Kinematik

- Definition Drehimpuls $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$
- Definition Drehmoment $\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$
- Aus dem Newtonschen Gesetz $\underline{F} = \frac{dp}{dt}$ folgt mit $\underline{p} = m\underline{v}$ für das Drehmoment $\underline{M} = \underline{r} \times \frac{d(mv)}{dt}$ und mit

Starre Körper

- Ein starrer Körper S_N im $\mathbb{R}^3$ wird durch N Punkte $P_n \quad n = 1, \cdots, N$ mit $N \geq 1$ und mit paarweise festen Abständen $\|P_i - P_j\| \neq 0$ für alle $\forall i \neq j$ definiert.
- Die Punktabstände sind vorgegeben und werden im folgenden Zwangsbedingungen genannt. Ihre Anzahl wird als Funktion der Punktanzahl N mit Z_N bezeichnet. Es ist anschaulich klar, dass $Z_1 = 0$, $Z_2 = 1$ und $Z_3 = 3$ gilt.
- Erweitert man den starren Körper S_N mit $N \geq 3$ um einen Punkt P_{N+1} zu einem starren Körper S_{N+1}, so muss man P_{N+1} mit mindestens 3 Punkten aus S_N verbinden. Verbindet man P_{N+1} mit weniger als 3 Punkten, ist das Ergebnis wegen der neuen Bewegungsfreiheitsgrade kein starrer Körper mehr.
- Für die Anzahl Z_{N+1} der Zwangsbedingungen des starren Körpers S_{N+1} mit $N \geq 3$ gilt also die Rekursionsbeziehung

$$Z_{N+1} - Z_N = 3. \tag{1}$$

- Aus dem linearen Ansatz $Z_N = aN + b$ folgt wegen (1) $a = 3$. Wegen $Z_3 = 3$ folgt $b = -6$. Also gilt für $N \geq 3$

$$Z_N = 3N - 6.$$

- Man erhält für Anzahl der Zwangsbedingungen

$$Z_N = \begin{cases} N - 1 & \text{für} \quad N < 3 \\ 3N - 6 & \text{für} \quad N \geq 3 \end{cases}. \tag{2}$$

Kinematik starrer Körper

- Wir betrachten zwei Koordinatensysteme: das Laborsystem U mit den Koordinaten $(u, v, w)^T$ und das körperfeste System X mit den Koordinaten $(x, y, z)^T$.
- Das Laborsystem U sei ein Intertialsystem.
- Der Ursprung des körperfesten Systems X sei im Laborsystem U durch die Koordinaten $\underline{u}_0(t) = (u_0(t), v_0(t), w_0(t))^T$ gegeben.
- Ein körperfester Punkt $\underline{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ aus X hat im Laborsystem U die zeitliche Darstellung $\underline{u}(t) = \underline{u}_0(t) + \underline{x}(t)$ mit der Geschwindigkeit im Laborsystem

$$\frac{d\underline{u}(t)}{dt} = \frac{d\underline{u}_0(t)}{dt} + \frac{d\underline{x}(t)}{dt}.$$

- Translation im körperfesten System X mit Geschwindigkeit $\underline{v}(t)$ mit Startwert $\underline{x}_0$: $\underline{x}(t) = \underline{v}t + \underline{x}_0$.

- Rotation um den Ursprung im körperfesten System X: $\underline{x}(t) = D\underline{x}_0$.
- Analogie Translation $\Longleftrightarrow$ Rotation:
  Trägheitsmoment (Tensor 2. Stufe) $\Theta \Longleftrightarrow$ Masse (Skalar) m
  Winkel $\varphi \Longleftrightarrow$ Ort x
  Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega} \Longleftrightarrow$ Geschwindigkeit $\underline{v}$
  Winkelbeschleunigung $\underline{\alpha} = \frac{d\underline{\omega}}{dt} \Longleftrightarrow$ Beschleunigung $\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt}$
  Drehimpuls $\underline{L} = \Theta\underline{\omega} \Longleftrightarrow$ Impuls $\underline{p} = m\underline{v}$
  Drehmoment $\underline{M} \Longleftrightarrow$ Kraft $\underline{F}$
  Drehimpulssatz $\underline{M} = \frac{d\underline{L}}{dt} \Longleftrightarrow$ Newtonsches Gesetz $\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt}$[1]

References

[1] Peter Goldreich et. al.; Some Remarks about Polar Wandering; Journal of Geophysical Research; 1969

[1] Der Drehimpulssatz folgt direkt aus dem Newtonschen Gesetz:
Mit dem Ortsvektor $\underline{r}$ des Teilchens der Masse m und seinem Impuls $\underline{p}$ ist sein Drehimpuls (Definition) $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$.
Für dessen zeitliche Ableitung gilt

$$\dot{\underline{L}} = \frac{d\underline{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\underline{r} \times \underline{p}\right) = \frac{d\underline{r}}{dt} \times \underline{p} + \underline{r} \times \frac{d\underline{p}}{dt}. \tag{3}$$

Für das Drehmoment einer am Teilchen angreifenden Kraft $\underline{F}$ gilt (Definition) $\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$.
Mit dem Newtonschen Gesetz $\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt}$ ergibt sich daraus zusammen mit (3)

$$\begin{aligned} \underline{M} &= \underline{r} \times \frac{d\underline{p}}{dt} \\ &= \dot{\underline{L}} - \frac{d\underline{r}}{dt} \times \underline{p} \\ &= \dot{\underline{L}} - \underline{v} \times \underline{p}. \end{aligned}$$

Wegen $\underline{v} \times \underline{p} = m\left(\underline{v} \times \underline{v}\right) = \underline{0}$ folgt der Drehimpulssatz

$$\underline{M} = \dot{\underline{L}}.$$