Elektrische und magnetische Monopole

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz

Vektoren werden im folgenden durch einen Unterstrich kenntlich gemacht $\underline{v}$, ihr inneres Produkt sei durch $\bullet$, ihr äusseres Produkt durch $\times$ bezeichnet.

Weiterhin sollen Kugelkoordinaten (ρ, ϕ, Θ) zur Anwendung kommen.

Motivation

In der Elektrodynamik sind die Skalar- und Vektorpotentiale ψ und $\underline{A}$ ein nützliches mathematisches Werkzeug, das die Lösung der Maxwell-Gleichungen stark vereinfacht. Die Potentiale sind aber zur Lösung nicht unbedingt notwendig und haben keine eigenständigen physikalischen Auswirkungen.

Mit der Quantenmechanik ändert sich die Situation - hier kann auf das Vektorpotential $\underline{A}$ nicht mehr verzichtet werden und der Aharonov-Bohm-Effekt zeigt z.B., dass das Vektorpotential physikalisch messbar Auswirkungen besitzt.

Umso ärgerlicher ist es, dass es einfache physikalische Systeme gibt, für die kein Vektorpotential existiert. Ein solches System ist der (noch hypothetische!) magnetische Monopol.

Das Argument „Ist doch egal, den gibt es nicht!“ ist nicht angebracht, da es starke Hinweise für die Existenz magnetischer Monopole gibt. Insbesondere wäre die (beobachtete!) Quantisierung der elektrischen Elementarladung eine direkte Folge der Existenz des magnetischen Monopols [4].

Grundlegendes

Satz von Stokes

Sei S eine glatte, orientierte Fläche im $\mathbb{R}^m$ mit Rand ∂S. Dann gilt für ein in einer Umgebung U mit $S \subset U$ stetig differenzierbares Vektorfeld $\underline{A}$

$$\int_S (\text{rot } \underline{A}) \bullet \underline{n} dS \quad = \quad \oint_{\partial S} \underline{A} \bullet \underline{t} ds \tag{1}$$

mit dem Normalenvektor $\underline{n}$ der Fläche S und dem Tangentialvektor $\underline{t}$ des Randes ∂S.

Satz von Gauss

Sei V eine offene kompakte Teilmenge im $\mathbb{R}^m$ mit stückweise glattem Rand $S = \partial V$. Dann gilt für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\underline{A}$ auf V

$$\int_V (\text{div } \underline{A}) \, dV \quad = \quad \oint_{\partial V} \underline{A} \bullet \underline{n} dS \tag{2}$$

mit dem Normalenvektor $\underline{n}$ des Randes S.

Helmholtz-Zerlegung

Es werden für einen Definitionsbereich $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ die beiden Räume der „Harmonischen Felder“ definiert

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}_m(\Omega) \quad &= \quad \left\{ \underline{w} \in L_2^3(\Omega) \mid \text{rot}(\underline{w}) = \underline{0},\ \text{div}(\underline{w}) = \underline{0},\ \underline{w} \bullet \underline{n} = 0 \ \text{ auf } \ \partial\Omega \right\} \\
\mathbb{H}_e(\Omega) \quad &= \quad \left\{ \underline{w} \in L_2^3(\Omega) \mid \text{rot}(\underline{w}) = \underline{0},\ \text{div}(\underline{w}) = \underline{0},\ \underline{w} \times \underline{n} = 0 \ \text{ auf } \ \partial\Omega \right\}.
\end{aligned}$$

Mit $L_p^3(\Omega)$ seien die Lebeque-integrablen Funktionen L_p auf $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ bezeichnet.
Jedes beliebige Feld $\underline{V}$ auf Ω kann dann als Summe

$$\underline{V} = \underline{H}_m + \underline{H}_e$$

mit $\underline{H}_m \in \mathbb{H}_m$ und $\underline{H}_e \in \mathbb{H}_e$ ausgedrückt werden.

Maxwellgleichungen

Es gelten die quellenfreien Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\underline{E}) &= 0 \\ \operatorname{div}(\underline{B}) &= 0 \\ \operatorname{rot}(\underline{E}) &= \underline{0} \\ \operatorname{rot}(\underline{B}) &= \underline{0}. \end{aligned} \tag{3}$$

Potentiale

Aus der Vektoranalysis ist für den $\mathbb{R}^3$ bekannt

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\ \operatorname{grad}(\psi) &= \underline{0} \\ \operatorname{div}\ \operatorname{rot}(\underline{A}) &= 0. \end{aligned}$$

Damit gelten die folgenden beiden Aussagen

$$\begin{aligned} \underline{V} = \operatorname{grad}(\psi) &\implies \operatorname{rot}(\underline{V}) = \underline{0} \\ \underline{W} = \operatorname{rot}(\underline{A}) &\implies \operatorname{div}(\underline{W}) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Definitionsbereich der Monopole

Der Definitionsbereich Ω der Felder und Potentiale beider Monopole ist der gesamte $\mathbb{R}^3$ mit Ausnahme des Ortes des Monopoles im Koordinatenursprung, also $\Omega = \mathbb{R}^3 - \underline{0}$.
Dieser spezielle Definitionsbereich wird im folgenden mit U bezeichnet.

Topologie

U besitzt die folgenden topologischen Eigenschaften

- die erste Homotopiegruppe (die Fundamentalgruppe) von U ist trivial $\pi_1(U) = 0$. D.h. eine beliebige 1-Sphäre S^1 (Kreislinie) in U kann kontinuierlich auf einen Punkt in U zusammengezogen werden - man nennt U auch einfach zusammenhängend
- die zweite Homotopiegruppe von U ist nicht trivial $\pi_2(U) \neq 0$. D.h. es ist nicht möglich, eine beliebige 2-Sphäre S^2 (Kugeloberfläche) in U kontinuierlich auf einen Punkt in U zusammenzuziehen - dies scheitert für jede Kugeloberfläche, die den Ursprung umschliesst.

Homologie

Man nennt Ω homologisch trivial, falls jede geschlossene Kurve $c \subset \Omega$ der Rand ∂S einer Fläche $S \subset \Omega$ ist

$$\forall c \exists S \mid c = \partial S.$$

Noch zu tun: ist U homologisch trivial?

Existenz der Potentiale

Für die Existenz der Potentiale gelten die notwendigen Bedingungen (4) aber gelten auch die Umkehrungen?

Existiert also für jedes rotationsfreie Feld $\underline{V}$ eine skalare Funktion ψ mit $\underline{V} = \text{grad}(\psi)$ und existiert für jedes divergenzfreie Feld $\underline{W}$ ein Feld $\underline{A}$ mit $\underline{W} = \text{rot}(\underline{A})$?

Die Antworten auf diese Fragen hängen von der Topologie des betrachteten Definitionsbereichs Ω ab. Es soll für $\Omega = U$ gezeigt werden, dass die folgenden Aussagen richtig sind

1. Im Fall $\pi_1(U) = 0$ existiert für jedes rotationsfreie Feld $\underline{V}$ ein skalares Potential ψ.
2. Im Fall $\pi_1(U) = 0$ existiert für jedes divergenzfreie Feld $\underline{W}$ ein Vektorpotential $\underline{A}$.
3. Im Fall $\pi_2(U) \neq 0$ existiert für jedes rotationsfreie Feld $\underline{V}$ ein skalares Potential ψ.
4. Im Fall $\pi_2(U) \neq 0$ existiert für kein divergenzfreies Feld $\underline{W}$ ein Vektorpotential $\underline{A}$.

Noch zu tun: die Vermutungen beweisen

Theorem 1

Sei $\underline{H}$ in Ω rotationsfrei und jede geschlossene Kurve $C \subset \Omega$ sei der Rand ∂S einer Fläche $S \subset \Omega$. Dann existiert eine Funktion ψ mit $\underline{H} = \text{grad}(\psi)$ in Ω.

Beweis

Da der Fluss von $\text{rot}(\underline{H})$ auf der Oberfläche S der zu C gehörenden Kurve verschwindet, folgt aus dem Satz von Stokes (1), dass das Linienintegral jeder geschlossenen Kurve C über $\underline{H}$ verschwindet. $\underline{H}$ ist also ein konservatives Vektorfeld und es gilt $\underline{H} = \text{grad}(\psi)$. ■

Theorem 2

Sei $\underline{B}$ in Ω divergenzfrei und jede geschlossene Oberfläche $S \subset \Omega$ sei der Rand ∂S einer Teilmenge $D \subset \Omega$. Dann existiert ein Vektorfeld $\underline{A}$ mit $\underline{A} = \text{rot}(\underline{B})$ in Ω.

Beweis

Da das Integral von $\text{div}(\underline{B})$ auf jeder Teilmenge D verschwindet, folgt aus dem Satz von Stokes (1), dass der Fluss von B auf jeder geschlossenen Fläche in Ω verschwindet. Dies garantiert die Existenz eines Vektorpotentials $\underline{A}$. ■

Theorem 3

Nehmen wir an, dass $\underline{H}$ in Ω rotationsfrei ist und dass $\underline{H} \times \underline{n} = 0$ auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω gilt. Dann existiert eine Funktion ψ mit $\underline{H} = \text{grad}(\psi)$ in Ω.

Beweis

Setzt man $\underline{H}$ ausserhalb von Ω durch $\underline{0}$ fort, dann bleibt $\underline{H}$ rotationsfrei. $\underline{H}$ ist also der Gradient eines skalaren Potentials[1]. ■

Theorem 4

Nehmen wir an, dass $\underline{B}$ in Ω divergenzfrei ist und dass $\underline{B} \bullet \underline{n} = 0$ auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω gilt. Dann existiert ein Vektorfeld $\underline{A}$ mit $\underline{B} = \text{rot}(\underline{A})$ in Ω.

[1] Hier wird das Argument benutzt, dass im $\mathbb{R}^3$ jedes rotationsfreie Feld als Gradient eines skalaren Potentials bestimmt werden kann. Wo ist das denn bewiesen?

Beweis

Setzt man $\underline{B}$ ausserhalb von Ω durch $\underline{0}$ fort, dann bleibt $\underline{B}$ divergenzfrei. Das Feld $\underline{B}$ ist also die Rotation eines Vektorpotentials[2]. ■

Noch zu tun:

- Definition der „Harmonischen Felder" der Helmhotz-Zerlegung verstehen
- Theorem 2 ist die Stelle (neben Theorem 1), in der die Topologie ins Spiel kommt. Diese Voraussetzungen von sind für den magnetischen Monopol nicht erfüllt!
- Alles obige zu einem folgerichtigen Ganzen integrieren und die Lücken füllen

Felder und Potentiale des elektrischen Monopols

Sein elektrisches und magnetisches Feld ist auf U durch

$$\begin{aligned} \underline{E}(\rho, \phi, \Theta) &= \frac{q}{\rho^2}\underline{e}_\rho \\ \underline{B}(\rho, \phi, \Theta) &= \underline{0} \end{aligned} \tag{5}$$

gegeben. Dabei ist mit q die elektrische Elementarladung bezeichnet.

Noch zu tun: skalares Potential und Vektorpotential herleiten

Felder und Potentiale des magnetischen Monopols

Ein magnetischer Monopol wurde bisher noch nicht beobachtet und ist deshalb hypothetisch.
Sein magnetisches und elektrisches Feld in Kugelkoordinaten ist auf U durch

$$\begin{aligned} \underline{E}(\rho, \phi, \Theta) &= \underline{0} \\ \underline{B}(\rho, \phi, \Theta) &= \frac{g}{\rho^2}\underline{e}_\rho \end{aligned} \tag{6}$$

gegeben. Dabei ist mit g die magnetische Elementarladung bezeichnet.

Noch zu tun:

- skalares Potential herleiten
- Dirac-Strings thematisieren
- Quantelung der Elementarladung als direkte Folge der magnetischen Monopole herleiten

Beweis zu Punkt 2 für den Spezialfall „Magnetischer Monopol"

Betrachtet wird die Oberfläche S einer Kugel des Radius R um den Ursprung. Weiterhin seien S^+ und S^- ihre obere und untere Hemisphäre und ∂S ihr Äquator. ∂S sei entgegen des Uhrzeigersinns orientiert und die beiden Hemisphären S^+ und S^- besitzen einen nach aussen gerichteten Normalenvektor $\underline{n}$.

Annahme: Wir nehmen an, dass ein Vektorpotential $\underline{A}$ mit kontinuierlichen 1. partiellen Ableitungen in einer Umgebung, die S enthält, existiert.

Dann erhält man für den Fluss der Rotation des Vektorpotentials $\underline{A}$ durch S zusammen mit (6)

[2] Hier wird das Argument benutzt, dass im $\mathbb{R}^3$ jedes divergenzfreie Feld als Rotation eines Vektorpotentials bestimmt werden kann. Wo ist das bewiesen?

$$\begin{aligned}
\iint_S (\text{rot } \underline{A}) \bullet d\underline{a} &= \iint_S \underline{B} \bullet d\underline{a} \\
&= \iint_S \left(\frac{g}{\rho^2} \underline{e}_\rho \right) \bullet d\underline{a} \\
&= \frac{g}{R^2} \iint_S \underline{e}_\rho \bullet d\underline{a} \\
&= \frac{g}{R^2} \left(4\pi R^2\right) \\
&= 4\pi g.
\end{aligned} \tag{7}$$

Andererseits folgt aus dem Satz von Stokes (1) für diesen Fluss

$$\begin{aligned}
\iint_S (\text{rot } \underline{A}) \bullet d\underline{a} &= \iint_{S^+} (\text{rot } \underline{A}) \bullet d\underline{a} + \iint_{S^-} (\text{rot } \underline{A}) \bullet d\underline{a} \\
&= \oint_{\partial S} \underline{A} \bullet d\underline{l} + \oint_{-\partial S} \underline{A} \bullet d\underline{l} \\
&= \oint_{\partial S} \underline{A} \bullet d\underline{l} - \oint_{\partial S} \underline{A} \bullet d\underline{l} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Zwischen (7) und (8) besteht ein Widerspruch.
Die Annahme ist also falsch und es existiert kein solches Vektorpotential $\underline{A}$. ■
Noch zu tun: 1, 2 und 3 in voller Allgemeinheit beweisen

Alternierende Differentialformen auf n-Mannigfaltigkeiten

Im folgenden wird mit n die Dimension der Mannigfaltigkeit M bezeichnet.
Griechische Buchstaben bezeichnen Differentialformen und d deren äussere Ableitung.

1. Es gilt $d^2 = 0$.
2. Eine Form α nennt man geschlossen, falls $d\alpha = 0$ gilt.
3. Eine Form β nennt man exakt, falls $\beta = d\gamma$ gilt , wobei γ wieder eine Form ist.
4. Eine exakte Form ist im Bild und eine geschlossene Form im Kern der Abbildung d.
5. Wegen Punkt (1) ist eine exakte Form stets geschlossen.
6. Die Frage, ob jede geschlossene Form exakt ist, hängt von der Topologie des Definitionsbereiches ab.
7. Auf einem einfach zusammenhängenden Definitionsbereich ist jede geschlossene p-Form mit $1 \leqq p \leqq n$ wegen des Poincaré-Lemmas exakt.
8. Es gibt Ähnlichkeiten der äusseren Ableitung d zum Randoperator ∂ (z.B. gilt ebenso $\partial^2 = 0$). Wie hängt das tiefer zusammen? Siehe Wikipedia-Artikel „Homologietheorie“?

Satz von Stokes

Sei M eine orientierte m-dimensionale kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit abschnittsweise glattem Rand ∂M mit induzierter Orientierung. Sei ferner ω eine in einer hinreichend großen offenen Umgebung von Ω definierte alternierende Differentialform vom Grad $m-1$, die als stetig differenzierbar vorausgesetzt wird.
Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Noch zu tun:

- Warum gilt Punkt (1)?
- Poincaré-Lemma verstehen
- Zusammenhänge verstehen
- Alles obige in der Sprache der Differentialformen formulieren

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[1] Topology, Geometry and Gauge fields; Naber, Gregory; Springer Science+Business Media; 2011

[2] Scalar and vector potentials, Helmholtz decomposition and de Rham cohomology; Valli, Alberto; University of Trento, Italy

[3] Quantised singularities in the electromagnetic field; Dirac, P.A.M.; Proc. Roy. Soc., A133(1931), 60–72

[4] The theory of magnetic poles; Dirac, P.A.M.; Phys. Rev., 74(1948), 817–830