

Pendelsimulation

Jürgen Womser-Schütz, <https://github.com/JW-Schuetz>

Mathematisches Pendel

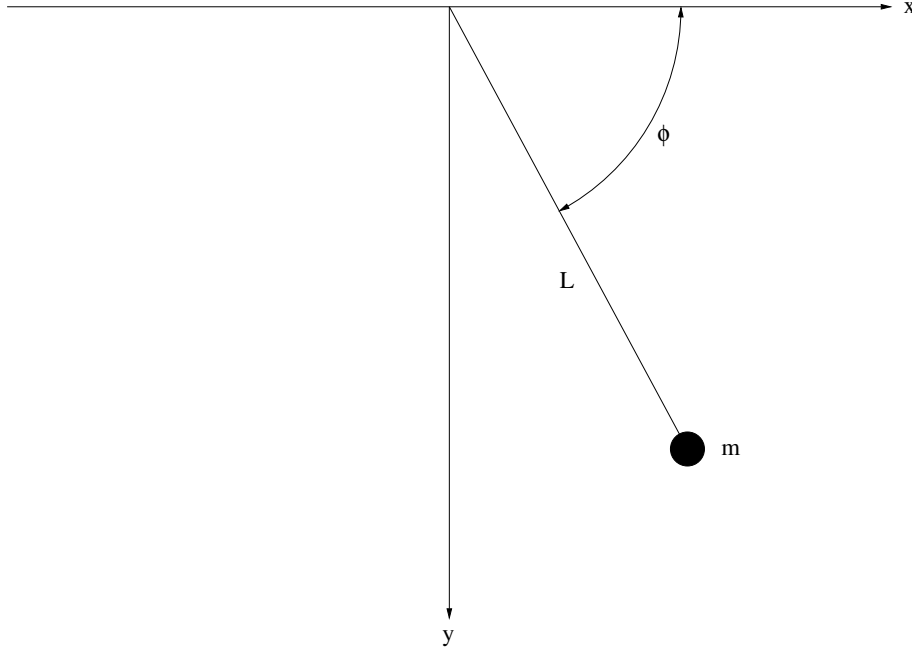


Abbildung 1: Mathematisches Pendel der Länge L und der Masse m

Auf das Pendel der Länge L und mit der Masse m (siehe Abbildung 1) wirkt zunächst mit der Erdbeschleunigung g die Gewichtskraft $F_G = mg$. Man kann sie in einen radialen Anteil F_R und einen tangentialen Anteil F_T zerlegen. Für die Dynamik des Pendels ist nur die tangentiale Komponente relevant. Es gilt für sie

$$F_T = F_G \sin \phi.$$

Mit den Newtonschen Gesetzen gilt

$$F_T = -mL \frac{d^2 \phi}{dt^2}.$$

Damit folgt für den Auslenkungswinkel $\phi(t)$ als Funktion der Zeit t die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} + \omega^2 \sin \phi(t) = 0 \quad (1)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (2)$$

Phasenraumdarstellung

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \phi(t) \\x_2(t) &= \frac{d}{dt}\phi(t)\end{aligned}\tag{3}$$

folgt aus (1) die Phasenraumdarstellung

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1(t) &= x_2(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= -\omega^2 \sin x_1(t).\end{aligned}\tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt

$$\frac{d^2}{dt^2}x_1(t) = -\omega^2 \sin x_1(t)$$

und durch Anwendung der Kettenregel (siehe dazu z.B. [2])

$$\frac{d}{d\phi} [f(g(\phi))] = \frac{df(g)}{dg} \frac{dg(\phi)}{d\phi}\tag{5}$$

ergibt sich daraus

$$\frac{d^2}{dt^2}x_1(t) = -\omega^2 \sin x_1(t).$$

Beschreibung als dynamisches System

In Anlehnung an [1] wird ein dynamisches System (Fluss) auf X durch

- einen metrischen Raum X mit der Metrik d
- eine additive Halbgruppe I über den reellen Zahlen, d.h. es gilt $I \subseteq \mathbb{R}$ und mit $0 \in I$ und $r, s, t \in I$ besitzt die Addition $+: I \times I \rightarrow I$ die beiden Eigenschaften

$$\text{Kommutativgesetz:} \quad r + s = s + r$$

$$\text{Assoziativgesetz:} \quad (r + s) + t = r + (s + t)$$

- eine stetige Abbildung $\pi : X \times I \rightarrow X$ mit den für alle $x \in X$ geltenden Eigenschaften

$$\text{Identitätseigenschaft:} \quad \pi(x, 0) = x$$

$$\text{Halbgruppeneigenschaft:} \quad \pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s)$$

definiert.

Definitionen

Trajektorie (Orbit) durch Punkt $x \in X$

$$\gamma_I(x) = \cup_{t \in I} \{\pi(x, t)\}$$

Limitmenge Punkt $x \in X$

$$L_I(x) = \overline{\cap_{t \in I} \gamma_I(\pi(x, t))}$$

Im folgenden wird auf I die Existenz von Ordnungsrelationen \leq und \geq vorausgesetzt. Aus diesem Grund wird nur noch der Spezialfall $I = \mathbb{R}$ betrachtet.

Positive und negative Halbtrajektorien

$$\begin{aligned}\gamma_-(x) &= \{\pi(x, t) \mid t \leq 0\} \\ \gamma_+(x) &= \{\pi(x, t) \mid t \geq 0\}\end{aligned}$$

Alpha- und Omegalimits

$$\begin{aligned}A(x) &= \overline{\cap_{t \in I} \gamma_-(\pi(x, t))} \\ \Omega(x) &= \overline{\cap_{t \in I} \gamma_+(\pi(x, t))}\end{aligned}$$

Invarianz

$A \subseteq X$ ist invariant, falls $\gamma_{\mathbb{R}}(x) \subseteq A$ für alle $x \in A$.

Bewegung

Für jedes $x \in X$ nennen wir die Funktion $t \rightarrow \pi(x, t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ eine Bewegung durch x .

Minimalität

Eine Teilmenge $M \subseteq X$ wird minimal genannt, falls sie nichtleer, abgeschlossen und invariant ist und falls keine ihrer echten Untermengen diese Eigenschaften besitzt.

Stationärer Punkt

Ein Punkt $x \in X$ wird ein stationärer Punkt des Flusses $\pi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ genannt, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\pi(x, t) = x.$$

Periodizität, Periode

Ein Punkt $x \in X$ und eine Bewegung $\pi(x, t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ wird periodisch genannt, falls eine reelle Zahl $p > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit

$$\pi(x, t + p) = \pi(x, t)$$

existiert. Die Zahl p wird Periode der Bewegung $\pi(x, t)$ durch x genannt.

Sätze

- A ist genau dann invariant, falls $A = \cup_{x \in A} \gamma_{\mathbb{R}}(x)$ gilt (Lemma 1.2).
- Mit A ist auch \overline{A} invariant (Proposition 1.3).
- Für alle x ist $\Omega(x)$ invariant. $\Omega(x)$ ist abgeschlossen (Proposition 1.4).

Literatur

- [1] Dynamical Systems - Stability, Controllability and Chaotic Behaviour; Werner Krabs, Stefan Pickl; Springer-Verlag, 2010
- [2] <https://de.wikipedia.org/wiki/Kettenregel>