Ebenentransformationen

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz

Normierung

Die Matrizen der Ebenentransformationen (siehe auch Abbildung 1)

$$\underline{G}(a,b,c) = \frac{1}{a+b+c}\begin{pmatrix} b+c & c \\ a & a+b \end{pmatrix} \tag{1}$$

haben für $\lambda \neq 0$ die Eigenschaft: $\underline{G}(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \underline{G}\,(a,b,c)$ (Skaleninvarianz). Es ist durch entsprechende Wahl von λ stets möglich, die Normierung $a+b+c=1$ zu erreichen. Man erhält die äquivalente Darstellung der Ebenentransformationsmatrizen

$$\underline{g}(a',c') = \begin{pmatrix} 1-a' & c' \\ a' & 1-c' \end{pmatrix}, \tag{2}$$

die nur noch von 2 Parametern abhängig ist. Durch die Ersetzungen $a' \mapsto a$, $1-(a'+c') \mapsto b$ und $c' \mapsto c$ in Gleichung (2) erhält man wieder die entnormierte Ebenentransformation $\underline{G}(a,b,c)$.

Im folgenden schreibe ich wegen der einfacheren Schreibweise a, c anstatt a', c'.

Symmetrie

Die Matrizen (1) und (2) besitzen die Eigenschaft, dass die Summe ihrer Zeilenelemente gleich 1 ist — der physikalische Grund dafür ist der Erhaltungssatz der Kraft, wie aus der Beziehung

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \underline{g}(a,c) \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ a \end{pmatrix} A_1 + \begin{pmatrix} c \\ 1-c \end{pmatrix} A_2 \tag{3}$$

deutlich wird: es folgt nämlich aus (3) die Kräftebilanzgleichung $B_1 + B_2 = A_1 + A_2$.

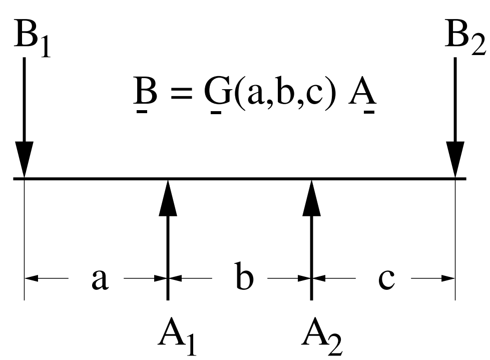

Abbildung 1: Zur Definition der Ebenentransformationen nach Gleichung (1)

Die Eigenschaft der 1-Zeilensummen bleibt auch bei der Hintereinanderausführung zweier Ebenentransformationen erhalten — sie bilden, bezogen auf die Matrizenmultiplikation, eine Gruppe.

Dies ist ein hübsches kleines Beispiel dafür, wie sich physikalische Erhaltungssätze in mathematische Symmetrien abbilden.

Definition der Gruppe $ET(2)$

Die Gruppe der Ebenentransformationen $ET(2) := (G^{\pm}, \cdot)$[1] wird wie folgt definiert:

Menge	$G^{\pm} := \left\{(g_{ij}) := \underline{g}\,(a,c) \in R^{2\times 2},\ \det(\underline{g}) \neq 0,\ \sum_i g_{ij} = 1\right\}$
Multiplikation $\cdot$	$\cdot : G^{\pm} \times G^{\pm} \longmapsto G^{\pm}$ $\underline{g}(A,C) := \underline{g}\,(a,c) \cdot \underline{g}\left(a^{'}, c^{'}\right)$ mit: $A = a(1-a^{'}) + (1-c)a^{'}$ $C = (1-a)c^{'} + c(1-c^{'})$ Assoziativgesetz $(\underline{r}, \underline{s}, \underline{t} \in G^{\pm})$: $(\underline{r} \cdot \underline{s}) \cdot \underline{t} = \underline{r} \cdot (\underline{s} \cdot \underline{t})$
Neutrales Element	$\underline{e} := \underline{g}\,(0,0)$
Inverses Element	$\underline{g}^{-1}\,(a,c) := \underline{g}\left(\frac{-a}{1-(a+c)}, \frac{-c}{1-(a+c)}\right)$

Grundmenge der Gruppe $ET(2)$

Die Grundmenge $G^{\pm}$ der Gruppe $ET(2)$ ist eine Teilmenge des Vektorraumes $V := span(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ mit der Basis[2]

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. alle $\underline{g} \in G^{\pm}$ lassen sich durch ihre Komponenten $\alpha, \beta, \gamma \in R$ darstellen: $\underline{g} = \alpha\underline{e}_1 + \beta\underline{e}_2 + \gamma\underline{e}_3$. Durch Vergleich erhält man für die Komponenten

$$\begin{aligned} \alpha &= a \\ \beta &= 1-(a+c) \\ \gamma &= c, \end{aligned}$$

d.h. es gilt $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Eine Skizze eines Teiles der Menge zeigt Abbildung 2.

Für die Determinante eines Gruppenelementes gilt der Zusammenhang

$$\det \underline{g} = 1 - (a+c)\,.$$

[1]Der Name "ET" steht dabei für "Ebenentransformation" , die "2" ist die Dimensionskennzeichnung. Die Matrizen- und Vektormultiplikation wird in dieser Arbeit mit $\cdot$ bezeichnet.

[2]Durch Ergänzung dieser Basis um das Element

$$\underline{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erhält man eine Basis des Raumes der reellen 2×2-Matrizen.

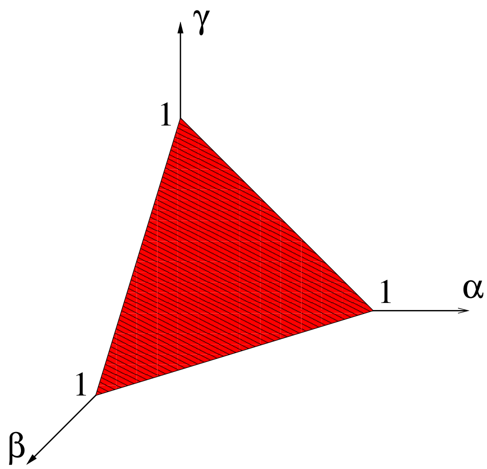

Abbildung 2: Skizze der Menge $G^{\pm}$ für den Komponentenbereich $\alpha, \beta, \gamma > 0$

Aus der Forderung $\det(\underline{g}) \neq 0$ folgt $\beta \neq 0$, sodass $G^{\pm}$ in zwei Zusammenhangskomponenten (jeweils eine für $\beta < 0 : G^-$ und eine für $\beta > 0 : G^+$) zerfällt. Die zur Teilmenge G^+ gehörende einfach zusammenhängende Untergruppe von $ET(2)$ wird mit $ET^+(2)$ bezeichnet - G^+ ist die Zusammenhangskomponente des neutralen Elementes von $ET(2)$.

Lie-Gruppe $ET^+(2)$ und Lie-Algebra $et(2)$

Die Gruppen $ET(2)$ und $ET^+(2)$ sind Lie-Gruppen. Beide besitzen die gleiche Lie-Algebra $et(2)$, deren Grundmenge LG der Tangentialraum des gemeinsamen neutralen Elementes $\underline{e}$ ist. Man erhält für die Lie-Algebra $et(2)$

Menge	$LG := \{(h_{ij}) \in R^{2\times 2},\ \sum_i h_{ij} = 0\}$
Multiplikation $[\cdot,\cdot]$, (Lie-Klammer)	$[\cdot,\cdot]:\ LG \times LG \longmapsto LG$ $[\underline{h}_1, \underline{h}_2] := \underline{h}_1 \cdot \underline{h}_2 - \underline{h}_2 \cdot \underline{h}_1$ mit: $[\underline{h}_1, \underline{h}_2] = -[\underline{h}_2, \underline{h}_1]$ $[\alpha \underline{h}_1 + \beta \underline{h}_2, \underline{h}_3] = \alpha [\underline{h}_1, \underline{h}_3] + \beta [\underline{h}_2, \underline{h}_3]$ $[\underline{h}_1, [\underline{h}_2, \underline{h}_3]] + [\underline{h}_2, [\underline{h}_3, \underline{h}_1]] + [\underline{h}_3, [\underline{h}_1, \underline{h}_2]] = \underline{0}$
Lie-Gruppendarstellung	$\exp(\underline{h}) \in G, \quad \forall \underline{h} \in LG$

Für die Matrizen-Multiplikation $\cdot$ in LG gilt für alle $\underline{v} \in G^+$ oder $\underline{v} \in LG$ und alle $\underline{w} \in LG$:

- $\underline{v} \cdot \underline{w} = (\sum_j v_{ij}) \underline{w} \in LG$

Weitere Eigenschaften der Lie-Klammer und der Lie-Algebra:

- Eine Basis von LG ist durch $\underline{e}_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_2^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben.
- Die Strukturkonstanten c_{ij}^k einer Lie-Algebra sind definiert durch $[\underline{e}_i^*, \underline{e}_j^*] = c_{ij}^k\, \underline{e}_k^*$.

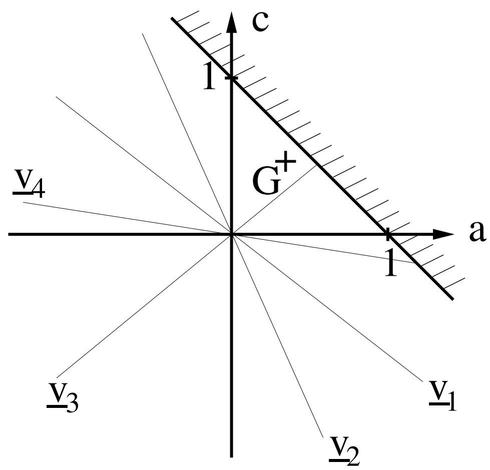

Abbildung 3: Durch verschiedene $\underline{v}_i \in LG$ erzeugte Untergruppen von G^+

Die nichtredundanten Strukturkonstanten von $et(2)$ ergeben sich zu $c^1_{12} = -1$ und $c^2_{12} = 1$.

- Es gilt $[\underline{h}_1, \underline{h}_2] = \underline{0}$ genau dann, falls $\underline{h}_1$ und $\underline{h}_2$ linear abhängig sind.
- Jedes Element $\underline{v} \in LG$ der Lie-Algebra liefert eine einparametrige Untergruppe $G^v = \{\exp(t\underline{v})\}$ von G^+.

  Beweis:

  Sei $\underline{v} \in LG$ beliebig aber fest.

  1. Das neutrale Element $\underline{e}$ erhält man aus $\{\exp(t\underline{v})\}$ für $t = 0$.
  2. Das zu $\exp(t\underline{v})$ inverse Element ist durch $\exp(-t\underline{v})$ gegeben.
  3. Für

  $$g_1 = \exp(t_1\underline{v}) \in G^+, \quad g_2 = \exp(t_2\underline{v}) \in G^+$$

  gilt

  $$\underline{g}_1 \cdot \underline{g}_2 = \exp(t_1\underline{v}) \cdot \exp(t_2\underline{v}) = \exp((t_1 + t_2)\underline{v}) \in G^+, \tag{4}$$

  da wegen der linearen Abhängigkeit von $t_1\underline{v}$ und $t_2\underline{v}$

  $$[t_1\underline{v},\ t_2\underline{v}] = \underline{0}$$

  gilt. Daraus folgt dann das zweite Gleichheitszeichen in Gleichung (4).

- Unter Benutzung von

$$(\alpha\underline{e}^*_1 + \beta\underline{e}^*_2)^n = \begin{cases} (\alpha+\beta)^{n-1}(\alpha\underline{e}^*_1 + \beta\underline{e}^*_2), & \alpha \neq -\beta \quad n = 2,3,4,\dots \\ \underline{0} & \alpha = -\beta \quad n = 2,3,4\dots \end{cases}$$

erhält man die Elemente von G^v für ein beliebiges Element $\underline{v} = \alpha\underline{e}^*_1 + \beta\underline{e}^*_2 \in LG$ explizit durch die Beziehung

$$\exp(t\underline{v}) = \begin{cases} \underline{Id} + \frac{1}{\alpha+\beta}\left(\exp((\alpha+\beta)\,t) - 1\right)\underline{v}, & \alpha \neq -\beta \\ \underline{Id} + t\underline{v}, & \alpha = -\beta, \end{cases}$$

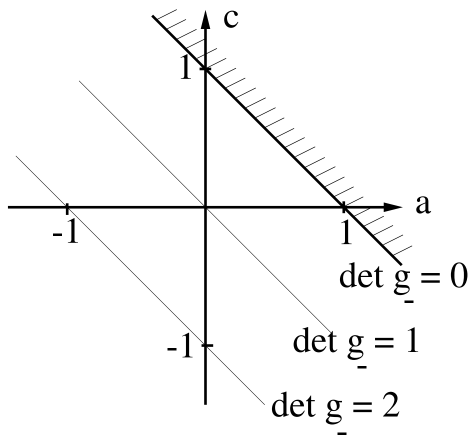

Abbildung 4: Linien gleicher Determinante

und als Trajektorien in der Gruppe G^+ erhält man (siehe auch Abbildung 3)

$$a\left(\underline{v},t\right)=\begin{cases}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(1-\exp\left(\left(\alpha+\beta\right)t\right)\right), & \alpha\neq-\beta\\ -t\alpha & \alpha=-\beta.\end{cases} \tag{5}$$

$$c\left(\underline{v},t\right)=\begin{cases}\frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(1-\exp\left(\left(\alpha+\beta\right)t\right)\right), & \alpha\neq-\beta\\ -t\beta & \alpha=-\beta.\end{cases} \tag{6}$$

- Jedes $\underline{g}\in G^+$ lässt sich darstellen durch $\underline{g}=\underline{e}+\underline{v}$ mit einem $\underline{v}\in LG$.

Rechts- und Linkstranslation

Die Rechtstranslation auf $ET^+(2)$ ist für alle $\underline{g},\underline{h}\in ET^+(2)$ gegeben durch $R_h\underline{g}:=\underline{g}\cdot\underline{h}$.
Definiert man in Kartenkoordinaten

$$R_h\underline{g}:\quad \underline{g}(A_R,C_R)=\underline{g}(a,c)\cdot\underline{h}(a^{'},c^{'}),$$

so erhält man

$$\begin{pmatrix}A_R\\C_R\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+\det\underline{g}\begin{pmatrix}a^{'}\\c^{'}\end{pmatrix}.$$

Die Rechtstranslationen bedeuten also auch in lokalen Koordinaten eine Translation von $\underline{g}$ um den mit dem Faktor $\deg\underline{g}$ gewichteten Kartenpunkt von $\underline{h}$.
Für die Linkstranslation $L_h\underline{g}:=\underline{h}\cdot\underline{g}$ erhält man analog

$$\begin{pmatrix}A_L\\C_L\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{'}\\c^{'}\end{pmatrix}+\det\underline{h}\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}.$$

Zur Veranschaulichung sind die Linien gleicher Determinante in Abbildung 4 dargestellt.

Allgemeines

Im folgenden gelte

$$M := R^2, \qquad G := ET^+(2), \qquad LG := et(2).$$

Transformationsgruppe

Durch

$$\begin{array}{rcl} \varphi : & G \longmapsto & Diff(M) \\ \varphi(\underline{g}) & := & D_g \end{array}$$

mit

$$D_g(\underline{m}) := \underline{g} \cdot \underline{m} \quad \forall \underline{g} \in G, \quad \forall \underline{m} \in M$$

wird eine Transformationsgruppe auf M definiert.
Beweis:

1. Für jedes $D_g \in Diff(M)$ existiert ein D_g^{-1} mit $D_g^{-1}(\underline{m}) = \underline{g}^{-1} \cdot \underline{m}$, da $\det \underline{g} \neq 0$ gilt.
2. Es gilt $D_g D_h = D_{g \cdot h}$

Fixpunktgruppe

Dies sind alle Transformationsgruppenelemente $\underline{h}$, die einen gegebenen Punkt $\underline{m}_0 \in M$ invariant lassen.
Satz: Die Fixpunktgruppe $H \subset G$ mit $D_h(\underline{m}_0) = \underline{m}_0$ für alle $\underline{h} \in H$ bildet eine Untergruppe von G.
Beweis:

1. Wegen $D_e(\underline{m}_o) = \underline{Id}(\underline{m}_0) = \underline{m}_0$ gilt $\underline{e} \in H$.
2. Sei $\underline{h} \in H$, und somit auch $\underline{h} \in G$. Es existiert also zu $\underline{h}$ eine Inverse $\underline{h}^{-1} \in G$.
   Wegen
   $$\underline{m}_0 = D_e(\underline{m}_0) = D_{h^{-1} \cdot h}(\underline{m}_0) = D_{h^{-1}}(D_h(\underline{m}_0)) = D_{h^{-1}}(\underline{m}_0)$$
   gilt also $\underline{h}^{-1} \in H$.
3. Sei $\underline{h}_1, \underline{h}_2 \in H$.
   Wegen
   $$D_{h_1}(\underline{m}_0) = \underline{m}_0, \quad D_{h_2}(\underline{m}_0) = \underline{m}_0$$
   folgt
   $$D_{h_1 \cdot h_2}(\underline{m}_0) = \underline{m}_0, \quad D_{h_2 \cdot h_1}(\underline{m}_0) = \underline{m}_0.$$
   Es gilt somit $\underline{h}_1 \cdot \underline{h}_2 \in H$ und $\underline{h}_2 \cdot \underline{h}_1 \in H$.

Die Fixpunktgruppen zur Transformationsgruppe φ bestehen nur aus dem Einselement.

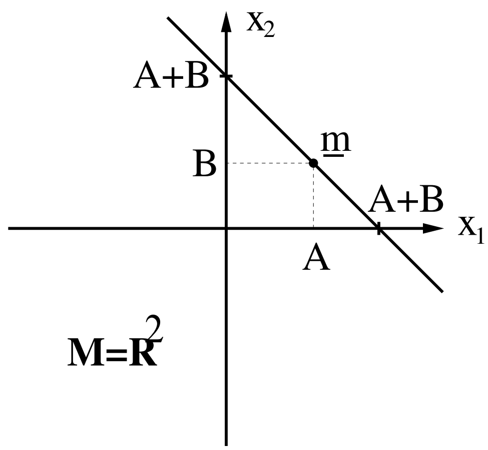

Abbildung 5: Orbit eines Punktes $\underline{m}$ der Mannigfaltigkeit $M{=}R^2$

Orbit

Der Orbit von $\underline{m} = (A,B)^T \in M$ bezogen auf die Transformationsgruppe φ ist definiert durch (siehe auch Abbildung 5)

$$O_x = \{D_g(\underline{m}),\ g \in G\}\,.$$

Wirkung

Die Gruppe G wirkt auf M effektiv und frei, aber nicht transitiv.

Lievektorfelder

Jedes $\underline{v} \in LG$ erzeugt eine einparametrige Untergruppe (mit dem Parameter t) G^v von G

$$G^v = \{\exp(t\underline{v}),\ \underline{v} \in LG,\ t \in R\}\,.$$

Durch

$$F_t^v(\underline{x}) := D_{g^v(t)}(\underline{x})$$

wird auf M ein Fluss definiert. Explizit gilt

$$F_t^v(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 1-a(\underline{v},t) & c(\underline{v},t) \\ a(\underline{v},t) & 1-c(\underline{v},t) \end{pmatrix} \underline{x},$$

mit $a(\underline{v},t)$ und $c(\underline{v},t)$ nach den Gleichungen (5) und (6).
Das Lie-Vektorfeld ist definiert durch

$$\underline{w}(\underline{x}) := \frac{dF_t^v(\underline{x})}{dt}\,|_{t=0}\ .$$

Man erhält nach kurzer Rechnung für jedes $\underline{v} = \alpha\underline{e}_1^* + \beta\underline{e}_2^* \in LG$ und $\underline{x} \in M$ das zugehörige Lie-Vektorfeld auf M

$$\underline{w}(\underline{x}) = (\underline{e} + \underline{v})\,\underline{x}.$$

Einschub: Norm und Skalarprodukt im Raum C^2

Es gelte $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in C^2$.

$$\begin{aligned} \|\underline{x}\| &= |\, x_1 \,|^2 + |\, x_2 \,|^2 \\ \langle\ \underline{x},\quad \underline{y}\ \rangle &= \frac{1}{4}\left(\|\underline{x}+\underline{y}\|^2 - \|\underline{x}-\underline{y}\|^2\right) \end{aligned}$$

Topologisches

Die physikalisch sinnvollen Parameterwerte der Ebenentransformationen sind Elemente der folgenden Teilmenge D des R^3 (Konfigurationsraum):

$$D := \left\{ \underline{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 > 0, x_2 > 0 \right\} \tag{7}$$

Diese Parameterwerte werden durch die Abbildung $\underline{G}$ auf die Ebenentransformationsmatrizen

$$G^+ := \left\{ \underline{g} = (g_{ij}) \in R^{2\times 2} \mid \det(\underline{g}) > 0, \sum_i g_{ij} = 1 \right\} \tag{8}$$

abgebildet, dabei gilt

$$\begin{aligned} \underline{G}: \quad & D \mapsto \quad G^+ \\ \underline{G}(\underline{x}) \quad & := \quad \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3} \begin{pmatrix} x_2 + x_3 & x_3 \\ x_1 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Satz 1

Die Abbildung $\underline{G} : D \mapsto G^+$ ist surjektiv.

Beweis:

Zu beweisen ist: $\underline{G}(D) = G^+$.

1. $\underline{G}(D) \subset G^+$

   Dies ist erfüllt, da für alle $\underline{x} \in D$ die Zeilensumme von $\underline{G}(\underline{x})$ gleich 1 ist und die Determinante grösser 0 ist.

2. $\underline{G}(D) \supset G^+$

   Für ein beliebiges Element von G^+ gilt die Darstellung

   $$\underline{g} = \begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \alpha & \delta \end{pmatrix}, \alpha + \beta = 1, \gamma + \delta = 1, \det \underline{g} > 0$$

   oder auch

   $$\underline{g} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \gamma \\ \alpha & 1-\gamma \end{pmatrix}, \det \underline{g} > 0.$$

   Durch

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \alpha \\
x_2 &= 1-(\alpha+\gamma) \\
x_3 &= \gamma
\end{aligned}
$$

lässt sich für jedes $\underline{g} \in G^2$ ein $\underline{G}(\underline{x})$ hinzubestimmen. Wegen $\det \underline{g} = 1-(\alpha+\gamma) > 0$ gilt $x_2 > 0$ und ausserdem gilt $x_1 + x_2 + x_3 > 0$. Daraus folgt $\underline{x} \in D$.

Satz 2

Die Abbildung $\underline{G} : D \mapsto G^+$ ist nicht injektiv.

Beweis:

Es sei $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in D$ und $\underline{y} = \lambda \underline{x}, \lambda > 0$. Es gilt also $\underline{y} \in D$ und $\underline{y} \neq \underline{x}$. Durch Einsetzen sieht man sofort $\underline{G}(\underline{x}) \neq \underline{G}(\underline{y})$.

Äquivalenzrelation

Im folgenden werden alle $\underline{x} \in D$ als äquivalent angesehen, die sich nur um einen positiven Faktor ungleich 0 unterscheiden, also

$$\underline{x} \sim \underline{y} \Leftrightarrow \underline{x} = \lambda \underline{y}, \lambda > 0.$$

Die entstehenden Äquivalenzklassen $[\underline{x}]$ werden aber im folgenden vereinfacht als $\underline{x}$ und der entstehende Faktorraum $D/\sim$ als D bezeichnet.

Anhang

Gegenüberstellung der Gruppen ET(2) und $\mathbb{C}$

	ET(2)	$\mathbb{C}$
Darstellung von g	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
Multiplikation $g \cdot g^{'}$	$\begin{pmatrix} a(1-a^{'}) + (1-c)a^{'} \\ (1-a)c^{'} + c(1-c^{'}) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} aa^{'} - bb^{'} \\ ab^{'} + ba^{'} \end{pmatrix}$
Inverse g^{-1}	$-\frac{1}{1-(a+b)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$\frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$
Einselement e	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Kommutator $\left[g, g^{'}\right]$	$\frac{1}{ac^{'} - ca^{'}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$