

Sonnenkompass

Jürgen Womser-Schütz, <https://github.com/JW-Schuetz/SonnenKompass>

Widmung

Für das Geburtstagskind Waldemar, meinem netten Gastgeber in Las Palmas, zu seinem 73. Geburtstag.

1 Fragestellung

Wir ist die bekannte und unten beschriebene Methode, die Nord-Richtung per Sonnenstand zu bestimmen, zu bewerten?

2 Methodenbeschreibung

Die folgenden Aktionen sind zur Durchführung der Methode notwendig

- einen Stab senkrecht in die Erde stecken
- das Ende des Schattens des Stabes mit einen Stein markieren
- einige Zeit abwarten bis der Schatten weiter gewandert ist
- das neue Schattenende des Stabes mit einem zweiten Stein markieren.

Man erhält dann die Nordrichtung mittels der folgenden Regeln¹

- R1: der Schatten des Stab-Endes bewegt sich auf der Verbindungsgeraden der beiden Steine
- R2: die Nordrichtung ist orthogonal zur Verbindungsgeraden
- R3: auf der Nordhalbkugel der Erde zeigt der Schatten Richtung Norden, auf der Südhalbkugel Richtung Süden.

3 Vereinbarungen

Im folgenden werden Basiskenntnisse der Mathematik und Physik auf Abitur-Niveau des naturwissenschaftlichen Zweiges vorausgesetzt.

Vektoren werden durch einen Unterstrich kenntlich gemacht (\underline{x}) und ihre Transponierten (\underline{x}^T) durch ein hochgestelltes T. Es wird die L_2 -Norm $\|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_n |x_n|^2}$ benutzt.

Matrizen werden nicht besonders bezeichnet, sie sind von Skalaren durch den Kontext unterscheidbar.

Weiterhin werden Kugelkoordinaten (r, Θ, φ) und kartesische Koordinaten (x_1, x_2, x_3) verwendet, der Ursprung beider Koordinatensysteme ist der Erdmittelpunkt. Das kartesische Koordinatenpaar (x_1, x_2) spannt die Ekliptikalebene auf. Siehe dazu die Problemskizzen in den Abbildungen 1 und 2.

¹Die Methode wird in der Nähe der Pole scheitern, da das Stabende in Abhängigkeit der Jahreszeit evtl. keinen Schatten wirft (und natürlich auch, weil dort nicht immer Erde zum Hineinstecken des Stabes vorhanden ist ☺).

4 Annahmen

Es werden die folgenden Annahmen getroffen:

- die Sonne im Punkt \underline{S} sei ein Punktstrahler
- die Erde bewege sich in der Ekliptikalebene auf einer idealen Kreisbahn mit Radius R_S um die Sonne
- die Erde benötige 365 Tage für einen Umlauf um die Sonne
- die Erdoberfläche habe ideale Kugelgestalt mit dem Radius R_E
- die Erd-Rotationsachse habe den Neigungswinkel $\psi = 23.44^\circ$ zu einer Achse, die orthogonal auf der Ekliptikalebene steht
- die Erd-Präzession und Erd-Nutation werden vernachlässigt
- im Punkt \underline{P} der Erdoberfläche befinde sich der Fusspunkt des senkrecht orientierten Stabes der Länge L
- für die geographische Länge des Punktes \underline{P} wird stets $\varphi = 0$ angenommen
- die Erdoberfläche um den Fusspunkt des Stabes \underline{P} herum werde durch eine Tangentialebene an die Erdkugel angenähert
- es werden zwei Zeiten betrachtet: die Jahreszeit $T^* \in [0, 365)$, gemessen in Tagen und die Tageszeit $t^* \in [0, 24)$, gemessen in Stunden
- der Ablauf der Tageszeit t^* soll die Jahreszeit T^* unbeeinflusst lassen, die beiden Zeiten seien also voneinander entkoppelt
- die Sommersonnenwende (SSW) ist am 21. Juni, die Wintersonnenwende (WSW) ist am 21. Dezember.

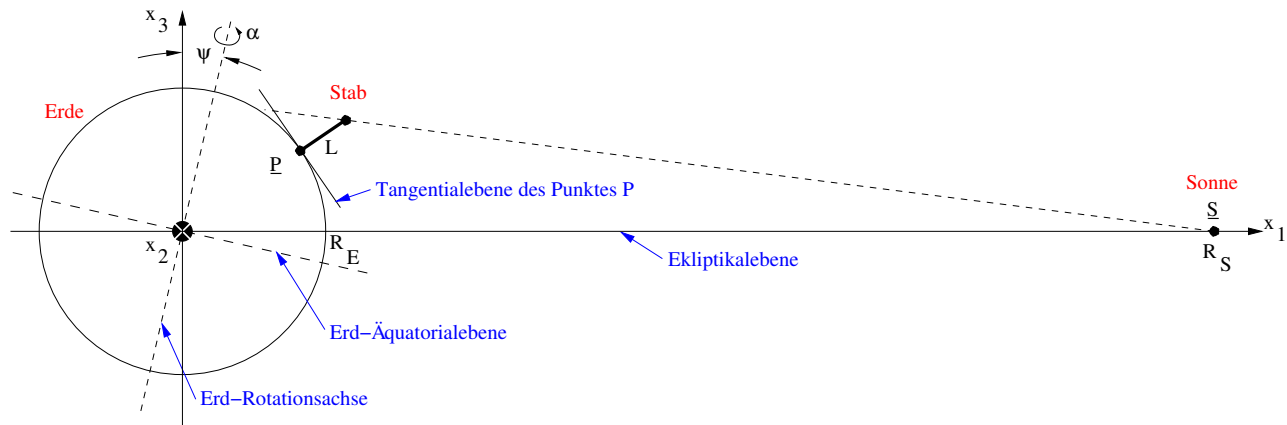


Abbildung 1: Problemskizze, SSW, astronomischer Mittag



Abbildung 2: Problemskizze, WSW, astronomischer Mittag

5 Generelles zur Lösung

In der folgenden Arbeit soll der Verlauf des Schattens des Stabendpunktes als Funktion der Tageszeit für einen vorgegebenen Tag im Jahr berechnet werden.

Dazu wird zunächst die Verbindungsgerade zwischen der Sonne und dem Endpunkt des Stabes konstruiert. Dann werden die Schnittpunkte der verlängerten Verbindungsgeraden mit der Tangentialebene der Erdoberfläche im Fusspunkt des Stabes als Funktion der Tageszeit bestimmt. Schlussendlich werden die gefundenen Schnittpunkte im 3-dimensionalen Raum orthogonal auf die Tangentialebene projiziert. Man erhält damit die 2-dimensionale Darstellung des Schattenverlaufes.

Es sind zwei äquivalente Lösungsansätze denkbar die Rotation der Erde um ihre Rotationsachse zu berücksichtigen

- Die Erde um den Winkel α rotieren und die Sonne fixiert lassen.
- Den Ort der Sonne um den Winkel $-\alpha$ rotieren und die Erde fixiert lassen.

Hier wird der zweite Fall gewählt.

Zur Unterstützung der Problemlösung wird „MatLab“ und seine „Symbolic Math Toolbox“ verwendet.

Die MatLab-Quellen finden sich in meinem GitHub-Repository „Sonnenkompass“ unter „<https://github.com/JW-Schuetz>“ im Unterverzeichnis „Matlab-Sources“.

6 Tageszeitabhängigkeit

Die tägliche Rotation der Erde um ihre Rotationsachse wird in Abhängigkeit des Rotationswinkels $\alpha \in [0, 2\pi)$ durch die Drehmatrix (siehe dazu z.B. [1])

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} e_1^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & e_1 e_2 (1 - \cos \alpha) - e_3 \sin \alpha & e_1 e_3 (1 - \cos \alpha) + e_2 \sin \alpha \\ e_2 e_1 (1 - \cos \alpha) + e_3 \sin \alpha & e_2^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & e_2 e_3 (1 - \cos \alpha) - e_1 \sin \alpha \\ e_3 e_1 (1 - \cos \alpha) - e_2 \sin \alpha & e_3 e_2 (1 - \cos \alpha) + e_1 \sin \alpha & e_3^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \end{pmatrix}$$

beschrieben. Dabei ist

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

ein Vektor mit $\|\underline{e}\| = 1$, der Richtung und Orientierung der Rotationsachse definiert.

Zum Zeitpunkt der SSW, am 21. Juni, liegt die Rotationsachse in der (x_1, x_3) -Ebene (siehe die nicht massstäbliche Abbildung 1), der Einheitsvektor \underline{e} ist somit zur SSW durch

$$\begin{aligned} e_1 &= \sin \psi \\ e_2 &= 0 \\ e_3 &= \cos \psi \end{aligned}$$

gegeben. Wegen des Erhaltungssatzes des Drehimpulses ist \underline{e} zeitinvariant.

Für die Drehmatrix folgt damit

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \sin^2 \psi + \cos^2 \psi \cos \alpha & -\cos \psi \sin \alpha & \sin \psi \cos \psi - \sin \psi \cos \psi \cos \alpha \\ \cos \psi \sin \alpha & \cos \alpha & -\sin \psi \sin \alpha \\ \sin \psi \cos \psi - \sin \psi \cos \psi \cos \alpha & \sin \psi \sin \alpha & \cos^2 \psi + \sin^2 \psi \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1)$$

der Winkel ψ hat den numerischen Wert $\psi = 23.44^\circ$ (siehe dazu z.B. [2]). Die zum Rotationswinkel α gehörige Tageszeit in Stunden ist durch

$$t^* = \frac{12}{\pi} \alpha \quad (2)$$

gegeben.

7 Jahreszeitabhängigkeit

Die Erde bewegt sich rechtshändig, also entgegen dem Uhrzeigersinn, um die Sonne (siehe dazu z.B. [3], und die nicht massstäbliche Abbildung 3).

In dieser Arbeit wird der jahreszeitliche Einfluss durch eine Kreisbewegung der Sonne um die als fixiert angenommene Erde berücksichtigt. Man kann deshalb im Erd-Koordinatensystem den Ort der Sonne als Funktion des jahreszeitlichen Umlaufwinkels

$$\Omega = \frac{2\pi}{365} T^* \quad (3)$$

durch

$$\underline{S} = R_S \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

beschreiben. Dabei ist $T^* \in [0, 365]$ die Jahreszeit, gemessen in Tagen seit der SSW am 21. Juni.

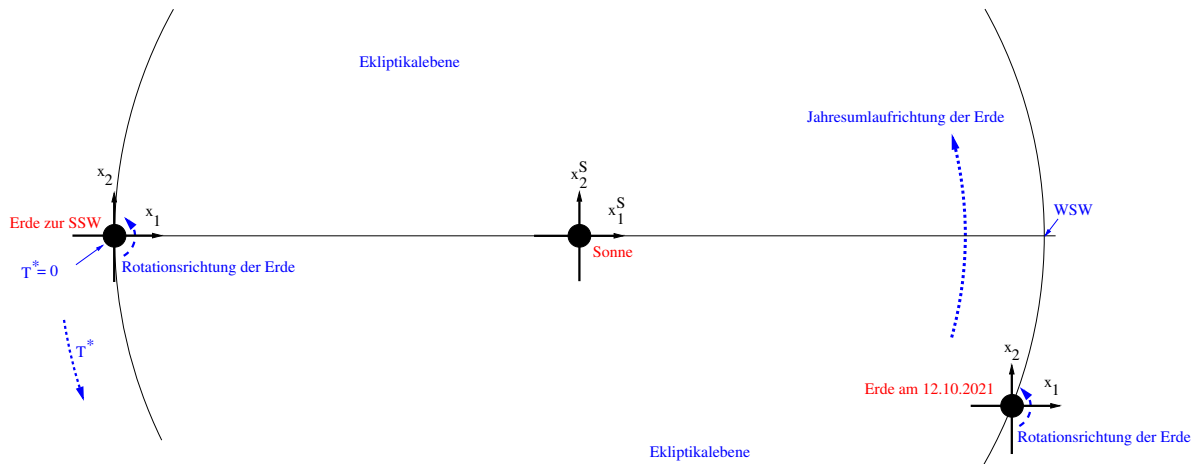


Abbildung 3: Umlauf der Erde um die Sonne

8 Fuss- und Endpunkt des Stabes

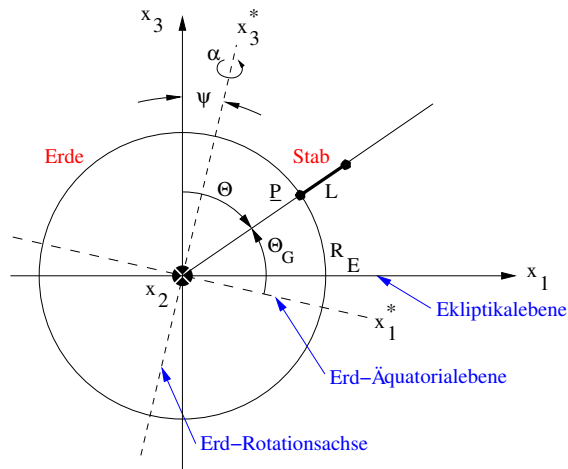


Abbildung 4: Problemskizze, SSW, astronomischer Mittag

Im (x_1^*, x_2^*, x_3^*) -Koordinatensystem der Problemskizze 4 ist die geographische Breite Θ_G des Stabfusspunktes gegeben, für den Polarwinkel gilt $\Theta^* = \frac{\pi}{2} - \Theta_G$. Im (x_1, x_2, x_3) -Koordinatensystem der Erde wird der Polarwinkel Θ des Stabfusspunktes um ψ grösser und es gilt

$$\Theta = \frac{\pi}{2} - (\Theta_G - \psi). \quad (5)$$

Für die Komponenten des Stab-Fusspunkts

$$\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$$

gelten damit wegen der in Abschnitt 4 getroffenen Annahme $\varphi = 0$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} p_1 &= R_E \sin \Theta \\ p_2 &= 0 \\ p_3 &= R_E \cos \Theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Mit der Stablänge L gilt für den Stabendpunkt \underline{Q}

$$\underline{Q} = \left(1 + \frac{L}{R_E}\right) \underline{p}. \quad (7)$$

9 Tangentialebene T

Die Kugel mit Radius R_E um den Ursprung ist mit der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_i x_i^2 - R_E^2$$

durch die Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ gegeben. Für den Index gilt hier und im folgenden $i \in [1, 3]$.

Für die Tangentialebene im Berührungspunkt $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$ gilt (siehe dazu z.B. [5])

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - p_i) = 0.$$

Dabei sind die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ im Berührungspunkt \underline{p} zu bilden.

Für die implizite Gleichung der Tangentialebene T im Berührungspunkt \underline{p} folgt schliesslich für die Kugel der Ausdruck

$$\sum_i p_i (x_i - p_i) = 0.$$

In vektorieller Schreibweise lässt sich die Tangentialebene im Erd-Koordinatensystem durch

$$\underline{p}^T (\underline{x} - \underline{p}) = (\underline{p} - \underline{x})^T \underline{p} = 0 \quad (8)$$

charakterisieren.

10 Verbindungsgerade

Die Punkte der Verbindungsgerade G der Sonne \underline{S} , nach Gleichung (4), mit dem Stabende \underline{Q} , nach Gleichung (7), sind durch

$$\underline{x} = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S} \quad (9)$$

gegeben. Der reelle Geradenparameter μ beschreibt für $\mu = 0$ den Punkt \underline{S} (also die Sonne) und für $\mu = 1$ den Punkt \underline{Q} (also das Stabende).

11 Analytische Problemlösung

11.1 Lösung durch Fixierung der Erde

Berücksichtigt man die Drehung der Sonne durch die Drehmatrix $D_{(-\alpha)}$ nach Gleichung (1) und fixiert die Erde, dann folgt für den Ort der Sonne

$$\underline{S}(\alpha) = D_{(-\alpha)} \underline{S} \quad (10)$$

und aus Gleichung (9) die Darstellung

$$\underline{x} = \mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}(\alpha). \quad (11)$$

Gesucht ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Tangentialebene T oder anders formuliert, gesucht wird der Geradenparameter μ , der eine Lösung \underline{x} der Gleichung (8) zulässt.

11.1.1 Lösungspunkt

Einsetzen von Gleichung (11) in Gleichung (8) liefert

$$\underline{P}^T [\mu \underline{Q} + (1 - \mu) \underline{S}(\alpha) - \underline{P}] = 0.$$

Wegen $\underline{P}^T \underline{P} = R_E^2$ folgt nach kurzer Rechnung die Bestimmungsgleichung für den Geradenparameter

$$\mu_0(\alpha) = \frac{\Omega^S(\alpha)}{1 + \Omega^S(\alpha)} \quad (12)$$

mit der Abkürzung

$$\Omega^S(\alpha) = \frac{R_E}{L} - \frac{\underline{P}^T \underline{S}(\alpha)}{LR_E}. \quad (13)$$

Da im Ausdruck der Verbindungsgeraden mit $\mu = 0$ die Sonne und mit $\mu = 1$ das Stabende beschrieben wird, muss $\mu_0(\alpha) > 1$, und damit $\Omega^S(\alpha) < -1$ gelten.

Der gesuchte Lösungspunkt \underline{x}_0 ergibt sich als Funktion des Drehwinkels α mit dem nach Gleichung (12) bestimmten $\mu_0(\alpha)$ zu

$$\underline{x}_0^S(\alpha) = \mu_0(\alpha) \underline{Q} + [1 - \mu_0(\alpha)] \underline{S}(\alpha). \quad (14)$$

Die mit dem Winkel α parametrisierten Lösungspunkte $\underline{x}_0^S(\alpha)$ bilden eine Trajektorie im \mathbb{R}^3 .

11.1.2 Die zweidimensionale Trajektorie

Die gefundenen 3-dimensionalen Trajektorienpunkte $\underline{x}_0^S(\alpha)$ der Gleichung (14) sind im Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) der Erde gegeben. Sie sollen orthogonal auf ein zweidimensionales Koordinatensystem der Tangentialebene T abgebildet werden, dessen Ursprung im Stabfußpunkt \underline{P} liegen soll.

Zur Bestimmung dieser Abbildung wird der Punkt \underline{P} und die Trajektorienpunkte $\underline{x}_0^S(\alpha)$ gemeinsam so gedreht, dass \underline{P} auf der positiven Achse der x_1 -Koordinate zu liegen kommt. Anschliessend werden die gedrehten Trajektorienpunkte orthogonal auf die (x_2, x_3) -Ebene projiziert.

Da vorausgesetzt wurde, dass $\varphi = 0$ gilt (siehe Abschnitt 4), genügt es, \underline{P} so um die x_2 -Achse zu drehen, dass er in der Ekliptik zu liegen kommt. Eine allgemeine Drehung um den Winkel Φ um die x_2 -Achse wird nach [1] durch die Drehmatrix

$$D_{\Phi}^{x_2} = \begin{pmatrix} \cos \Phi & 0 & \sin \Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Phi & 0 & \cos \Phi \end{pmatrix}$$

beschrieben. Der hier benötigte Drehwinkel um die x_2 -Achse ist $\frac{\pi}{2} - \Theta$. Der Punkt \underline{P} wird durch diese Drehung auf $x_1 = R_E$ und $x_2 = x_3 = 0$ abgebildet (siehe Unterabschnitt 14.1 im Anhang).

Die 3-dimensionalen gedrehten Trajektorienpunkte $D_{(\frac{\pi}{2}-\Theta)}^{x_2} \underline{x}_0^S(\alpha)$ können nun mittels der Projektionsabbildung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

auf die (x_2, x_3) -Ebene bzw. die Tangentialebene T projiziert werden. Die Koordinaten des Bildes der Projektion werden mit (y_1, y_2) bezeichnet.

Es ergibt sich schliesslich für die Punkte der gesuchten zweidimensionalen Trajektorie die Gleichung

$$\begin{pmatrix} y_1(\alpha) \\ y_2(\alpha) \end{pmatrix} = AD_{\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right)} x_0^S(\alpha). \quad (15)$$

11.1.3 Der astronomische Mittag

Für die 2-dimensionalen Trajektorien gibt es ein Abstandsminimum zum Stabfusspunkt, das per Definition zum Zeitpunkt t_M^* des astronomischen Mittags angenommen wird. Der zugehörige Winkel α_M wird im Anhang (siehe Unterabschnitt 14.2) bestimmt.

11.1.4 Symmetrien

Bei der Projektion auf die Tangentialebene nach Gleichung (15) ist zu beachten, dass für das Sommerhalbjahr die Projektion „von vorne“ (also mit positiven Werten der x_1 -Koordinate) stattfindet und im Winterhalbjahr „von hinten“ (also mit negativen Werten der x_1 -Koordinate) - siehe dazu die beiden Abbildungen 1 und 2. Dies bedeutet eine Spiegelung der 2-dimensionalen Trajektorien an der y_2 -Koordinaten-Achse.

Im Anhang (siehe Unterabschnitt 14.3) werden die Symmetrieeigenschaften der Komponenten der 3-dimensionalen Trajektorien bezüglich des astronomischen Mittags behandelt. Die gerade Symmetrie der 2-dimensionalen Trajektorien wird daraus abgeleitet. Das Problem der Projektion „von vorne“ versus „von hinten“ entfällt dadurch.

12 Ergebnisse

12.1 Las Palmas de Gran Canaria

12.1.1 Vergleich mit empirisch ermittelten Resultaten

Abbildung 5 zeigt die berechnete Schattentrajektorie für Las Palmas am 12. Oktober. Die Koordinaten der beiden markierten Punkte (13:28 Uhr und 13:48 Uhr Ortszeit) sind dargestellt, ihr geometrischer Abstand beträgt 16.16 cm, ihr zeitlicher Abstand beträgt 20 Minuten. Für die Stablänge wurde 1.5 m angenommen.

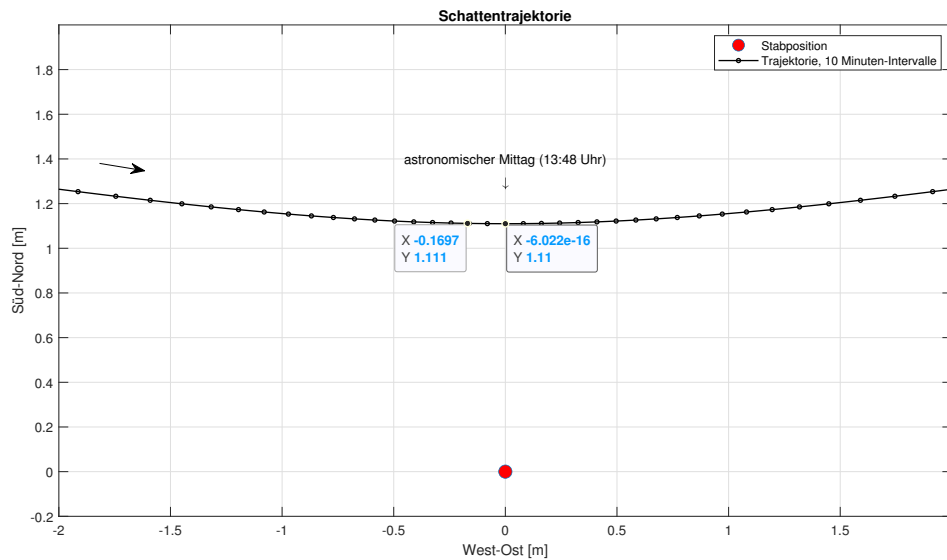


Abbildung 5: Schattentrajektorie am 12. Oktober in Las Palmas. Der Sonnenhöchststand ist an diesem Tag in Las Palmas um 13:48 Uhr (siehe z.B. [8]).

Korrespondierend zur Abbildung 5 sind in Las Palmas am 12. Oktober 2021 die nachfolgenden Fotos entstanden.



Abbildung 6: Schatten in Las Palmas am 12. Oktober 2021 um 13:33 Uhr und um 13:55 Uhr Ortszeit

Im ersten der beiden Fotos der Abbildung 6 sieht man am unteren Bildrand das gelbe Fussende des Stabes. Der Zeitunterschied beider Aufnahmen beträgt 22 Minuten. In dieser Zeit ist der Schatten ca. 20 cm weiter gewandert. Dieses Ergebnis passt recht gut zum rechnerisch ermittelten Abstand von ca. 17 cm^2 .

12.1.2 SSW und WSW

Die Schattentrajektorie und den Standort des Stabes für den Strand in Las Palmas (28.136683° Breite, -15.438392° Länge, nach [11]) für die SSW am 21. Juni findet sich in der Abbildung 7 - die WSW unterscheidet sich nicht.

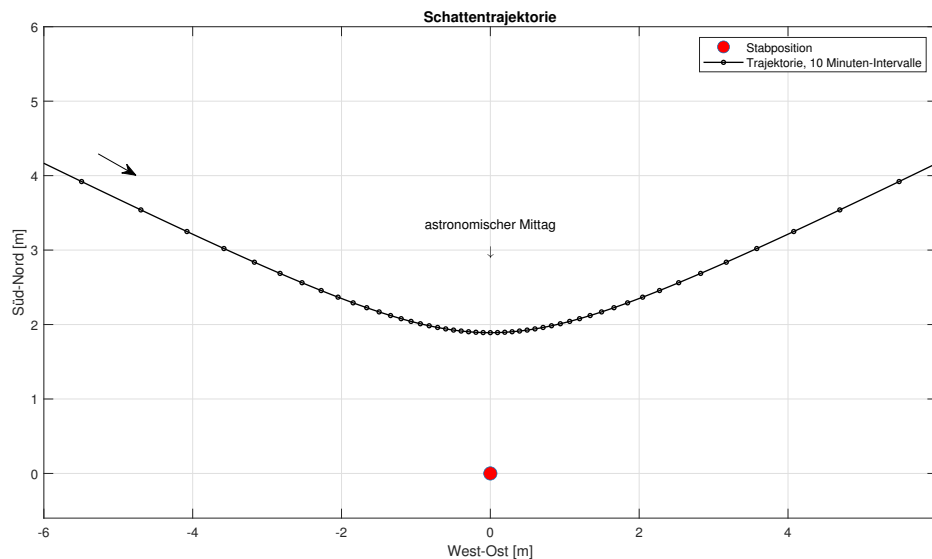


Abbildung 7: Schattentrajektorie zur SSW am 21. Juni in Las Palmas

²Leider habe ich vor Ort weder die genaue Länge des Stabes noch die genaue Länge der Trajektorie gemessen.

12.1.3 Frühlings- und Herbst-Äquinoktium

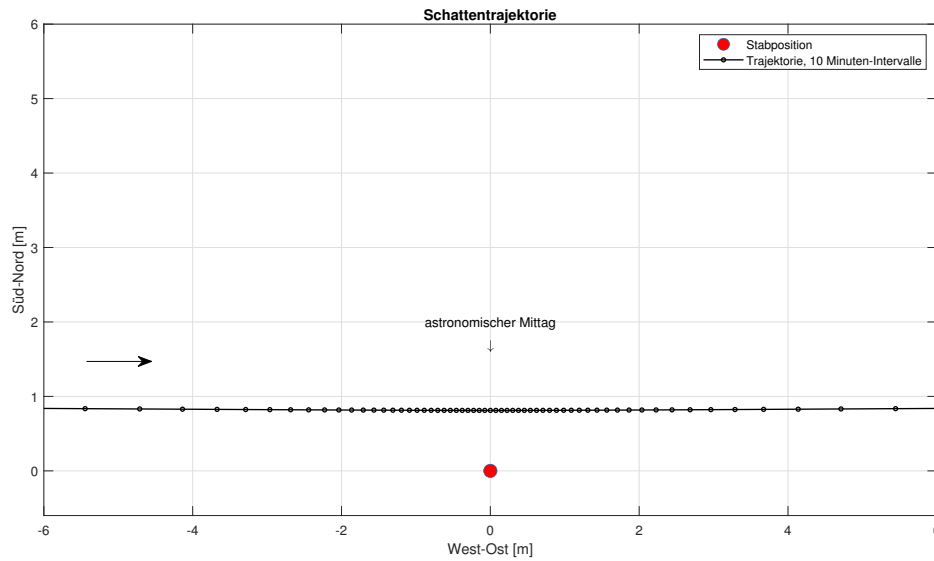


Abbildung 8: Schattentrajektorie zum Frühlings-Äquinoktium am 21. März in Las Palmas

Abbildung 8 zeigt die berechnete Schattentrajektorie für den 21. März, dem Frühlings-Äquinoktium - das Herbst-Äquinoktium hat eine identische Trajektorie.

13 Bewertung der Methode

Die oben beschriebenen Methode zur Bestimmung der Nord-Richtung funktioniert, falls man den Neigungswinkel ψ der Erd-Rotationsachse zu einer Achse orthogonal zur Ekliptikalebene zu 0° annimmt. In der Realität ist dieser Neigungswinkel aber nicht gleich 0° sondern $\psi = 23.44^\circ$.

Die Schattentrajektorie ist deshalb keine Gerade - und das nicht einmal näherungsweise.

Die dadurch verursachte Missweisung zur Nordrichtung ist nicht vernachlässigbar! Sie kann z.B. in Las Palmas je nach Tages- und Jahreszeit bis zu 45° betragen.

Die genaue Nordrichtung erhält man mit der beschriebenen Methode jedoch, wenn man Zeitpunkte untersucht, die symmetrisch um den Zeitpunkt des astronomischen Mittags liegen. Als zusätzliche Hilfsmittel werden neben den beiden Steinen und dem Stab weitere Steine sowie eine Uhr benötigt.

14 Anhang

In diesem Anhang werden Nebenrechnungen und Überprüfungen dargestellt, die den obigen Gedankenfluss zu sehr gestört hätten.

14.1 Zur Abbildung des Punktes \underline{P}

Der Stabfusspunkt \underline{P} wird durch die Drehung $D_{(\frac{\pi}{2}-\Theta)}^{x_2}$ auf $x_1 = R_E$ und $x_2 = x_3 = 0$ abgebildet, denn es gilt mit Gleichung (6)

$$\begin{aligned} D_{(\frac{\pi}{2}-\Theta)}^{x_2} \underline{P} &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}-\Theta) & 0 & \sin(\frac{\pi}{2}-\Theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\frac{\pi}{2}-\Theta) & 0 & \cos(\frac{\pi}{2}-\Theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_E \sin \Theta \\ 0 \\ R_E \cos \Theta \end{pmatrix} \\ &= R_E \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}-\Theta) \sin \Theta + \sin(\frac{\pi}{2}-\Theta) \cos \Theta \\ 0 \\ -\sin(\frac{\pi}{2}-\Theta) \sin \Theta + \cos(\frac{\pi}{2}-\Theta) \cos \Theta \end{pmatrix} \\ &= R_E \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

14.2 Der astronomische Mittag

14.2.1 Die Näherung für $\psi = 0$

Es soll nun noch für jeden Jahreszeitpunkt T^* eine Näherung $\bar{\alpha}_M$ für den Tageszeit-Rotationswinkel α angegeben werden, so dass sich gerade der Sonnenhöchststand (der astronomische Mittag) einstellt.

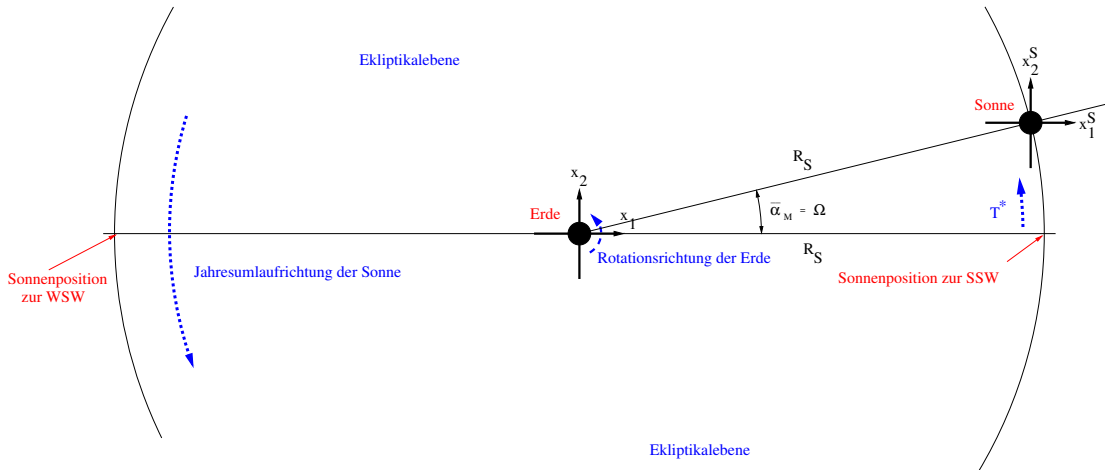


Abbildung 9: Umlauf der Sonne um die Erde

Wie man der Abbildung 9) entnehmen kann, gilt im Fall $\psi = 0$ die Näherung

$$\bar{\alpha}_M = \Omega.$$

14.2.2 Der exakte Wert für $\psi \neq 0$

Der exakte Wert α_M für $\psi \neq 0$ wird aus der Steigung der 2-dimensionalen Trajektorie $\begin{pmatrix} y_1(\alpha) \\ y_2(\alpha) \end{pmatrix}$ nach Gleichung (15) bestimmt. Die Steigung $S(x)$ errechnet sich zu (siehe dazu z.B. [6])

$$S(x) = \frac{dy_2(x)}{dy_1} = \frac{\frac{\partial y_2(\alpha)}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y_1(\alpha)}{\partial \alpha}}. \quad (16)$$

Dieser (eher etwas längliche ☺) Ausdruck wird mittels der „Symbolic Math Toolbox“ von MatLab berechnet (siehe dazu die MatLab-Quelldatei „SonnenKompassSymbolic.m“). Aus ihm folgt die notwendige Bedingung für das Verschwinden der Steigung

$$\sin \Omega \cos \alpha_M - \cos \Omega \cos \psi \sin \alpha_M = 0.$$

Mit $n \in \mathbb{N}$ ist also der astronomische Mittag durch den Erdrotationswinkel

$$\alpha_M = \arctan \left(\frac{\tan \Omega}{\cos \psi} \right) + n\pi \quad (17)$$

gekennzeichnet.

Für $\psi = 0$ stimmt die Näherung $\bar{\alpha}_M$ mit dem Hauptwert von α_M überein.

14.3 Symmetrie der 2-dimensionalen Trajektorie

Hier soll gezeigt werden, dass die 2-dimensionalen Trajektorien unter den getroffenen Annahmen des Abschnittes 4 eine gerade Symmetrie zum astronomischen Mittag α_M der y_2 -Achse besitzen.

14.3.1 Behauptung

Es gelten für die Trajektorienkomponenten nach Gleichung (14) mit den Abkürzungen

$$\underline{x}_0^S(\alpha) = \begin{bmatrix} x_1^S(\alpha) \\ x_2^S(\alpha) \\ x_3^S(\alpha) \end{bmatrix}$$

für ein geeignetes $\Delta \in \mathbb{R}$ die Symmetriebeziehungen

$$\begin{aligned} x_1^S(\alpha_M - \Delta) &= x_1^S(\alpha_M + \Delta) \\ x_2^S(\alpha_M - \Delta) &= -x_2^S(\alpha_M + \Delta) \\ x_3^S(\alpha_M - \Delta) &= x_3^S(\alpha_M + \Delta). \end{aligned} \quad (18)$$

Damit folgt die gerade Symmetrie der y_2 -Komponente der 2-dimensionalen Trajektorie

$$y_2(\alpha_M - \Delta) = y_2(\alpha_M + \Delta).$$

14.3.2 Nachweis

Der Nachweis der behaupteten Symmetrie für $\underline{x}_0^S(\alpha)$ im Punkt $\alpha = \alpha_M$ nach den Gleichungen (18) erfolgt mit der „Symbolic Math Toolbox“ von „MatLab“ (siehe dazu „SonnenkompassSymbolic.m“, Funktion „symmetrieTest()“).

Mit Gleichung (15) folgt daraus

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(\alpha) \\ y_2(\alpha) \end{pmatrix} &= AD_{\Theta}^{x_2} \underline{x}_0^S(\alpha) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Theta & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{pmatrix} \underline{x}_0^S(\alpha) \\ &= \begin{pmatrix} x_2^S(\alpha) \\ \cos \Theta x_3^S(\alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Komponente $y_1(\alpha)$ ist also wegen $x_2^S(\alpha)$ ungerade bezüglich $\alpha = \alpha_M$ und die Komponente $y_2(\alpha)$ ist wegen $x_3^S(\alpha)$ gerade.

14.4 Limits für den Erdrotationswinkel α

In diesem Unterabschnitt soll die Frage geklärt werden, für welchen Bereich des Drehwinkels α zulässige Lösungen (also solche mit $\Omega^S < -1$) zu erwarten sind.

Untersucht wird zunächst der Fall der Gleichheit $\Omega^S(\alpha) = -1$.

Bestimmung des Drehwinkels α für $\Omega^S(\alpha) = -1$

Es soll gelten

$$\Omega^S(\alpha) = -1.$$

Multiplikation mit \mathbf{LR}_E und Einsetzen von Gleichung (13) liefert

$$\begin{aligned}\mathbf{LR}_E \left[\frac{\mathbf{R}_E}{L} - \frac{\mathbf{P}^T \underline{\mathbf{S}}(\alpha)}{\mathbf{LR}_E} \right] &= -\mathbf{LR}_E \\ \mathbf{R}_E^2 - \mathbf{P}^T \underline{\mathbf{S}}(\alpha) &= -\mathbf{LR}_E \\ \mathbf{R}_E^2 + \mathbf{LR}_E &= \mathbf{P}^T \underline{\mathbf{S}}(\alpha).\end{aligned}$$

Mit der „Symbolic Math Toolbox“ findet man für den Ausdruck $\mathbf{P}^T \underline{\mathbf{S}}(\alpha)$ die folgende Darstellung (siehe dazu „LimitsAlpha.m“)

$$\mathbf{P}^T \underline{\mathbf{S}}(\alpha) = A \sin \alpha + B \cos \alpha + C^*$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}A &= R_S \sin \Omega (p_1 \cos \psi - p_3 \sin \psi) \\ B &= R_S \cos \Omega (p_1 \cos^2 \psi - p_3 \cos \psi \sin \psi) \\ C^* &= R_S \cos \Omega (p_1 \sin^2 \psi + p_3 \cos \psi \sin \psi).\end{aligned}$$

Insgesamt folgt für die zu lösende Gleichung

$$A \sin \alpha^* + B \cos \alpha^* + C = 0 \tag{19}$$

mit

$$C = C^* - (R_E^2 + \mathbf{LR}_E).$$

Ebenfalls mit der „Symbolic Math Toolbox“ erhält man für die Lösungen von (19) (siehe dazu „LimitsAlpha.m“)

$$\alpha^* = 2 \arctan \left(\frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B - C} \right).$$

Literatur

- [1] <https://de.wikipedia.org/wiki/Drehmatrix>; Abschnitt: Drehmatrizen des Raumes \mathbb{R}^3
- [2] <https://de.wikipedia.org/wiki/Erdrotation>; Abschnitt: Rotationsachse
- [3] <https://de.wikipedia.org/wiki/Erdrotation>
- [4] <https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten>; Abschnitt: Andere Konventionen
- [5] <https://de.wikipedia.org/wiki/Tangentialebene>; Abschnitt: Tangentialebene an eine implizit gegebene Fläche
- [6] https://en.wikipedia.org/wiki/Parametric_derivative, Abschnitt: First derivative
- [7] https://de.wikipedia.org/wiki/Gleichschenkliges_Dreieck, Abschnitt: Berechnung und Konstruktion
- [8] <https://www.cactus2000.de/sun/city.php?id=Las+Palmas+de+Gran+Canaria&year=2021&month=10&c=ES>
- [9] Solving Least Squares Problems; Lawson, C.L.; Hanson, R.J.; SIAM Classics in Applied Mathematics 15; 1995
- [10] <https://de.wikipedia.org/wiki/Koordinatenform>; Abschnitt: Koordinatenform einer Ebenengleichung
- [11] <https://www.google.de/maps>