Elektrische und magnetische Monopole

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz

Vektoren v werden im folgenden durch einen Unterstrich kenntlich gemacht $\underline{v}$, weiterhin sollen Kugelkoordinaten (ρ, ϕ, Θ) zur Anwendung kommen.

Grundlegendes

Satz von Stokes

Sei S eine glatte, orientierte Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit Rand ∂S. Dann gilt für ein Vektorfeld $\underline{A}$ mit kontinuierlichen 1. partiellen Ableitungen in einer Umgebung, die S enthält

$$\iint_S (\text{rot } \underline{A})\, d\underline{a} \quad = \quad \oint_{\partial S} \underline{A} d\underline{l}. \tag{1}$$

Dabei ist $d\underline{a} = \underline{n} dS$ und $d\underline{l} = \underline{t} ds$ mit dem Normalenvektor $\underline{n}$ der Fläche S und dem Tangentialvektor $\underline{t}$ des Flächenrandes ∂S.

Maxwellgleichungen

Es gelten die quellenfreien Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \text{div}\,(\underline{E}) &= 0 \\ \text{div}\,(\underline{B}) &= 0 \\ \text{rot}\,(\underline{E}) &= \underline{0} \\ \text{rot}\,(\underline{B}) &= \underline{0}. \end{aligned} \tag{2}$$

Potentiale

Aus der Vektoranalysis ist für den dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ hinlänglich bekannt

$$\begin{aligned} \text{rot grad}(\psi) &= \underline{0} \\ \text{div rot}(\underline{A}) &= 0. \end{aligned}$$

Damit gelten die folgenden Aussagen

$$\begin{aligned} \underline{V} = \text{grad}(\psi) &\implies \text{rot}\,(\underline{V}) = \underline{0} \\ \underline{W} = \text{rot}(\underline{A}) &\implies \text{div}\,(\underline{W}) = 0. \end{aligned}$$

Aber gilt auch die Umkehrung?

Existiert für jedes rotationsfreie Feld $\underline{V}$ eine skalare Funktion ψ mit $\underline{V} = \text{grad}(\psi)$ und existiert für jedes divergenzfreie Feld $\underline{W}$ ein Feld $\underline{A}$ mit $\underline{W} = \text{rot}(\underline{A})$?

Die Antworten auf diese Fragen hängen von der Topologie des betrachteten Definitionsbereich U ab.

Definitionsbereich U

Der Definitionsbereich der Felder und Potentiale beider Monopole ist der gesamte $\mathbb{R}^3$ mit Ausnahme des Ortes des Monopoles im Koordinatenursprung, also $U = \mathbb{R}^3 - \underline{0}$. Der Ursprung ist ein singulärer Punkt der Betrachtung.

Topologische Eigenschaften des Definitionsbereiches U

- Die erste Homotopiegruppe (die Fundamentalgruppe) von U ist trivial $\pi_1(U) = 0$, d.h. eine beliebige 1-Sphäre S^1 (Kreislinie) in U kann kontinuierlich auf einen Punkt in U zusammengezogen werden. Man nennt U auch einfach zusammenhängend.

- Die zweite Homotopiegruppe von U ist nicht trivial $\pi_2(U) \neq 0$, d.h. es ist nicht möglich, eine beliebige 2-Sphäre S^2 (Kugeloberfläche) in U kontinuierlich auf einen Punkt in U zusammenzuziehen - dies scheitert für jede Kugeloberfläche, die den Ursprung umschliesst.

Diese beiden Eigenschaften des Definitionsbereiches U haben Konsequenzen für die Existenz der Potentiale.

1. Im Fall $\pi_1(U) = 0$ wird sich zeigen, dass für jedes rotationsfreie Feld $\underline{V}$ die Existenz eines skalaren Potentiales ψ folgt.

2. Im Fall $\pi_1(U) = 0$ existieren aber divergenzfreie Felder $\underline{W}$ die kein Vektorpotential $\underline{A}$ besitzen.

3. Im Fall $\pi_2(U) \neq 0$ wird sich zeigen, dass jedes divergenzfreie Feld $\underline{W}$ eine Vektorpotential $\underline{A}$ besitzt.

Potentiale des elektrischen Monopols

Sein elektrisches und magnetisches Feld ist auf U durch

$$\begin{aligned} \underline{E}(\rho, \quad \phi, \quad \Theta) &= \frac{q}{\rho^2}\underline{e}_\rho \\ \underline{B}(\rho, \quad \phi, \quad \Theta) &= \underline{0} \end{aligned} \tag{3}$$

gegeben.
Noch zu tun: skalares Potential und Vektorpotential herleiten.

Potentiale des magnetischen Monopols

Ein magnetischer Monopol wurde bisher noch nicht beobachtet und ist deshalb hypothetisch.
Sein magnetisches und elektrisches Feld in Kugelkoordinaten ist auf $\mathbb{R}^3 - \underline{0}$ analog zum elektrischen Monopol durch

$$\begin{aligned} \underline{E}(\rho, \quad \phi, \quad \mathit{\Theta}) &= \underline{0} \\ \underline{B}(\rho, \quad \phi, \quad \mathit{\Theta}) &= \frac{g}{\rho^2}\underline{e}_\rho \end{aligned} \tag{4}$$

gegeben.
Noch zu tun: skalares Potential herleiten, Dirac-Strings thematisieren.

Beweis zu Punkt 2 für den Spezialfall „Magnetischer Monopol“

Betrachtet man eine Kugeloberfläche S des Radiuses R um den Ursprung und sei ∂S ihr Äquator. Weiterhin seien S^+ und S^- ihre obere und untere Hemisphären. ∂S sei entgegen des Uhrzeigersinns orientiert und die beiden Hemisphären S^+ und S^- besitzen einen nach aussen gerichteten Normalenvektor $\underline{n}$.

Wir nehmen an, dass ein Vektorpotential $\underline{A}$ mit kontinuierlichen 1. partiellen Ableitungen in einer Umgebung, die S enthält, existiert.

Dann erhält man für den Fluss der Rotation des Vektorpotentials $\underline{A}$ durch S zusammen mit (4)

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{rot } \underline{A})\, d\underline{a} &= \iint_S \underline{B} d\underline{a} \\ &= \iint_S \left(\frac{g}{\rho^2} \underline{e}_\rho \right) d\underline{a} \\ &= \frac{g}{R^2} \iint_S \underline{e}_\rho d\underline{a} \\ &= \frac{g}{R^2} \left(4\pi R^2 \right) \\ &= 4\pi g. \end{aligned} \tag{5}$$

Andererseits folgt aus dem Satz von Stokes (1) für diesen Fluss

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{rot } \underline{A})\, d\underline{a} &= \iint_{S^+} (\text{rot } \underline{A})\, d\underline{a} + \iint_{S^-} (\text{rot } \underline{A})\, d\underline{a} \\ &= \oint_{\partial S} \underline{A} d\underline{l} + \oint_{-\partial S} \underline{A} d\underline{l} \\ &= \oint_{\partial S} \underline{A} d\underline{l} - \oint_{\partial S} \underline{A} d\underline{l} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Zwischen (5) und (6) besteht ein Widerspruch.
Die getroffene Annahme ist also falsch und es existiert kein solches Vektorpotential $\underline{A}$ $\blacksquare$
Noch zu tun: 1. und 3. beweisen.

Helmholtz Zerlegung

Theorem 1

Nehmen wir an, dass $\underline{H}$ in Ω rotationsfrei ist und dass jede geschlossene Kurve in Ω der Rand ∂S einer Fläche $S \subset \Omega$ ist. Dann existiert eine skalare Funktion ψ mit $\underline{H} = \text{grad}\,(\psi)$ in Ω.

Beweis

Da der Fluss von rot $\underline{H}$ auf jeder Oberfläche S verschwindet, folgt aus dem Satz von Stokes (1), dass das Linienintegral einer geschlossenen nKurve über $\underline{H}$ verschwindet $\blacksquare$

Theorem 2

Nehmen wir an, dass $\underline{B}$ in Ω divergenzfrei ist und dass jede geschlossene Oberfläche in Ω der Rand ∂S einer Teilmenge $D \subset \Omega$ ist. Dann existiert ein skalare Vektorfeld $\underline{A}$ mit $\underline{A} = \text{rot}\,(\underline{B})$ in Ω.

Beweis

Da das Intergal div $(\underline{B})$ auf jeder Teilmenge D verschwindet, $\blacksquare$

Theorem 3

Nehmen wir an, dass $\underline{H}$ in Ω rotationsfrei ist und dass $\underline{H} \times \underline{n} = 0$ auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω gilt. Dann existiert eine skalare Funktion ψ mit $\underline{H} = \text{grad}\,(\psi)$ in Ω .

Beweis

Setzt man $\underline{H}$ ausserhalb von Ω durch $\underline{0}$ fort, dann bleibt $\underline{H}$ rotationsfrei. $\underline{H}$ ist also der Gradient eines skalaren Potentials ■

Theorem 4

Nehmen wir an, dass $\underline{B}$ in Ω divergenzfrei ist und dass $\underline{Bn} = 0$ auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω gilt. Dann existiert ein Vektorfeld $\underline{A}$ mit $\underline{B} = \operatorname{rot}(\underline{A})$ in Ω .

Beweis

Setzt man $\underline{B}$ ausserhalb von Ω durch $\underline{0}$ fort, dann bleibt $\underline{B}$ divergenzfrei. $\underline{B}$ ist also die Rotation eine Vektorpotentials ■

Noch zu tun: Verstehen! Das ist die Stelle, in der die Topologie ins Spiel kommt!

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[1] Topology, Geometry and Gauge fields; Naber, Gregory; Springer Science+Business Media; 2011

[2] Scalar and vector potentials, Helmholtz decomposition and de Rham cohomology; Valli, Alberto; University of Trento, Italy