Topologische Räume und Mannigfaltigkeiten

21. Mai 2021

Euklidscher Räume

Innere, Äussere, Rand

Es sei ein Punkt $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ mit einer offenen ε-Umgebungen B_ε mit $\underline{x} \in B_\varepsilon$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Weiterhin sei eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ gegeben.
Dann muss für jeden Punkt $\underline{x}$ einer der folgenden drei Fälle zutreffen

1. Es gibt ein B_ε mit $B_\varepsilon \subset A$ oder äquivalent $\exists B_\varepsilon \mid B_\varepsilon \subset A$
2. Es gibt ein B_ε mit $B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n - A$ oder äquivalent $\exists B_\varepsilon \mid B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n - A$.
3. B_ε enthält Punkte aus A und Punkte aus $\mathbb{R}^n - A$ oder äquivalent $(\exists \underline{b} \in B_\varepsilon \mid \underline{b} \in A) \wedge (\exists \underline{b} \in B_\varepsilon \mid \underline{b} \in \mathbb{R}^n - A)$.

D.h. die Punkte $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ werden relativ zur Teilmenge A in zueinander disjunkte Punktmengen zerlegt - ein Punkt $\underline{x}$ liegt entweder

1. im Inneren von A: $\underline{x} \in \mathrm{int}(A)$
2. im Komplement von A: $\underline{x} \in \mathbb{R}^n - A$
3. auf dem Rand von A: $\underline{x} \in \partial A$.

Beispiel 1

Die Menge A besteht aus allen Punkten $A = \mathbb{R}^n$.

- $\forall \underline{x} \in A$ trifft Punkt 1 zu und somit gilt $\mathrm{int}(A) = A$ und $\partial A = \emptyset$.

Beispiel 2

Die Menge A besteht nur aus einem Punkt $A = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^n\}$.

- $\forall \underline{x} \neq \underline{a}$: trifft Punkt 2 zu also gilt $\mathrm{int}(A) = \emptyset$.
- $\underline{x} = \underline{a}$: trifft Punkt 3 zu und somit $\partial A = A$.

Dieses Ergebnis lässt sich auf die Menge abzählbar unendlich vieler voneinander isolierter Punkte verallgemeinern. Beweis durch vollständige Induktion fehlt noch!

Offenheit, Geschlossenheit, Abschluss

Definitionen

Für den Abschluss $\overline{A}$ einer Punktmenge A gilt $\overline{A} = A \cup \partial A$.

Vermutungen

Die Beweise fehlen noch!

- Das Innere jeder Punktmenge ist offen.
- Das Äussere jeder Punktmenge ist offen.
- Die Vereinigung abzählbar vieler offener Punktmengen ist offen.
- Der Rand einer offenen Menge ist leer.
- Der Rand einer Punktmenge ist entweder leer oder geschlossen.
- Das Komplement einer geschlossenen Punktmenge ist offen. ???

Beispiel 1

Die Punktmengen A der Beispiele 1 und 2 sind vermutlich offen. Beweis fehlt noch!

Beispiel 2

Ich betrachte im $\mathbb{R}^3$ die folgende Teilmenge $M = K \cup L$ mit

$$\begin{aligned} K &= \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\underline{x}\| = R \right\} \in \mathbb{R}^3 \\ L &= \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0, & 0, & z \end{pmatrix}, -R \leq z \leq R \right\} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Dies ist also die Oberfläche der Kugel mit Radius R vereinigt mit dem offenen Teilintervall $-R < z < R$ der z-Achse. Ich will M zu einem topologischen Raum ausbauen.

Die zugehörige Mannigfaltigkeit sollte dann die die Besonderheit haben, dass sie Karten der Dimension $n = 1$ und $n = 2$ besitzt. Fehlt noch!