Méthodologie pour l'étude d'une suite récurrente

1er février 2010

Il s'agit de donner les réflexes à avoir pour mener à bien l'étude d'une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in D_f \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où f désigne une fonction **continue sur son domaine de définition.** Dites-vous bien que l'étude d'une suite récurrente peut être excessivement compliquée : le chaos n'est pas bien loin ! Quoi qu'il en soit, ce qui est dit ici doit vous permettre de vous lancer dans une étude de suite récurrente.

I Les réflexes à avoir

Réflexe ①

S'assurer que la suite est bien définie. Si on n'y prend pas garde, on mène une étude qui n'a pas lieu d'être.

Comment montrer qu'une suite récurrente $(u_n)_n$ est bien définie ? *En montrant que u_0 appartient à un intervalle $I \subset D_f$ invariant par f, c'est-à-dire vérifiant $f(I) \subset I$.*

Trouver un tel intervalle invariant n'est pas une mince affaire. Nous y reviendrons un peu plus loin. Evidemment, l'absence d'un tel intervalle ne permet pas de conclure que la suite n'est pas définie.

Remarque : *On préférera un intervalle fermé (c'est-à-dire de la forme $[a, b]$ ou $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$ ou encore $]-\infty, +\infty[$) ou mieux un segment (c'est-à-dire de la forme $[a, b]$). Dans le cas où $I = [a, b]$, on peut d'ores et déjà dire que la suite $(u_n)_n$ est* ***bornée***

Réflexe ②

S'assurer que f possède au moins un point fixe. Dans le cas contraire, on peut conclure que la suite $(u_n)_n$ diverge.

En effet : f étant continue, les limites finies éventuelles de $(u_n)_n$ sont à chercher parmi les points fixes de f c'est-à-dire les nombres $x \in D_f$ vérifiant $f(x) = x$.

Remarque :

1. *Si on a déjà montré qu'il existe un* ***segment*** *I vérifiant*
   - $u_0 \in I$;
   - $I \subset D_f$;
   - $f(I) \subset I$,

   alors f possède au moins un point fixe dans I. Cette propriété est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.

   Elle est fausse si I est de la forme $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$. Ainsi, $[0, +\infty[$ est invariant par la fonction exponentielle mais celle-ci ne possède aucun point fixe.

2. *Le fait que I soit supposé fermé est crucial ici. À titre d'exemple, considérons la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par*
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$
L'intervalle $]0,1[$ est invariant par la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$, mais f ne possède aucun point fixe dans cet intervalle : on peut vérifier que les points fixes de f sont 0 et 1. Or la suite $(u_n)_n$ converge vers 1. Il est donc plus pertinent de considérer le segment $[0,1]$ ici, qui lui est fermé !

Réflexe ③

Étudier les variations de f et le signe de $f(x) - x$. Ceci permet de dire très rapidement si la suite $(u_n)_n$ est monotone.

Plaçons-nous dans la situation où $u_0 \in I$ et I est un intervalle fermé vérifiant : $I \subset D_f$; $f(I) \subset I$.

Que dire si f est croissante sur I ? On en conclut immédiatement que $(u_n)_n$ est monotone.

En effet :

- si $u_0 \leq u_1$, alors $(u_n)_n$ est croissante ;
- si $u_0 \geq u_1$, alors $(u_n)_n$ est décroissante.

Que dire si le signe de $f(x) - x$ est constant sur I ? On en conclut immédiatement que $(u_n)_n$ est monotone.

En effet :

- si $\forall x \in I,\ f(x) - x \geq 0$, alors $(u_n)_n$ est croissante ;
- si $\forall x \in I,\ f(x) - x \leq 0$, alors $(u_n)_n$ est décroissante.

Réflexe ④

Appliquer l'inégalité des accroissements finis. Plaçons-nous dans la situation où I est un intervalle fermé, invariant par f et ayant au moins un point fixe ℓ par f.

Si grâce à l'I.A.F., on montre que sur l'intervalle fermé I, $\underline{\text{il existe } \alpha \in [0,1[}$ tel que

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq \alpha\,|x - y|,} \tag{1}$$

alors on a immédiatement que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leq \alpha\,|u_n - \ell|.$$
On en conclut que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leq \alpha^n\,|u_0 - \ell|.$$
La suite $(u_n)_n$ converge alors vers ℓ et la vitesse de convergence de $(u_n)_n$ vers ℓ est *linéaire*.

Remarque :

1. *Le **théorème du point fixe** affirme que si I est un intervalle fermé invariant par f et s'il existe $\alpha \in [0,1[$ tel que (1) soit vérifié, alors f possède un unique point fixe dans I.*
2. *Ce théorème étant hors-programme, nous établirons l'existence d'un point fixe dans I par d'autres moyens. Remarquons que l'unicité découle directement de (1). En effet si ℓ et ℓ' sont deux points fixes de f appartenant à I, alors*
$$|\ell - \ell'| = |f(\ell) - f(\ell')| \leq \alpha|\ell - \ell'|.$$
Puisque $0 \leq \alpha < 1$, on en déduit que $\ell = \ell'$.

II Exemples d'étude

1. *Etude de* $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

On veut étudier la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. L'exemple choisi est intentionnellement simple : on pourrait conclure directement en observant que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (u_0)^{\frac{1}{2^n}}.$$

- Etudions d'abord les variations de f et le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}^+$.
  → **étude de** f **sur** $\mathbb{R}^+$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$; f est strictement croissante et son image est $\mathbb{R}^+$. Ainsi, $\mathbb{R}^+$ est un intervalle fermé invariant par f.
  → **étude du signe de** $f(x) - x$ **sur** $\mathbb{R}^+$. La fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = f(x) - x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée g' vérifie :

$$\forall x > 0,\ g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = \frac{1 - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

  On en déduit immédiatement le signe de g' et les variations de g sur $\mathbb{R}^+$.

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$

  La fonction g s'annule donc en unique valeur dans $[\frac{1}{4}, +\infty[$. L'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $x^2 = x$ puisque $x \geq 0$. Il s'ensuit que g s'annule en 0 et en 1.
  D'où le signe suivant de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}^+$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - x$	0	$+$	0	$-$	

  → **Quelques conclusions.** De ce qui précède, on tire les conclusions suivantes :

$$f([0,1]) = [0,1] \ ;\ f([1, +\infty[) = [1, +\infty[.$$

- Cas où $u_0 \in [0, 1]$ (cf Fig. 1).
  → On peut déjà dire que la suite $(u_n)_n$ est bien définie et que la suite $(u_n)_n$ est bornée. En effet, $[0, 1]$ est un intervalle invariant par f.
  → La suite $(u_n)_n$ est croissante. En effet, $f(x) \geq x$ pour tout $x \in [0, 1]$.
  → **Conclusion.** La suite $(u_n)_n$ étant croissante et majorée par 1, la suite $(u_n)_n$ converge vers l'un des points fixes de f : 0 ou 1.
  Si $u_0 = 0$, alors la suite $(u_n)_n$ est constante égale à 0 : elle converge donc vers 0.
  Si $u_0 > 0$, alors la suite $(u_n)_n$ converge vers 1.
- Cas où $u_0 > 1$ (cf Fig. 1).
  → On peut d'ores et déjà dire que la suite $(u_n)_n$ est bien définie et à valeurs dans $[1, +\infty[$. En effet, $[1, +\infty[$ est invariant par f.
  → La suite $(u_n)_n$ est décroissante. En effet, $f(x) \leq x$ pour tout $x \geq 1$.
  → **Conclusion.** La suite $(u_n)_n$ étant décroissante et minorée par 1, la suite converge vers l'un des points fixes : 0 ou 1.
  Le premier cas étant à exclure, on en déduit que la suite $(u_n)_n$ converge vers 1.

2. *Etude de* $u_{n+1} = \frac{4-u_n}{4+u_n}$.

On veut étudier la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4-u_n}{4+u_n}$.

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ par $f(x) = \frac{4-x}{4+x}$.

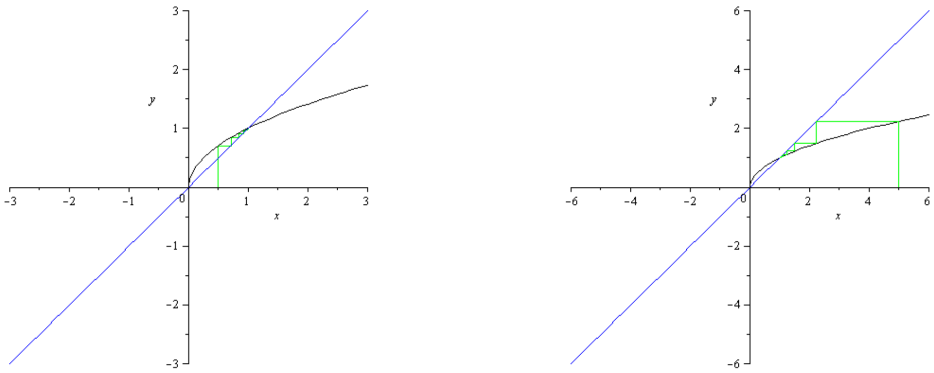

FIG. 1 – Itérés de $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$: cas où $u_0 \in [0,1]$ et $u_0 > 1$.

- On détermine d'abord **un intervalle invariant par** f.
  $\rightarrow$ **Étude de** f. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$. La dérivée f' de f vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\},\ f'(x) = -\frac{8}{(4+x)^2}.$$

D'où les variations de f :

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty \ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	-1

On trouve un premier intervalle invariant, à savoir $]-4,+\infty[$. Son image par f est égale à

$$\boxed{]-1,+\infty[\subset]-4,+\infty[.}$$

La suite $(u_n)_n$ est donc bien définie.
$\rightarrow$ **L'intervalle $[0,4]$ est invariant par** f. En effet f est strictement décroissante et continue sur $[0,4]$. De plus, $f(0) = 1$ et $f(4) = 0$. D'où

$$\boxed{f([0,4]) = [0,1] \subset [0,4].}$$

On en déduit que $(u_n)_n$ **est bornée.**
- On détermine **les points fixes de** f **dans** $[0,4]$. Pour cela, on détermine le signe de g définie sur $[0,4]$ par $g(x) = f(x) - x$.
  La dérivée de g sur $[0,4]$ est égale à :

$$g'(x) = -\frac{8}{(4+x)^2} - 1.$$

On en déduit immédiatement que g est strictement décroissante sur $[0,4]$. Par ailleurs, $g(0) = 1$ et $g(4) = -4$. Par conséquent g s'annule en une unique valeur $\ell \in [0,4]$.
On conclut que f **possède un unique point fixe** $\ell \in [0,4]$.
Déterminons-le : il s'agit de résoudre l'équation $\frac{4-x}{4+x} = x$. Cette équation est équivalente à $x^2 + 5\,x - 4 = 0$.

On trouve

$$\boxed{\ell = \frac{\sqrt{41}-5}{2}.}$$

Pour résumer, le signe de $f(x) - x$ sur $[0, 4]$ est :

x	0		ℓ		4
$f(x) - x$	1	$+$	0	$-$	-4

- **Etude de la convergence à l'aide de l'I.A.F.** Nous expliquons ici comment étudier la convergence de la suite sans passer par l'étude de la convergence des sous-suites des termes pairs et des termes impairs. On peut remarquer tout d'abord que

$$\boxed{\sup_{x\in[0,4]} |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.}$$

Il découle alors de l'I.A.F. que

$$\boxed{\forall (x, y) \in [0, 4]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}\,|x - y|.}$$

En appliquant cette inégalité à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left| u_{n+1} - \frac{\sqrt{41}-5}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \left| u_n - \frac{\sqrt{41}-5}{2} \right|.$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left| u_n - \frac{\sqrt{41}-5}{2} \right| \leq \frac{1}{2^n} \left| 3 - \frac{\sqrt{41}-5}{2} \right|.$$

D'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\sqrt{41}-5}{2}.}$

- **Etude de la convergence à l'aide de $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.** Puisque f est décroissante sur $[0, 4]$, il est pertinent d'étudier les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ (cf Fig. 2).
En effet $f \circ f$ est alors croissante sur $[0, 4]$ et de plus :
$(u_{2n})_n$ est la suite $(v_n)_n$ définie par $v_0 = u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = (f \circ f)(v_n)$;
$(u_{2n+1})_n$ est la suite $(w_n)_n$ définie par $w_0 = u_1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = (f \circ f)(w_n)$.

  → **Points fixes de** $f \circ f$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -\frac{20}{3}\}$, $(f \circ f)(x) = \frac{12+5x}{20+3x}$. On voit immédiatement que les points fixes de $f \circ f$ sont solutions d'une équation du second degré. Or les points fixes de f sont des points fixes de $f \circ f$. D'où l'ensemble des points fixes de $f \circ f$

$$\left\{ -\frac{\sqrt{41}+5}{2}, \frac{\sqrt{41}-5}{2} \right\}.$$

  → **Étude de la suite** $(u_{2n})_n$. On a $u_0 = 3$ et $u_2 = \frac{27}{29} < u_0$.
  Compte-tenu que $f \circ f$ est croissante, on en conclut que $(u_{2n})_n$ **est décroissante.**
  La suite (u_{2n}) étant décroissante et minorée par 0, elle converge vers $\frac{\sqrt{41}-5}{2}$ (l'autre point fixe est à exclure car strictement négatif).

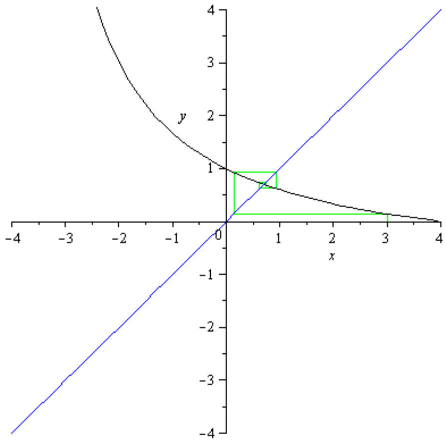

FIG. 2 – Suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{4-u_n}{4+u_n}$.

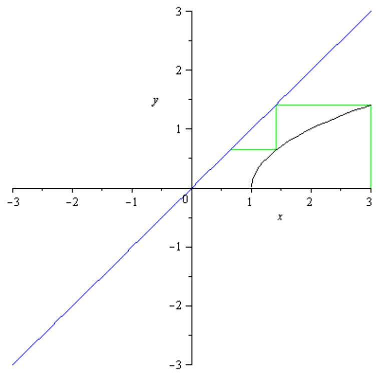

FIG. 3 – Itérés par la fonction $x \mapsto \sqrt{x-1}$.

→ **Étude de la suite** $(u_{2n+1})_n$. On a $u_1 = \frac{1}{7}$ et $u_3 = \frac{89}{143} > u_1$.
Compte-tenu que $f \circ f$ est croissante, on en conclut que $(u_{2n+1})_n$ **est croissante.**
La suite (u_{2n+1}) étant croissante et majorée par 4, elle converge vers $\frac{\sqrt{41}-5}{2}$ (l'autre point fixe est à exclure car strictement négatif).

→ **Conclusion.** les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergeant vers $\frac{\sqrt{41}-5}{2}$, il en découle que **la suite** $(u_n)_n$ **converge vers** $\frac{\sqrt{41}-5}{2}$.

III Exemples pathologiques

On peut très vite rencontrer des exemples où l'étude devient extrêmement compliquée. Nous ne nous y aventurons pas. Malgré tout, quelques simulations numériques peuvent rendre compte des difficultés rencontrées.

1. *Etude de* $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1}$

La suite $(u_n)_n$ est mal définie. En ce sens qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $u_{n_0-1} \notin D_f$ où f est la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Ceci est expliqué en exercice (Exercice 3, Exercices complémentaires). La figure Fig. 3 ci-dessous illustre le phénomène

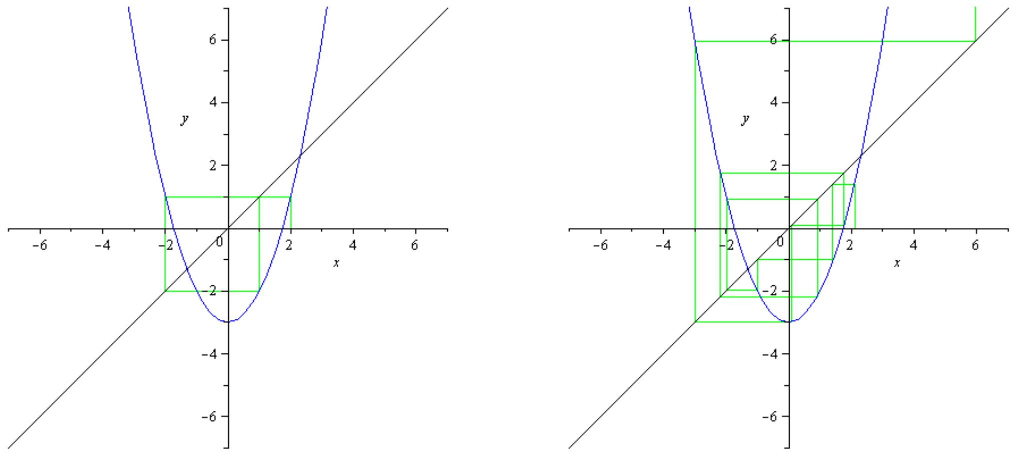

FIG. 4 – Itérés par la fonction $x \mapsto x^2 - 3$.

2. *Etude de* $u_{n+1} = u_n^2 - 3$.

On veut par exemple étudier la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 3 \end{cases}$$

Cette suite est bien définie et est bornée : elle est en effet *ultimement périodique de période* 2. Pour autant, on ne peut établir qu'elle est bornée en déterminant un segment I contenant 2 et invariant par f (définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$) : il n'en existe pas. L'ensemble des nombres réels y tels que la suite $(x_n)_n$ définie par $x_0 = y$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n^2 - 3$ est une suite bornée, est en effet un *ensemble de Cantor*.

Les figures illustrent ce phénomène : on peut toujours trouver une suite $(x_n)_n$ avec x_0 aussi proche qu'on veut de 2 qui tend vers $+\infty$.