Pendelsimulation

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz

Mathematisches Pendel

Für den Auslenkungswinkel $\phi(t)$ als Funktion der Zeit t gilt

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \omega^2 \sin\phi(t) = 0 \tag{1}$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{2}$$

dabei ist L die Pendellänge und g die Erdbeschleunigung.

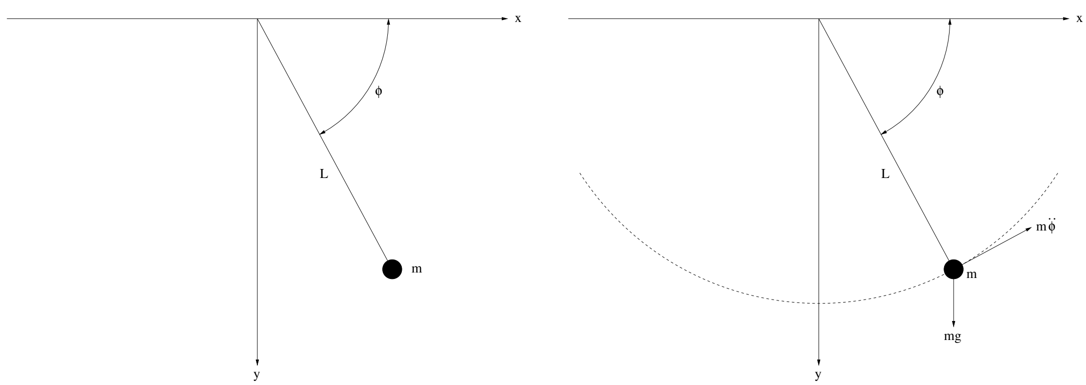

Abbildung 1: Mathematisches Pendel der Länge L und der Masse m

Für die kartesischen Koordinaten des Pendels folgt

$$\begin{aligned} x &= L\sin\phi \\ y &= L\cos\phi. \end{aligned}$$

Beschreibung als dynamisches Sytem

Definition

In Anlehnung an [1] wird ein dynamisches System (Fluss) auf X durch

- einen metrischen Raum X mit der Metrik d
- eine additive Halbgruppe I über den reellen Zahlen [1]
- und eine stetige Abbildung $\pi : X \times I \to X$ mit den beiden Eigenschaften
  $\forall x \in X : \pi(x, 0) = x$ (Identitätseigenschaft)
  $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s)$ (Halbgruppeneigenschaft)

definiert.

Motivation

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= x(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3}$$

besitzt die eindeutige Lösung

$$x(t) = x_0 \exp(t) .$$

Beschreibt man diese Lösung durch die Abbildung π, so gilt

$$\pi(x, t) = x \exp(t) . \tag{4}$$

Behauptung Halbgruppeneigenschaft

Es gilt die Halbgruppeneigenschaft

$$\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s) .$$

Beweis Halbgruppeneigenschaft

Wegen (4) gilt für x und t

$$\pi(x, t) = x \exp(t) . \tag{5}$$

Dann gilt für $x \to \pi(x, t)$ und $t \to s$

$$\pi(x, t) = \pi(x, t) \exp(s)$$

und somit durch Einsetzen von (5)

$$\begin{aligned} \pi(x, t) &= x \exp(t) \exp(s) \\ &= x \exp(t + s) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Literatur

[1] Dynamical Systems - Stability, Controllability and Chaotic Behaviour; Werner Krabs, Stefan Pickl; Springer-Verlag, 2010

[1] D.h. es gilt $0 \in I$ und für $r, s, t \in I$ besitzt die Addition $+ : I \times I \to I$ die beiden Eigenschaften
$r + s = s + r$ und $(r + s) + t = r + (s + t)$.