Elektrische und magnetische Monopole

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz

Vektoren v werden im folgenden durch einen Unterstrich kenntlich gemacht $\underline{v}$, weiterhin sollen Kugelkoordinaten (ρ, ϕ, Θ) zur Anwendung kommen.

Behauptungen

Aus der Vektoranalysis ist für den dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ hinlänglich bekannt

$$\begin{aligned} \text{rot grad}(\psi) &= \underline{0} \\ \text{div rot}(\underline{A}) &= 0. \end{aligned}$$

Damit gelten die folgenden Aussagen

$$\begin{aligned} \underline{V} = \text{grad}(\psi) &\implies \text{rot}\,(\underline{V}) = \underline{0} \\ \underline{W} = \text{rot}(\underline{A}) &\implies \text{div}\,(\underline{W}) = 0. \end{aligned}$$

Aber gilt auch die Umkehrung?

Existiert für jedes rotationsfreie Feld $\underline{V}$ eine skalare Funktion ψ mit $\underline{V} = \text{grad}(\psi)$ und existiert für jedes divergenzfreie Feld $\underline{W}$ ein Feld $\underline{A}$ mit $\underline{W} = \text{rot}(\underline{A})$?

Die Antworten auf diese Fragen hängen von der Topologie des betrachteten Definitionsbereich U ab.

Elektrische und magnetische Monopole

Definitionsbereich U

Der Definitionsbereich der Felder und Potentiale beider Monopole ist der gesamte $\mathbb{R}^3$ mit Ausnahme des Ortes des Monopoles im Koordinatenursprung, also $U = \mathbb{R}^3 - \underline{0}$.

Topologische Eigenschaften des Definitionsbereiches U

- Die erste Homotopiegruppe (Fundamentalgruppe) von U ist trivial $\pi_1(U) = 0$, d.h. eine beliebige 1-Sphäre S^1 (Kreis) in U kann kontinuierlich auf einen Punkt zusammengezogen werden. Man nennt U auch einfach zusammenhängend.
- Die zweite Homotopiegruppe von U ist nicht trivial $\pi_2(U) \neq 0$, d.h. es ist nicht möglich, eine beliebige 2-Sphäre S^2 (Kugeloberfläche) in U kontinuierlich auf einen Punkt zusammenzuziehen - dies scheitert für jede Kugeloberfläche, die den Ursprung umschliesst.

Diese beiden Eigenschaften des Definitionsbereiches U haben Konsequenzen für die Existenz der Potentiale.

- Im Fall $\pi_1(U) = 0$ wird sich zeigen, dass für jedes rotationsfreie Feld $\underline{V}$ die Existenz eines skalaren Potentiales ψ folgt.
- Im Fall $\pi_1(U) = 0$ existieren aber divergenzfreie Felder $\underline{W}$ die kein Vektorpotential $\underline{A}$ besitzen.
- Im Fall $\pi_2(U) \neq 0$ wird sich zeigen, dass jedes divergenzfreie Feld $\underline{W}$ eine Vektorpotential $\underline{A}$ besitzt.

Noch zu tun: dies beweisen.

Maxwellgleichungen

Die Monopolfelder erfüllen auf U die quellenfreien Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\underline{E}) &= 0 \\ \operatorname{div}(\underline{B}) &= 0 \\ \operatorname{rot}(\underline{E}) &= \underline{0} \\ \operatorname{rot}(\underline{B}) &= \underline{0}. \end{aligned} \tag{1}$$

Satz von Stokes

Sei S eine glatte orientierte Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit dem Rand ∂S. Dann gilt für ein Vektorfeld $\underline{A}$ mit kontinuierlichen 1. partiellen Ableitungen in einer Umgebung, die S enthält

$$\iint_S (\operatorname{rot} \underline{A})\, d\underline{a} = \oint_{\partial S} \underline{A} d\underline{l}.$$

Dabei ist $d\underline{a} = \underline{n} dS$ und $d\underline{l} = \underline{t} ds$ mit dem Normalenvektor $\underline{n}$ der Fläche S und dem Tangentialvektor $\underline{t}$ des Flächenrandes ∂S.

Potentiale des elektrischen Monopols

Sein elektrisches und magnetisches Feld ist auf U durch

$$\begin{aligned} \underline{E}(\ \rho, \quad \phi, \quad \Theta\ ) &= \frac{q}{\rho^2}\underline{e}_\rho \\ \underline{B}(\ \rho, \quad \phi, \quad \Theta\ ) &= \underline{0} \end{aligned}$$

gegeben.
Noch zu tun: Potentiale herleiten.

Potentiale des magnetischen Monopols

Ein magnetischer Monopol wurde bisher noch nicht beobachtet und ist deshalb hypothetisch.
Sein magnetisches und elektrisches Feld in Kugelkoordinaten ist auf $\mathbb{R}^3 - \underline{0}$ analog zum elektrischen Monopol durch

$$\begin{aligned} \underline{B}(\ \rho, \quad \phi, \quad \mathit{\Theta}\ ) &= \frac{g}{\rho^2}\underline{e}_\rho \\ \underline{E}(\ \rho, \quad \phi, \quad \mathit{\Theta}\ ) &= \underline{0} \end{aligned}$$

gegeben.
Noch zu tun: Potentiale herleiten.

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[1] Topology, Geometry and Gauge fields; Naber, Gregory; Springer Science+Business Media; 2011