Sonnenkompass

Jürgen Womser-Schütz, https://github.com/JW-Schuetz/Hobby

1 Fragestellung

Wir genau ist die bekannte Methode, die Nord-Richtung per Sonnenstand zu bestimmen?

2 Methodenbeschreibung

- einen Stab senkrecht in die Erde stecken
- das Ende des Schattens des Stabes mit einen Stein markieren
- einige Zeit abwarten bis der Stabschatten weiter gewandert ist
- das neue Schattenende des Stabes mit einem zweiten Stein markieren.

Man erhält die Nordrichtung mittels der folgenden Regeln

- R1: der Schatten des Stab-Endes bewegt sich auf der Verbindungsgeraden der beiden Steine
- R2: die Nordrichtung ist orthogonal zur Verbindungsgeraden
- R3: auf der Nordhalbkugel der Erde zeigt der Schatten Richtung Norden, auf der Südhalbkugel Richtung Süden.

3 Problemformulierung

Es werden kartesische Koordinaten (x_1, x_2, x_3) verwendet, wobei das Koordinatenpaar (x_1, x_2) die Ekliptikalebene aufspannt, der Ursprung des Koordinatensystems ist der Erdmittelpunkt (siehe dazu die Problemskizze in Abbildung 1).

Es werden die folgenden Annahmen getroffen:

- der Zeitpunkt im Jahr sei die Sommersonnenwende
- die Sonne im Punkt $\underline{S}$ sei durch einen Punktstrahler darstellt
- die Sonne habe den Abstand R_S von der Erde
- die Erde habe ideale Kugelgestalt mit dem Radius R_E
- im Punkt $\underline{P}$ der Erdoberfläche befinde sich der Stab der Länge L
- die Erd-Rotationsachse habe einen Neigungswinkel ϕ zur x_3-Achse
- die Erdoberfläche um den Stab wird durch eine Tangentialebene an die Erdkugel angenähert.

Die Methode wird allerdings auf zwei Kugelkalotten um die Pole scheitern, da das Stabende dort keinen Schatten mehr wirft.

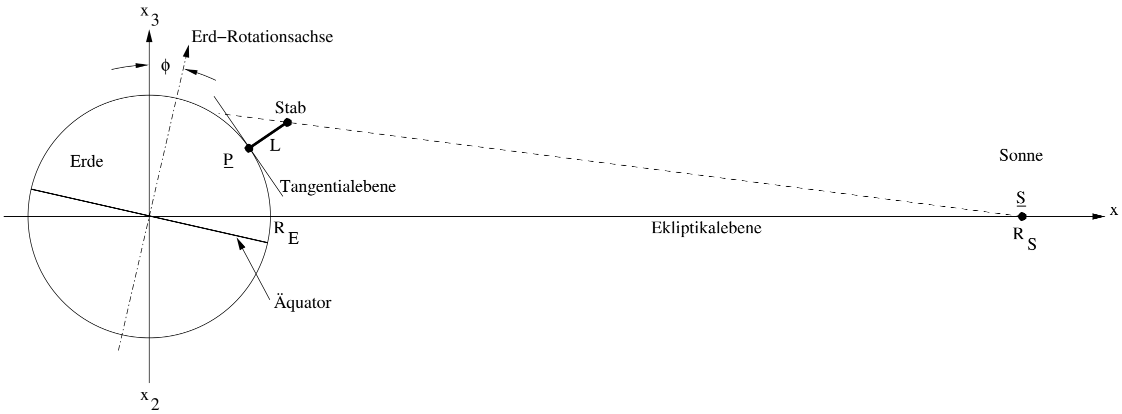

Abbildung 1: Problemskizze zur Zeit der Sommersonnenwende

Erd-Rotation

Die Erde rotiert um ihre Rotationsachse. Diese Rotation wird in Abhängigkeit des Rotationswinkels α durch die Drehmatrix D_α beschrieben. Für die Drehmatrix gilt (siehe dazu z.B. [2])

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} n_1^2\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha & n_1 n_2\,(1-\cos\alpha)-n_3\sin\alpha & n_1 n_3\,(1-\cos\alpha)+n_2\sin\alpha \\ n_2 n_1\,(1-\cos\alpha)+n_3\sin\alpha & n_2^2\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha & n_2 n_3\,(1-\cos\alpha)-n_1\sin\alpha \\ n_3 n_1\,(1-\cos\alpha)-n_2\sin\alpha & n_3 n_2\,(1-\cos\alpha)+n_1\sin\alpha & n_3^2\,(1-\cos\alpha)+\cos\alpha \end{pmatrix}$$

dabei ist

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

der Einheitsvektor, der Richtung und Orientierung der Rotationsachse definiert.
In dieser Arbeit soll Zeit der Sommersonnenwende betrachtet werden, d.h. die Rotationsachse soll, so wie in Abbildung 1 dargestellt, in der (x_1, x_3)-Ebene liegen. Es wird somit gewählt

$$\begin{aligned} n_1 &= \sin\phi \\ n_2 &= 0 \\ n_3 &= \cos\phi. \end{aligned}$$

Tangentialebene

Die Kugel mit Radius R_E um den Ursprung ist durch die Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ gegeben, mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_i x_i^2 - R_E^2.$$

Für die Tangentialebene im Berührpunkt $\underline{P} = (p_1, p_{2,} p_3)$ gilt allgemein (siehe dazu z.B. [1])

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,(x_i - p_i) = 0.$$

Dabei sind die Ableitungen im Berührpunkt $\underline{P}$ zu bilden, für den Index gilt $i \in [1, 3]$.
Für die implizite Gleichung der Tangentialebene im Berührpunkt $\underline{P}$ folgt schliesslich in unserem speziellen Fall

$$\sum_i p_i\,(x_i - p_i) = 0$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\underline{P}^T \left(\underline{x} - \underline{P}\right) \quad = \quad 0.$$

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt für die gedrehte Tangentialebene T^α

$$\left(\underline{P}^\alpha\right)^T \left(\underline{x} - \underline{P}^\alpha\right) \quad = \quad 0. \tag{1}$$

Stabende

Für den Punkt $\underline{Q}$ am Ende des Stabes der Länge L gilt

$$\underline{Q} \quad = \quad \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{P}.$$

Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt

$$\begin{aligned} \underline{Q}^\alpha &= \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) D_\alpha \underline{P} \\ &= \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{P}^\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

Verbindungsgerade

Die Sonne befinde sich im Punkt

$$\underline{S} \quad = \quad \begin{pmatrix} R_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Punkte der Verbindungsgerade $\underline{G}$ der Sonne $\underline{S}$ mit dem Stabende $\underline{Q}$ nach Gleichung (2) sind durch

$$\underline{G} \quad = \quad \mu \underline{Q} + (1 - \mu)\, \underline{S}$$

gegeben, dabei gilt $\mu \geq 0$.
Berücksichtigt man die Erdrotation durch die Drehmatrix D_α so folgt

$$\begin{aligned} \underline{G}^\alpha &= \mu D_\alpha \underline{Q} + (1 - \mu)\, \underline{S} \\ &= \mu \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu)\, \underline{S}. \end{aligned}$$

Lösung

Gesucht wird die Trajektorie des Schattens des Stabendes auf der Tangentialebene T^α in Abhängigkeit des Erd-Rotationswinkels α, der im Verlauf eines Tages den Wertebereich $[0, 2\pi]$ durchläuft.
Gesucht ist also der Schnittpunkt der Geraden $\underline{G}^\alpha$ mit der Tangentialebene T^α oder anders formuliert, gesucht wird der Geradenparameter μ, der eine Lösung $\underline{x}_0$ der Gleichung

$$\left(\underline{P}^\alpha\right)^T \left(\underline{x}_0 - \underline{P}^\alpha\right) \quad = \quad 0$$

mit der Bedingung

$$\underline{x}_0 \quad = \quad \mu \underline{Q}^\alpha + (1 - \mu)\, \underline{S}$$

zulässt.

Einsetzen liefert

$$\left(\underline{P}^{\alpha}\right)^{T}\left[\mu\underline{Q}^{\alpha}+(1-\mu)\,\underline{S}-\underline{P}^{\alpha}\right] \quad = \quad 0.$$

Wegen

$$\left(\underline{P}^{\alpha}\right)^{T}\underline{P}^{\alpha} \quad = \quad \underline{P}^{T}\underline{P}=R_E^2$$

folgt nach Ausmultiplizieren die zu lösende Gleichung

$$\mu\left[\left(1+\frac{L}{R_E}\right)R_E^2-\left(\underline{P}^{\alpha}\right)^{T}\underline{S}\right]-\left[R_E^2-\left(\underline{P}^{\alpha}\right)^{T}\underline{S}\right] \quad = \quad 0. \tag{3}$$

Da mit $\mu = 0$ die Sonne und mit $\mu = 1$ das Stabende beschrieben wird, muss für die Lösung $\mu > 1$ gelten.

Zur Problemlösung wird MatLab verwendet, wobei auch die „Symbolic Math Toolbox“ benutzt wird. Die MatLab-Quellen finden sich im GitHub-Unterverzeichnis „Matlab-Sources“.
Man erhält mit der „Symbolic Math Toolbox“ für den Teilausdruck $\left(\underline{P}^{\alpha}\right)^{T}\underline{S}$ der Gleichung (3) folgende Darstellung als Funktion des Punktes $\underline{P}$

$$\left(\underline{P}^{\alpha}\right)^{T}\underline{S} \quad = \quad -R_S\underline{A}^{T}\underline{P}$$

mit dem Vektor

$$\underline{A} \quad = \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

und seinen Komponenten

$$\begin{aligned} A_1 &= \sin^2\phi\,(\cos\alpha-1)-\cos\alpha \\ A_2 &= \cos\phi\sin\alpha \\ A_3 &= \cos\phi\sin\phi\,(\cos\alpha-1)\,. \end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\mu\left[(R_E+L)\,R_E+R_S\underline{A}^{T}\underline{P}\right]-\left(R_E^2+R_S\underline{A}^{T}\underline{P}\right) \quad = \quad 0. \tag{4}$$

Diese Gleichung wird mit MatLab numerisch nach μ gelöst - dabei wird die Nebenbedingung $\mu > 1$ berücksichtigt.
Ist eine Lösung μ_0 gefunden, erhält man den gesuchten Punkt der Tangentialebene, also den Schattenpunkt des Stabendes, durch die Gleichung

$$=$$

Diese Komponenten sind auf das Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) bezogen und müssen erst noch in das Koordinatensystem $\left(x_1', x_2', x_3'\right)$ der Tangentialebene transformiert werden, das im Berührpunkt seinen Ursprung hat.

Literatur

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Tangentialebene

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Drehmatrix