

# Sonnenkompass

Jürgen Womser-Schütz, <https://github.com/JW-Schuetz/SonnenKompass>

## Widmung

Für das Geburtstags-“Kind“ Waldemar, meinem netten Gastgeber in Las Palmas, zu seinem 73. Geburtstag.

## 1 Fragestellung

Wie ist die bekannte und unten beschriebene Methode, die Nord-Richtung per Sonnenstand zu bestimmen, zu bewerten?

## 2 Methodenbeschreibung

Die folgenden Aktionen sind zur Durchführung der Methode notwendig

- einen Stab senkrecht in die Erde stecken
- das Ende des Schattens des Stabes mit einem Stein markieren
- einige Zeit abwarten bis der Schatten weiter gewandert ist
- das neue Schattenende des Stabes mit einem zweiten Stein markieren.

Man erhält dann die Nordrichtung mittels der folgenden Regeln<sup>1</sup>

- R1: der Schatten des Stab-Endes bewegt sich auf der Verbindungsgeraden der beiden Steine
- R2: die Nordrichtung ist orthogonal zur Verbindungsgeraden
- R3: auf der Nordhalbkugel der Erde zeigt der Schatten Richtung Norden, auf der Südhalbkugel Richtung Süden.

## 3 Vereinbarungen

Im folgenden werden Basiskenntnisse der Mathematik und Physik auf Abitur-Niveau des naturwissenschaftlichen Zweiges vorausgesetzt.

Vektoren werden durch einen Unterstrich kenntlich gemacht ( $\underline{x}$ ) und ihre Transponierten ( $\underline{x}^T$ ) durch ein hochgestelltes T. Es wird die  $L_2$ -Norm  $\|\underline{x}\|$  benutzt.

Matrizen werden nicht besonders bezeichnet, sie sind von Skalaren durch den Kontext unterscheidbar.

Weiterhin werden Kugelkoordinaten  $(r, \Theta, \varphi)$  und kartesische Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  verwendet, der Ursprung beider Koordinatensysteme ist der Erdmittelpunkt. Das kartesische Koordinatenpaar  $(x_1, x_2)$  spannt die Ekliptikalebene auf. Siehe dazu die Problemskizzen in den Abbildungen 1 und 2.

---

<sup>1</sup>Die Methode wird in der Nähe der Pole scheitern, da das Stabende in Abhängigkeit der Jahreszeit evtl. keinen Schatten wirft (und natürlich auch, weil dort nicht immer Erde zum Hineinstecken des Stabes vorhanden ist ☺).

## 4 Annahmen

Es werden die folgenden Annahmen getroffen:

- die Sonne im Punkt  $\underline{S}$  sei ein Punktstrahler
- die Erde bewege sich in der Ekliptikalebene auf einer idealen Kreisbahn mit Radius  $R_S$  um die Sonne
- die Erde benötige 365 Tage für einen Umlauf um die Sonne
- die Erdoberfläche habe ideale Kugelgestalt mit dem Radius  $R_E$
- die Erd-Rotationsachse habe den Neigungswinkel  $\psi = 23.44^\circ$  zu einer Achse, die orthogonal auf der Ekliptikalebene steht
- die Erd-Präzession und Erd-Nutation werden vernachlässigt
- im Punkt  $\underline{P}$  der Erdoberfläche befinde sich der Fusspunkt des senkrecht orientierten Stabes der Länge  $L$
- für die geographische Länge des Punktes  $\underline{P}$  wird stets  $\varphi = 0$  angenommen
- die Erdoberfläche um den Fusspunkt des Stabes  $\underline{P}$  herum werde durch eine Tangentialebene an die Erdkugel angenähert
- es werden zwei Zeiten betrachtet: die Jahreszeit  $T^* \in [0, 365)$ , gemessen in Tagen und die Tageszeit  $t^* \in [0, 24)$ , gemessen in Stunden
- der Ablauf der Tageszeit  $t^*$  soll die Jahreszeit  $T^*$  unbeeinflusst lassen, die beiden Zeiten seien also voneinander entkoppelt
- die Sommersonnenwende (SSW) ist am 21. Juni, die Wintersonnenwende (WSW) ist am 21. Dezember.

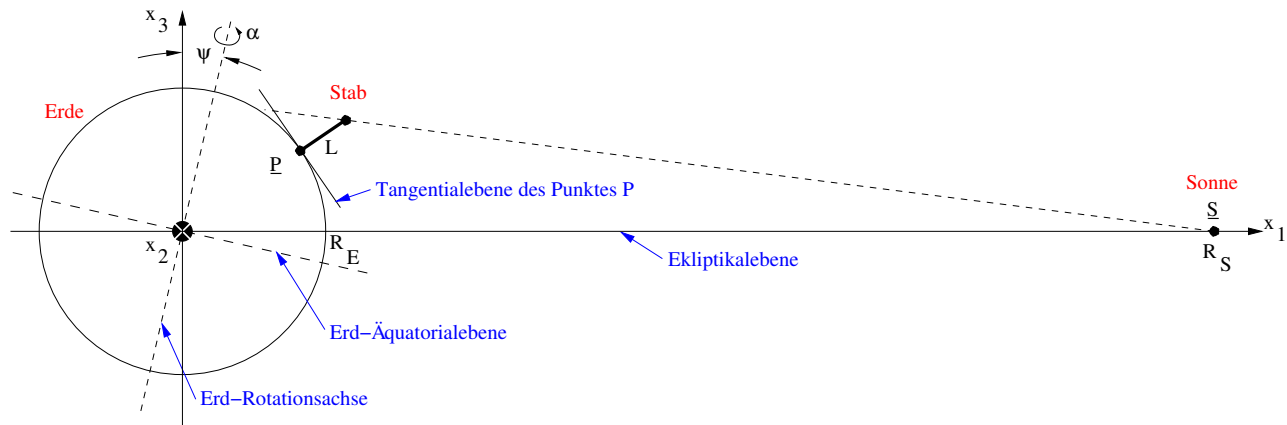


Abbildung 1: Problemskizze, SSW, astronomischer Mittag



Abbildung 2: Problemskizze, WSW, astronomischer Mittag

## 5 Generelles zur Lösung

In der folgenden Arbeit soll der Verlauf des Schattens des Stabendpunktes als Funktion der Tageszeit für einen vorgegebenen Tag im Jahr berechnet werden.

Dazu wird zunächst die Verbindungsgerade zwischen der Sonne und dem Endpunkt des Stabes konstruiert. Dann werden die Schnittpunkte der verlängerten Verbindungsgeraden mit der Tangentialebene der Erdoberfläche im Fusspunkt des Stabes als Funktion der Tageszeit bestimmt. Schlussendlich werden die gefundenen Schnittpunkte im 3-dimensionalen Raum orthogonal auf die Tangentialebene projiziert. Man erhält damit die 2-dimensionale Darstellung des Schattenverlaufes.

Es sind zwei äquivalente Lösungsansätze denkbar, die Rotation der Erde um ihre Rotationsachse zu berücksichtigen

- Die Erde um den Winkel  $\alpha$  rotieren und die Sonne fixiert lassen.
- Den Ort der Sonne um den Winkel  $-\alpha$  rotieren und die Erde fixiert lassen.

Hier wird der zweite Fall behandelt.

Zur Unterstützung der Problemlösung wird „MatLab“ und seine „Symbolic Math Toolbox“ verwendet.

Die MatLab-Quellen finden sich in meinem GitHub-Repository „Sonnenkompass“ unter „<https://github.com/JW-Schuetz>“ im Unterverzeichnis „Matlab-Sources“.

## 6 Tageszeitabhängigkeit

Die tägliche Rotation der Erde um ihre Rotationsachse wird in Abhängigkeit des Rotationswinkels  $\alpha \in [0, 2\pi)$  durch die Drehmatrix (siehe dazu z.B. [1])

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} e_1^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & e_1 e_2 (1 - \cos \alpha) - e_3 \sin \alpha & e_1 e_3 (1 - \cos \alpha) + e_2 \sin \alpha \\ e_2 e_1 (1 - \cos \alpha) + e_3 \sin \alpha & e_2^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & e_2 e_3 (1 - \cos \alpha) - e_1 \sin \alpha \\ e_3 e_1 (1 - \cos \alpha) - e_2 \sin \alpha & e_3 e_2 (1 - \cos \alpha) + e_1 \sin \alpha & e_3^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \end{pmatrix}$$

beschrieben. Dabei ist

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

ein Vektor mit  $\|\underline{e}\| = 1$ , der Richtung und Orientierung der Rotationsachse definiert.

Zum Zeitpunkt der SSW, am 21. Juni, liegt die Rotationsachse in der  $(x_1, x_3)$ -Ebene (siehe die nicht massstäbliche Abbildung 1), der Einheitsvektor  $\underline{e}$  ist somit durch

$$\begin{aligned} e_1 &= \sin \psi \\ e_2 &= 0 \\ e_3 &= \cos \psi \end{aligned}$$

gegeben. Für die Drehmatrix folgt damit

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \sin^2 \psi (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & -\cos \psi \sin \alpha & \sin \psi \cos \psi (1 - \cos \alpha) \\ \cos \psi \sin \alpha & \cos \alpha & -\sin \psi \sin \alpha \\ \cos \psi \sin \psi (1 - \cos \alpha) & \sin \psi \sin \alpha & \cos^2 \psi (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1)$$

der Winkel  $\psi$  hat den numerischen Wert  $\psi = 23.44^\circ$  (siehe dazu z.B. [2]). Die zum Rotationswinkel  $\alpha$  gehörige Tageszeit in Stunden ist durch

$$t^* = \frac{12}{\pi} \alpha \quad (2)$$

gegeben.

Die Erd-Rotationsachse  $\underline{e}$  ist wegen des Drehimpuls-Erhaltungssatzes zeitinvariant.

## 7 Jahreszeitabhängigkeit

Die Erde bewegt sich rechtshändig, also entgegen dem Uhrzeigersinn, um die Sonne (siehe dazu z.B. [3], und die nicht massstäbliche Abbildung 3).

In dieser Arbeit wird der jahreszeitliche Einfluss durch eine Kreisbewegung der Sonne um die als fixiert angenommene Erde berücksichtigt. Man kann deshalb im Erd-Koordinatensystem den Ort der Sonne als Funktion des jahreszeitlichen Umlaufwinkels

$$\Omega = \frac{2\pi}{365} T^* \quad (3)$$

durch

$$\underline{S} = R_S \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

beschreiben. Dabei ist  $T^* \in [0, 365]$  die Jahreszeit, gemessen in Tagen seit der SSW am 21. Juni.

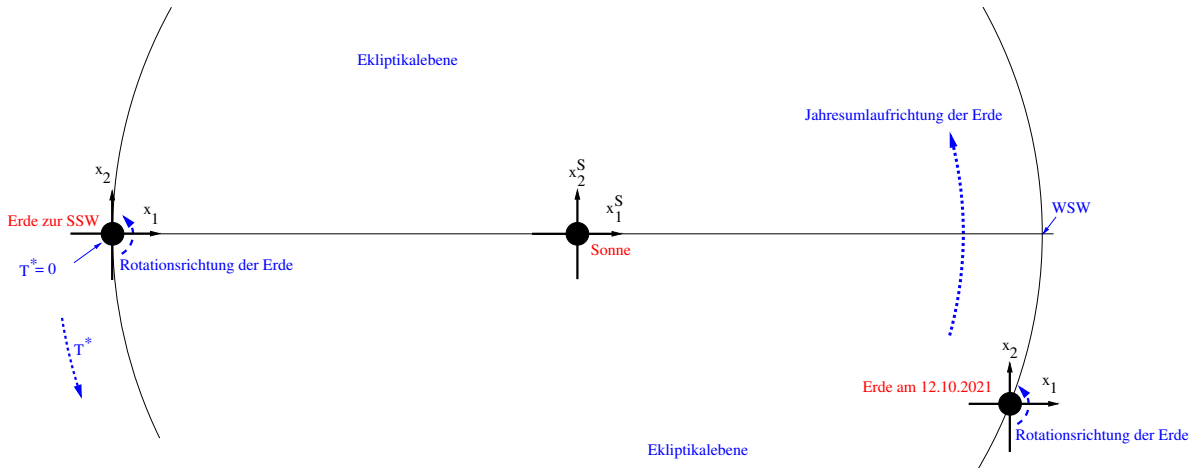


Abbildung 3: Umlauf der Erde um die Sonne

## 8 Fuss- und Endpunkt des Stabes

Aus der vorgegebenen geographischen Breite  $\Theta_G$  des Stabfusspunktes folgt für den Winkel zur Erd-Rotationsachse  $\frac{\pi}{2} - \Theta_G$  (siehe dazu [4]). Berücksichtigt man noch den Neigungswinkel  $\psi$  der Erdrotationsachse zur Ekliptik, dann folgt für den Polarwinkel im Erd-Kugelkoordinatensystem  $(r, \Theta, \varphi)$  der Ausdruck  $\Theta = \frac{\pi}{2} - \Theta_G + \psi = \frac{\pi}{2} - (\Theta_G - \psi)$  (siehe dazu auch die Skizze in Unterabschnitt 14.1 des Anhanges).

Für die Komponenten des Stab-Fusspunkts

$$\underline{P} = (p_1, p_2, p_3)^T \quad (5)$$

gelten damit wegen der in Abschnitt 4 getroffenen Annahme  $\varphi = 0$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} p_1 &= R_E \sin \left[ \frac{\pi}{2} - (\Theta_G - \psi) \right] \\ p_2 &= 0 \\ p_3 &= R_E \cos \left[ \frac{\pi}{2} - (\Theta_G - \psi) \right]. \end{aligned}$$

Mit der Stablänge  $L$  gilt für den Stabendpunkt  $\underline{Q}$

$$\underline{Q} = \left( 1 + \frac{L}{R_E} \right) \underline{P}. \quad (6)$$

## 9 Tangentialebene T

Die Kugel mit Radius  $R_E$  um den Ursprung ist mit der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_i x_i^2 - R_E^2$$

durch die Gleichung  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  gegeben. Für den Index gilt hier und im folgenden  $i \in [1, 3]$ .

Für die Tangentialebene im Berührungspunkt  $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$  gilt (siehe dazu z.B. [5])

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - p_i) = 0.$$

Dabei sind die Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  im Berührungspunkt  $\underline{p}$  zu bilden.

Für die implizite Gleichung der Tangentialebene T im Berührungspunkt  $\underline{p}$  folgt schliesslich für die Kugel der Ausdruck

$$\sum_i p_i (x_i - p_i) = 0.$$

In vektorieller Schreibweise lässt sich die Tangentialebene im Erd-Koordinatensystem durch

$$\underline{p}^T (\underline{x} - \underline{p}) = (\underline{p} - \underline{x})^T \underline{p} = 0 \quad (7)$$

charakterisieren.

## 10 Verbindungsgerade

Die Punkte der Verbindungsgerade G der Sonne  $\underline{S}$ , nach Gleichung (4), mit dem Stabende  $\underline{Q}$ , nach Gleichung (6), sind durch

$$\underline{x} = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S} \quad (8)$$

gegeben. Der reelle Geradenparameter  $\mu$  beschreibt für  $\mu = 0$  den Punkt  $\underline{S}$  (also die Sonne) und für  $\mu = 1$  den Punkt  $\underline{Q}$  (also das Stabende).

## 11 Analytische Problemlösung

### 11.1 Lösung durch Fixierung der Erde

Berücksichtigt man die Drehung der Sonne durch die Drehmatrix  $D_{(-\alpha)}$  nach Gleichung (1) und fixiert die Erde, dann folgt mit dem gedrehten Ort der Sonne

$$\underline{S}(\alpha) = D_{(-\alpha)} \underline{S} \quad (9)$$

aus Gleichung (8) die Darstellung

$$\underline{x} = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}(\alpha). \quad (10)$$

Gesucht ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Tangentialebene T oder anders formuliert, gesucht wird der Geradenparameter  $\mu$ , der eine Lösung  $\underline{x}$  der Gleichung (7) zulässt.

#### 11.1.1 Lösungspunkt

Einsetzen von Gleichung (10) in Gleichung (7) liefert

$$\underline{p}^T [\mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}(\alpha) - \underline{p}] = 0.$$

Wegen  $\underline{p}^T \underline{p} = R_E^2$  folgt nach kurzer Rechnung die Bestimmungsgleichung für den Geradenparameter

$$\mu_0(\alpha) = \frac{\Omega^S(\alpha)}{1 + \Omega^S(\alpha)} \quad (11)$$

mit der Abkürzung

$$\Omega^S(\alpha) = \frac{R_E}{L} - \frac{\underline{P}^T \underline{S}(\alpha)}{LR_E}. \quad (12)$$

Da im Ausdruck der Verbindungsgeraden mit  $\mu = 0$  die Sonne und mit  $\mu = 1$  das Stabende beschrieben wird, muss  $\mu_0(\alpha) > 1$ , und damit  $\Omega^S(\alpha) < -1$  gelten (siehe dazu den Beweis im Unterabschnitt 14.3 des Anhanges).

Der gesuchte Lösungspunkt  $\underline{x}_0$  ergibt sich als Funktion des Drehwinkels  $\alpha$  mit dem nach Gleichung (11) bestimmten  $\mu_0(\alpha)$  zu

$$\underline{x}_0^S(\alpha) = \mu_0(\alpha) \underline{Q} + [1 - \mu_0(\alpha)] \underline{S}(\alpha). \quad (13)$$

Die mit dem Winkel  $\alpha$  parametrisierten Lösungspunkte  $\underline{x}_0^S(\alpha)$  bilden eine Trajektorie im  $\mathbb{R}^3$ .

### 11.1.2 Die zweidimensionale Trajektorie

Die gefundenen 3-dimensionalen Trajektorienpunkte  $\underline{x}_0^S(\alpha)$  der Gleichung (13) sind im Koordinatensystem  $(x_1, x_2, x_3)$  der Erde gegeben. Sie sollen orthogonal auf ein zweidimensionales Koordinatensystem der Tangentialebene  $T$  abgebildet werden, dessen Ursprung im Stabfusspunkt  $\underline{P}$  liegen soll.

Zur Bestimmung dieser Abbildung wird der Punkt  $\underline{P}$  und die Trajektorienpunkte  $\underline{x}_0^S(\alpha)$  gemeinsam so gedreht, dass  $\underline{P}$  auf der positiven Achse der  $x_1$ -Koordinate zu liegen kommt. Anschliessend werden die gedrehten Trajektorienpunkte orthogonal auf die  $(x_2, x_3)$ -Ebene projiziert.

Da vorausgesetzt wurde, dass  $\varphi = 0$  gilt (siehe Abschnitt 4), genügt es,  $\underline{P}$  so um die  $x_2$ -Achse zu drehen, dass er in der Ekliptik zu liegen kommt. Der notwendige Drehwinkel um die  $x_2$ -Achse ist durch  $\Theta = \Theta_G - \psi$ , die Drehmatrix um die  $x_2$ -Achse ist durch

$$D_{\Theta}^{x_2} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

gegeben (siehe dazu z.B. [1]). Der Punkt  $\underline{P}$  wird durch diese Drehung auf  $x_1 = R_E$  und  $x_2 = x_3 = 0$  abgebildet (siehe Unterabschnitt 14.2 im Anhang).

Die 3-dimensionalen gedrehten Trajektorienpunkte  $D_{(\Theta_G - \psi)}^{x_2} \underline{x}_0^S(\alpha)$  können nun mittels der Projektionsabbildung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

auf die  $(x_2, x_3)$ -Ebene bzw. die Tangentialebene  $T$  projiziert werden. Die Koordinaten des Bildes der Projektion werden mit  $(y_1, y_2)$  bezeichnet.

Es ergibt sich schliesslich für die Punkte der gesuchten zweidimensionalen Trajektorie die Gleichung

$$\begin{pmatrix} y_1(\alpha) \\ y_2(\alpha) \end{pmatrix} = \underline{x}^S(\alpha) = A D_{(\Theta_G - \psi)}^{x_2} \underline{x}_0^S(\alpha). \quad (15)$$

## 12 Ergebnisse

### 12.1 Las Palmas de Gran Canaria

#### 12.1.1 Vergleich mit empirisch ermittelten Resultaten

Abbildung 4 zeigt die berechnete Schattentrajektorie für Las Palmas am 12. Oktober. Die Koordinaten der beiden markierten Punkte (13:28 Uhr und 13:48 Uhr Ortszeit) sind dargestellt, ihr geometrischer Abstand beträgt 16.16 cm, ihr zeitlicher Abstand beträgt 20 Minuten. Für die Stablänge wurde 1.5 m angenommen.

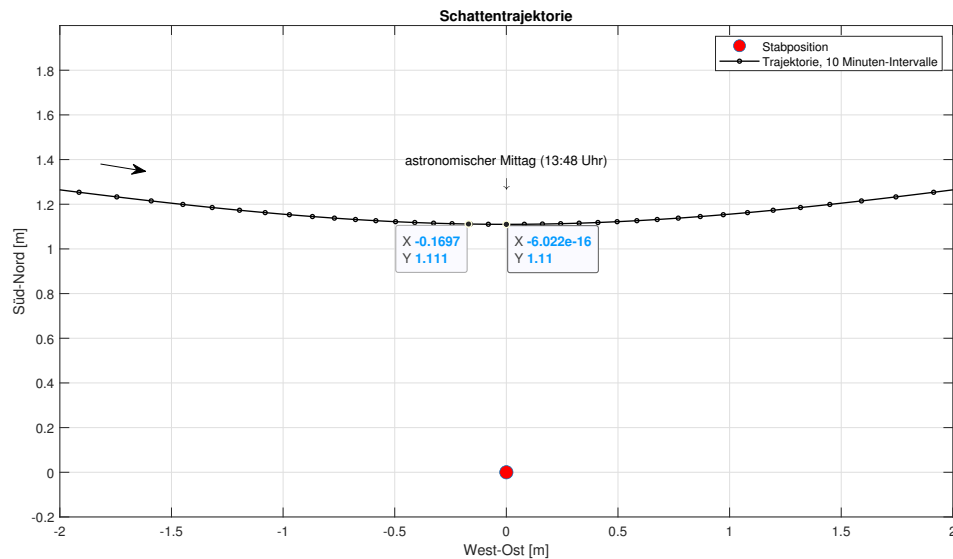


Abbildung 4: Schattentrajektorie am 12. Oktober in Las Palmas. Der Sonnenhöchststand ist an diesem Tag in Las Palmas um 13:48 Uhr (siehe z.B. [8]).

Korrespondierend zur Abbildung 4 sind in Las Palmas am 12. Oktober 2021 die nachfolgenden Fotos entstanden.



Abbildung 5: Schatten in Las Palmas am 12. Oktober 2021 um 13:33 Uhr und um 13:55 Uhr Ortszeit

Im ersten der beiden Fotos der Abbildung 5 sieht man am unteren Bildrand das gelbe Fussende des Stabes. Der Zeitunterschied beider Aufnahmen beträgt 22 Minuten. In dieser Zeit ist der Schatten ca. 20 cm weiter gewandert. Dieses Ergebnis passt recht gut zum rechnerisch ermittelten Abstand von ca. 17 cm<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Leider habe ich vor Ort weder die genaue Länge des Stabes noch die genaue Länge der Trajektorie gemessen.

### 12.1.2 SSW und WSW

Die Schattentrajektorie und den Standort des Stabes für den Strand in Las Palmas ( $28.136683^\circ$  Breite,  $-15.438392^\circ$  Länge, nach [11]) für die SSW am 21. Juni findet sich in der Abbildung 6 - die WSW unterscheidet sich nicht.

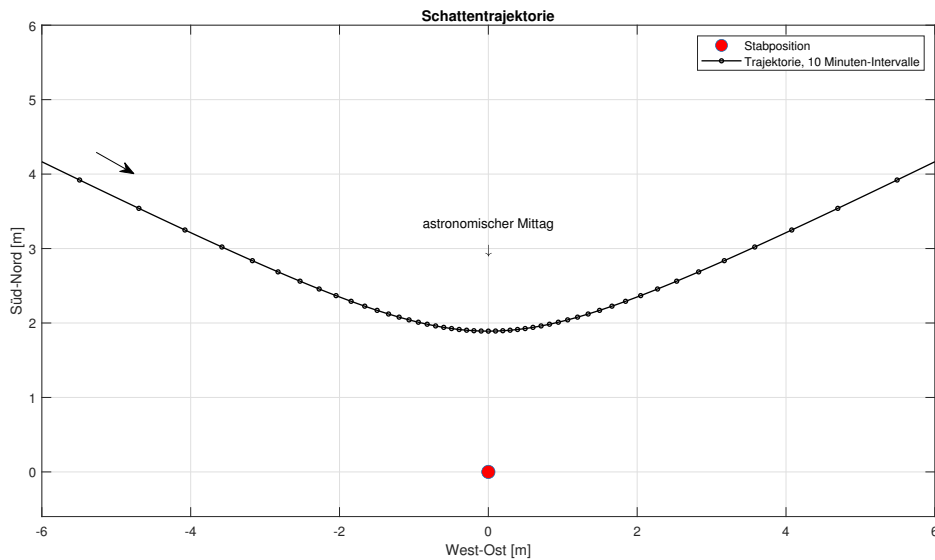


Abbildung 6: Schattentrajektorie zur SSW am 21. Juni in Las Palmas

### 12.1.3 Frühlings- und Herbst-Äquinoktium

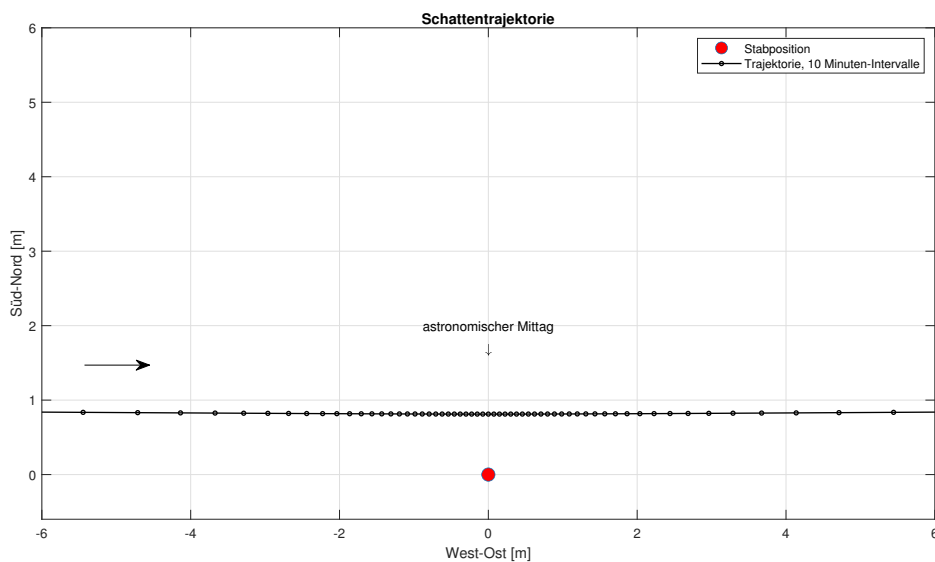


Abbildung 7: Schattentrajektorie zum Frühlings-Äquinoktium am 21. März in Las Palmas

Abbildung 7 zeigt die berechnete Schattentrajektorie für den 21. März, dem Frühlings-Äquinoktium - das Herbst-Äquinoktium hat eine identische Trajektorie.



## 13 Bewertung der Methode

Die oben beschriebenen Methode zur Bestimmung der Nord-Richtung funktioniert, falls man den Neigungswinkel  $\psi$  der Erd-Rotationsachse zu einer Achse orthogonal zur Ekliptikalebene zu  $0^\circ$  annimmt. In der Realität ist dieser Neigungswinkel aber nicht gleich  $0^\circ$  sondern  $\psi = 23.44^\circ$ .

Die Schattentrajektorie ist deshalb keine Gerade - und das nicht einmal näherungsweise.

Die dadurch verursachte Missweisung zur Nordrichtung ist nicht vernachlässigbar! Sie kann z.B. in Las Palmas je nach Tages- und Jahreszeit um  $45^\circ$  betragen.

Die genaue Nordrichtung erhält man mit der beschriebenen Methode jedoch, wenn man Zeitpunkte untersucht, die symmetrisch um den Zeitpunkt des astronomischen Mittags liegen. Als zusätzliche Hilfsmittel wären neben den beiden Steinen und dem Stab weitere Steine sowie eine Uhr nötig.

## 14 Anhang

In diesem Anhang werden Nebenrechnungen, Überprüfungen und Beweise dargestellt, die den obigen Gedankenfluss zu sehr gestört hätten.

### 14.1 Nebenrechnung und Skizze

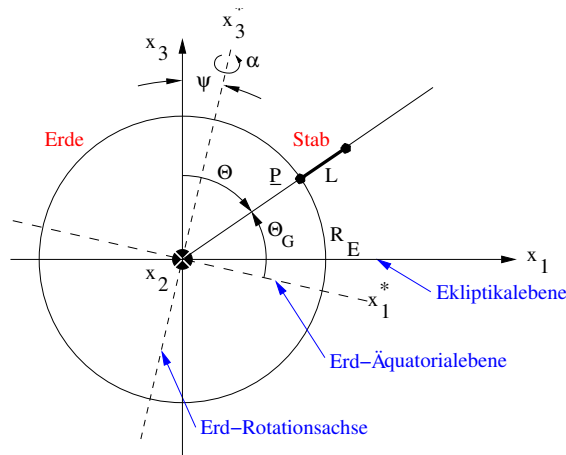


Abbildung 8: Problemskizze, SSW, astronomischer Mittag

Gegeben ist im nicht geneigten  $(x_1, x_2, x_3)$ -Koordinatensystem die geographische Breite  $\Theta_G$  des Stabfusspunktes. Für den Polarwinkel des Stabfusspunktes gilt  $\Theta = \frac{\pi}{2} - \Theta_G$ .

Im um den Winkel  $\psi$  geneigten Koordinatensystem wird der Polarwinkel  $\Theta$  des Stabfusspunktes grösser. Es folgt  $\Theta = \frac{\pi}{2} - \Theta_G + \psi = \frac{\pi}{2} - (\Theta_G - \psi)$ .

## 14.2 Abbildung des Punktes $\underline{p}$

Der Punkt  $\underline{p}$  wird durch die Drehung  $D_{(\Theta_{\mathbb{G}-\psi})}^{x_2}$  auf  $x_1 = R_E$  und  $x_2 = x_3 = 0$  abgebildet, denn es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{(\Theta_G - \psi)}^{\mathbf{x}_2} \underline{\mathbf{p}} &= \begin{pmatrix} \cos(\Theta_G - \psi) & 0 & \sin(\Theta_G - \psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\Theta_G - \psi) & 0 & \cos(\Theta_G - \psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_E \sin[\frac{\pi}{2} - (\Theta_G - \psi)] \\ 0 \\ R_E \cos[\frac{\pi}{2} - (\Theta_G - \psi)] \end{pmatrix} \\ &= R_E \begin{pmatrix} \cos(\Theta_G - \psi) \sin[\frac{\pi}{2} - (\Theta_G - \psi)] + \sin(\Theta_G - \psi) \cos[\frac{\pi}{2} - (\Theta_G - \psi)] \\ 0 \\ -\sin(\Theta_G - \psi) \sin[\frac{\pi}{2} - (\Theta_G - \psi)] + \cos(\Theta_G - \psi) \cos[\frac{\pi}{2} - (\Theta_G - \psi)] \end{pmatrix} \\ &= R_E \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 14.3 Beweis der Ungleichung $\Omega^S < -1$

## Behauptung

Aus

$$\frac{\Omega^s}{1 + \Omega^s} > 1 \quad (16)$$

folgt  $\Omega^S < -1$ .

## Beweis

Es werden für den Nenner  $1 + \Omega^S$  die drei möglichen Fälle untersucht:

- Fall  $1 + \Omega^S = 0$

Also gilt  $\Omega^S = -1$  und damit folgt aus (16) der Widerspruch  $\frac{-1}{0} > 1$ . Es existiert für diesen Fall keine Lösung.

- Fall  $1 + \Omega^S > 0$

Es folgt aus (16)  $\Omega^S > 1 + \Omega^S$  oder  $0 > 1$ . Dies ist offensichtlich falsch. Es existiert für diesen Fall keine Lösung.

- Fall  $1 + \Omega^S < 0$

Es folgt aus (16)  $\Omega^S < 1 + \Omega^S$  oder  $0 < 1$ . Dies ist offensichtlich richtig. Also existiert für diesen Fall eine Lösung, nämlich  $\Omega^S < -1$ .

## 14.4 Der astronomische Mittag

### 14.4.1 Näherung für $\psi = 0$

Es soll nun noch für jeden Jahreszeitpunkt  $T^*$  eine Näherung  $\bar{\alpha}_M$  für den Tageszeit-Rotationswinkel  $\alpha$  angegeben werden, so dass sich gerade der Sonnenhöchststand (der astronomische Mittag) einstellt.

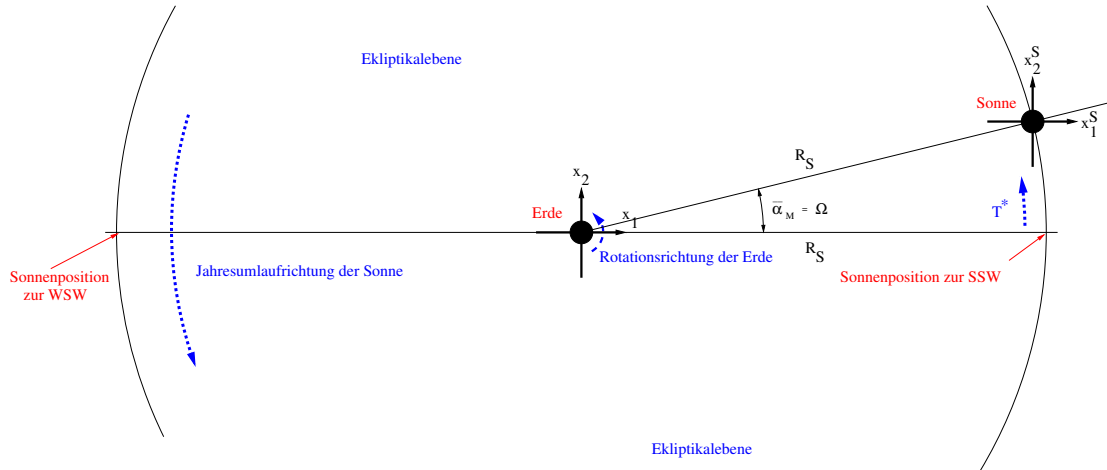


Abbildung 9: Umlauf der Sonne um die Erde

Wie man der Abbildung 9) entnehmen kann, gilt im Fall  $\psi = 0$  die Näherung

$$\bar{\alpha}_M = \Omega.$$

### 14.4.2 Der exakte Wert für $\psi \neq 0$

Der exakte Wert  $\alpha_M$  für  $\psi \neq 0$  wird aus der Steigung der 2-dimensionalen Trajektorie  $\begin{pmatrix} y_1(\alpha) \\ y_2(\alpha) \end{pmatrix}$  nach Gleichung (15) bestimmt. Die Steigung  $S(x)$  errechnet sich zu (siehe dazu z.B. [6])

$$S(x) = \frac{dy_2(x)}{dy_1} = \frac{\frac{\partial y_2(\alpha)}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y_1(\alpha)}{\partial \alpha}}. \quad (17)$$

Dieser (eher längliche ☺) Ausdruck wird mittels der „Symbolic Math Toolbox“ von MatLab berechnet (siehe dazu die MatLab-Quelldatei „SonnenKompassSymbolic.m“). Aus ihm folgt die notwendige Bedingung für das Verschwinden der Steigung

$$\cos \alpha_M \sin \Omega - \cos \Omega \cos \psi \sin \alpha_M = 0.$$

Mit  $n \in \mathbb{N}$  ist also der astronomische Mittag durch den Erdrotationswinkel

$$\alpha_M = \arctan\left(\frac{\tan \Omega}{\cos \psi}\right) + n\pi \quad (18)$$

gekennzeichnet.

Für  $\psi = 0$  stimmt die Näherung  $\bar{\alpha}_M$  mit dem Hauptwert von  $\alpha_M$  überein.

## 14.5 Symmetrie der 2-dimensionalen Trajektorie

Bei der Projektion A auf die Tangentialebene nach Gleichung (14) ist zu beachten, dass für das Sommerhalbjahr die Projektion „von vorne“ (also mit positiven Werten der  $x_1$ -Koordinate) stattfindet und im Winterhalbjahr „von hinten“ (also mit negativen Werten der  $x_1$ -Koordinate) - siehe dazu die beiden Abbildungen 1 und 2. Dies bedeutet eine Spiegelung der 2-dimensionalen Trajektorien an der  $y_2$ -Koordinaten-Achse.

Hier soll gezeigt werden, dass die Trajektorien symmetrisch zur  $y_2$ -Achse sind und das Problem somit verschwindet.

### 14.5.1 Behauptung

Für ein geeignetes  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} x_1^S(\alpha_M + \alpha) &= x_1^S(\alpha_M - \alpha) \\ x_2^S(\alpha_M + \alpha) &= -x_2^S(\alpha_M - \alpha) \\ x_3^S(\alpha_M + \alpha) &= x_3^S(\alpha_M - \alpha) \end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned} AD_{(\Theta_G - \psi)}^{x_2} \underline{x}^S &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Theta_G - \psi) & 0 & \sin(\Theta_G - \psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\Theta_G - \psi) & 0 & \cos(\Theta_G - \psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^S(\alpha) \\ x_2^S(\alpha) \\ x_3^S(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2^S(\alpha) \\ x_3^S(\alpha) \cos(\Theta_G - \psi) + x_1^S(\alpha) \sin(\Theta_G - \psi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 14.5.2 Beweis

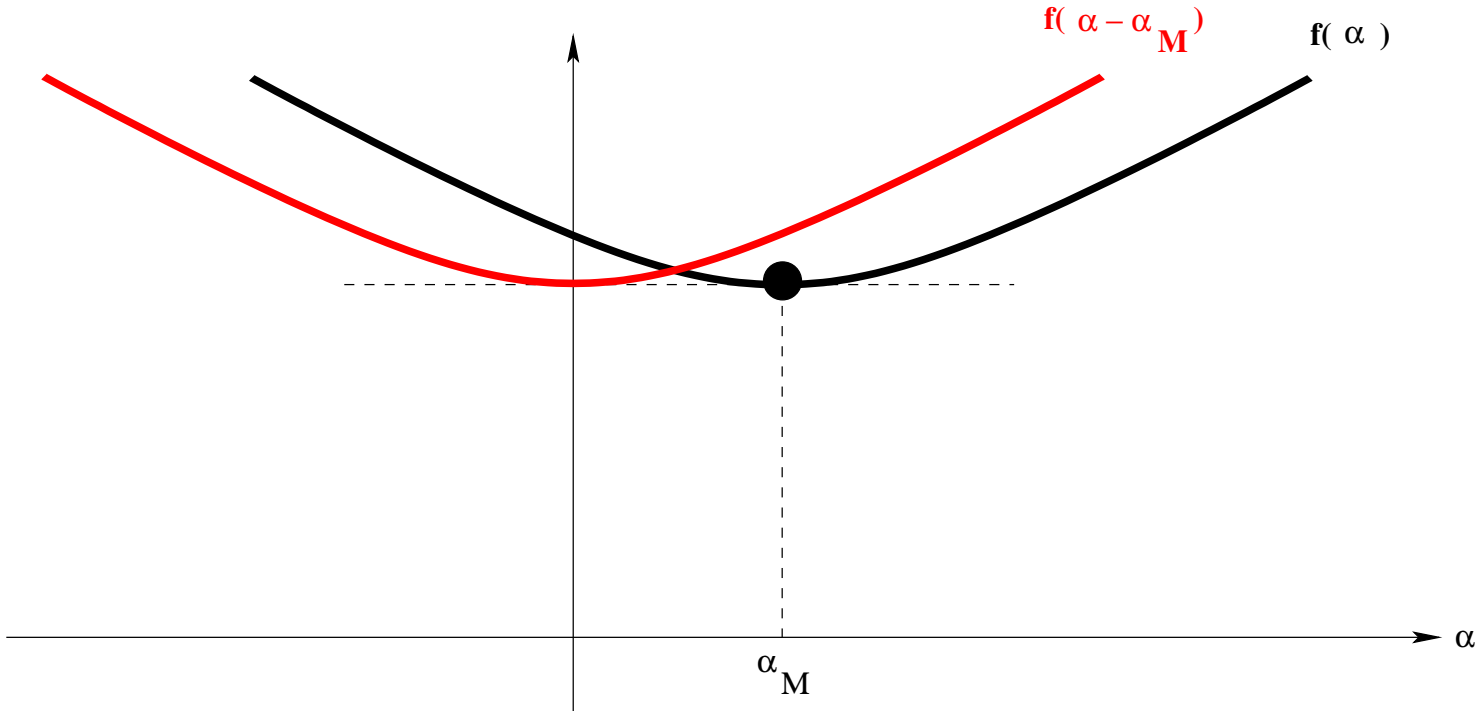


Abbildung 10: Symmetrie der 2-dimensionalen Trajektorie

Der Nachweis fehlt noch.

## 14.6 Trigonometrische Überprüfung

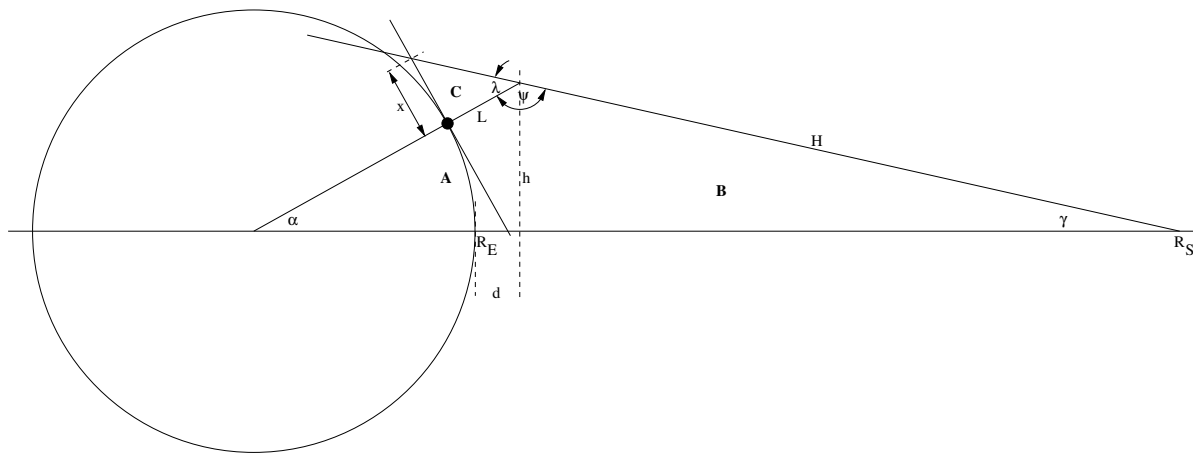


Abbildung 11: Überprüfung per Trigonometrie

Für das linke rechtwinklige Dreieck (A) mit dem Winkel  $\alpha$ , der Hypotenuse  $R_E + L$  und den Katheten  $h$  und  $R_E + d$  gilt

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{h}{R_E + L} \\ h &= (R_E + L) \sin \alpha\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{R_E + d}{R_E + L} \\ d &= (R_E + L) \cos \alpha - R_E\end{aligned}$$

Für die Hypotenuse  $H$  des rechten rechtwinkligen Dreiecks (B) mit dem Winkel  $\gamma$ , der Hypotenuse  $H$  und den Katheten  $h$  und  $R_S - R_E - d$  gilt

$$H^2 = h^2 + (R_S - R_E - d)^2$$

und für  $\gamma$  gilt

$$\begin{aligned}\sin \gamma &= \frac{h}{H} \\ \gamma &= \arcsin \left( \frac{h}{H} \right).\end{aligned}$$

Für  $\psi$  folgt wegen der Winkelsumme  $\alpha + \psi + \gamma = \pi$  im Dreieck (A,B) die Gleichung  $\psi = \pi - \alpha - \gamma$ . Für  $\lambda$  folgt damit wegen  $\lambda + \psi = \pi$  die Gleichung  $\lambda = \pi - \psi$ . Wir haben ein rechtwinkliges Dreieck (C) mit dem Winkel  $\lambda$ , und mit den Katheten L und x. Es gilt weiterhin für den gesuchten Punkt x auf der Tangente  $\tan \lambda = \frac{x}{L}$  oder umgeformt

$$x = L \tan \left[ \alpha + \arcsin \left( \frac{h}{H} \right) \right]. \quad (19)$$

Die Lösung dieser Gleichung stimmt mit den oben errechneten Ergebnissen überein (siehe MatLab-Quelle „TigonometrischerTest.m“).

## Literatur

- [1] <https://de.wikipedia.org/wiki/Drehmatrix>; Abschnitt: Drehmatrizen des Raumes  $\mathbb{R}^3$
- [2] <https://de.wikipedia.org/wiki/Erdrotation>; Abschnitt: Rotationsachse

- [3] <https://de.wikipedia.org/wiki/Erdrotation>
- [4] <https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten>; Abschnitt: Andere Konventionen
- [5] <https://de.wikipedia.org/wiki/Tangentialebene>; Abschnitt: Tangentialebene an eine implizit gegebene Fläche
- [6] [https://en.wikipedia.org/wiki/Parametric\\_derivative](https://en.wikipedia.org/wiki/Parametric_derivative), Abschnitt: First derivative
- [7] [https://de.wikipedia.org/wiki/Gleichschenkliges\\_Dreieck](https://de.wikipedia.org/wiki/Gleichschenkliges_Dreieck), Abschnitt: Berechnung und Konstruktion
- [8] <https://www.cactus2000.de/sun/city.php?id=Las+Palmas+de+Gran+Canaria&year=2021&month=10&c=ES>
- [9] Solving Least Squares Problems; Lawson, C.L.; Hanson, R.J.; SIAM Classics in Applied Mathematics 15; 1995
- [10] <https://de.wikipedia.org/wiki/Koordinatenform>; Abschnitt: Koordinatenform einer Ebenengleichung
- [11] <https://www.google.de/maps>