Elektrische und magnetische Monopole

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz

Vektoren werden im folgenden durch einen Unterstrich kenntlich gemacht $\underline{v}$, ihr inneres Produkt sei durch $\bullet$, ihr äusseres Produkt durch $\times$ bezeichnet.

Weiterhin sollen Kugelkoordinaten (ρ, ϕ, Θ) zur Anwendung kommen.

Grundlegendes

Satz von Stokes

Sei S eine glatte, orientierte Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit Rand ∂S. Dann gilt für ein Vektorfeld $\underline{A}$ mit kontinuierlichen 1. partiellen Ableitungen in einer Umgebung, die S enthält

$$\iint_S (\text{rot } \underline{A}) \bullet d\underline{a} \quad = \quad \oint_{\partial S} \underline{A} \bullet d\underline{l}. \tag{1}$$

Dabei gilt $d\underline{a} = \underline{n}dS$ und $d\underline{l} = \underline{t}ds$ mit dem Normalenvektor $\underline{n}$ der Fläche S und dem Tangentialvektor $\underline{t}$ des Randes ∂S.

Maxwellgleichungen

Es gelten die quellenfreien Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \text{div}\,(\underline{E}) &= 0 \\ \text{div}\,(\underline{B}) &= 0 \\ \text{rot}\,(\underline{E}) &= \underline{0} \\ \text{rot}\,(\underline{B}) &= \underline{0}. \end{aligned} \tag{2}$$

Potentiale

Aus der Vektoranalysis ist für den $\mathbb{R}^3$ hinlänglich bekannt

$$\begin{aligned} \text{rot grad}(\psi) &= \underline{0} \\ \text{div rot}(\underline{A}) &= 0. \end{aligned}$$

Damit gelten die folgenden beiden Aussagen

$$\begin{aligned} \underline{V} = \text{grad}(\psi) &\implies \text{rot}\,(\underline{V}) = \underline{0} \\ \underline{W} = \text{rot}(\underline{A}) &\implies \text{div}\,(\underline{W}) = 0. \end{aligned}$$

Aber gilt auch die Umkehrung?

Existiert für jedes rotationsfreie Feld $\underline{V}$ eine skalare Funktion ψ mit $\underline{V} = \text{grad}(\psi)$ und existiert für jedes divergenzfreie Feld $\underline{W}$ ein Feld $\underline{A}$ mit $\underline{W} = \text{rot}(\underline{A})$?

Die Antworten auf diese Fragen hängen von der Topologie des betrachteten Definitionsbereich Ω ab.

Definitionsbereich

Der Definitionsbereich Ω der Felder und Potentiale beider Monopole ist der gesamte $\mathbb{R}^3$ mit Ausnahme des Ortes des Monopoles im Koordinatenursprung, also $\Omega = \mathbb{R}^3 - \underline{0}$.
Dieser spezielle Definitionsbereich $\mathbb{R}^3 - \underline{0}$ wird im folgenden mit U bezeichnet.

Topologische Eigenschaften des Definitionsbereiches U

- Die erste Homotopiegruppe (die Fundamentalgruppe) von U ist trivial $\pi_1(U) = 0$. D.h. eine beliebige 1-Sphäre S^1 (Kreislinie) in U kann kontinuierlich auf einen Punkt in U zusammengezogen werden - man nennt U auch einfach zusammenhängend.
- Die zweite Homotopiegruppe von U ist nicht trivial $\pi_2(U) \neq 0$. D.h. es ist nicht möglich, eine beliebige 2-Sphäre S^2 (Kugeloberfläche) in U kontinuierlich auf einen Punkt in U zusammenzuziehen - dies scheitert für jede Kugeloberfläche, die den Ursprung umschliesst.

Diese beiden Eigenschaften des Definitionsbereiches U haben vermutlich Konsequenzen für die Existenz der Potentiale.

1. Im Fall $\pi_1(U) = 0$ wird sich vermutlich zeigen, dass für jedes rotationsfreie Feld $\underline{V}$ die Existenz eines skalaren Potentiales ψ folgt.
2. Im Fall $\pi_1(U) = 0$ existieren aber vermutlich divergenzfreie Felder $\underline{W}$ die kein Vektorpotential $\underline{A}$ besitzen.
3. Im Fall $\pi_2(U) \neq 0$ wird sich vermutlich zeigen, dass jedes divergenzfreie Feld $\underline{W}$ eine Vektorpotential $\underline{A}$ besitzt.

Noch zu tun: die Vermutungen beweisen.

Potentiale des elektrischen Monopols

Sein elektrisches und magnetisches Feld ist auf U durch

$$\begin{aligned} \underline{E}(\rho, \phi, \Theta) &= \frac{q}{\rho^2}\underline{e}_\rho \\ \underline{B}(\rho, \phi, \Theta) &= \underline{0} \end{aligned} \tag{3}$$

gegeben.
Noch zu tun: skalares Potential und Vektorpotential herleiten.

Potentiale des magnetischen Monopols

Ein magnetischer Monopol wurde bisher noch nicht beobachtet und ist deshalb hypothetisch.
Sein magnetisches und elektrisches Feld in Kugelkoordinaten ist auf U analog zum elektrischen Monopol durch

$$\begin{aligned} \underline{E}(\rho, \phi, \Theta) &= \underline{0} \\ \underline{B}(\rho, \phi, \Theta) &= \frac{g}{\rho^2}\underline{e}_\rho \end{aligned} \tag{4}$$

gegeben.
Noch zu tun: skalares Potential herleiten, Dirac-Strings thematisieren, Quantelung der Elementarladung als direkte Folge der magnetischen Monopole herleiten.

Beweis zu Punkt 2 für den Spezialfall „Magnetischer Monopol“

Betrachtet man eine Kugeloberfläche S des Radiuses R um den Ursprung und sei ∂S ihr Äquator. Weiterhin seien S^+ und S^- ihre obere und untere Hemisphären. ∂S sei entgegen des Uhrzeigersinns orientiert und die beiden Hemisphären S^+ und S^- besitzen einen nach aussen gerichteten Normalenvektor $\underline{n}$.

Wir nehmen an, dass ein Vektorpotential $\underline{A}$ mit kontinuierlichen 1. partiellen Ableitungen in einer Umgebung, die S enthält, existiert.

Dann erhält man für den Fluss der Rotation des Vektorpotentials $\underline{A}$ durch S zusammen mit (4)

$$\begin{aligned}\iint_S (\text{rot } \underline{A}) \bullet d\underline{a} &= \iint_S \underline{B} \bullet d\underline{a} \\ &= \iint_S \left(\frac{g}{\rho^2}\underline{e}_\rho\right) \bullet d\underline{a} \\ &= \frac{g}{R^2}\iint_S \underline{e}_\rho \bullet d\underline{a} \\ &= \frac{g}{R^2}\left(4\pi R^2\right) \\ &= 4\pi g.\end{aligned} \tag{5}$$

Andererseits folgt aus dem Satz von Stokes (1) für diesen Fluss

$$\begin{aligned}\iint_S (\text{rot } \underline{A}) \bullet d\underline{a} &= \iint_{S^+} (\text{rot } \underline{A}) \bullet d\underline{a} + \iint_{S^-} (\text{rot } \underline{A}) \bullet d\underline{a} \\ &= \oint_{\partial S} \underline{A} \bullet d\underline{l} + \oint_{-\partial S} \underline{A} \bullet d\underline{l} \\ &= \oint_{\partial S} \underline{A} \bullet d\underline{l} - \oint_{\partial S} \underline{A} \bullet d\underline{l} \\ &= 0.\end{aligned} \tag{6}$$

Zwischen (5) und (6) besteht ein Widerspruch.

Die Annahme ist also falsch und es existiert kein solches Vektorpotential $\underline{A}$ ■

Noch zu tun: 1. und 3. beweisen.

Helmholtz Zerlegung

Es werden die beiden Räume definiert

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_m(\Omega) &= \left\{\underline{w} \in L_2^3(\Omega) \mid \text{rot}(\underline{w}){=}\underline{0},\ \text{div}(\underline{w}){=}\underline{0},\ \underline{w} \bullet \underline{n} = 0 \ \text{ auf } \ \partial\Omega\right\} \\ \mathbb{H}_e(\Omega) &= \left\{\underline{w} \in L_2^3(\Omega) \mid \text{rot}(\underline{w}){=}\underline{0},\ \text{div}(\underline{w}){=}\underline{0},\ \underline{w} \times \underline{n} = 0 \ \text{ auf } \ \partial\Omega\right\}.\end{aligned}$$

mit $L_p^3(\Omega)$ seien die Lebeque-integrablen Funktionen L_p in $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Theorem 1

Nehmen wir an, dass $\underline{H}$ in Ω rotationsfrei ist und dass jede geschlossene Kurve C in Ω der Rand ∂S einer Fläche $S \subset \Omega$ ist. Dann existiert eine Funktion ψ mit $\underline{H} = \text{grad}(\psi)$ in Ω.

Beweis

Da der Fluss von rot $(\underline{H})$ auf jeder Oberfläche S verschwindet, folgt aus dem Satz von Stokes (1), dass das Linienintegral einer geschlossenen Kurve C über $\underline{H}$ verschwindet ■

Theorem 2

Nehmen wir an, dass $\underline{B}$ in Ω divergenzfrei ist und dass jede geschlossene Oberfläche S in Ω der Rand ∂S einer Teilmenge $D \subset \Omega$ ist. Dann existiert ein Vektorfeld $\underline{A}$ mit $\underline{A} = \text{rot}(\underline{B})$ in Ω.

Beweis

Da das Intergal div $(\underline{B})$ auf jeder Teilmenge D verschwindet, ■

Theorem 3

Nehmen wir an, dass $\underline{H}$ in Ω rotationsfrei ist und dass $\underline{H} \times \underline{n} = 0$ auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω gilt. Dann existiert eine Funktion ψ mit $\underline{H} = \text{grad}\,(\psi)$ in Ω .

Beweis

Setzt man $\underline{H}$ ausserhalb von Ω durch $\underline{0}$ fort, dann bleibt $\underline{H}$ rotationsfrei. $\underline{H}$ ist also der Gradient eines skalaren Potentials ■

Theorem 4

Nehmen wir an, dass $\underline{B}$ in Ω divergenzfrei ist und dass $\underline{B} \bullet \underline{n} = 0$ auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω gilt. Dann existiert ein Vektorfeld $\underline{A}$ mit $\underline{B} = \text{rot}\,(\underline{A})$ in Ω .

Beweis

Setzt man $\underline{B}$ ausserhalb von Ω durch $\underline{0}$ fort, dann bleibt $\underline{B}$ divergenzfrei. $\underline{B}$ ist also die Rotation eine Vektorfeldes ■

Noch zu tun: Verstehen! Das ist die Stelle, in der die Topologie ins Spiel kommt! Die Voraussetzungen von Theorem 2 sind für den magnetischen Monopol nicht erfüllt!

Noch zu tun: Alles zu einem folgerichtigen Ganzen integrieren.

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[1] Topology, Geometry and Gauge fields; Naber, Gregory; Springer Science+Business Media; 2011

[2] Scalar and vector potentials, Helmholtz decomposition and de Rham cohomology; Valli, Alberto; University of Trento, Italy