Trajektorien unitärer 2×2-Matrizen

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz

Problemstellung

Gesucht ist eine unitäre, einparametrige und glatte Trajektorie zwischen zwei vorgegebenen unitären Matrizen G_1 und G_2.

Lösungsidee

- Die erste Lösungsidee einer "Geraden" zwischen den beiden Matrizen

$$G(\alpha) = (1 - \alpha) G_1 + \alpha G_2$$

  mit $\alpha \in [0, 1]$ trägt nicht, da die unitären Matrizen keinen Vektorraum bilden.

- Aber: die unitären Matrizen besitzen mit der üblichen Matrizenmultiplikation die Struktur einer multiplikativen Gruppe - und diese Gruppe G ist sogar eine Lie-Gruppe!

- Die zweite Lösungsidee ist es daher, eine Trajektorie in der Lie-Algebra LG der Lie-Gruppe der unitären Matrizen G zu konstruieren und diese dann auf G abzubilden. Diese Idee trägt, da Lie-Algebren eine Vektorraumstruktur besitzen.

- Ich definiere also eine Gerade in der Lie-Algebra durch

$$x(\alpha) = (1 - \alpha) x_1 + \alpha x_2$$

  mit $\alpha \in [0, 1]$, dabei sind x_i die zu den vorgegebenen Matrizen G_i gehörenden Elemente der Lie-Algebra LG.

- Die Gruppenelemente der gesuchten Trajektorie sind dann durch $G(\alpha) = \exp(x(\alpha))$ gegeben. Diese Abbildung ist surjektiv [1].[1]

- Es existieren natürlich unendlich viele verschiedene Trajektorien durch die beiden Punkte G_1 und G_2. Hier wurde der einfachste Fall ausgewählt: die "Lie-Algebra-Gerade". Jede andere glatte Funktion des Parameters α die die Start- und Endbedingung erfüllt, liefert eine gleichwertige Lösung des Problemes.

Hintergrundinformationen

- Die Gruppe G der unitären 2×2-Matrizen besteht aus $\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$ mit $\mid a \mid^2 + \mid b \mid^2 = 1$.

- Die Lie-Algebra LG der Gruppe G besteht aus den Matrizen x mit $x + x^* = 0$ und $\mathrm{spur}(x) = 0$ oder explizit $x = \begin{pmatrix} ia & b + ic \\ -b + ic & -ia \end{pmatrix}$.

- Es gilt mit $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

[1] Diese Matrixexponierte kann man (analog zu den orthogonalen Matrizen im reellen Fall) durch Nutzung der speziellen Eigenschaften der Lie-Algebra LG (siehe unten) stark vereinfachen. Dann wird der Zusammenhang zu der Bedeutung der Drehmatrizen im reellen Fall vermutlich klar werden.

$$\exp(x) = \begin{pmatrix} \cosh(ir) + \frac{a}{r}\sinh(ir) & \frac{1}{r}(c - ib)\sinh(ir) \\ \frac{1}{r}(c + ib)\sinh(ir) & \cosh(ir) - \frac{a}{r}\sinh(ir) \end{pmatrix}$$

- Reeller Fall:
  - G_1 und G_2 seinen orthogonale Matrizen $\{g \mid g^T g = E\}$
  - die zugehörige Lie-Algebra ist $\{x \mid x^T = -x\}$ oder explizit $\left\{x \mid \left\{\begin{matrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{matrix}\right\}, a \in \mathbb{R}\right\}$
  - es gilt: $\exp(x) = \begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$

Literatur

[1] Teubner Taschenbuch der Mathematik, Teil 2, S. 647