Hopfbündel

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz

3-Sphäre S^3

Die 3-Sphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ ist mit $\underline{p} = (p_1, p_2, p_{3,}, p_4) \in \mathbb{R}^4$ definiert durch $\left\|\underline{p}\right\| = 1$. Identifiziert man durch die Korrespondenz

$$\left(x^1, y^1, x^2, y^2\right) \leftrightarrow \left(x^1 + iy^1, x^2 + iy^2\right)$$

$\mathbb{R}^4$ mit $\mathbb{C}^2$, dann erhält man für die 3-Sphäre

$$S^3 = \left\{\left(z^1, z^2\right) \in \mathbb{C}^2 : \quad \left|z^1\right|^2 + \left|z^2\right|^2 = 1\right\}.$$

Diese Darstellung von S^3 ist von 4 Parametern abhängig, es sind aber nur 3 nötig. Also macht man z.B. mit $r_1, r_2 \geq 0$ und $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ den Ansatz $z^1 = r_1 \exp(i\xi_1)$ und $z^2 = r_2 \exp(i\xi_2)$. Es muss dann $r_1^2 + r_2^2 = 1$ gelten.
Man erhält so die Parametrierung für S^3 (siehe dazu im Anhang die Behauptung 1)

$$S^3 = \left\{(\cos(\phi)\exp(i\xi_1), \sin(\phi)\exp(i\xi_2)) : \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \right\}. \tag{1}$$

Es werden im folgenden drei Fälle für die Beträge von z^1 und z^2 behandelt.

Fall 1: $\left|z^1\right|^2 = \left|z^2\right|^2$

Aus (1) folgt $\cos(\phi) = \sin(\phi)$ und damit $\phi = \frac{\pi}{4}$ und $\left|z^1\right| = \left|z^2\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Die 3-Sphäre S^3 in diesem Fall ist der 2-dimensionale Torus

$$T = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\exp(i\xi_1), \frac{\sqrt{2}}{2}\exp(i\xi_2)\right) : \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}\right\}. \tag{2}$$

Fall 2: $\left|z^1\right|^2 \leq \left|z^2\right|^2$

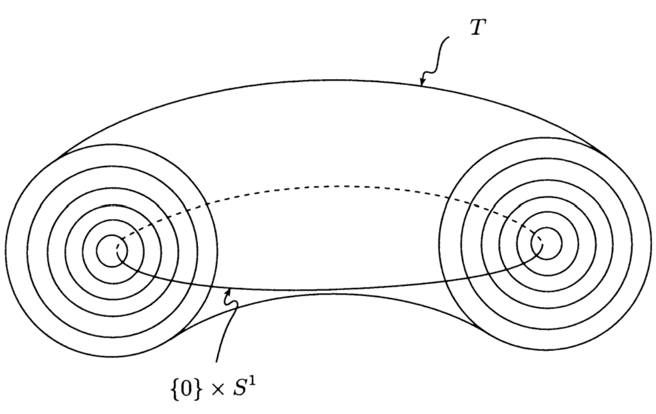

Abbildung 1: 2D-Torus T und Kreislinie $K = \{0\} \times S^1$

Aus (1) folgt $\cos(\phi) \leq \sin(\phi)$ und wegen $\phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ergibt sich $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$.
Für das untere Limit $\phi = \frac{\pi}{4}$ ergibt sich der 2D-Torus T des 1. Falles nach Gleichung (2).

Für das obere Limit $\phi = \frac{\pi}{2}$ folgt $z^1 = 0$, $z^2 = 1$ und das ergibt die horizontale Kreislinie $K_H = \{0\} \times S^1$

$$K_H = \left\{ \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(i\xi_2\right) \right) : \quad \xi_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für jeden Wert ϕ aus dem Intervall $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ ergibt sich jeweils ein 2-dimensionaler Torus T_ϕ. Durch die Vereinigung aller 2-dimensionalen Tori T_ϕ und der Kreislinie K_H entsteht der 3D-Torus

$$K_1 = \left\{ \left(z^1, z^2\right) \in \mathbb{C}^2 : \quad \left|z^1\right| \leq \left|z^2\right| \right\} \tag{3}$$

mit der Oberfläche T (siehe Abbildung 1).

Fall 3: $\left|z^1\right|^2 \geq \left|z^2\right|^2$

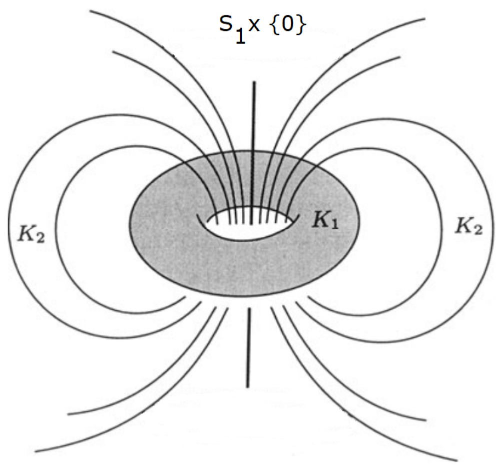

Abbildung 2: 3D-Torus K_1 und Kreislinie $K = S^1 \times \{0\}$

Aus (1) folgt $\cos(\phi) \geq \sin(\phi)$ und wegen $\phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ergibt sich $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$.
Für das obere Limit $\phi = \frac{\pi}{4}$ ergibt sich wieder der Torus T des 1. Falles nach Gleichung (2).
Für das untere Limit $\phi = 0$ folgt $z^1 = 1$, $z^2 = 0$ und das ergibt die vertikale Kreislinie $K_V = S^1 \times \{0\}$

$$K_V = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(i\xi_1\right), 0 \right) : \quad \xi_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für jeden Wert ϕ aus dem Intervall $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ ergibt sich jeweils ein 2-dimensionaler Torus T_ϕ. Durch die Vereinigung aller 2-dimensionalen Tori T_ϕ und der Kreislinie K_V entsteht der 3D-Torus

$$K_2 = \left\{ \left(z^1, z^2\right) \in \mathbb{C}^2 : \quad \left|z^1\right| \geq \left|z^2\right| \right\}.$$

Anhang

Behauptung 1

Es existiert für jedes Tupel (r_1, r_2) mit $r_1, r_2 \geq 0$ und $r_1^2 + r_2^2 = 1$ ein eindeutig bestimmter Winkel $\phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ mit $r_1 = \cos(\phi)$ und $r_2 = \sin(\phi)$.

Beweis

Zu r_1 kann man den Winkel $\phi_1 = \arccos(r_1)$ hinzubestimmen und zu r_2 den Winkel $\phi_2 = \arcsin(r_2)$.

Aus $r_1^2 + r_2^2 = 1$ folgt $r_2 = \pm\sqrt{1 - r_1^2}$. Wegen $r_2 \geq 0$ kommt nur das positive Vorzeichen in Frage. Also gilt $r_2 = \sqrt{1 - r_1^2}$.
Wegen der Identität (siehe dazu [2])

$$\arccos(x) = \arcsin\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$$

ergibt sich

$$\phi_2 = \arcsin(r_2) = \arcsin\left(\sqrt{1 - r_1^2}\right) = \arccos(r_1) = \phi_1.$$

Die beiden Winkel ϕ_1 und ϕ_2 sind also identisch.
Für $x \geq 0$ gilt $0 \leq \arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq \arccos(x) \leq \frac{\pi}{2}$. Für den Winkel ϕ gilt also $\phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. ■

Literatur

[1] Topology, Geometry and Gauge fields; Naber, Gregory; Springer Science+Business Media; 2011

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Trigonometrie#Additionstheoreme; Abschnitt: Umrechnung in andere trigonometrische Funktionen