Pendelsimulation

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz

Mathematisches Pendel

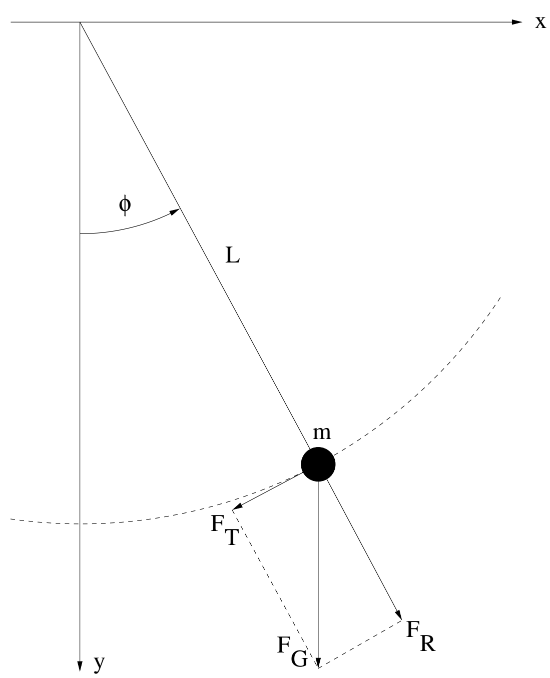

Abbildung 1: Mathematisches Pendel der Länge L und der Masse m

Auf das Pendel der Länge L und mit der Masse m (siehe Abbildung 1) wirkt zunächst mit der Erdbeschleunigung g die Gewichtskraft $F_G = mg$. Man kann sie in einen radialen Anteil F_R und einen tangentialen Anteil F_T zerlegen. Für die Dynamik des Pendels ist nur die tangentiale Komponente relevant. Es gilt für sie

$$F_T = F_G \sin\phi.$$

Mit den Newtonschen Gesetzen muss weiterhin gelten

$$F_T = -mL\frac{d^2\phi}{d^2t}.$$

Damit folgt für den Auslenkungswinkel $\phi(t)$ als Funktion der Zeit t die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \omega^2 \sin\phi(t) = 0 \tag{1}$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \tag{2}$$

Beschreibung als dynamisches System

Definition

In Anlehnung an [1] wird ein dynamisches System (Fluss) auf X durch

- einen metrischen Raum X mit der Metrik d
- eine additive Halbgruppe I über den reellen Zahlen, d.h. es gilt $0 \in I$ und für $r, s, t \in I$ besitzt die Addition $+ : I \times I \to I$ die beiden Eigenschaften

$$\begin{aligned} \text{Kommutativgesetz:} \quad & r + s = s + r \\ \text{Assoziativgesetz:} \quad & (r + s) + t = r + (s + t) \end{aligned}$$

- und eine stetige Abbildung $\pi : X \times I \to X$ mit den für alle $x \in X$ geltenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} \text{Identitätseigenschaft:} \quad & \pi(x, 0) = x \\ \text{Halbgruppeneigenschaft:} \quad & \pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s) \end{aligned}$$

  definiert.

Motivation

Sei $X = \mathbb{R}$ und $I = \mathbb{R}$. Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= x(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3}$$

besitzt die eindeutige Lösung

$$x(t) = x_0 \exp(t) .$$

Beschreibung dieser Lösung durch die Abbildung π liefert

$$\pi(x_0, t) = x_0 \exp(t) . \tag{4}$$

Behauptung Halbgruppeneigenschaft

Es gilt die Halbgruppeneigenschaft

$$\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s) .$$

Beweis Halbgruppeneigenschaft

Wegen (4) gilt für x_0 und t

$$\pi(x_0, t) = x_0 \exp(t) . \tag{5}$$

Dann gilt für $x_0 \to \pi(x_0, t)$ und $t \to s$

$$\pi(x_0, t) = \pi(x_0, t) \exp(s)$$

und somit durch Einsetzen von (5)

$$\begin{aligned} \pi(x_0, t) &= x_0 \exp(t) \exp(s) \\ &= x_0 \exp(t + s) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Literatur

[1] Dynamical Systems - Stability, Controllability and Chaotic Behaviour; Werner Krabs, Stefan Pickl; Springer-Verlag, 2010