Hopfbündel

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz

3-Sphäre S^3

Die 3-Sphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ ist mit $\underline{p} = (p_1, p_2, p_{3,}, p_4) \in \mathbb{R}^4$ definiert durch $\left\|\underline{p}\right\| = 1$. Identifiziert man durch die Korrespondenz

$$\left(x^1, y^1, x^2, y^2\right) \leftrightarrow \left(x^1 + iy^1, x^2 + iy^2\right)$$

$\mathbb{R}^4$ mit $\mathbb{C}^2$, dann erhält man für die 3-Sphäre

$$S^3 = \left\{\left(z^1, z^2\right) \in \mathbb{C}^2 : \quad \left|z^1\right|^2 + \left|z^2\right|^2 = 1\right\}. \tag{1}$$

Diese Darstellung von S^3 ist von 4 Parametern abhängig, es sind aber nur 3 nötig. Also macht man z.B. mit $r_1, r_2 \geq 0$ und $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ den Ansatz $z^1 = r_1 \exp(i\xi_1)$ und $z^2 = r_2 \exp(i\xi_2)$. Es muss wegen (1) $r_1^2 + r_2^2 = 1$ gelten.
Man erhält so die Parametrierung für S^3 (siehe dazu im Anhang die Behauptung 1)

$$S^3 = \left\{\left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\exp(i\xi_1), \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\exp(i\xi_2)\right) : \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{\phi}{2} \leq \frac{\pi}{2}, \right\}. \tag{2}$$

Es werden im folgenden drei Fälle für die Beträge von z^1 und z^2 behandelt.

Fall 1: $\left|z^1\right|^2 = \left|z^2\right|^2$

Aus (2) folgt $\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$ und damit $\frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{4}$ und $\left|z^1\right| = \left|z^2\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Die 3-Sphäre S^3 in diesem Fall ist der 2-dimensionale Torus

$$T = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\exp(i\xi_1), \frac{\sqrt{2}}{2}\exp(i\xi_2)\right) : \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}\right\}. \tag{3}$$

Fall 2: $|z^1|^2 \leq |z^2|^2$

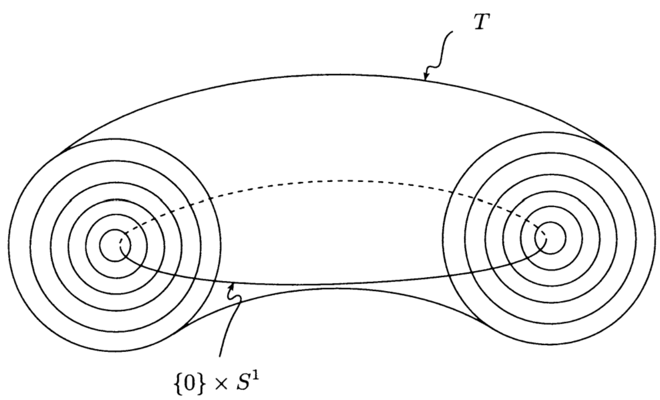

Abbildung 1: Kreislinie K und Torus T

Aus (2) folgt $\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \leq \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$ und wegen $\frac{\phi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ergibt sich $\frac{\pi}{4} \leq \frac{\phi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$.
Für das untere Limit $\frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{4}$ ergibt sich $T_2 = T$.
Für das obere Limit $\frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{2}$ folgt $z^1 = 0$, $z^2 = 1$ und das ergibt die Kreislinie

$$K = \left\{ \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(i\xi_2\right)\right) : \quad \xi_2 \in \mathbb{R} \right\} \tag{4}$$

oder als kartesisches Produkt dargestellt $K = \{0\} \times S^1$.
Für jeden Wert $\frac{\phi}{2}$ dazwischen ergibt sich jeweils ein 2-dimensionaler Torus $T_{\frac{\phi}{2}}$ mit $T_{\frac{\phi}{2}} \subseteq T_2$. Durch die Vereinigung der Kreislinie K und aller 2-dimensionalen Tori $T_{\frac{\phi}{2}}$ entsteht ein Vollturus.

Fall 3: $|z^1|^2 \geq |z^2|^2$

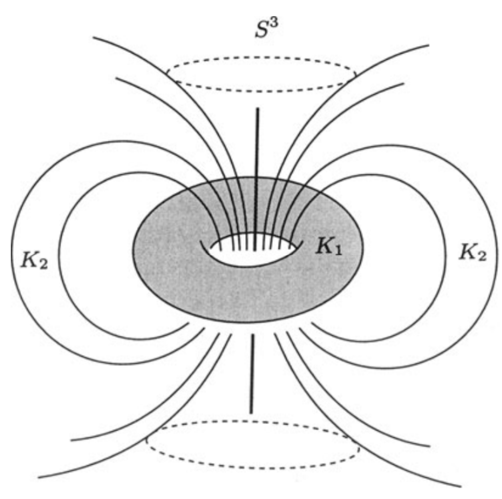

Abbildung 2:

Anhang

Behauptung 1

Es existiert für jedes Tupel (r_1, r_2) mit $r_1, r_2 \geq 0$ und $r_1^2 + r_2^2 = 1$ ein eindeutig bestimmter Winkel $\phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ mit $r_1 = \cos(\phi)$ und $r_2 = \sin(\phi)$.

Beweis 1

Zu r_1 kann man den Winkel $\phi_1 = \arccos(r_1)$ hinzubestimmen und zu r_2 den Winkel $\phi_2 = \arcsin(r_2)$.
Aus $r_1^2 + r_2^2 = 1$ folgt $r_2 = \pm\sqrt{1 - r_1^2}$. Wegen $r_2 \geq 0$ kommt nur das positive Vorzeichen in Frage. Also gilt $r_2 = \sqrt{1 - r_1^2}$.
Wegen (siehe dazu [2])

$$\arccos(x) = \arcsin\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$$

ergibt sich

$$\phi_2 = \arcsin(r_2) = \arcsin\left(\sqrt{1 - r_1^2}\right) = \arccos(r_1) = \phi_1.$$

Die beiden Winkel ϕ_1 und ϕ_2 sind also identisch.
Für $x \geq 0$ gilt $0 \leq \arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq \arccos(x) \leq \frac{\pi}{2}$. Für den Winkel ϕ gilt also $\phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. $\blacksquare$

Literatur

[1] Topology, Geometry and Gauge fields; Naber, Gregory; Springer Science+Business Media; 2011

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Trigonometrie#Additionstheoreme; Abschnitt: Umrechnung in andere trigonometrische Funktionen