

# Hopfbündel

Jürgen Womser-Schütz, <https://github.com/JW-Schuetz>

## Die 3-Sphäre $S^3$

Die 3-Sphäre  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$  ist mit  $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$  definiert durch  $\|\underline{p}\| = 1$ . Identifiziert man durch die Korrespondenz

$$(x^1, y^1, x^2, y^2) \leftrightarrow (x^1 + iy^1, x^2 + iy^2)$$

das Kontinuum  $\mathbb{R}^4$  mit  $\mathbb{C}^2$ , dann erhält man für die 3-Sphäre

$$S^3 = \left\{ (z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2 : |z^1|^2 + |z^2|^2 = 1 \right\}.$$

Diese Darstellung von  $S^3$  ist von 4 Parametern abhängig, es sind aber nur 3 nötig. Also macht man z.B. mit  $r_1, r_2 \geq 0$  und  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$  den Ansatz  $z^1 = r_1 \exp(i\xi_1)$  und  $z^2 = r_2 \exp(i\xi_2)$ . Es muss dann  $r_1^2 + r_2^2 = 1$  gelten.

Man erhält so die Parametrierung für  $S^3$  (siehe dazu im Anhang die Behauptung 1)

$$S^3 = \left\{ (\cos(\phi) \exp(i\xi_1), \sin(\phi) \exp(i\xi_2)) : \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (1)$$

Um sich eine Vorstellung dieser Parametrierung von  $S_3$  machen zu können, werden im folgenden drei Fälle für die Beträge von  $z^1$  und  $z^2$  (und damit von  $\cos(\phi)$  und  $\sin(\phi)$ ) behandelt.

**Fall 1:**  $|z^1|^2 = |z^2|^2$

Aus (1) folgt  $\cos(\phi) = \sin(\phi)$  und damit  $\phi = \frac{\pi}{4}$  und  $|z^1| = |z^2| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Die 3-Sphäre  $S^3$  in diesem Fall ist der 2-dimensionale Torus (2D-Torus)

$$T = \left\{ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \exp(i\xi_1), \frac{\sqrt{2}}{2} \exp(i\xi_2) \right) : \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2)$$

**Fall 2:**  $|z^1|^2 \leq |z^2|^2$

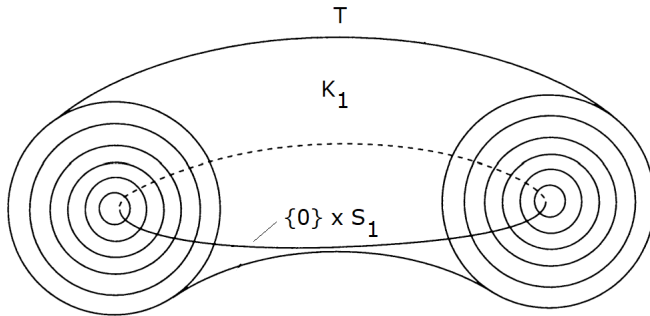


Abbildung 1: 2D-Torus  $T$  und horizontale Kreislinie  $\{0\} \times S^1$ , modifiziert nach [1]

Aus (1) folgt  $\cos(\phi) \leq \sin(\phi)$  und wegen  $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$  ergibt sich  $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ .

Für das untere Limit  $\phi = \frac{\pi}{4}$  ergibt sich der 2D-Torus  $T$  nach Gleichung (2).

Für das obere Limit  $\phi = \frac{\pi}{2}$  folgt  $z^1 = 0$ ,  $z^2 = 1$  und das ergibt die horizontale Kreislinie  $K_H = \{0\} \times S^1$

$$K_H = \left\{ \left( 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \exp(i\xi_2) \right) : \xi_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für jeden Wert  $\phi$  aus dem Intervall  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$  ergibt sich jeweils ein 2D-Torus  $T_\phi$ . Durch die Vereinigung all dieser 2-dimensionalen Tori  $T_\phi$  und der Kreislinie  $K_H$  entsteht der 3D-Torus

$$K_1 = \{(z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2 : |z^1| \leq |z^2|\}, \quad (3)$$

der  $T$  als Oberfläche hat (siehe Abbildung 1).

**Fall 3:**  $|z^1|^2 \geq |z^2|^2$

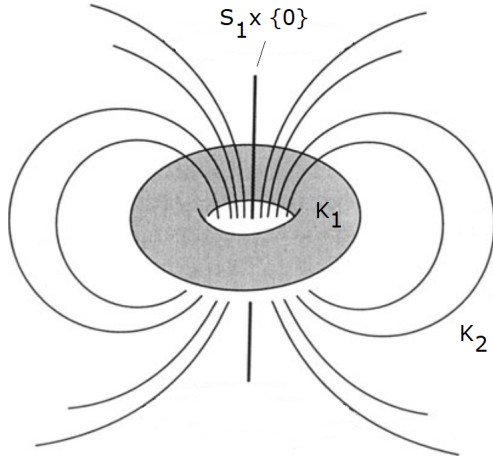


Abbildung 2: 3D-Torus  $K_1$  und vertikale Kreislinie  $S^1 \times \{0\}$ , modifiziert nach [1]

Aus (1) folgt  $\cos(\phi) \geq \sin(\phi)$  und wegen  $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$  ergibt sich  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ .

Für das obere Limit  $\phi = \frac{\pi}{4}$  ergibt sich wieder der 2D-Torus  $T$  nach Gleichung (2).

Für das untere Limit  $\phi = 0$  folgt  $z^1 = 1$ ,  $z^2 = 0$  und das ergibt die vertikale Kreislinie  $K_V = S^1 \times \{0\}$

$$K_V = \left\{ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \exp(i\xi_1), 0 \right) : \xi_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

$K_V$  erscheint in Abbildung 2 als Gerade, ist aber eine Kreislinie durch einen Punkt im Unendlichen.

Für jeden Wert  $\phi$  aus dem Intervall  $(0, \frac{\pi}{4}]$  ergibt sich jeweils ein 2D-Torus  $T_\phi$ . Durch die Vereinigung all dieser 2-dimensionalen Tori  $T_\phi$  und der Kreislinie  $K_V$  entsteht der 3D-Torus (siehe Abbildung 2)

$$K_2 = \{(z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2 : |z^1| \geq |z^2|\}.$$

Die Späre  $S_3$  stellt sich also als Vereinigung zweier miteinander „verschränkter“ 3D-Tori  $K_1$  und  $K_2$  dar, die den  $\mathbb{R}^3$  vollständig ausfüllt.

## Hauptfaserbündel (Prinzipalbündel)

Für  $\underline{p} = (z^1, z^2) \in S_3$  und  $g \in S^1$  gilt  $\underline{p}g = (z^1, z^2)g = (z^1g, z^2g) \in S^3$ , die Abbildung  $(\underline{p}, g) \rightarrow \underline{p}g$  ist aus  $C^\infty$ . Falls  $g_1, g_2 \in S^1$  gilt für alle  $\underline{p} \in S^3$   $(\underline{p}g_1)g_2 = \underline{p}(g_1g_2)$ . Die Identität in  $S^1$  ist  $e = \exp(i0) = 1$  und es gilt  $\underline{p}e = \underline{p}$  für alle  $\underline{p} \in S^3$ .

Diese Eigenschaften machen die Abbildung  $(\underline{p}, g) \rightarrow \underline{p}g$  zu einer stetigen Rechtsoperation der Liegruppe  $S^1$  auf der Mannigfaltigkeit  $S^3$ .

Für einen fixen Punkt  $p \in S^3$  wird der Orbit von  $p$  als die Teilmenge  $\{pg : g \in S^1\}$  von  $S^3$  definiert, die durch das Durchlaufen aller  $g \in S^1$  entsteht. Der Orbit von  $p$  ist ein Kreis in  $S^3$  durch den Punkt  $p$ . Man kann zeigen, dass dieser Kreis sogar ein Grosskreis (also die Schnittmenge von  $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$  mit einer linearen Hyperebene des  $\mathbb{R}^4$ ) auf  $S^3$  ist (siehe dazu im Anhang die Behauptung 2).

# Anhang

## Behauptung 1

Es existiert für jedes Tupel  $(r_1, r_2)$  mit  $r_1, r_2 \geq 0$  und  $r_1^2 + r_2^2 = 1$  ein eindeutig bestimmter Winkel  $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$  mit  $r_1 = \cos(\phi)$  und  $r_2 = \sin(\phi)$ .

## Beweis

Zu  $r_1$  kann man den Winkel  $\phi_1 = \arccos(r_1)$  hinzubestimmen und zu  $r_2$  den Winkel  $\phi_2 = \arcsin(r_2)$ .

Aus  $r_1^2 + r_2^2 = 1$  folgt  $r_2 = \pm\sqrt{1-r_1^2}$ . Wegen  $r_2 \geq 0$  kommt nur das positive Vorzeichen in Frage. Also gilt  $r_2 = \sqrt{1-r_1^2}$ .

Wegen der Identität (siehe dazu [2])

$$\arccos(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$$

ergibt sich

$$\phi_2 = \arcsin(r_2) = \arcsin(\sqrt{1-r_1^2}) = \arccos(r_1) = \phi_1.$$

Die beiden Winkel  $\phi_1$  und  $\phi_2$  sind also identisch.

Für  $x \geq 0$  gilt  $0 \leq \arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}$  und  $0 \leq \arccos(x) \leq \frac{\pi}{2}$ . Für den Winkel  $\phi$  gilt also  $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . ■

## Behauptung 2

Der Orbit  $\{pg : g \in S^1\}$  eines Punktes  $p \in S^3$  der stetigen Rechtsoperation  $pg$  bildet einen Grosskreis in  $S^3$ .

## Beweis

Der Orbit eines Punktes  $p \in S^3$  lässt sich durch

$$\left\{ (z_1 \exp(i\alpha), z_2 \exp(i\alpha)) : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, \quad \alpha \in [0, 2\pi) \right\}$$

darstellen, eine lineare Hyperebene des  $\mathbb{R}^4$  durch

■

## Literatur

- [1] Topology, Geometry and Gauge Fields; Naber, Gregory; Springer Science+Business Media; 2011
- [2] [https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung\\_Trigonometrie#Additionstheoreme](https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Trigonometrie#Additionstheoreme); Abschnitt: Umrechnung in andere trigonometrische Funktionen