Anmerkungen zu “Foundations of Quantum Mechanics, Naber” [1]

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz

Mathematisches Pendel

Für den Auslenkungswinkel $\phi(t)$ als Funktion der Zeit t gilt

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \omega^2 \sin\phi(t) = 0 \tag{1}$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{2}$$

Dabei ist l die Pendellänge und g die Erdbeschleunigung.

Beispiel 1.0.3.1

Zeige, dass sich die Pendelgleichung (1) wie folgt umformulieren lässt

$$\frac{d}{d\phi}\left[\frac{1}{2}\left[\frac{d\phi(t)}{dt}\right]^2\right] + \omega^2 \sin\phi(t) = 0. \tag{3}$$

Zeige durch Integration über ϕ und durch Multiplikation mit ml^2 die Gültigkeit von

$$\left(\frac{1}{2}ml^2\right)\left[\frac{d\phi(t)}{dt}\right]^2 - mgl\cos\phi(t) = E,$$

wobei E eine Konstante bezeichnet.

Lösung 1.0.3.1

Durch Anwendung der Kettenregel

$$\frac{d}{d\phi}\left[f(g(\phi))\right] = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(\phi)}{d\phi} \tag{4}$$

folgt für die 2. Ableitung von $\phi(t)$ nach der Zeit

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} &= \frac{d\dot{\phi}}{dt}\\ &= \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}\frac{d\phi}{dt}\\ &= \dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi}.\end{aligned}$$

Ebenso durch Anwendung der Kettenregel folgt

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) &= \frac{d}{d\phi}\left[f\left(g\left(\phi\right)\right)\right] \\
&= \dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi}.
\end{aligned}
$$

Es gilt also

$$
\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\left(t\right)\right) = \frac{d^2\phi\left(t\right)}{dt^2}
$$

und damit gilt die modifizierte Pendelgleichung (3).
Integration von

$$
\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) + \omega^2\sin\phi\left(t\right) = 0
$$

über ϕ liefert

$$
\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \omega^2\cos\phi\left(t\right) = C\left(t\right)
$$

und nach Multiplikation mit ml folgt mit der Definition von ω nach Gleichung (2)

$$
E\left(t\right) = \frac{ml^2}{2}\dot{\phi}^2 - gml\cos\phi\left(t\right).
$$

Differentation nach der Zeit t ergibt

$$
\begin{aligned}
\dot{E}\left(t\right) &= \frac{ml^2}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\phi}^2\right) - gml\frac{d}{dt}\cos\phi\left(t\right) \\
&= ml^2\dot{\phi}\ddot{\phi} + gml\dot{\phi}\sin\phi\left(t\right) \\
&= ml\left[l\ddot{\phi} + g\sin\phi\left(t\right)\right]\dot{\phi}.
\end{aligned}
$$

Einsetzen der Pendelgleichung liefert

$$
\begin{aligned}
\dot{E}\left(t\right) &= ml\left[-l\omega^2\sin\phi\left(t\right) + g\sin\phi\left(t\right)\right]\dot{\phi} \\
&= ml\left[g - l\omega^2\right]\dot{\phi}\sin\phi\left(t\right) \\
&= ml\left[g - l\frac{g}{l}\right]\dot{\phi}\sin\phi\left(t\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

E ist also eine zeitliche Konstante.

Beispiel 1.0.3.2

Zeige, dass $E\left(t\right)$ die Summe aus kinetischer und potentieller Energie des Pendels ist.

Lösung 1.0.3.2

Klar!

Beispiel 1.0.3.3

Es werden neue Zustandsraum-Variable (x, y) eingeführt: $x = \phi$ und $y = \dot{\phi}$. Gebe das zugehörige Differentialgleichungssystem 1. Ordnung an und skizziere die Trajektorien der Pendelbewegung.

Lösung 1.0.3.3

Aus der Pendelgleichung folgt

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 \sin x.\end{aligned}$$

- Im Koordinatenursprung gilt $\dot{x} = \dot{y} = 0$ - das Pendel ruht
- Für die x-Achse gilt $y = \dot{x} = 0$ - die Trajektorien stehen auf ihr senkrecht
- Für die y-Achse gilt $x = \dot{y} = 0$ - die Trajektorien stehen auf ihr senkrecht
- Für $y > 0$ gilt $\dot{x} > 0$ und für $x > 0$ gilt $\dot{y} > 0$ - die Trajektorien verlaufen im Uhrzeigersinn
- Für $y = -\omega^2 \sin x$ gilt $x \dot{=} \dot{y}\alpha$.

State Space and Lagrangians

Es gilt mit der Teilchenmasse m, der Teilchentrajektorie $\underline{\alpha}(t) = \left(q^1(t), \cdots, q^n(t)\right)$ und der Kraft $\underline{F}\left(\underline{q}\right)$ das Newtonsche Gesetz

$$m \frac{d^2 \underline{\alpha}(t)}{dt^2} = \underline{F}\left(\underline{q}\right).$$

Es wird vorausgesetzt, dass die Kraft $\underline{F}$ konservativ ist, dass sie sich also als Gradient eines reellen Potentiales (der potentiellen Energie $V[\underline{\alpha}(t)]$) darstellen lässt

$$\underline{F}\left(\underline{q}\right) = -\nabla V[\underline{\alpha}(t)].$$

Dabi ist V eine reellwertige Funktion der n Ortskoordinaten $\underline{q}$.
Entlang der Trajektorie $\underline{\alpha}(t)$ ist also das Newtonsche Gesetz

$$m \frac{d^2 \underline{\alpha}(t)}{dt^2} = -\nabla V[\underline{\alpha}(t)] \tag{5}$$

erfüllt.
Im folgenden wird eine alternative Formulierung dieser Tatsache gesucht.
Definiert man für die kinetische Energie

$$\begin{aligned}E_k[\underline{\alpha}(t)] &= \frac{m}{2}\left\|\frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt}\right\|^2 \\ &= \frac{m}{2}\frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt}\frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt},\end{aligned}$$

so folgt für die Gesamtenergie

$$E[\underline{\alpha}(t)] = E_k[\underline{\alpha}(t)] + V[\underline{\alpha}(t)] \tag{6}$$

und deren zeitliche Ableitung [1]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E[\underline{\alpha}(t)] &= \frac{m}{2}\left[\frac{d^2\underline{\alpha}(t)}{dt^2}\frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt} + \frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt}\frac{d^2\underline{\alpha}(t)}{dt^2}\right] + \frac{d}{dt}V[\underline{\alpha}(t)] \\ &= m\frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt}\frac{d^2\underline{\alpha}(t)}{dt^2} + \nabla V[\underline{\alpha}(t)]\frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt} \\ &= \frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt}\left\{m\frac{d^2\underline{\alpha}(t)}{dt^2} + \nabla V[\underline{\alpha}(t)]\right\} \\ &= 0.\end{aligned}$$

[1] Die runde Klammer verschwindet wegen der Gültigkeit des Newtonschen Gesetztes (5).

Nun soll die Umwandlung zwischen den beiden Energieformen entlang der Trajektorie $\underline{\alpha}\left(t\right)$ untersucht werden, also die Differenz von kinetischer und potentieller Energie

$$L\left[\underline{\alpha}\left(t\right)\right] = E_k\left[\underline{\alpha}\left(t\right)\right] - V\left[\underline{\alpha}\left(t\right)\right]. \tag{7}$$

Es soll gezeigt werden, dass das Funktional

$$S\left(\underline{\alpha}\right) = \int_{t=t_0}^{t_1} L\left[\underline{\alpha}\left(t\right)\right] dt$$

für die Trajektorie $\underline{\alpha}$ stationär ist, dabei sind t_0 und t_1 die Anfangs- und Endpunkte der Bewegung.

Literatur

[1] Foundations of Quantum Mechanics - An Introduction to the Physical Background and Mathematical Structure; Naber, Gregory; 03.12.2016