

Sonnenkompass

Jürgen Womser-Schütz, <https://github.com/JW-Schuetz/Hobby>

1 Fragestellung

Wie genau ist die bekannte Methode, die Nord-Richtung per Sonnenstand zu bestimmen?

2 Methodenbeschreibung

- einen Stab senkrecht in die Erde stecken
- das Ende des Schattens des Stabes mit einem Stein markieren
- einige Zeit abwarten bis der Stabschatten weiter gewandert ist
- das neue Schattenende des Stabes mit einem zweiten Stein markieren.

Man erhält die Nordrichtung mittels der folgenden Regeln

- R1: der Schatten des Stab-Endes bewegt sich auf der Verbindungsgeraden der beiden Steine
- R2: die Nordrichtung ist orthogonal zur Verbindungsgeraden
- R3: auf der Nordhalbkugel der Erde zeigt der Schatten Richtung Norden, auf der Südhalbkugel Richtung Süden.

3 Problemformulierung

Es werden kartesische Koordinaten (x_1, x_2, x_3) verwendet, wobei das Koordinatenpaar (x_1, x_2) die Ekliptikalebene aufspannt, der Ursprung des Koordinatensystems ist der Erdmittelpunkt (siehe dazu die Problemskizze in Abbildung 1).

Es werden die folgenden Annahmen getroffen:

- der Zeitpunkt im Jahr sei die Sommersonnenwende
- die Sonne im Punkt \underline{S} sei durch einen Punktstrahler darstellt
- die Sonne habe den Abstand R_S von der Erde
- die Erde habe ideale Kugelgestalt mit dem Radius R_E
- die Erd-Rotationsachse habe einen Neigungswinkel ϕ zur x_3 -Achse
- im Punkt \underline{P} der Erdoberfläche befinde sich der Fusspunkt des Stabes der Länge L
- die Erdoberfläche um den Fusspunkt des Stabes herum werde durch eine Tangentialebene an die Erdkugel angenähert.

Die Methode wird allerdings in der Nähe der Pole scheitern, da das Stabende dort evtl. keinen Schatten mehr wirft.

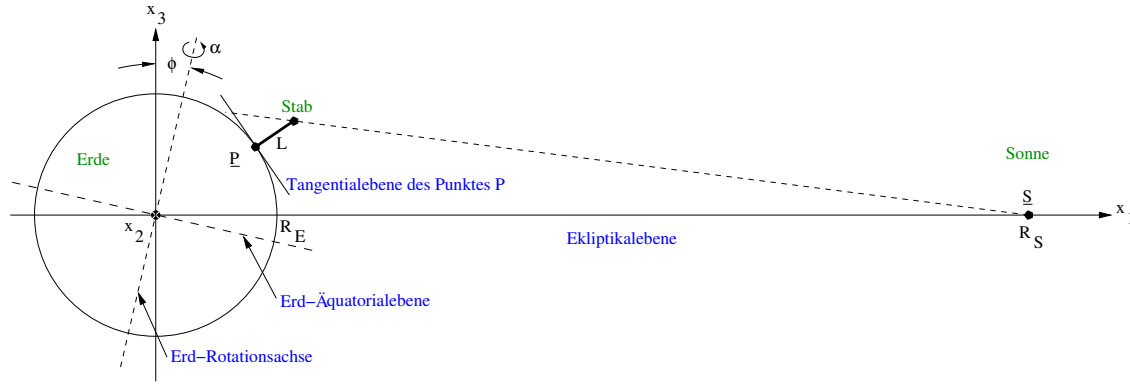


Abbildung 1: Nicht massstäbliche Problemskizze (Sommersonnenwende)

Vereinbarungen

Im folgenden wird Kenntnis der linearen Algebra vorausgesetzt.

Vektoren werden durch einen Unterstrich kenntlich gemacht \underline{x} und ihre Transposition \underline{x}^T durch ein hochgestelltes T . Matrizen werden nicht besonders bezeichnet.

Erdrotation

Die Rotation der Erde um ihre Rotationsachse wird in Abhängigkeit des Rotationswinkels $\alpha \in [0, 2\pi]$ durch die Drehmatrix

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} n_1^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & n_1 n_2 (1 - \cos \alpha) - n_3 \sin \alpha & n_1 n_3 (1 - \cos \alpha) + n_2 \sin \alpha \\ n_2 n_1 (1 - \cos \alpha) + n_3 \sin \alpha & n_2^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & n_2 n_3 (1 - \cos \alpha) - n_1 \sin \alpha \\ n_3 n_1 (1 - \cos \alpha) - n_2 \sin \alpha & n_3 n_2 (1 - \cos \alpha) + n_1 \sin \alpha & n_3^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1)$$

beschrieben (siehe dazu z.B. [1]), dabei ist

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

der Einheitsvektor, der Richtung und Orientierung der Rotationsachse definiert.

In dieser Arbeit soll der Zeitpunkt der Sommersonnenwende betrachtet werden, d.h. die Rotationsachse soll, so wie in Abbildung 1 dargestellt, in der (x_1, x_3) -Ebene liegen. Der Einheitsvektor ist somit durch

$$\begin{aligned} n_1 &= \sin \phi \\ n_2 &= 0 \\ n_3 &= \cos \phi. \end{aligned}$$

gegeben, der Winkel ϕ hat den numerischen Wert [2]

$$\phi = 23.44^\circ. \quad (2)$$

Für mittags 12 Uhr soll $\alpha = 0$ gelten.

Fusspunkt des Stabes

Der Ort $\underline{P} = (p_1, p_2, p_3)^T$ des Fusses des Stabes bestimmt sich aus der geographischen Breite Θ , der Länge φ (siehe dazu z.B. [4]), dem Erdradius R_E und dem Achsneigungswinkel ϕ (2) zu

$$\begin{aligned} p_1 &= R_E \cos(\Theta + \phi) \cos \varphi \\ p_2 &= R_E \cos(\Theta + \phi) \sin \varphi \\ p_3 &= R_E \sin(\Theta + \phi). \end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt für den Ort

$$\underline{P}^\alpha = D_\alpha \underline{P}.$$

Endpunkt des Stabes

Für den Punkt \underline{Q} am Ende des Stabes der Länge L gilt

$$\underline{Q} = \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{P}.$$

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt

$$\begin{aligned} \underline{Q}^\alpha &= \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) D_\alpha \underline{P} \\ &= \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{P}^\alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

Tangentialebene

Die Kugel mit Radius R_E um den Ursprung ist durch die Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ gegeben, mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_i x_i^2 - R_E^2, \tag{4}$$

für den Index gilt $i \in [1, 3]$.

Für die Tangentialebene im Berührungspunkt $\underline{P} = (p_1, p_2, p_3)^T$ gilt (siehe dazu z.B. [3])

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - p_i) = 0,$$

die Ableitungen sind im Berührungspunkt \underline{P} zu bilden.

Für die implizite Gleichung der Tangentialebene im Berührungspunkt \underline{P} folgt schliesslich für die Kugel (4) der Ausdruck

$$\sum_i p_i (x_i - p_i) = 0$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\underline{P}^T (\underline{x} - \underline{P}) = 0. \tag{5}$$

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt für die gedrehte Tangentialebene T^α

$$(\underline{P}^\alpha)^T (\underline{x} - \underline{P}^\alpha) = 0. \tag{6}$$

Verbindungsgerade

Die Sonne befindet sich im Punkt

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} R_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Punkte der Verbindungsgerade \underline{G} der Sonne \underline{S} mit dem Stabende \underline{Q} nach Gleichung (3) sind durch

$$\underline{G} = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}$$

gegeben, dabei gilt $\mu \geq 0$.

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt¹

$$\begin{aligned} \underline{G}^\alpha &= \mu D_\alpha \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S} \\ &= \mu \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu) \underline{S}. \end{aligned} \quad (7)$$

Lösung

Zur Unterstützung der Problemlösung wird MatLab und seine „Symbolic Math Toolbox“ verwendet, die MatLab-Quellen finden sich im GitHub-Unterverzeichnis „Matlab-Sources“.

Gesucht wird die Trajektorie des Schattens des Stabendes auf der Tangentialebene T^α in Abhängigkeit des Erd-Rotationswinkels α .

Gesucht ist also der Schnittpunkt der Geraden \underline{G}^α mit der Tangentialebene T^α oder anders formuliert, gesucht wird der Geradenparameter μ , der eine Lösung \underline{x}_0 der Gleichung (6) mit der Bedingung²

$$\underline{x}_0 = \mu \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu) \underline{S} \quad (8)$$

zulässt.

Lösungspunkt auf T^α

Einsetzen von Gleichung (8) in Gleichung (6) liefert

$$(\underline{P}^\alpha)^T [\mu \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu) \underline{S} - \underline{P}^\alpha] = 0.$$

Wegen

$$(\underline{P}^\alpha)^T \underline{P}^\alpha = \underline{P}^T \underline{P} = R_E^2$$

folgt nach kurzer Umformung die zu lösende Gleichung

$$\mu_0(\alpha) = \frac{R}{R + L} \quad (9)$$

mit der Abkürzung

$$R(\alpha) = R_E - \frac{(\underline{P}^\alpha)^T \underline{S}}{R_E}.$$

Da mit $\mu = 0$ die Sonne und mit $\mu = 1$ das Stabende beschrieben wird, muss wegen Gleichung (7) für die Lösung $\mu_0 > 1$ und damit $R < 0$ gelten.

Der gesuchte Punkt \underline{x}_0 der Tangentialebene T^α ergibt sich nach Gleichung (8) zu

$$\underline{x}_0(\alpha) = \mu_0 \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu_0) \underline{S} \quad (10)$$

und ist im Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) gegeben.

¹Für $\mu = 0$ wird der Punkt \underline{S} , für $\mu = 1$ wird der Punkt \underline{Q}^α beschrieben.

²D.h. x_0 soll auf der Verbindungsgeraden liegen.

Koordinatentransformation

Die Punkte der oben konstruierten Tangentialebene nach Gleichung (10) sind im (x_1, x_2, x_3) -Koordinatensystem beschrieben. Es ist aber wünschenswert, die Punkte im intrinsischen, zweidimensionalen Koordinatensystem der Ebene zu kennen. Dieses (y_1, y_2) -Koordinatensystem soll hier bestimmt werden.

Der Punkt \underline{x} ist orthogonal zum Punkt \underline{P} , falls $\underline{P}^T \underline{x} = 0$ gilt, also

$$(p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0.$$

Die zu \underline{P} orthogonalen Punkte bilden somit eine Ebene durch den Ursprung, die man im Fall $p_1 \neq 0$ ³ auch durch

$$x_1 = -\frac{1}{p_1} (p_2 x_2 + p_3 x_3) \quad (11)$$

charakterisieren kann. Durch Auswahl zweier linear unabhängiger Kombinationen (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) werden zwei Punkte dieser Ursprungsebene konstruiert, es folgt mit (11)

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{p_2}{p_1} b_1 - \frac{p_3}{p_1} c_1 \\ a_2 &= -\frac{p_2}{p_1} b_2 - \frac{p_3}{p_1} c_2. \end{aligned}$$

Für die Darstellung einer Ursprungsebene gilt allgemein

$$a_i y_1 + b_i y_2 = c_i$$

und für die Koordinaten (y_1, y_2) folgt mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

das lineare Gleichungssystem

$$A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Die Kombinationen (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) müssen so gewählt werden, dass die Determinante von A ungleich 0 ist, dass also $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$ gilt.

Literatur

- [1] <https://de.wikipedia.org/wiki/Drehmatrix>
- [2] <https://de.wikipedia.org/wiki/Erdachse>
- [3] <https://de.wikipedia.org/wiki/Tangentialebene>
- [4] <https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten>

³Wegen $p_1 \neq 0$ folgt für den Winkel α (für $\phi = 0$) die Einschränkung $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.