Sonnenkompass

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz/Hobby

1 Fragestellung

Wir genau ist die bekannte Methode, die Nord-Richtung per Sonnenstand zu bestimmen?

2 Methodenbeschreibung

Die folgenden Aktionen sind zur Durchführung der Methode notwendig

- einen Stab senkrecht in die Erde stecken
- das Ende des Schattens des Stabes mit einen Stein markieren
- einige Zeit abwarten bis der Schatten weiter gewandert ist
- das neue Schattenende des Stabes mit einem zweiten Stein markieren.

Man erhält dann die Nordrichtung mittels der folgenden Regeln

- R1: der Schatten des Stab-Endes bewegt sich auf der Verbindungsgeraden der beiden Steine
- R2: die Nordrichtung ist orthogonal zur Verbindungsgeraden
- R3: auf der Nordhalbkugel der Erde zeigt der Schatten Richtung Norden, auf der Südhalbkugel Richtung Süden.

Die Methode wird in der Nähe der Pole scheitern, da das Stabende dort keinen Schatten mehr wirft (und natürlich auch, weil dort keine Erde zum Hineinstecken des Stabes vorhanden ist ☺).

3 Vereinbarungen

Im folgenden werden Basiskenntnisse der Geometrie und der linearen Algebra vorausgesetzt.

Vektoren werden durch einen Unterstrich kenntlich gemacht ($\underline{x}$) und ihre Transponierten ($\underline{x}^T$) durch ein hochgestelltes T. Matrizen werden nicht besonders bezeichnet, sie ergeben sich aus ihrem Kontext.

Weiterhin werden Kugelkoordinaten (r, Θ, φ) und kartesische Koordinaten (x_1, x_2, x_3) verwendet, der Ursprung der Koordinatensysteme ist der Erdmittelpunkt (siehe dazu die Problemskizzen in den Abbildungen 1 2).
Das kartesische Koordinatenpaar (x_1, x_2) spannt die Ekliptikalebene auf.

4 Problemformulierung

Es werden die folgenden vereinfachenden Annahmen getroffen:

- die Sonne im Punkt $\underline{S}$ sei ein Punktstrahler
- die Erde bewege sich in der Ekliptikalebene auf einer idealen Kreisbahn mit Radius R_S um die Sonne
- die Erde habe ideale Kugelgestalt mit dem Radius R_E

- die Erd-Rotationsachse habe einen Neigungswinkel ψ zur x_3-Achse
- im Punkt $\underline{P}$ der Erdoberfläche befinde sich der Fusspunkt des Stabes der Länge L
- die geographische Länge des Punktes $\underline{P}$ spiele keine Rolle, es wird für sie stets $\varphi = 0$ angenommen
- die Erdoberfläche um den Fusspunk des Stabes herum werde durch eine Tangentialebene an die Erdkugel im Punkt t $\underline{P}$ angenähert
- es werden zwei Zeiten betrachtet: die Jahreszeit $T^* \in [0, 365)$, gemessen in Tagen und die Tageszeit $t^* \in [0, 24)$, gemessen in Stunden
- der Ablauf der Tageszeit t^* soll die Jahreszeit T^* unbeeinflusst lassen, die beiden Zeiten seien voneinander entkoppelt

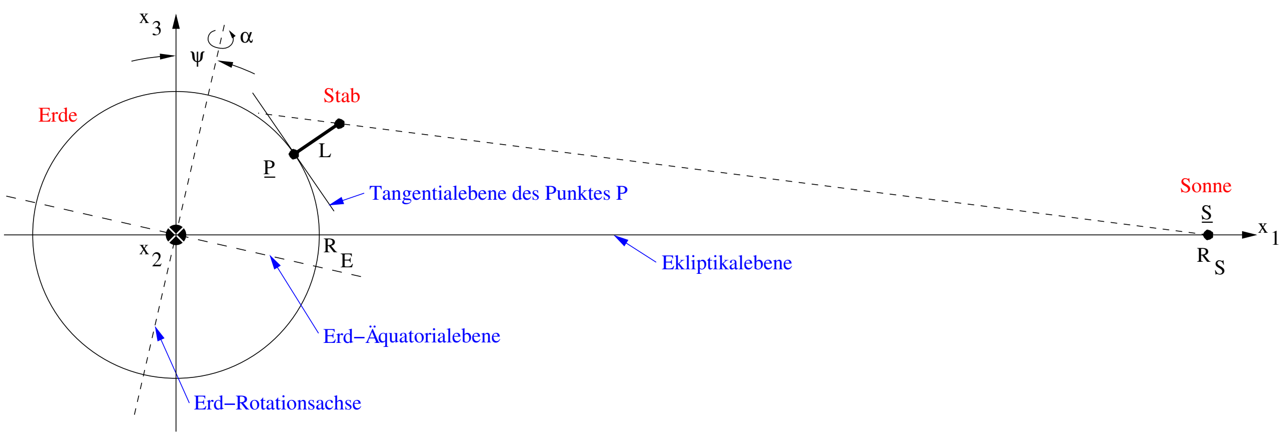

Abbildung 1: Problemskizze (nicht massstäblich, Sommersonnenwende, 21. Juni)

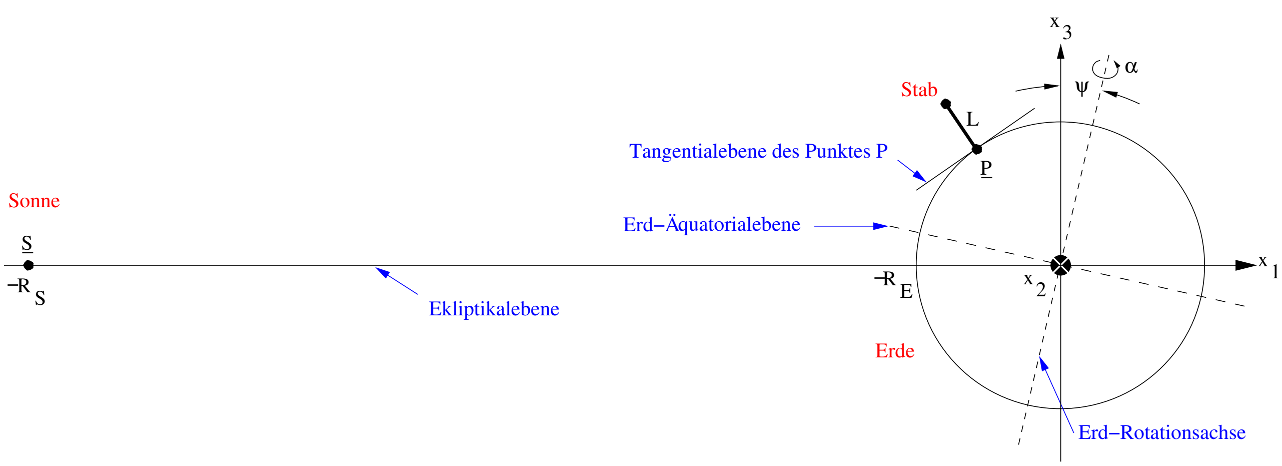

Abbildung 2: Problemskizze (nicht massstäblich, Wintersonnenwende, 21. Dezember)

5 Lösung

Zur Unterstützung der Problemlösung wird MatLab und seine „Symbolic Math Toolbox" verwendet. Die MatLab-Quellen finden sich im GitHub-Unterverzeichnis „Matlab-Sources".

Gesucht wird die Trajektorie des Schattens des Stabendes auf der Tangentialebene in Abhängigkeit von der der Tageszeit t^*. Die Jahreszeit T^* hat ebenfalls Einfluss auf die Trajektorie und soll als weiterer Parameter betrachtet werden.

Es sind zwei äquivalente Lösungsansätze denkbar, die Erdrotation zu berücksichtigen

- Die mit der Erde verbundenen Orte um den Winkel α zu rotieren und die Sonne fixiert lassen.
- Den Ort der Sonne um den Winkel $-\alpha$ zu rotieren und die mit der Erde verbundenen Orte fixiert lassen.

Der zweite Fall ist analytisch etwas einfacher und wird im folgenden gewählt.

6 Tageszeitabhängigkeit

Die tägliche Rotation der Erde um ihre Rotationsachse wird in Abhängigkeit des Rotationswinkels $\alpha \in [0, 2\pi]$ durch die Drehmatrix

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} e_1^2\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha & e_1e_2\,(1-\cos\alpha)-e_3\sin\alpha & e_1e_3\,(1-\cos\alpha)+e_2\sin\alpha \\ e_2e_1\,(1-\cos\alpha)+e_3\sin\alpha & e_2^2\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha & e_2e_3\,(1-\cos\alpha)-e_1\sin\alpha \\ e_3e_1\,(1-\cos\alpha)-e_2\sin\alpha & e_3e_2\,(1-\cos\alpha)+e_1\sin\alpha & e_3^2\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha \end{pmatrix}$$

beschrieben, dabei ist

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

ein Vektor mit $\|\underline{e}\| = 1$, der Richtung und Orientierung der Rotationsachse definiert (siehe dazu z.B. [1]).
Die Erd-Rotationsachse $\underline{e}$ ist wegen der Drehimpulserhaltung invariant gegenüber Tages- und Jahreszeiten.
Zum Zeitpunkt der Sommersonnenwende, am 21. Juni, liegt die Rotationsachse in der (x_1, x_3)-Ebene (siehe Abbildung 1), der Einheitsvektor $\underline{e}$ ist somit durch

$$\begin{aligned} e_1 &= \sin\psi \\ e_2 &= 0 \\ e_3 &= \cos\psi. \end{aligned} \tag{1}$$

gegeben. Für die Drehmatrix folgt damit

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \sin^2\psi\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha & -\cos\psi\sin\alpha & \sin\psi\cos\psi\,(1-\cos\alpha) \\ \cos\psi\sin\alpha & \cos\alpha & -\sin\psi\sin\alpha \\ \cos\psi\sin\psi\,(1-\cos\alpha) & \sin\psi\sin\alpha & \cos^2\psi\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha \end{pmatrix}, \tag{2}$$

der Winkel ψ hat dabei den numerischen Wert $\psi = 23.44°$ (siehe dazu z.B. [2]).

7 Jahreszeitabhängigkeit

Der jahreszeitliche Einfluss wird durch eine Kreisbewegung der Sonne um die als im Koordinatenursprung fixiert angenommene Erde berücksichtigt (siehe dazu die Abbildungen 1,2).
Für den Ort der Sonne als Funktion des jahreszeitlichen Umlaufwinkels ωT^* mit $\omega = \frac{2\pi}{365}$ die Gleichung

$$\underline{S}\,(T^*) = R_S \begin{pmatrix} \cos(\omega T^*) \\ \sin(\omega T^*) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

dabei ist $T^* \in [0, 365)$ die Jahreszeit, gemessen in der Tagesdifferenz zum 21. Juni, der Sommersonnenwende.

8 Fusspunkt und Endpunkt des Stabes

Der Ort $\underline{P} = (p_1, p_{2,} p_3)^T$ des Stabfusspunktes bestimmt sich aus der geographischen Breite Θ, der geographischen Länge $\varphi = 0$, dem Erdradius R_E und dem Achsneigungswinkel ψ zu (siehe dazu z.B. [4])

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit

$$\begin{aligned} p_1 &= R_E \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Theta + \psi\right) \\ p_2 &= 0 \\ p_3 &= R_E \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Theta + \psi\right). \end{aligned}$$

Dabei wurde die geographischen Breite durch $\Theta - \psi \longrightarrow \frac{\pi}{2} - \Theta + \psi$ in das Kugelkoordinatensystem umgerechnet (siehe dazu z.B. [4]).

Für den Punkt $\underline{Q}$ am Ende des Stabes der Länge L gilt

$$\underline{Q} = \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{P}. \tag{5}$$

9 Tangentialebene T

Die Kugel mit Radius R_E um den Ursprung ist durch die Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ gegeben, mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_i x_i^2 - R_E^2, \tag{6}$$

für den Index gilt hier und im folgenden $i \in [1, 3]$.

Für die Tangentialebene im Berührpunkt $\underline{P} = (p_1, p_{2,} p_3)^T$ gilt (siehe dazu z.B. [3])

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - p_i) = 0.$$

Die Ableitungen sind im Berührpunkt $\underline{P}$ zu bilden.

Für die implizite Gleichung der Tangentialebene T im Berührpunkt $\underline{P}$ folgt schliesslich für die Kugel nach Gleichung (6) der Ausdruck

$$\sum_i p_i (x_i - p_i) = 0$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$T: \qquad \underline{P}^T (\underline{x} - \underline{P}) = 0. \tag{7}$$

10 Verbindungsgerade

Die Sonne befindet sich nach Gleichung (3) im Punkt $\underline{S}$.

Die Punkte der Verbindungsgerade G der Sonne $\underline{S}(T^*)$ mit dem Stabende $\underline{Q}$ nach Gleichung (5) sind durch

$$G: \qquad \underline{x} = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}(T^*) \tag{8}$$

gegeben, dabei gilt $\mu \geq 0$.

Berücksichtigt man die Drehung der Sonne durch die Drehmatrix $D_{(-\alpha)}$ und fixiert die Erde, dann folgt mit

$$\underline{S}^\alpha (T^*) = D_{(-\alpha)} \underline{S}(T^*) \tag{9}$$

aus Gleichung (8)

$$G_S^\alpha: \qquad \underline{x}_S^\alpha = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}^\alpha (T^*) \tag{10}$$

Hier wird für $\mu = 0$ wird der Punkt $\underline{S}^\alpha$, für $\mu = 1$ wird der Punkt $\underline{Q}$ beschrieben.

11 Problemlösung

11.1 Lösung durch Fixierung der Erde

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden G_S^α nach Gleichung (10) mit der Tangentialebene T oder anders formuliert, gesucht wird der Geradenparameter μ, der eine Lösung $\underline{x}_0$ der Gleichung (7) mit der Bedingung

$$\underline{x}_0 \quad = \quad \mu \underline{Q} + (1-\mu)\, \underline{S}^\alpha\,(T^*) \tag{11}$$

zulässt.

11.1.1 Lösungspunkt

Einsetzen von Gleichung (11) in Gleichung (7) liefert

$$\underline{P}^T \left[\mu \underline{Q} + (1-\mu)\, \underline{S}^\alpha\,(T^*) - \underline{P}\right] \quad = \quad 0.$$

Wegen $\underline{P}^T \underline{P} = R_E^2$ folgt nach kurzer Rechnung die zu lösende Gleichung

$$\mu_0\,(\alpha) \quad = \quad \frac{\Omega^S\,(\alpha)}{1+\Omega^S\,(\alpha)} \tag{12}$$

mit

$$\Omega^S\,(\alpha) \quad = \quad \frac{1}{L}\left[R_E - \frac{\underline{P}^T \underline{S}^\alpha}{R_E}\right].$$

Da mit $\mu = 0$ die Sonne und mit $\mu = 1$ das Stabende beschrieben wird, muss wegen Gleichung (10) für die Lösung $\mu_0 > 1$ und damit $R < 0$ gelten.

Der gesuchte Punkt $\underline{x}_0$ ergibt sich als Funktion des Drehwinkels α mit dem nach Gleichung (12) bestimmten $\mu_0\,(\alpha)$ durch Einsetzen in Gleichung (11) zu

$$\underline{x}_0^S\,(\alpha) \quad = \quad \mu_0 \underline{Q} + (1-\mu_0)\, \underline{S}^\alpha\,(T^*)\,. \tag{13}$$

11.1.2 Koordinatentransformation

Die gefundenen Trajektorienpunkte $\underline{x}_0^S\,(\alpha)$ sind im Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) gegeben. Sie sollen aber auf ein zweidimensionales Koordinatensystem der Tangentialebene transformiert werden.

Dazu wird der Punkt $\underline{P}$ um den Winkel $\frac{\pi}{2} - (\Theta + \psi)$ um die x_2-Achse gedreht. Diese Drehung wird durch die Matrix

$$D_\Theta^{x_2} = \begin{pmatrix} \cos\Theta & 0 & \sin\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{pmatrix} \tag{14}$$

vermittelt (siehe dazu z.B. [1]).

Der Punkt $\underline{P}$ liegt nach dieser Drehung auf dem Äquator, 0° Breite, 0° Länge, und stimmt mit der x_1-Achse überein. Die Trajektorienpunkte können nun mittels der Projektionsabbildung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

auf die Tangentialebene T projiziert werden.

Es ergibt sich also mit den Abbildungen (14 und 15) für die auf die Tangentialebene projizierten Punkte

$$\underline{x}^S\,(\alpha) = A D^{x_2}_{\left[\frac{\pi}{2} - (\Theta+\psi)\right]} \underline{x}_0^S\,(\alpha) \in \mathbb{R}^2. \tag{16}$$

11.2 Äquivalenz der Problemlösungs-Ansätze

Es soll die Äquivalenz der beiden Lösungsansätze „Lösung durch Fixierung der Erde“ und „Lösung durch Fixierung der Sonne“ gezeigt werden.

Für die Gleichheit der Punkte $\underline{x}^S(\alpha)$ und $\underline{x}^E(\alpha)$ ist wegen (16) und der entprechenden Gleichung für den Fall „Erde gedreht“

$$\underline{x}^E(\alpha) = PD^{x_2}_{\left(\frac{\pi}{2}-(\Theta+\psi)\right)} D^{x_3}_{(-\varphi)} D_{(-\alpha)} \underline{x}_0^E(\alpha) \tag{17}$$

die Bedingung

$$\underline{x}^S(\alpha) \quad = \quad D_{(-\alpha)} \underline{x}_0^E(\alpha) \tag{18}$$

hinreichend.

Aus der Gleichung für den Fall „Erde gedreht“

$$\underline{x}_0^E(\alpha) \quad = \quad \mu_0 \underline{Q}^\alpha + (1-\mu_0)\,\underline{S}(T^*) \tag{19}$$

folgt aber mit Gleichung (13) die zu beweisende Äquivalenz (18)

$$\begin{aligned} D_{(-\alpha)} \underline{x}_0^E(\alpha) &= \mu_0 D_{(-\alpha)} \underline{Q}^\alpha + (1-\mu_0)\, D_{(-\alpha)} \underline{S}(T^*) \\ &= \mu_0 \underline{Q} + (1-\mu_0)\, \underline{S}^\alpha(T^*) \\ &= \underline{x}_0^S(\alpha)\,. \end{aligned}$$

Literatur

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Drehmatrix

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Erdachse

[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Tangentialebene

[4] https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten