

Hopfbündel

Jürgen Womser-Schütz, <https://github.com/JW-Schuetz>

Die 3-Sphäre S^3

Mit $\underline{p} \in \mathbb{R}^4$ ist die 3-Sphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ definiert durch $\|\underline{p}\| = 1$. Identifiziert man \mathbb{R}^4 mit \mathbb{C}^2 durch die Korrespondenz

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \leftrightarrow (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4) \quad (1)$$

dann erhält man mit $z_1 = x_1 + ix_2$ und $z_2 = x_3 + ix_4$ für die 3-Sphäre (siehe dazu im Anhang die Behauptung 1)

$$S^3 = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}.$$

Diese Darstellung von S^3 ist von 4 Parametern (x_1, \dots, x_4) abhängig, es sind aber nur 3 nötig. Also macht man z.B. mit $r_1, r_2 \geq 0$ und $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ und $r_1^2 + r_2^2 = 1$ den Ansatz $z_1 = r_1 \exp(i\xi_1)$ und $z_2 = r_2 \exp(i\xi_2)$ (siehe dazu im Anhang die Behauptung 2) und erhält die Parametrierung für S^3 mit 3 Parametern (ϕ, ξ_1, ξ_2)

$$S^3 = \left\{ (\cos(\phi) \exp(i\xi_1), \sin(\phi) \exp(i\xi_2)) : \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (2)$$

Um sich eine Vorstellung dieser Parametrierung von S^3 machen zu können, werden im folgenden drei Fälle für den Winkel ϕ (und damit von $|z_1| = \cos(\phi)$ und $|z_2| = \sin(\phi)$) behandelt.

Fall 1: $\cos(\phi) = \sin(\phi)$, d.h. $|z_1| = |z_2|$

Es folgt $\phi = \frac{\pi}{4}$ und $|z_1| = |z_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Die 3-Sphäre S^3 in diesem Fall ist der 2-dimensionale Torus (2D-Torus)

$$T = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \exp(i\xi_1), \frac{\sqrt{2}}{2} \exp(i\xi_2) \right) : \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R} \right\}. \quad (3)$$

Fall 2: $\cos(\phi) \leq \sin(\phi)$, d.h. $|z_1| \leq |z_2|$

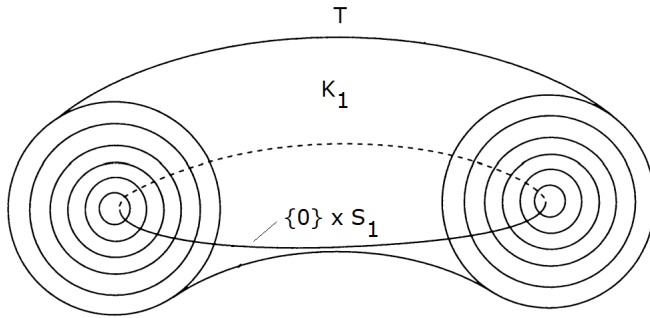


Abbildung 1: 2D-Torus T und horizontale Kreislinie $\{0\} \times S^1$, modifiziert nach [1]

Wegen $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ folgt $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Für das untere Limit $\phi = \frac{\pi}{4}$ ergibt sich der 2D-Torus T nach Gleichung (3). Für das obere Limit $\phi = \frac{\pi}{2}$ folgt die horizontale Kreislinie $K_H = \{0\} \times S^1$ oder

$$K_H = \left\{ \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2} \exp(i\xi_2) \right) : \xi_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für jeden Wert ϕ aus dem Intervall $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ ergibt sich jeweils ein 2D-Torus T_ϕ . Durch die Vereinigung all dieser 2-dimensionalen Tori T_ϕ und der Kreislinie K_H entsteht der 3D-Torus

$$K_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| \leq |z_2|\}, \quad (4)$$

der T als Oberfläche hat (siehe Abbildung 1).

Fall 3: $\cos(\phi) \geq \sin(\phi)$, d.h. $|z_1| \geq |z_2|$

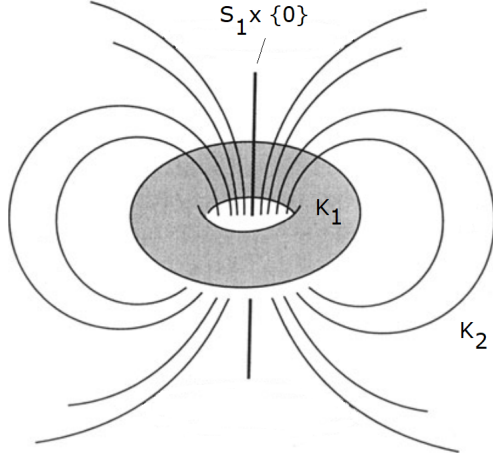


Abbildung 2: 3D-Torus K_1 und vertikale Kreislinie $S^1 \times \{0\}$, modifiziert nach [1]

Wegen $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ folgt $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$. Für das obere Limit $\phi = \frac{\pi}{4}$ ergibt sich wieder der 2D-Torus T nach Gleichung (3). Für das untere Limit $\phi = 0$ ergibt die vertikale Kreislinie $K_V = S^1 \times \{0\}$ oder

$$K_V = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \exp(i\xi_1), 0 \right) : \xi_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

K_V erscheint in Abbildung 2 als Gerade, ist aber eine Kreislinie durch einen Punkt im Unendlichen.

Für jeden Wert ϕ aus dem Intervall $(0, \frac{\pi}{4}]$ ergibt sich jeweils ein 2D-Torus T_ϕ . Durch die Vereinigung all dieser 2-dimensionalen Tori T_ϕ und der Kreislinie K_V entsteht der 3D-Torus (siehe Abbildung 2)

$$K_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| \geq |z_2|\}.$$

Die Späre S_3 stellt sich also als Vereinigung zweier miteinander „verschränkter“ 3D-Tori K_1 und K_2 dar, die den \mathbb{R}^3 vollständig ausfüllt.

Hauptfaserbündel (Prinzipalbündel)

Für $\underline{p} = (z_1, z_2) \in S^3$ und $g \in S^1$ gilt $\underline{p}g = (z_1, z_2)g = (z_1g, z_2g) \in S^3$, die Abbildung $(\underline{p}, g) \rightarrow \underline{p}g$ ist aus C^∞ . Falls $g_1, g_2 \in S^1$ gilt für alle $\underline{p} \in S^3$ $(\underline{p}g_1)g_2 = \underline{p}(g_1g_2)$. Die Identität in S^1 ist $e = \exp(i0) = 1$ und es gilt $\underline{p}e = \underline{p}$ für alle $\underline{p} \in S^3$.

Diese Eigenschaften machen die Abbildung $(\underline{p}, g) \rightarrow \underline{p}g$ zu einer stetigen Rechtsoperation der Liegruppe S^1 auf der Mannigfaltigkeit S^3 .

Für einen fixen Punkt $\underline{p} \in S^3$ wird der Orbit von \underline{p} als die Teilmenge

$$\{\underline{p}g : g \in S^1\} \subseteq S^3 \quad (5)$$

von S^3 definiert, die durch das Durchlaufen aller $g \in S^1$ entsteht. Der Orbit von \underline{p} ist ein Kreis in S^3 durch den Punkt \underline{p} . Man kann zeigen, dass dieser Kreis sogar ein Grosskreis (also die Schnittmenge von $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ mit einer linearen Hyperebene des \mathbb{R}^4) auf S^3 ist (siehe dazu im Anhang die Behauptung 3).

Anhang

Behauptung 1

Die Aussagen

$$\|(x_1, x_2, x_3, x_4)\|^2 = 1 \quad (6)$$

und

$$\|(x_1 + ix_2, x_3 + ix_4)\|^2 = 1 \quad (7)$$

sind äquivalent.

Beweis

Wegen $x_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, N$ und $\|(x_1, \dots, x_N)\|^2 = \sum_{n=1}^N |x_n|^2$ (siehe dazu [2]) gelten die in beiden Richtungen gültigen Umformungen

$$\begin{aligned} \|(x_1 + ix_2, x_3 + ix_4)\|^2 &= |x_1 + ix_2|^2 + |x_3 + ix_4|^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ &= |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 \\ &= \|(x_1, x_2, x_3, x_4)\|^2. \end{aligned}$$

■

Behauptung 2

Es existiert für jedes Tupel (r_1, r_2) mit $r_1, r_2 \geq 0$ und $r_1^2 + r_2^2 = 1$ ein eindeutig bestimmter Winkel $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit $r_1 = \cos(\phi)$ und $r_2 = \sin(\phi)$.

Beweis

Zu r_1 kann man den Winkel $\phi_1 = \arccos(r_1)$ hinzubestimmen und zu r_2 den Winkel $\phi_2 = \arcsin(r_2)$.

Aus $r_1^2 + r_2^2 = 1$ folgt $r_2 = \pm\sqrt{1-r_1^2}$. Wegen $r_2 \geq 0$ kommt nur das positive Vorzeichen in Frage, also gilt $r_2 = \sqrt{1-r_1^2}$.

Wegen der Identität (siehe dazu [3])

$$\arccos(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$$

ergibt sich

$$\phi_2 = \arcsin(r_2) = \arcsin(\sqrt{1-r_1^2}) = \arccos(r_1) = \phi_1.$$

Die beiden Winkel ϕ_1 und ϕ_2 sind also identisch.

Für $x \geq 0$ gilt $0 \leq \arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq \arccos(x) \leq \frac{\pi}{2}$. Für den Winkel ϕ gilt also $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

■

Behauptung 3

Der Orbit $\{\underline{p}g : g \in S^1\}$ eines Punktes $\underline{p} \in S^3$ der stetigen Rechtsoperation $\underline{p}g$ bildet einen Grosskreis in S^3 .

Beweis

Der Orbit $O_{\underline{p}}$ eines Punktes $\underline{p} \in S^3$ lässt sich wegen 5 durch

$$O_{\underline{p}}(\alpha) = \left\{ (\cos(\phi) \exp(i\xi_1), \sin(\phi) \exp(i\xi_2)) \exp(i\alpha) : \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

darstellen, dabei gilt $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Eine lineare Hyperebene H des \mathbb{C}^2 ist mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $ab \neq 0$ durch

$$H = \{(z_1, z_2) \mid az_1 + bz_2 = 0\}$$

gegeben.

Es stellt sich die Frage nach der Existenz einer Hyperebene H , die alle Punkte der Trajektorie $O_p(\alpha)$ enthält. Notwendig ist dafür

$$az_1 + bz_2 = 0$$

mit

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos(\phi) \exp(i\xi_1) \\ z_2 &= \sin(\phi) \exp(i\xi_2). \end{aligned}$$

Es folgen mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} a &= a^R + ia^I \\ b &= b^R + ib^I \\ z_1^R &= \cos(\phi) \cos(\xi_1) \\ z_1^I &= \cos(\phi) \sin(\xi_1) \\ z_2^R &= \sin(\phi) \cos(\xi_2) \\ z_2^I &= \sin(\phi) \sin(\xi_2) \end{aligned}$$

die in Real- und Imaginärteil getrennten Beziehungen

$$\begin{aligned} a^R z_1^R - a^I z_1^I + b^R z_2^R - b^I z_2^I &= 0 \\ a^R z_1^I + a^I z_1^R + b^R z_2^I + b^I z_2^R &= 0. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} a^R \cos(\phi) \cos(\xi_1) - a^I \cos(\phi) \sin(\xi_1) + b^R \sin(\phi) \cos(\xi_2) - b^I \sin(\phi) \sin(\xi_2) &= 0 \\ a^R \cos(\phi) \sin(\xi_1) + a^I \cos(\phi) \cos(\xi_1) + b^R \sin(\phi) \sin(\xi_2) + b^I \sin(\phi) \cos(\xi_2) &= 0. \end{aligned}$$

Der Rest fehlt noch.

Literatur

- [1] Topology, Geometry and Gauge Fields; Naber, Gregory; Springer Science+Business Media; 2011
- [2] https://de.wikipedia.org/wiki/Euklidische_Norm; Abschnitt: Komplexe Vektoren endlicher Dimension
- [3] https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Trigonometrie#Additionstheoreme; Abschnitt: Umrechnung in andere trigonometrische Funktionen
- [4] <https://de.wikipedia.org/wiki/Koordinatenform>
- [5] https://en.wikipedia.org/wiki/Hopf_fibration