

# Pendelsimulation

Jürgen Womser-Schütz, <https://github.com/JW-Schuetz>

## Mathematisches Pendel

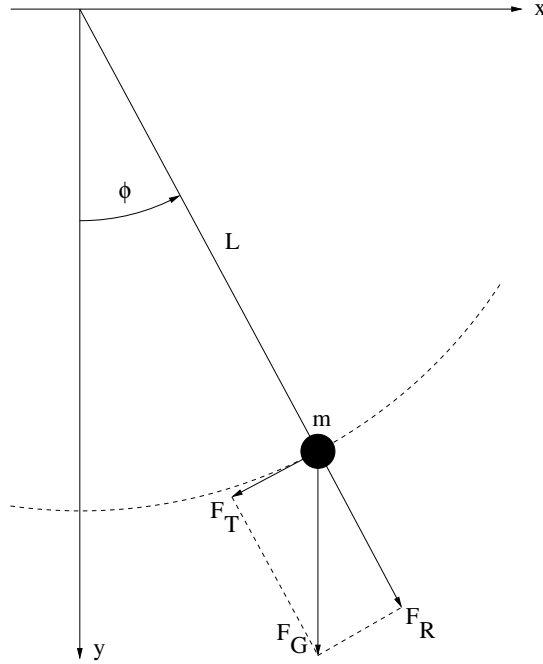


Abbildung 1: Mathematisches Pendel der Länge  $L$  und der Masse  $m$

Auf das Pendel der Länge  $L$  und mit der Masse  $m$  (siehe Abbildung 1) wirkt zunächst mit der Erdbeschleunigung  $g$  die Gewichtskraft  $F_G = mg$ . Man kann sie in einen radialen Anteil  $F_R$  und einen tangentialen Anteil  $F_T$  zerlegen. Für die Dynamik des Pendels ist nur die tangentiale Komponente relevant. Es gilt für sie

$$F_T = F_G \sin \phi.$$

Mit den Newtonschen Gesetzen muss weiterhin gelten

$$F_T = -mL \frac{d^2 \phi}{dt^2}.$$

Damit folgt für den Auslenkungswinkel  $\phi(t)$  als Funktion der Zeit  $t$  die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} + \omega^2 \sin \phi(t) = 0 \quad (1)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (2)$$

# Beschreibung als dynamisches System

## Definition

In Anlehnung an [1] wird ein dynamisches System (Fluss) auf  $X$  durch

- einen metrischen Raum  $X$  mit der Metrik  $d$
- eine additive Halbgruppe  $I$  über den reellen Zahlen, d.h. es gilt  $0 \in I$  und für  $r, s, t \in I$  besitzt die Addition  $+: I \times I \rightarrow I$  die beiden Eigenschaften

$$\text{Kommutativgesetz:} \quad r + s = s + r$$

$$\text{Assoziativgesetz:} \quad (r + s) + t = r + (s + t)$$

- und eine stetige Abbildung  $\pi : X \times I \rightarrow X$  mit den für alle  $x \in X$  geltenden Eigenschaften

$$\text{Identitätseigenschaft:} \quad \pi(x, 0) = x$$

$$\text{Halbgruppeneigenschaft:} \quad \pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s)$$

definiert.

## Motivation

Sei  $X = \mathbb{R}$  und  $I = \mathbb{R}$ . Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= x(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3}$$

besitzt die eindeutige Lösung

$$x(t) = x_0 \exp(t).$$

Beschreibung dieser Lösung durch die Abbildung  $\pi$  liefert

$$\pi(x_0, t) = x_0 \exp(t). \tag{4}$$

## Behauptung Halbgruppeneigenschaft

Es gilt die Halbgruppeneigenschaft

$$\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s).$$

## Beweis Halbgruppeneigenschaft

Wegen (4) gilt für  $x_0$  und  $t$

$$\pi(x_0, t) = x_0 \exp(t). \tag{5}$$

Dann gilt für  $x_0 \rightarrow \pi(x_0, t)$  und  $t \rightarrow s$

$$\pi(x_0, t) = \pi(x_0, t) \exp(s)$$

und somit durch Einsetzen von (5)

$$\begin{aligned} \pi(x_0, t) &= x_0 \exp(t) \exp(s) \\ &= x_0 \exp(t + s) \blacksquare \end{aligned}$$

## Literatur

- [1] Dynamical Systems - Stability, Controllability and Chaotic Behaviour; Werner Krabs, Stefan Pickl; Springer-Verlag, 2010