Pendelsimulation

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz

Mathematisches Pendel

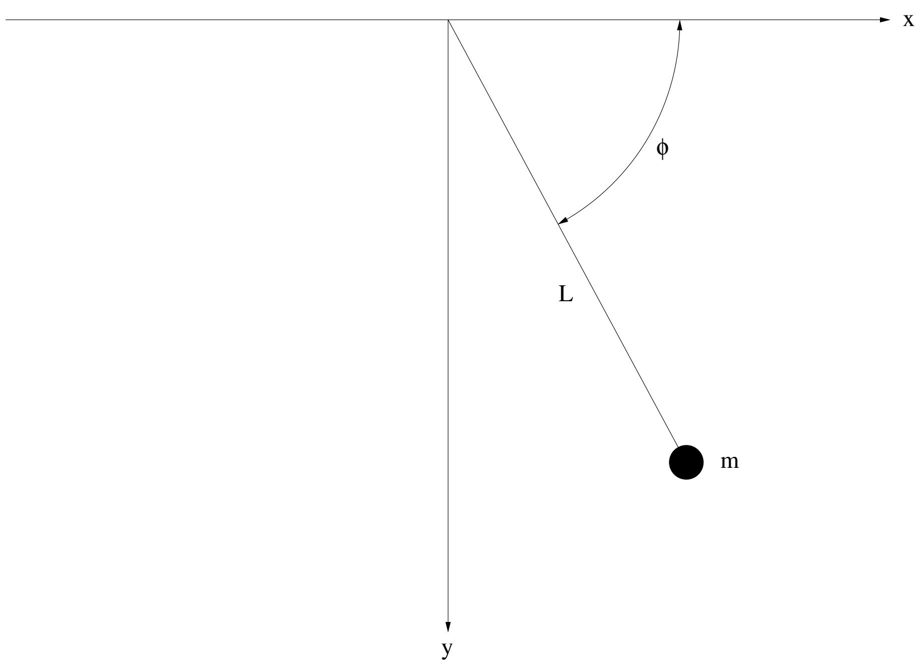

Abbildung 1: Mathematisches Pendel der Länge L und der Masse m

Auf das Pendel der Länge L und mit der Masse m (siehe Abbildung 1) wirkt zunächst mit der Erdbeschleunigung g die Gewichtskraft $F_G = mg$. Man kann sie in einen radialen Anteil F_R und einen tangentialen Anteil F_T zerlegen. Für die Dynamik des Pendels ist nur die tangentiale Komponente relevant. Es gilt für sie

$$F_T = F_G \sin\phi.$$

Mit den Newtonschen Gesetzen gilt

$$F_T = -mL\frac{d^2\phi}{d^2t}.$$

Damit folgt für den Auslenkungswinkel $\phi(t)$ als Funktion der Zeit t die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \omega^2 \sin\phi(t) = 0 \tag{1}$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \tag{2}$$

Phasenraumdarstellung

Mit den Definitionen

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \phi(t) \\
x_2(t) &= \frac{d}{dt}\phi(t)
\end{aligned} \tag{3}
$$

folgt aus (1) die Phasenraumdarstellung

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x_1(t) &= x_2(t) \\
\frac{d}{dt}x_2(t) &= -\omega^2 \sin x_1(t) .
\end{aligned} \tag{4}
$$

Aus (3) und (4) folgt

$$\frac{d^2}{dt^2}x_1(t) = -\omega^2 \sin x_1(t)$$

und durch Anwendung der Kettenregel (siehe dazu z.B. [2])

$$\frac{d}{d\phi}\left[f(g(\phi))\right] = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(\phi)}{d\phi} \tag{5}$$

ergibt sich daraus

$$\frac{d^2}{dt^2}x_1(t) = -\omega^2 \sin x_1(t) .$$

Beschreibung als dynamisches System

In Anlehnung an [1] wird ein dynamisches System (Fluss) auf X durch

- einen metrischen Raum X mit der Metrik d
- eine additive Halbgruppe I über den reellen Zahlen, d.h. es gilt $I \subseteq \mathbb{R}$ und mit $0 \in I$ und $r, s, t \in I$ besitzt die Addition $+ : I \times I \to I$ die beiden Eigenschaften

$$
\begin{aligned}
\text{Kommutativgesetz:} &\quad r + s = s + r \\
\text{Assoziativgesetz:} &\quad (r + s) + t = r + (s + t)
\end{aligned}
$$

- eine stetige Abbildung $\pi : X \times I \to X$ mit den für alle $x \in X$ geltenden Eigenschaften

$$
\begin{aligned}
\text{Identitätseigenschaft:} &\quad \pi(x, 0) = x \\
\text{Halbgruppeneigenschaft:} &\quad \pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s)
\end{aligned}
$$

  definiert.

Definitionen

Trajektorie durch Punkt $x \in X$

$$\gamma_I(x) = \cup_{t \in I} \{\pi(x,t)\}$$

Limitmenge Punkt $x \in X$

$$L_I(x) = \cap_{t \in I} \overline{\gamma_I(\pi(x,t))}$$

Im folgenden wird auf I die Existenz von Ordnungsrelationen $\leq$ und $\geq$ vorausgesetzt. Aus diesem Grund wird nur noch der Spezialfall $I = \mathbb{R}$ betrachtet.

Positive und negative Halbtrajektorien

$$\begin{aligned} \gamma_-(x) &= \{\pi(x,t) \mid t \leq 0\} \\ \gamma_+(x) &= \{\pi(x,t) \mid t \geq 0\} \end{aligned}$$

Alpha- und Omegalimits

$$\begin{aligned} A(x) &= \cap_{t \in I} \overline{\gamma_-(\pi(x,t))} \\ \Omega(x) &= \cap_{t \in I} \overline{\gamma_+(\pi(x,t))} \end{aligned}$$

Invarianz

$A \subseteq X$ ist invariant, falls $\gamma_{\mathbb{R}}(x) \subseteq A$ für alle $x \in A$.

Sätze

- A ist genau dann invariant, falls $A = \cup_{x \in A} \gamma_{\mathbb{R}}(x)$ gilt.
- Mit A ist auch $\overline{A}$ invariant.
- Für alle x ist $\Omega(x)$ invariant. $\Omega(x)$ ist abgeschlossen.

Beispiel

Es sei $X = \mathbb{R}^2$ und $I = \mathbb{R}$. Für die Abbildung π gelte $\pi(x,t) = x_0$, die Trajektorie $\gamma_{\mathbb{R}}(x)$ besteht also nur aus dem isolierten Punkt x_0.

- Die Abbildung $\pi(x,t)$ ist stetig.
- Die Identitätseigenschaft der Abbildung $\pi(x,t)$ ist erfüllt.
- Die Halbgruppeneigenschaft der Abbildung $\pi(x,t)$ ist erfüllt.
- Die Trajektorie ist nicht offen, denn ihr Punkt x_0 ist kein innerer Punkt.
- Die Trajektorie ist abgeschlossen, denn ihr Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$ ist offen.

Literatur

[1] Dynamical Systems - Stability, Controllability and Chaotic Behaviour; Werner Krabs, Stefan Pickl; Springer-Verlag, 2010

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Kettenregel