührungspunkt  $\underline{P} = (p_1, p_2, p_3)$  gilt allgemein (siehe dazu z.B. [1])

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - p_i) = 0.$$

Dabei sind die Ableitungen im Berührungspunkt  $\underline{P}$  zu bilden, für den Index gilt  $i \in [1, 3]$ .

Für die implizite Gleichung der Tangentialebene im Berührungspunkt  $\underline{P}$  folgt schliesslich in unserem speziellen Fall

$$\sum_i p_i (x_i - p_i) = 0$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\underline{P}^T (\underline{x} - \underline{P}) = 0.$$

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix  $D_\alpha$  so folgt für die gedrehte Tangentialebene  $T^\alpha$

$$(\underline{P}^\alpha)^T (\underline{x} - \underline{P}^\alpha) = 0. \quad (1)$$

## Stabende

Für den Punkt  $\underline{Q}$  am Ende des Stabes der Länge  $L$  gilt

$$\underline{Q} = \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{P}.$$

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix  $D_\alpha$  so folgt

$$\begin{aligned} \underline{Q}^\alpha &= \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) D_\alpha \underline{P} \\ &= \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{P}^\alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

## Verbindungsgerade

Die Sonne befinde sich im Punkt

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} R_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Punkte der Verbindungsgerade  $\underline{G}$  der Sonne  $\underline{S}$  mit dem Stabende  $\underline{Q}$  nach Gleichung (2) sind durch

$$\underline{G} = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}$$

gegeben, dabei gilt  $\mu \geq 0$ .

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix  $D_\alpha$  so folgt

$$\begin{aligned} \underline{G}^\alpha &= \mu D_\alpha \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S} \\ &= \mu \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu) \underline{S}. \end{aligned}$$

## Problemlösung

Gesucht wird die Trajektorie des Schattens des Stabendes auf der Tangentialebene  $T^\alpha$  in Abhängigkeit des Erd-Rotationswinkels  $\alpha \in [0, 2\pi]$  -  $\alpha$  durchläuft im Verlauf eines Tages seinen Wertebereich.

Gesucht ist also der Schnittpunkt der Geraden  $\underline{G}^\alpha$  mit der Tangentialebene  $T^\alpha$  oder anders formuliert, gesucht wird der Geradenparameter  $\mu$ , der eine Lösung  $\underline{x}_0$  der Gleichung

$$(\underline{P}^\alpha)^T (\underline{x}_0 - \underline{P}^\alpha) = 0$$

mit der Bedingung

$$\underline{x}_0 = \mu \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu) \underline{S}$$

zulässt. Da mit  $\mu = 0$  die Sonne und mit  $\mu = 1$  das Stabende beschrieben wird, muss für die Lösung  $\mu > 1$  gelten.

Einsetzen liefert

$$(\underline{P}^\alpha)^T [\mu \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu) \underline{S} - \underline{P}^\alpha] = 0.$$

Wegen

$$(\underline{P}^\alpha)^T \underline{P}^\alpha = \underline{P}^T \underline{P} = R_E^2$$

folgt nach Ausmultiplizieren die zu lösende Gleichung

$$\mu \left[ \left( 1 + \frac{L}{R_E} \right) R_E^2 - (\underline{P}^\alpha)^T \underline{S} \right] = R_E^2 - (\underline{P}^\alpha)^T \underline{S}$$

und damit

$$\mu = \frac{R_E^2 - (\underline{P}^\alpha)^T \underline{S}}{\left( 1 + \frac{L}{R_E} \right) R_E^2 - (\underline{P}^\alpha)^T \underline{S}}.$$

Zur Problemlösung wird MatLab verwendet, wobei zur analytischen Lösung der Gleichungen die „Symbolic Math Toolbox“ benutzt wird. Die MatLab-Quellen finden sich im GitHub-Unterverzeichnis „Matlab-Sources“.

## Literatur

[1] <https://de.wikipedia.org/wiki/Tangentialebene>

[2] <https://de.wikipedia.org/wiki/Drehmatrix>