Elektrische und magnetische Monopole

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz

Vektoren werden im folgenden durch einen Unterstrich kenntlich gemacht $\underline{v}$, ihr inneres Produkt sei durch $\bullet$, ihr äusseres Produkt durch $\times$ bezeichnet, weiterhin sollen Kugelkoordinaten (ρ, ϕ, Θ) benutzt werden, das Symbol $\subset$ soll eine echte Teilmenge bezeichenen.

Die wichtigsten der im Literaturverzeichnis zitierten Quellen sind im Github-Unterverzeichnis „Literature“ zu finden.

Motivation

In der Elektrodynamik sind die Skalar- und Vektorpotentiale ψ und $\underline{A}$ für die elektrische und magnetische Feldstärke ein nützliches mathematisches Werkzeug, das die Lösung der Maxwell-Gleichungen stark vereinfacht. Die Potentiale sind aber zur Lösung nicht unbedingt notwendig und haben keine eigenständigen physikalischen Auswirkungen.

Mit der Quantenmechanik ändert sich die Situation - hier kann auf das Vektorpotential $\underline{A}$ nicht mehr verzichtet werden und der Aharonov-Bohm-Effekt [6] zeigt, dass das Vektorpotential physikalisch messbar Auswirkungen besitzt.

Umso ärgerlicher ist es, dass es einfache physikalische Systeme gibt, für die kein Vektorpotential existiert.

Ein solches System ist der magnetische Monopol.

Magnetische Monopole sind z.Z. noch hypothetisch, es gibt aber starke Indizien für ihre Existenz. Insbesondere wäre die Quantisierung der elektrischen Elementarladung eine direkte Folge der Existenz des magnetischen Monopols [4].

Grundlegendes

Annahmen

Definitionsbereiche sind Teilmengen des $\mathbb{R}^3$, alle Felder sind glatt, Flächen und Kurven sind glatt und orientierbar (sie besitzen also Normalenvektoren).

Satz von Stokes

Sei S eine Fläche mit dem Rand $s = \partial S$. Dann gilt für ein Vektorfeld $\underline{A}$

$$\int_S (\text{rot } \underline{A}) \bullet \underline{n} dS \quad = \quad \oint_s \underline{A} \bullet \underline{t} ds \tag{1}$$

mit dem Normalenvektor $\underline{n}$ der Fläche S und dem Tangentialvektor $\underline{t}$ ihres Randes s.

Satz von Gauss

Sei V ein Volumen mit dem Rand $S = \partial V$. Dann gilt für ein Vektorfeld $\underline{A}$

$$\int_V (\text{div } \underline{A})\, dV \quad = \quad \oint_S \underline{A} \bullet \underline{n} dS \tag{2}$$

mit dem Normalenvektor $\underline{n}$ des Randes S.

Maxwellgleichungen

Es gelten die quellenfreien Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\underline{E}) &= 0 \\ \operatorname{div}(\underline{B}) &= 0 \\ \operatorname{rot}(\underline{E}) &= \underline{0} \\ \operatorname{rot}(\underline{B}) &= \underline{0}. \end{aligned} \tag{3}$$

Helmholtz-Zerlegung

Es werden für einen Definitionsbereich $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ die beiden Räume der „Harmonischen Felder“ definiert

$$\begin{aligned} H_m(\Omega) &= \{\underline{w} \in L_2(\Omega) \mid \operatorname{rot}(\underline{w}){=}\underline{0},\ \operatorname{div}(\underline{w}){=}\underline{0},\ \underline{w} \bullet \underline{n} = 0 \ \text{ auf } \ \partial\Omega\} \\ H_e(\Omega) &= \{\underline{w} \in L_2(\Omega) \mid \operatorname{rot}(\underline{w}){=}\underline{0},\ \operatorname{div}(\underline{w}){=}\underline{0},\ \underline{w} \times \underline{n} = 0 \ \text{ auf } \ \partial\Omega\} \end{aligned}$$

mit den auf Ω Lebeque-integrablen Funktionen $L_2(\Omega)$.

Identitäten [5]

$$\begin{aligned} \nabla \times (\psi \underline{A}) &= (\nabla\psi) \times \underline{A} + \psi (\nabla \times \underline{A}) \\ \nabla \bullet (\psi \underline{A}) &= (\nabla\psi) \bullet \underline{A} + \psi (\nabla \bullet \underline{A}) \end{aligned}$$

Definitionsbereich für die Monopole

Der Definitionsbereich der Felder und Potentiale beider Monopole ist der gesamte $\mathbb{R}^3$ mit Ausnahme des Ortes des Monopoles im Koordinatenursprung, also $\mathbb{R}^3 - \underline{0}$. Dieser spezielle Definitionsbereich wird im folgenden mit U bezeichnet.

Topologischen Eigenschaften

- Man nennt die erste Homotopiegruppe π_1 von Ω trivial (formal $\pi_1(\Omega) = 0$), falls eine beliebige 1-Sphäre S^1 (Kreislinie) in Ω kontinuierlich auf einen Punkt in U zusammengezogen werden kann.
- Man nennt die zweite Homotopiegruppe π_2 von Ω trivial (formal $\pi_2(\Omega) = 0$), falls eine beliebige 2-Sphäre S^2 (Kugeloberfläche) in Ω kontinuierlich auf einen Punkt zusammengezogen werden kann.
- Man nennt Ω homologisch trivial, falls jede geschlossene Kurve $c \subset \Omega$ der Rand ∂S einer Fläche $S \subset \Omega$ ist, falls also gilt
$$\forall c \exists S \mid c = \partial S.$$

Für U gelten die Eigenschaften[1]

- $\pi_1(U) = 0$
- $\pi_2(U) \neq 0$
- U ist homologisch trivial.

[1] Hinweis: für den Fall $\pi_2(U) \neq 0$ betrachte man eine 2-Sphäre, die den Ursprung umschliesst.

Existenz der Potentiale

Wegen den bekannten Identitäten

$$\begin{aligned} \text{rot grad}(\psi) &= \underline{0} \\ \text{div rot}\,(\underline{A}) &= 0 \end{aligned}$$

gelten die folgenden beiden Aussagen

$$\underline{V} = \text{grad}(\psi) \quad \rightarrow \quad \text{rot}\,(\underline{V}) = \underline{0} \tag{4}$$
$$\underline{W} = \text{rot}(\underline{A}) \quad \rightarrow \quad \text{div}\,(\underline{W}) = 0. \tag{5}$$

Aber gilt auch die Umkehrung?

Existiert also für jedes rotationsfreie Feld $\underline{V}$ eine skalare Funktion ψ mit $\underline{V} = \text{grad}(\psi)$. Und existiert für jedes divergenzfreie Feld $\underline{W}$ ein Feld $\underline{A}$ mit $\underline{W} = \text{rot}(\underline{A})$?

Die Antworten auf diese Fragen hängen von der Topologie des betrachteten Definitionsbereichs Ω ab. Es werden im folgenden 2 Fälle unterschieden.

Fall $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

- Es sei ein rotationsfreies Feld $\underline{V}$ gegeben. Wählt man eine Fläche S mit Rand s, so folgt mit dem Satz von Stokes (1) $\oint_s \underline{V} \bullet \underline{t} ds = 0$. Das Feld $\underline{V}$ ist also konservativ und damit existiert eine Funktion ψ mit $\underline{V} = \text{grad}(\psi)$. $\blacksquare$
- Es sei ein Feld $\underline{W}$ mit $\text{div}\,(\underline{W}) = 0$ gegeben. Wählt man ein Volumen V mit der (geschlossenen) Oberfläche S, so folgt mit dem Satz von Gauss (2) $\oint_S \underline{W} \bullet \underline{n} dS = 0$. Noch zu tun: der Schluss fehlt noch

Fall $\Omega = \mathbb{R}^3$

Noch zu tun

Theorem 1

Sei $\underline{H}$ in Ω rotationsfrei und jede geschlossene Kurve $C \subset \Omega$ sei der Rand ∂S einer Fläche $S \subset \Omega$. Dann existiert eine Funktion ψ mit $\underline{H} = \text{grad}\,(\psi)$ in Ω.

Beweis

Da der Fluss von $\text{rot}\,(\underline{H})$ auf der Oberfläche S der zu C gehörenden Kurve verschwindet, folgt aus dem Satz von Stokes (1), dass das Linienintegral jeder geschlossenen Kurve C über $\underline{H}$ verschwindet. $\underline{H}$ ist also ein konservatives Vektorfeld und es gilt $\underline{H} = \text{grad}\,(\psi)$. $\blacksquare$

Theorem 2

Sei $\underline{B}$ in Ω divergenzfrei und jede geschlossene Oberfläche $S \subset \Omega$ sei der Rand ∂S einer Teilmenge $D \subset \Omega$. Dann existiert ein Vektorfeld $\underline{A}$ mit $\underline{A} = \text{rot}\,(\underline{B})$ in Ω.

Beweis

Da das Integral von $\text{div}\,(\underline{B})$ auf jeder Teilmenge D verschwindet, folgt aus dem Satz von Stokes (1), dass der Fluss von B auf jeder geschlossenen Fläche in Ω verschwindet. Dies garantiert die Existenz eines Vektorpotentials $\underline{A}$. $\blacksquare$

Theorem 3

Nehmen wir an, dass $\underline{H}$ in Ω rotationsfrei ist und dass $\underline{H} \times \underline{n} = 0$ auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω gilt. Dann existiert eine Funktion ψ mit $\underline{H} = \text{grad}\,(\psi)$ in Ω.

Beweis

Setzt man $\underline{H}$ ausserhalb von Ω durch $\underline{0}$ fort, dann bleibt $\underline{H}$ rotationsfrei. $\underline{H}$ ist also der Gradient eines skalaren Potentials[2]. $\blacksquare$

Theorem 4

Nehmen wir an, dass $\underline{B}$ in Ω divergenzfrei ist und dass $\underline{B} \bullet \underline{n} = 0$ auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω gilt. Dann existiert ein Vektorfeld $\underline{A}$ mit $\underline{B} = \mathrm{rot}\,(\underline{A})$ in Ω.

Beweis

Setzt man $\underline{B}$ ausserhalb von Ω durch $\underline{0}$ fort, dann bleibt $\underline{B}$ divergenzfrei. Das Feld $\underline{B}$ ist also die Rotation eines Vektorpotentials[3]. $\blacksquare$

Noch zu tun:

- Definition der „Harmonischen Felder“ der Helmhotz-Zerlegung verstehen
- Theorem 2 ist die Stelle, in der die Topologie ins Spiel kommt. Diese Voraussetzungen von sind für den magnetischen Monopol nicht erfüllt!
- Alles obige zu einem folgerichtigen Ganzen integrieren und die Lücken füllen

Felder und Potentiale des elektrischen Monopols

Sein elektrisches und magnetisches Feld ist auf U durch

$$\begin{aligned} \underline{E}(\rho, \phi, \Theta) &= \frac{q}{\rho^2}\underline{e}_\rho \\ \underline{B}(\rho, \phi, \Theta) &= \underline{0} \end{aligned} \tag{6}$$

gegeben. Dabei ist mit q die elektrische Elementarladung bezeichnet.

Noch zu tun: skalares Potential und Vektorpotential herleiten

Felder und Potentiale des magnetischen Monopols

Ein magnetischer Monopol wurde bisher noch nicht beobachtet und ist deshalb hypothetisch.

Sein magnetisches und elektrisches Feld in Kugelkoordinaten ist auf U durch

$$\begin{aligned} \underline{E}(\rho, \phi, \Theta) &= \underline{0} \\ \underline{B}(\rho, \phi, \Theta) &= \frac{g}{\rho^2}\underline{e}_\rho \end{aligned} \tag{7}$$

gegeben. Dabei ist mit g die magnetische Elementarladung bezeichnet.

Noch zu tun:

- skalares Potential herleiten
- Dirac-Strings thematisieren
- Quantelung der Elementarladung als direkte Folge der magnetischen Monopole herleiten

[2] Hier wird das Argument benutzt, dass im $\mathbb{R}^3$ jedes rotationsfreie Feld als Gradient eines skalaren Potentials bestimmt werden kann. Wo ist das denn bewiesen?

[3] Hier wird das Argument benutzt, dass im $\mathbb{R}^3$ jedes divergenzfreie Feld als Rotation eines Vektorpotentials bestimmt werden kann. Wo ist das bewiesen?

Beweis zu Punkt (??) für den Spezialfall „Magnetischer Monopol“

Betrachtet wird die Oberfläche S einer Kugel des Radius R um den Ursprung. Weiterhin seien S^+ und S^- ihre obere und untere Hemisphäre und ∂S ihr Äquator. ∂S sei entgegen des Uhrzeigersinns orientiert und die beiden Hemisphären S^+ und S^- besitzen einen nach aussen gerichteten Normalenvektor $\underline{n}$.

Annahme: Wir nehmen an, dass ein Vektorpotential $\underline{A}$ mit kontinuierlichen 1. partiellen Ableitungen in einer Umgebung, die S enthält, existiert.

Dann erhält man für den Fluss der Rotation des Vektorpotentials $\underline{A}$ durch S zusammen mit (7)

$$\begin{aligned}
\iint_S (\text{rot } \underline{A}) \bullet d\underline{a} &= \iint_S \underline{B} \bullet d\underline{a} \\
&= \iint_S \left(\frac{g}{\rho^2}\underline{e}_\rho\right) \bullet d\underline{a} \\
&= \frac{g}{R^2}\iint_S \underline{e}_\rho \bullet d\underline{a} \\
&= \frac{g}{R^2}\left(4\pi R^2\right) \\
&= 4\pi g.
\end{aligned} \tag{8}$$

Andererseits folgt aus dem Satz von Stokes (1) für diesen Fluss

$$\begin{aligned}
\iint_S (\text{rot } \underline{A}) \bullet d\underline{a} &= \iint_{S^+} (\text{rot } \underline{A}) \bullet d\underline{a} + \iint_{S^-} (\text{rot } \underline{A}) \bullet d\underline{a} \\
&= \oint_{\partial S} \underline{A} \bullet d\underline{l} + \oint_{-\partial S} \underline{A} \bullet d\underline{l} \\
&= \oint_{\partial S} \underline{A} \bullet d\underline{l} - \oint_{\partial S} \underline{A} \bullet d\underline{l} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Zwischen (8) und (9) besteht ein Widerspruch. Die Annahme ist also falsch und es existiert kein solches Vektorpotential $\underline{A}$. ■

Noch zu tun: 1, 2 und 3 in voller Allgemeinheit beweisen

Alternierende Differentialformen auf n-Mannigfaltigkeiten

Im folgenden wird mit n die Dimension der Mannigfaltigkeit M bezeichnet.

Griechische Buchstaben bezeichnen Differentialformen und d deren äussere Ableitung.

1. Es gilt $d^2 = 0$.
2. Eine Form α nennt man geschlossen, falls $d\alpha = 0$ gilt.
3. Eine Form β nennt man exakt, falls $\beta = d\gamma$ gilt , wobei γ wieder eine Form ist.
4. Eine exakte Form ist im Bild und eine geschlossene Form im Kern der Abbildung d.
5. Wegen Punkt (1) ist eine exakte Form stets geschlossen.
6. Die Frage, ob jede geschlossene Form exakt ist, hängt von der Topologie des Definitionsbereiches ab.
7. Auf einem einfach zusammenhängenden Definitionsbereich ist jede geschlossene p-Form mit $1 \leqq p \leqq n$ wegen des Poincaré-Lemmas exakt.
8. Es gibt Ähnlichkeiten der äusseren Ableitung d zum Randoperator ∂ (z.B. gilt ebenso $\partial^2 = 0$). Wie hängt das tiefer zusammen? Siehe Wikipedia-Artikel „Homologietheorie“?

Satz von Stokes

Sei M eine orientierte m-dimensionale kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit abschnittsweise glattem Rand ∂M mit induzierter Orientierung. Sei ferner ω eine in einer hinreichend großen offenen Umgebung von Ω definierte alternierende Differentialform vom Grad $m-1$, die als stetig differenzierbar vorausgesetzt wird.

Dann gilt

$$\int_M d\omega \quad = \quad \int_{\partial M} \omega. \tag{10}$$

Noch zu tun:

- Warum gilt Punkt (1)?
- Poincaré-Lemma verstehen
- Zusammenhänge verstehen
- Alles obige in der Sprache der Differentialformen formulieren

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[1] Topology, Geometry and Gauge fields; Naber, Gregory; Springer Science+Business Media; 2011

[2] Scalar and vector potentials, Helmholtz decomposition and de Rham cohomology; Valli, Alberto; University of Trento, Italy

[3] Quantised singularities in the electromagnetic field; Dirac, P.A.M.; Proc. Roy. Soc., A133(1931), 60–72

[4] The theory of magnetic poles; Dirac, P.A.M.; Phys. Rev., 74(1948), 817–830

[5] Classical Elektrodynamics, Jackson, John David; John Wiley & Sons, Inc.; 1999

[6] Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory; Aharonov, Y., Bohm, D.