

Ceres Learning

1 练练手

1.1 非约束最优化问题

$$\arg \min_x f(x) = \frac{1}{2}(10 - x)^2 \quad (1)$$

步骤

(1) 编写CostFunction结构体。必须重载运算符(), 必须使用模板类型, 所有输入参数和输出参数都使用模板类型。

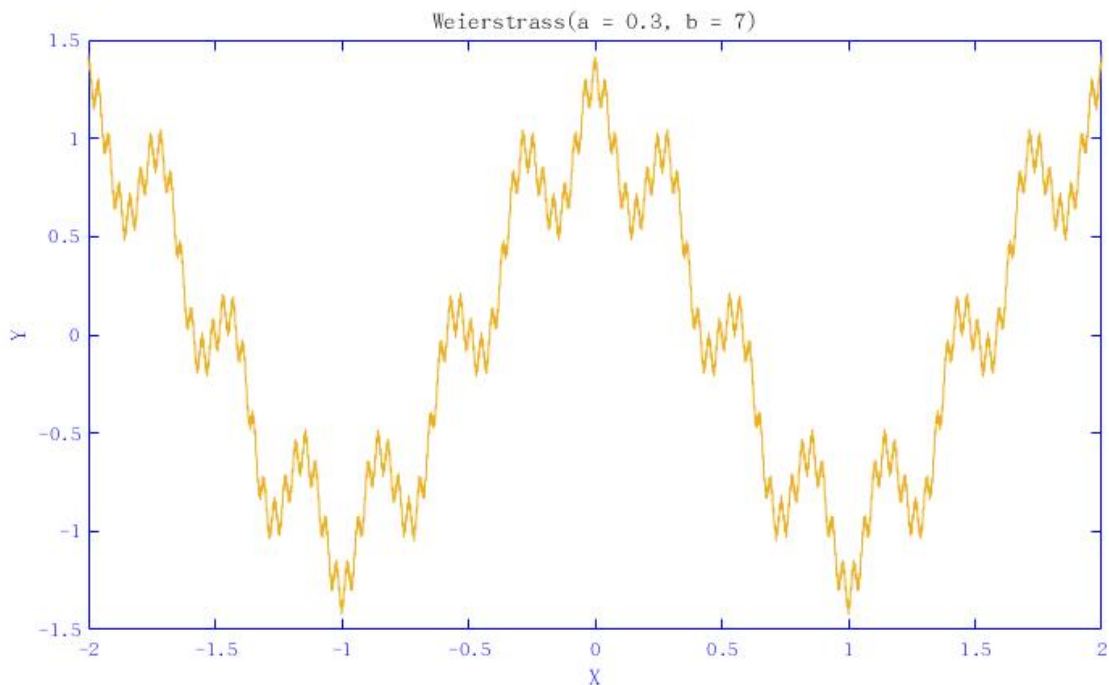
(2) 构造一个求解非线性最小二乘法的Problem来进行未知数求解。

1.2 曲线拟合

(1) 魏尔斯特拉斯函数(Weierstrass function)
$$f(x) = \sum_{n=0}^N a^n \cos(b^n \pi x) \quad (2)$$

其中 $0 < a < 1$, b 为正奇数, 且满足 $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$

(2) Weierstrass图像绘制



(3) 步骤

(3.1) 构造数据。设置参数 $a = 0.3, b = 7, n = 200$ 。

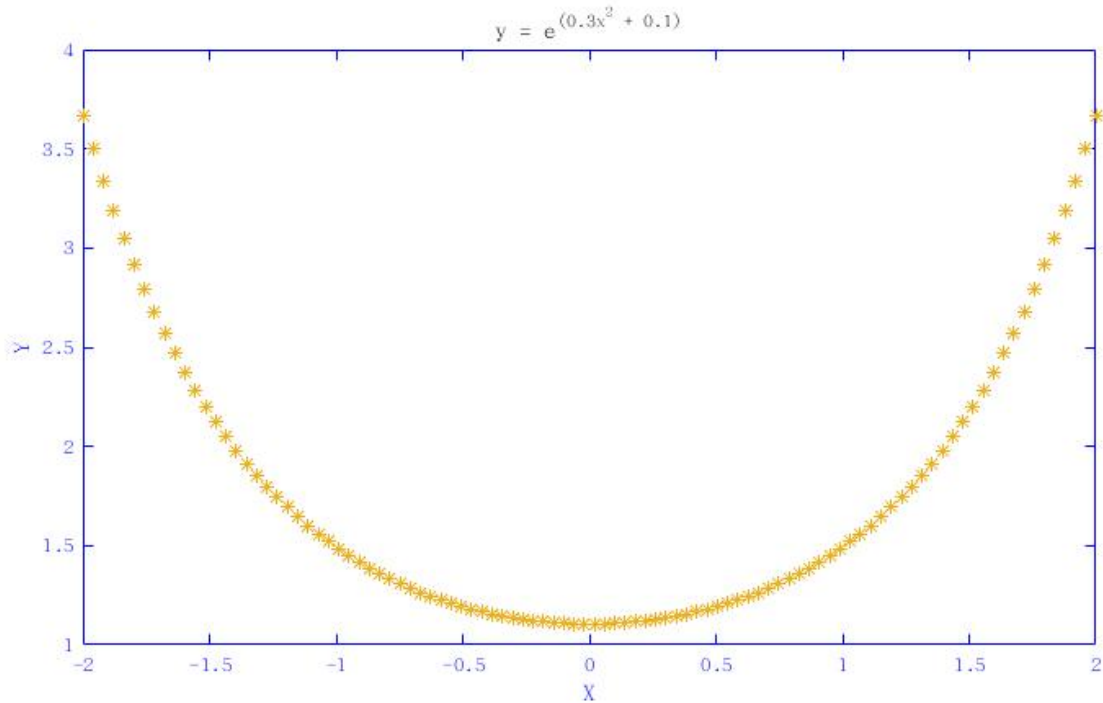
(3.2) 编写CostFunction结构体。

(3.3) 构造一个求解非线性最小二乘法的Problem来进行未知数求解。

(4) 总结

(4.1) 利用ceres无法对非线性函数进行曲线拟合，如魏尔斯特拉斯函数。原因包括两点：函数无法进行微分求解和初始点难以选取。

(4.2) 此处改为ceres对 $y = e^{ax^2+b}$ 函数进行曲线拟合，其中 $a = 0.3, b = 0.1$ 。该函数图如下所示：



(4.3) 可以采用三种方法对问题进行求解，即：在进行Problem构建时，采用AutoDiffCostFunction或NumericDiffCostFunction进行数值微分求解；当无法使用模板来创建costfunctor时，继承SizedCostFunction类来实现Problem。

1.3 单像空间后方交会问题

(1) 共线方程

$$\begin{cases} x - x_0 = -f \frac{a_1(X-X_s) + b_1(Y-Y_s) + c_1(Z-Z_s)}{a_3(X-X_s) + b_3(Y-Y_s) + c_3(Z-Z_s)}, \\ y - y_0 = -f \frac{a_2(X-X_s) + b_2(Y-Y_s) + c_2(Z-Z_s)}{a_3(X-X_s) + b_3(Y-Y_s) + c_3(Z-Z_s)} \end{cases} \quad (3)$$

其中 x_0, y_0, f 已知， abc 为旋转矩阵，可以利用 ϕ, ω, κ 表示如下：

$$\begin{cases} a_1 = \cos\phi\cos\kappa - \sin\phi\sin\omega\sin\kappa, \\ a_2 = -\cos\phi\sin\kappa - \sin\phi\sin\omega\cos\kappa, \\ a_3 = -\sin\phi\cos\omega, \\ b_1 = \cos\omega\sin\kappa, \\ b_2 = \cos\omega\cos\kappa, \\ b_3 = -\sin\omega, \\ c_1 = \sin\phi\cos\kappa + \cos\phi\sin\omega\sin\kappa, \\ c_2 = -\sin\phi\sin\kappa + \cos\phi\sin\omega\cos\kappa, \\ c_3 = \cos\phi\cos\omega \end{cases} \quad (4)$$

(2) 步骤

(2.1) 读入数据，格式为 (x, y, X, Y, Z) 。前2维像素坐标—单位 mm ，后三维代像坐标—单位 m 。

(2.2) 编写CostFunction结构体。

(2.3) 构造一个求解非线性最小二乘法的Problem来进行未知数求解。

(3) 运行结果

```
bl@tf:~/MyWorkspace/OpenSource/Ceres_Learning$ ./bin/Ceres_Learning
iter    cost      cost_change  |gradient|  |step|  tr_ratio  tr_radius  ls_iter  iter_time  total_time
0    2.561575e-03    0.00e+00    2.21e-02    0.00e+00    0.00e+00    1.00e+04    0    6.91e-05    1.52e-04
1    3.716118e-05    2.52e-03    9.62e-04    3.28e+02    9.93e-01    3.00e+04    1    1.56e-04    4.03e-04
2    6.163039e-06    3.10e-05    2.58e-04    5.48e+02    9.78e-01    9.00e+04    1    5.57e-05    4.89e-04
3    5.504907e-07    5.61e-06    4.96e-05    4.57e+02    9.92e-01    2.70e+05    1    4.10e-05    5.64e-04
4    6.528953e-09    5.44e-07    1.14e-05    1.51e+02    9.98e-01    8.10e+05    1    5.80e-05    6.40e-04
5    5.959798e-11    6.47e-09    1.78e-07    1.64e+01    1.00e+00    2.43e+06    1    9.11e-05    7.50e-04
6    5.270050e-11    6.90e-12    2.53e-10    6.57e-01    1.00e+00    7.29e+06    1    3.93e-05    8.11e-04
7    5.269924e-11    1.27e-15    5.01e-13    9.26e-03    1.00e+00    2.19e+07    1    4.73e-05    8.74e-04
Optimization parameters: Xs      Ys      Zs      Phi      Omega      KappaNone
39795.5 27476.5 7572.69 -0.00398693  0.00211391 -0.067578
```

1.4 Powell's Quartic Function

(1) 数学表达式

$$f(X) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4 \quad (5)$$

其中：

- $-10 \leq x_i \leq 10, i = 1, 2, 3, 4$
- $f_{min}(X^*) = 0$
- $x_i^* = 0$

(2) Powell's Quartic Function分解

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_1 + 10x_2 \\ f_2(x) &= \sqrt{5}(x_3 - x_4) \\ f_3(x) &= (x_2 - 2x_3)^2 \\ f_4(x) &= \sqrt{10}(x_1 - x_4)^2 \\ F(x) &= [f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)] \end{aligned} \quad (6)$$

(3) 最优化问题数学描述

$$\arg \min_x \frac{1}{2} \|F(x)\|^2 \quad (7)$$