# Elektrische und magnetische Monopole

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz

Vektoren $v$ werden im folgenden durch einen Unterstrich kenntlich gemacht $\underline{v}$, weiterhin sollen Kugelkoordinaten $(\rho, \phi, \Theta)$ zur Anwendung kommen.

## Grundlegendes

### Satz von Stokes

Sei $S$ eine glatte, orientierte Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit Rand $\partial S$. Dann gilt für ein Vektorfeld $\underline{A}$ mit kontinuierlichen 1. partiellen Ableitungen in einer Umgebung, die $S$ enthält

$$\iint_S (\text{rot } \underline{A})\, d\underline{a} = \oint_{\partial S} \underline{A} d\underline{l}. \tag{1}$$

Dabei ist $d\underline{a} = \underline{n} dS$ und $d\underline{l} = \underline{t} ds$ mit dem Normalenvektor $\underline{n}$ der Fläche $S$ und dem Tangentialvektor $\underline{t}$ des Flächenrandes $\partial S$.

### Maxwellgleichungen

Es gelten die quellenfreien Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \text{div}\,(\underline{E}) &= 0 \\ \text{div}\,(\underline{B}) &= 0 \\ \text{rot}\,(\underline{E}) &= \underline{0} \\ \text{rot}\,(\underline{B}) &= \underline{0}. \end{aligned} \tag{2}$$

### Potentiale

Aus der Vektoranalysis ist für den dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ hinlänglich bekannt

$$\begin{aligned} \text{rot grad}(\psi) &= \underline{0} \\ \text{div rot}(\underline{A}) &= 0. \end{aligned}$$

Damit gelten die folgenden Aussagen

$$\begin{aligned} \underline{V} = \text{grad}(\psi) &\implies \text{rot}\,(\underline{V}) = \underline{0} \\ \underline{W} = \text{rot}(\underline{A}) &\implies \text{div}\,(\underline{W}) = 0. \end{aligned}$$

Aber gilt auch die Umkehrung?

Existiert für jedes rotationsfreie Feld $\underline{V}$ eine skalare Funktion $\psi$ mit $\underline{V} = \text{grad}(\psi)$ und existiert für jedes divergenzfreie Feld $\underline{W}$ ein Feld $\underline{A}$ mit $\underline{W} = \text{rot}(\underline{A})$?

Die Antworten auf diese Fragen hängen von der Topologie des betrachteten Definitionsbereich $U$ ab.

# Definitionsbereich $U$

Der Definitionsbereich der Felder und Potentiale beider Monopole ist der gesamte $\mathbb{R}^3$ mit Ausnahme des Ortes des Monopoles im Koordinatenursprung, also $U = \mathbb{R}^3 - \underline{0}$. Der Ursprung ist ein singulärer Punkt der Betrachtung.

## Topologische Eigenschaften des Definitionsbereiches $U$

- Die erste Homotopiegruppe (die Fundamentalgruppe) von $U$ ist trivial $\pi_1(U) = 0$ , d.h. eine beliebige 1-Sphäre $S^1$ (Kreislinie) in $U$ kann kontinuierlich auf einen Punkt in $U$ zusammengezogen werden. Man nennt $U$ auch einfach zusammenhängend.
- Die zweite Homotopiegruppe von $U$ ist nicht trivial $\pi_2(U) \neq 0$ , d.h. es ist nicht möglich, eine beliebige 2-Sphäre $S^2$ (Kugeloberfläche) in $U$ kontinuierlich auf einen Punkt in $U$ zusammenzuziehen - dies scheitert für jede Kugeloberfläche, die den Ursprung umschliesst.

Diese beiden Eigenschaften des Definitionsbereiches $U$ haben Konsequenzen für die Existenz der Potentiale.

1. Im Fall $\pi_1(U) = 0$ wird sich zeigen, dass für jedes rotationsfreie Feld $\underline{V}$ die Existenz eines skalaren Potentiales $\psi$ folgt.
2. Im Fall $\pi_1(U) = 0$ existieren aber divergenzfreie Felder $\underline{W}$ die kein Vektorpotential $\underline{A}$ besitzen.
3. Im Fall $\pi_2(U) \neq 0$ wird sich zeigen, dass jedes divergenzfreie Feld $\underline{W}$ eine Vektorpotential $\underline{A}$ besitzt.

# Potentiale des elektrischen Monopols

Sein elektrisches und magnetisches Feld ist auf $U$ durch

$$\begin{aligned} \underline{E}(\rho, \quad \phi, \quad \Theta) &= \frac{q}{\rho^2}\underline{e}_\rho \\ \underline{B}(\rho, \quad \phi, \quad \Theta) &= \underline{0} \end{aligned} \tag{3}$$

gegeben.
Noch zu tun: skalares Potential und Vektorpotential herleiten.

# Potentiale des magnetischen Monopols

Ein magnetischer Monopol wurde bisher noch nicht beobachtet und ist deshalb hypothetisch.
Sein magnetisches und elektrisches Feld in Kugelkoordinaten ist auf $\mathbb{R}^3 - \underline{0}$ analog zum elektrischen Monopol durch

$$\begin{aligned} \underline{E}(\rho, \quad \phi, \quad \mathit{\Theta}) &= \underline{0} \\ \underline{B}(\rho, \quad \phi, \quad \mathit{\Theta}) &= \frac{g}{\rho^2}\underline{e}_\rho \end{aligned} \tag{4}$$

gegeben.
Noch zu tun: skalares Potential herleiten, Dirac-Strings thematisieren.

## Beweis zu Punkt 2 für den Spezialfall „Magnetischer Monopol“

Betrachtet man eine Kugeloberfläche $S$ des Radiuses $R$ um den Ursprung und sei $\partial S$ ihr Äquator. Weiterhin seien $S^+$ und $S^-$ ihre obere und untere Hemisphären. $\partial S$ sei entgegen des Uhrzeigersinns orientiert und die beiden Hemisphären $S^+$ und $S^-$ besitzen einen nach aussen gerichteten Normalenvektor $\underline{n}$.

Wir nehmen an, dass ein Vektorpotential $\underline{A}$ mit kontinuierlichen 1. partiellen Ableitungen in einer Umgebung, die $S$ enthält, existiert.

Dann erhält man für den Fluss der Rotation des Vektorpotentials $\underline{A}$ durch $S$ zusammen mit (??)

$$\begin{aligned}\iint_S (\text{rot } \underline{A})\, d\underline{a} &= \iint_S \underline{B} d\underline{a} \\ &= \iint_S \left(\frac{g}{\rho^2}\underline{e}_\rho\right) d\underline{a} \\ &= \frac{g}{R^2}\iint_S \underline{e}_\rho d\underline{a} \\ &= \frac{g}{R^2}\left(4\pi R^2\right) \\ &= 4\pi g.\end{aligned} \tag{5}$$

Andererseits folgt aus dem Satz von Stokes (1) für diesen Fluss

$$\begin{aligned}\iint_S (\text{rot } \underline{A})\, d\underline{a} &= \iint_{S^+} (\text{rot } \underline{A})\, d\underline{a} + \iint_{S^-} (\text{rot } \underline{A})\, d\underline{a} \\ &= \oint_{\partial S} \underline{A} d\underline{l} + \oint_{-\partial S} \underline{A} d\underline{l} \\ &= \oint_{\partial S} \underline{A} d\underline{l} - \oint_{\partial S} \underline{A} d\underline{l} \\ &= 0.\end{aligned} \tag{6}$$

Zwischen (5) und (6) besteht ein Widerspruch. Die getroffene Annahme ist also falsch und es existiert kein solches Vektorpotential $\underline{A}$ ■

Noch zu tun: 1. und 3. beweisen.

# Inhaltsverzeichnis

# Literatur


[1] Topology, Geometry and Gauge fields; Naber, Gregory; Springer Science+Business Media; 2011

[2] Scalar and vector potentials, Helmholtz decomposition, and de Rham cohomology; Valli, Alberto; University of Trento, Italy