

Sonnenkompass

Jürgen Womser-Schütz, <https://github.com/JW-Schuetz/Hobby>

1 Fragestellung

Wie genau ist die bekannte Methode, die Nord-Richtung per Sonnenstand zu bestimmen?

2 Methodenbeschreibung

- einen Stab senkrecht in die Erde stecken
- das Ende des Schattens des Stabes mit einem Stein markieren
- einige Zeit abwarten bis der Stabschatten weiter gewandert ist
- das neue Schattenende des Stabes mit einem zweiten Stein markieren.

Man erhält die Nordrichtung mittels der folgenden Regeln

- R1: der Schatten des Stab-Endes bewegt sich auf der Verbindungsgeraden der beiden Steine
- R2: die Nordrichtung ist orthogonal zur Verbindungsgeraden
- R3: auf der Nordhalbkugel der Erde zeigt der Schatten Richtung Norden, auf der Südhalbkugel Richtung Süden.

3 Problemformulierung

Es werden kartesische Koordinaten (x_1, x_2, x_3) verwendet, wobei das Koordinatenpaar (x_1, x_2) die Ekliptikalebene aufspannt, der Ursprung des Koordinatensystems ist der Erdmittelpunkt (siehe dazu die Problemskizze in Abbildung 1).

Es werden die folgenden Annahmen getroffen:

- der Zeitpunkt im Jahr sei die Sommersonnenwende
- die Sonne im Punkt \underline{S} sei durch einen Punktstrahler darstellt
- die Sonne habe den Abstand R_S von der Erde
- die Erde habe ideale Kugelgestalt mit dem Radius R_E
- im Punkt \underline{P} der Erdoberfläche befinde sich der Stab der Länge L
- die Erd-Rotationsachse habe einen Neigungswinkel ϕ zur x_3 -Achse
- die Erdoberfläche um den Stab wird durch eine Tangentialebene an die Erdkugel angenähert.

Die Methode wird allerdings in der Nähe der beiden Pole scheitern, da das Stabende dort keinen Schatten mehr wirft.

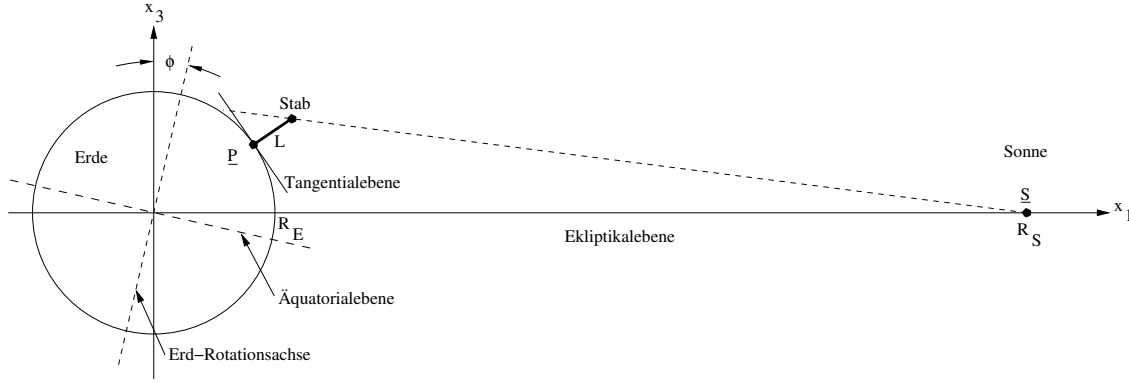


Abbildung 1: Problemskizze zur Zeit der Sommersonnenwende

Erdrotation

Die Erde rotiert um ihre Rotationsachse. Diese Rotation wird in Abhängigkeit des Rotationswinkels α durch die Drehmatrix D_α beschrieben. Für die Drehmatrix gilt (siehe dazu z.B. [1])

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} n_1^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & n_1 n_2 (1 - \cos \alpha) - n_3 \sin \alpha & n_1 n_3 (1 - \cos \alpha) + n_2 \sin \alpha \\ n_2 n_1 (1 - \cos \alpha) + n_3 \sin \alpha & n_2^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & n_2 n_3 (1 - \cos \alpha) - n_1 \sin \alpha \\ n_3 n_1 (1 - \cos \alpha) - n_2 \sin \alpha & n_3 n_2 (1 - \cos \alpha) + n_1 \sin \alpha & n_3^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \end{pmatrix}$$

dabei ist

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

der Einheitsvektor, der Richtung und Orientierung der Rotationsachse definiert.

In dieser Arbeit soll der Zeitpunkt der Sommersonnenwende betrachtet werden, d.h. die Rotationsachse soll, so wie in Abbildung 1 dargestellt, in der (x_1, x_3) -Ebene liegen. Der Einheitsvektor wird somit

$$\begin{aligned} n_1 &= \sin \phi \\ n_2 &= 0 \\ n_3 &= \cos \phi. \end{aligned} \tag{1}$$

gewählt, der Winkel ϕ hat den numerischen Wert [2]

$$\phi = 23.44^\circ. \tag{2}$$

Fusspunkt des Stabes

Der Ort $\underline{P} = (p_1, p_2, p_3)^T$ des Fusses des Stabes bestimmt sich aus der geographischen Breite Θ und Länge φ (siehe dazu z.B. [4]), Erdradius R_E und des Achsneigungswinkel ϕ nach Gleichung (2) zu

$$\begin{aligned} p_1 &= R_E \cos (\Theta + \phi) \cos \varphi \\ p_2 &= R_E \cos (\Theta + \phi) \sin \varphi \\ p_3 &= R_E \sin (\Theta + \phi). \end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt für den Ort

$$\underline{P}^\alpha = D_\alpha \underline{P}.$$

Endpunkt des Stabes

Für den Punkt \underline{Q} am Ende des Stabes der Länge L gilt

$$\underline{Q} = \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{P}.$$

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt

$$\begin{aligned}\underline{Q}^\alpha &= \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) D_\alpha \underline{P} \\ &= \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{P}^\alpha.\end{aligned}\tag{3}$$

Tangentialebene

Die Kugel mit Radius R_E um den Ursprung ist durch die Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ gegeben, mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_i x_i^2 - R_E^2,\tag{4}$$

für den Index gilt $i \in [1, 3]$.

Für die Tangentialebene im Berührungspunkt $\underline{P} = (p_1, p_2, p_3)^T$ gilt allgemein (siehe dazu z.B. [3])

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - p_i) = 0.$$

Dabei sind die Ableitungen im Berührungspunkt \underline{P} zu bilden.

Für die implizite Gleichung der Tangentialebene im Berührungspunkt \underline{P} folgt schliesslich für die Kugel (4) der Ausdruck

$$\sum_i p_i (x_i - p_i) = 0$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\underline{P}^T (\underline{x} - \underline{P}) = 0.$$

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt für die gedrehte Tangentialebene T^α

$$(\underline{P}^\alpha)^T (\underline{x} - \underline{P}^\alpha) = 0.\tag{5}$$

Verbindungsgerade

Die Sonne befindet sich im Punkt

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} R_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Punkte der Verbindungsgerade \underline{G} der Sonne \underline{S} mit dem Stabende \underline{Q} nach Gleichung (3) sind durch

$$\underline{G} = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}$$

gegeben, dabei gilt $\mu \geq 0$.

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt¹

$$\begin{aligned}\underline{G}^\alpha &= \mu D_\alpha \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S} \\ &= \mu \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu) \underline{S}.\end{aligned}\tag{6}$$

Lösung

Zur Unterstützung der Problemlösung wird die „Symbolic Math Toolbox“ von MatLab verwendet, die MatLab-Quellen finden sich im GitHub-Unterverzeichnis „Matlab-Sources“.

Gesucht wird die Trajektorie des Schattens des Stabendes auf der Tangentialebene T^α in Abhängigkeit des Erd-Rotationswinkels α , der im Verlauf eines Tages den Wertebereich $[0, 2\pi]$ durchläuft.

Gesucht ist also der Schnittpunkt der Geraden \underline{G}^α mit der Tangentialebene T^α oder anders formuliert, gesucht wird der Geradenparameter μ , der eine Lösung \underline{x}_0 der Gleichung

$$(\underline{P}^\alpha)^T (\underline{x}_0 - \underline{P}^\alpha) = 0$$

mit der Bedingung²

$$\underline{x}_0 = \mu \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu) \underline{S}\tag{7}$$

zulässt.

Einsetzen liefert

$$(\underline{P}^\alpha)^T [\mu \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu) \underline{S} - \underline{P}^\alpha] = 0.$$

Wegen

$$(\underline{P}^\alpha)^T \underline{P}^\alpha = \underline{P}^T \underline{P} = R_E^2$$

folgt nach kurzer Umformung die zu lösende Gleichung

$$\mu_0 = \frac{R}{1 + R}\tag{8}$$

mit der Abkürzung

$$R = \frac{1}{L} \left[R_E - \frac{(\underline{P}^\alpha)^T \underline{S}}{R_E} \right].$$

Da mit $\mu = 0$ die Sonne und mit $\mu = 1$ das Stabende beschrieben wird, muss wegen Gleichung (6) für die Lösung $\mu_0 > 1$ und damit $R < 0$ gelten.

Der gesuchte Punkt \underline{x}_0 der Tangentialebene T^α ergibt sich nach Gleichung (7) zu

$$\underline{x}_0 = \mu_0 \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu_0) \underline{S}.$$

Dieser Punkt ist im Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) gegeben und muss erst noch in das Koordinatensystem (x, y) der Tangentialebene T^α transformiert werden. Dieses Koordinatensystem habe seinen Ursprung im Berührungspunkt P , die y -Achse zeige zum Nordpol und die x -Achse nach Osten. Es gilt

¹Für $\mu = 0$ wird der Punkt \underline{S} , für $\mu = 1$ wird der Punkt \underline{Q}^α beschrieben.

²D.h. x_0 soll auf der Verbindungsgeraden liegen.

Literatur

- [1] <https://de.wikipedia.org/wiki/Drehmatrix>
- [2] <https://de.wikipedia.org/wiki/Erdachse>
- [3] <https://de.wikipedia.org/wiki/Tangentialebene>
- [4] <https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten>