Département d'informatique – Cellule LMD

- *Pour toutes questions concernant ce cours, nous vous invitons à prendre contact par e-mail avec Mer ou Mme Makdeche (Les rédacteurs de ce cours) aux adresses suivantes :*
  « saidmakdeche @yahoo.fr »
  « karimalaoubi @yahoo.fr»

# Introduction :

*Les mathématiciens et les scientifiques en général se sont toujours intéressés à la résolution des problèmes qu'ils rencontrent, l'analyse mathématique classique ne pouvant résoudre tous les problèmes qui se posent par exemple en Intégration, résolution des équations non linéaires, interpolation, équations différentielles …*

*L'analyse numérique propose des algorithmes (méthodes de calculs approchées) pour résoudre les problèmes que l'analyse classique ne donne pas de méthodes explicites de résolutions.*

*Deux notions s'avèrent alors importantes :*

- *Les erreurs numériques (il est important d'avoir une idée sur l'erreur commise sur un résultat approché déterminé par les différentes méthodes de l'analyse numérique. )*
- *La notion de convergence (Les résultats se souvent déterminés comme limite d'une suite construite à partir d'un algorithme correspondant au problème posé)*

**Remarque 1** : les théorèmes et les propositions énoncés seront démontrés dans les séances de cours et dans le cas échéant, nous renvoyons les étudiants à des ouvrages spécialisés .



## Ce cours contient les chapitres suivants :

# 1er Chapitre

# Les erreurs numériques

## Important :

« Un résultat numérique approché n'a de sens que s'il est accompagné d'une estimation de l'erreur commise entre le résultat exact et approché, sans cela il ne veut rien dire »

## 1) Définitions

### Définition 1 :

Soit x un nombre donné et x* une valeur approchée de celui-ci. On définit l'erreur absolue notée $\Delta(x)$ par :

$$\Delta(x) = |x - x^*|$$

**Remarque 2** : En pratique il est impossible d'évaluer l'erreur absolue car x est souvent inconnu par conséquent, on introduit la notion de la borne supérieure de cette erreur notée $\Delta x$ et on a :

$$\Delta(x) = |x - x^*| \leq \Delta x$$

Ce qui permet d'écrire : $x = x^* \pm \Delta x$

### Définition 2 :

On appelle erreur relative le nombre $r(x)$ défini par :

$$r(x) = \frac{|x - x^*|}{|x^*|} = \frac{\Delta x}{|x^*|}$$

L'erreur relative est souvent exprimée en pourcentage (cela veut dire que l'erreur commise représente une proportion de $r(x)$ % de la valeur estimée).

## 2) Représentation décimale d'un nombre approché :

Tout nombre positif x* peut se mettre sous la forme :

$x^* = \alpha_m.10^m + \alpha_{m-1}.10^{m-1} + ........\alpha_{m-n+1}.10^{m-n+1}..........(*).$

$\alpha_m \neq 0$ et $\alpha_i \in \{0,1,2.....9\}$ $i \neq m$

Exemple : $13{,}102 = 1.10^1 + 3.10^0 + 1.10^{-1} + 0.10^{-2} + 2.10^{-3}$
$0.0012 = 1.10^{-3} + 2.10^{-4}$

**Remarque** : Les chiffres $\alpha_m, \alpha_{m-1}, ...$ $\alpha_{m-n+1}......$ donnés par la représentation décimale (*) sont appelés chiffres significatifs. (Autrement dit, on appelle chiffre significatif d'un nombre tout chiffre de sa représentation exceptés les zéros situés devant le 1er chiffre non nul . )

## 3) chiffres significatifs exacts d'un nombre approché

On dit que les n premiers chiffres d'un nombre approché x* sont exacts si :

$$\Delta x \leq 0.5\ 10^{m-n+1}$$

Où m est le 1er exposant de 10 dans la formule (*)

## 3) Arrondissement d'un nombre approché :

L'arrondissement est un processus qui consiste à tronquer les nombres pour n'en garder que le nombre de chiffres significatifs exacts.

### 3-1 ) Règles d'arrondissement :

*) Si le 1er chiffre à rejeter est < 5, le nombre est retenu.

**) Si le 1er chiffre à rejeter est ≥ 5, on ajoute une unité au dernier chiffre significatif retenu

**3-2) L'erreur d'arrondi** : Elle vérifie l'estimation suivante :

$$\Delta r \leq 0.5\ 10^{m-n+1}$$

**3-3)Résultat final** : s'écrit sous forme :

$x = x * arrondi\ \pm (2\Delta x)$

## 4) Formule générale de l'erreur :

Soit $f: IR^n \rightarrow IR$

$$(x_1, ....x_n) \rightarrow f(x_1, ....x_n).$$

Alors : $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial f}{\partial xi}| \Delta xi$

Et $rf = \frac{\Delta f}{|f|}$

**Exemple d'application** : (Cet exemple nous permet de mieux comprendre les notions ci-dessus) :

Soit $x = 0{,}1256$ donné avec une erreur de 0,5%.

1) Donner l'erreur absolue de x.
2) Déterminer le nombre de chiffres significatifs exacts de ce nombre.
3) Arrondir le résultat au dernier c.s.e.

**Solution :**

1) On a : $x = 0{,}1256$ *et* *r(x)=0.005* *d'où :* $\Delta x = r(x).|x| = 0{,}000628 \leq 0.5.10^{-3}$

2) Comme $\Delta x \leq 0.5\ 10^{m-n+1}$ donc : m-n+1=-3 avec m=-1 alors : n=3.

Donc le nombre x a trois chiffres significatifs exacts.

3) Le 1er chiffre à rejeter est égal à 6 donc x arrondi noté par $x_a$ est égal à 0,126

Par le résultat final s'écrit : $x = x_a \pm 2\Delta x = 0{,}126 \pm 10^{-3}$

# Chapitre 2

## Résolution des équations non linéaires dans *IR*.

### Introduction :

On présente ici quelques méthodes de résolution numériques des équations *F (x)=0*

Soit *F* : $IR \rightarrow IR$ une application continue.

On se propose de déterminer la ou les solutions de F (x)=0 ou F est un polynôme de deg ≥ 3 ou l'expression de F est complexe.

Les méthodes classiques de Résolution ne permettent pas de résoudre de tels problèmes. On fait donc appel aux techniques des méthodes numériques.

Pour cela on procède de la manière suivante :

### 1) Localisation des racines :

La plupart des méthodes numériques nécessite la détermination d'un intervalle [a, b] contenant une seule racine dite racine séparée $\alpha$ de $F(x) = 0$ .

« On dit alors qu'elle est localisée ou séparée des autres éventuelles racines. »

### 1-1) Les méthodes de séparation :

*****) L'étude des variations de F, puis l'utilisation du théorème de la valeur intermédiaire.

******) La réécriture de F sous forme $F_1(x) = F_2(x)$, puis la recherches des points d'intersection entre $F_1$ et $F_2$.

**Exemple 1 :** Séparer les racines des équations :

**a)** $F(x) = x^3 - 3x + 1$

$F(x)=0$ admet (03) racines $s_1$, $s_2$ et $s_3$ (On a utilise le tableau de variations de F(x) dans IR)

En observant le tableau de variation, on remarque facilement que :

$s_1 \in [-3, -1]$ , $s_2 \in [-1, 1]$ et $s_3 \in [1, 3]$

**b)** $F(x) = e^x \sin x - 1 = 0$ dans $[-\pi, \pi]$

$F(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \sin x$.

Les points d'intersection des deux fonctions $e^{-x}$ *et sin x tracées dans le même repère sont* $s_1$ et $s_2$, $s_1 \in [0, \pi/2]$ , $s_2 \in [\pi/2, \pi]$ ce qui veut dire que $s_1$ et $s_2$, sont les racines de $F(x) = 0$

**Remarque :** On suppose dans la suite que F est continue et que la racine $\alpha$ est localisée (séparée) dans un intervalle [a, b].

## 2) Les méthodes utilisées :

### 2-1) Méthode de la Dichotomie :

L'idée : est de construire une suite d'intervalles de plus en plus petits contenants une racine séparée de $F(x) = 0$.

#### 2-1-1) Algorithme de la méthode :

$F(x)=0$, $\alpha$ une racine séparée de $F(x) = 0$ dans [a, b]

On pose $[a, b] = [a_0 , b_0]$.

On divise l'intervalle $[a_0 , b_0]$ en deux avec $x_0=\frac{a_0+b_0}{2}$

- Si $F(a_0)\,F(x_0) <0$ alors $[a_0, x_0] = [a_1, b_1]=I_1$

Sinon $I_1 =[x_0, b_0]$.

Et ainsi de suite, on construit la suite d'intervalles $I_n=[a_n,b_n]$ et donc :

$$x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$$

Et on continue avec le même principe pour localiser la racine $\alpha$ :

- Si $F(a_n)\,F(x_n) <0$ alors $[a_n,x_n]=[a_{n+1},b_{n+1}]=I_{n+1}$.

Sinon: $[x_n, b_n]= [a_{n+1},b_{n+1}]=I_{n+1}$

Et on prend comme approximation de $\alpha$ la valeur $x_n$ en utilisant n itérations.

Plus loin, on verra comment déterminer le nombre d'itérations nécessaire n en se donnant un erreur d'approximation $\epsilon$ telle que : $|x_n-\alpha| \le \varepsilon$

## 2-1-2) Test d'arrêt:

$$b_{n+1} - a_{n+1}=\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2} =\ldots=\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}.$$

D'où :

Si a est racine de $F(x)=0$ , on aura : $|x_n-\alpha| \le \frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}$ (*)

**Remarque :**

R1) si on désire calculer une approximation de a avec k chiffres significatifs exacts, il suffit :

$|x_n - \alpha| \leq 0.5.10^{m-k+1}$

R2) si on veut calculer une approximation de a avec k décimales

Il suffit que : $|x_n - \alpha| \leq 0.5\ 10^{-k}$

R 3) Si on désire on calculer le nombre d'itérations suffisant n pour approcher $\alpha$ à $\varepsilon$ prés, on procède comme suit :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \frac{\ln(\frac{b-a}{2\varepsilon})}{\ln(2)}$$

Il suffit de prendre $n=[\frac{\ln(\frac{b-a}{2\varepsilon})}{\ln(2)}]+1$

## 2-1-3) Exercice d'application sur la Dichotomie (A traiter en TD):

On considère l'équation :

*F (x)* $=x^4-3x+1=0$

1) Montrer que l'équation F(x)=0 admet une racine unique dans [0.3, 0.4]

2) Calculer une valeur approchée de cette racine par la méthode de la Dichotomie avec une précision $\varepsilon = 0.5*10^{-2}$

3) Arrondir le résultat au nombre de chiffres significatifs exacts.

**Solution** : *n=4* $x_n = 0.34 \pm 0.01$

**Remarques :**

1)- Si *F (a) F (b)* **<***0*, l'équation *F (x)=0* admet au moins une solution dans [a, b]

2)- Si *F (a) F (b)>0*, l'équation *F (x)=0* n'admet pas de solutions ou bien un nombre pair de solutions

## 2-2) Méthode du point fixe :

### Définition du point fixe :

Soit $\varphi(x)$ une fonction continue sur un intervalle [a,b]

On dit que x* est un point fixe de $\varphi$ sur [a, b] si $\varphi(x^*) = x^*$

***Exemple*** :

*) $\varphi(x)=x^2$ admet deux points fixe dans IR

car $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$

**Remarque** : $\varphi(x)$ admet un unique point fixe dans $[-2,\frac{1}{2}]$ et un autre unique dans $[\frac{1}{2}, 2]$ .

*) $\varphi(x) = x^2 + 1$ n'a aucun point fixe dans IR.

**Théorème du point fixe :**

Soit à résoudre l'équation F(x)=0 sur [a,b]

On considère $\varphi$ une fonction définie sur *[a, b]* telle que :

i) F(x)=0 $\Leftrightarrow \varphi(x) = x$

ii) $\forall x \in$ *[a, b] ;* $\varphi(x) \in$ *[a, b]*

Autrement dit : $\varphi$ est sable dans *[a, b]*.

iii) $\varphi$ est contractante i.e. :Il existe une constante k $\in \left]0,1\right[$ (k < 1)

Telle que : $|\varphi(x)-\varphi(y)| \le k|x-y|$. $\forall x, y \in$ *[a, b]* .

Alors la fonction $\varphi(x)$ admet un point fixe unique $\alpha \in$ *[a, b]* vérifiant F(a)=0.

a est limite de la suite ($x_n$) définie par : $\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_1 = \varphi(x_0) \\ . \\ x_n = \varphi(x_{n-1}) \end{cases}$

Et on a l'estimation suivante :

$$|x_n - \alpha| \le \frac{\kappa^n}{1-\kappa}|x_1 - x_0|$$



**Remarque:**

-la solution $\alpha$ s'appelle point fixe de $\varphi$

-Il est souvent difficile de vérifier la contraction de $\varphi$ sur [a,b] d'où :

Si $\varphi$ est dérivable sur [a, b] et sup | $\varphi$ (x) | = $\kappa$ <1 sur [a,b] $\Rightarrow$ alors la condition iii) est vérifiée.

**Preuve :** On montre l'existence et l'unicité de la solution :

1) **L'existence :**
$\varphi(x) = x \Leftrightarrow$ F(x)= $\varphi(x) - x = 0$

F (a) = $\varphi(a) - a \in$ [a, b] $\Rightarrow$ $\varphi(a) - a \geq 0$

F(b) = $\varphi(b) - b$ $\in$ [a, b] $\Rightarrow$ $\varphi(b) - b \leq 0$ . (grâce à la condition ii)

F(a).F(b)<0 d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une solution

$\alpha$ $\in$ [a, b] telle que : F($\alpha$)=0 $\Leftrightarrow$ $\varphi(\alpha) = \alpha$

**2) Unicité :**

Supposant qu'il existe deux solutions $s_1$, $s_2$ et $s_1 \neq s_2$ de l'équation $\varphi(x) = x$

Alors :

$|s_1 - s_2| = |\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| \leq \kappa |s_1 - s_2|$

Ce qui implique :

(1-k) $|s_1 - s_2| \leq 0$ ce qui est impossible car (0<$\kappa$<1).

3) convergence :

$\lim_n |x_n - \alpha| \leq \frac{\lim_n \kappa^n}{1-k} |x_1 - x_0| = 0$ car 0<k<1 $\Rightarrow x_n \to$ quand n $\to \infty$

**Comment applique –t- on la méthode du point fixe pour résoudre F(x)=0** ?

1)- On détermine l'intervalle [a, b] qui contient une racine séparée de F(x)=0

2)- On définit une fonction $\varphi$ sur [a, b] qui vérifie les conditions du théorème du point fixe sur [a, b] telle que :

F(x)=0 $\Leftrightarrow$ $\varphi(x) = x$

3)- On détermine alors notre suite ($x_n$) comme suit :

On choisit un $x_0 \in$ [a, b] quelconque tel que : $x_1 = \varphi(x_0)$ ; $x_2 = \varphi(x_3)$ ;……. ; $x_n = \varphi(x_{n-1})$

$$Lim_{n\to\infty}(x_n) = \varphi(Lim_{n\to\infty}(x_{n+1})) = \varphi(\alpha) = \alpha \text{ car } \varphi \text{ est continue}$$

4) - On définit un critère d'arrêt ou , on calcule le nombre d'itérations n suffisant pour avoir une valeur approchée x* de $\alpha$ a $\varepsilon$ prés avec le même Principe que la dichotomie.

C'est à dire:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0| < \varepsilon \Rightarrow k^n < \frac{\varepsilon(1-k)}{x_1 - x_0}$$

En posant : A= ln $\left(\frac{\varepsilon(1-k)}{x_1 - x_0}\right)$

On obtient : n= $\left[{}^{A}/_{\ln(k)}\right]$+1

**Interprétation géométrique de la méthode du point fixe :**

Soit le problème $f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ ($f$ est une fonction définie sur un intervalle $I$)

*) Si $|f'(x)| < 1$ la suite $(x_n)_n$ converge (fig.(2) et fig.(3)).

*) Si $|f'(x)| > 1$ la suite $(x_n)_n$ diverge (fig.(1)).

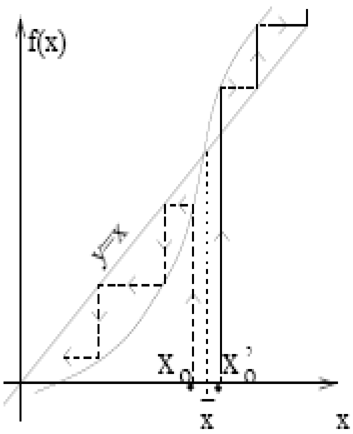


fig. 1

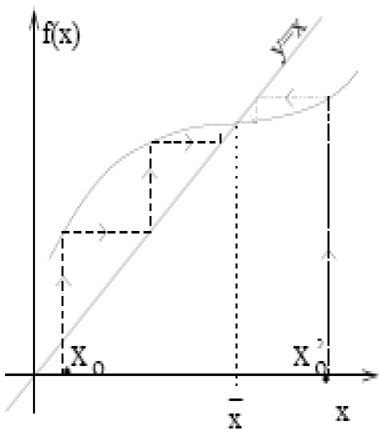


fig. 2

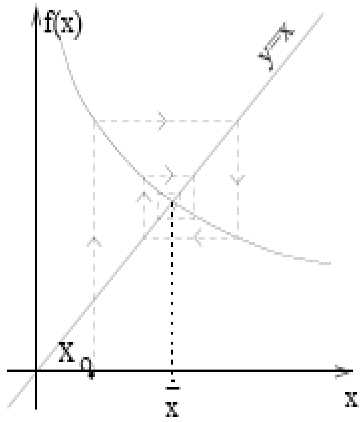


fig. 3



## 2-3) Méthode de Newton (méthodes des tangentes ):

Notons par $\alpha$ la racine " exacte" cherchée et $x_n$ une valeur approchée de $\alpha$

On suppose que F est de classe $C^2$ au voisinage de $\alpha$ (deux fois continument dérivable au voisinage de $\alpha$)

Le développement de Taylor d'ordre deux de F nous donne :

$$F(\alpha) = F(x_n) + F'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{F''(x_n)}{2}(\alpha - x_n)^2$$

Et comme $F(\alpha) = 0$ , en supposant que $F'(x_n) \neq 0$ , on aura :

$$\alpha = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} - \frac{F''(x_n)}{2F'(x_n)}(\alpha - x_n)^2$$

En négligeant le reste R=$-\frac{F''(x_n)}{2F'(x_n)}(\alpha - x_n)^2$ , la quantité $x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$ qu'on notera $x_{n+1}$ constitue alors une valeur approchée de $\alpha$ . Et la formule de récurrence de Newton est donnée par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \qquad n = 0,1,2,\ldots\ldots$$

## 2-3-1) Interprétation géométrique de la méthode de Newton :

Soit F une fonction de classe $C^2$ ([a,b]) . Considérons le cas où : F ''$\geq 0$ et F(b) > 0 ,

F(a) F(b)$\leq 0$ .

L'équation de la tangente à la courbe de F au point $(x_0, F(x_0))$ est donnée par :

$$y = F'(x_0)(x - x_0) + F(x_0)$$

*) On prend $x_0 = b$.

Le point d'intersection de cette droite tangente avec l'axe x'ox a pour abscisse [fig. 4] :

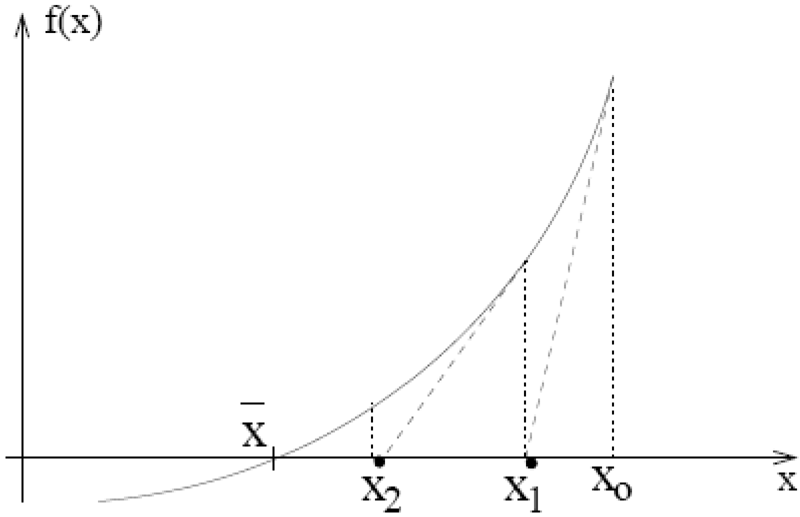


fig. 4

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

$x_1$ constitue une première approximation de $\alpha = \bar{x}$ .

De la même manière on obtient $x_2$ , $\dots\dots x_n$ avec :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \qquad n = 0,1,2, \dots\dots$$

D'après le graphe cette suite converge vers $\alpha = \bar{x}$. Dans ce cas $x_0 = b$ vérifie la condition

$$F''(x_0).F(x_0) \geq 0 .$$

*) Si on prend $x_0 = a$ : on a F'' ($x_0$ ).F ($x_0$ ) $\leq 0$ alors la droite tangente passant par le point $(a, F(a))$ coupe l'axe des x en dehors de [a,b] (l'intervalle dont se trouve la solution exacte ) , on s'éloignera donc , de la racine exacte $\alpha$.

**Remarque** :

***Une méthode itérative n'est importante que si elle est convergente*** .

On présente alors le théorème de convergence suivant :

**Théorème :**

Soit F une fonction de classe $C^2([a,b])$ vérifiant les conditions suivantes :

i) F(a).F(b) <0

ii) $F'(x_n) \neq 0$ sur [a,b]

iii) $F''(x_n)$ garde un signe constant sur [a,b]

Alors, pour un choix de $x_0$ tel que F'' ($x_0$ ).F ($x_0$ )$\geq 0$ , la suite :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \qquad n = 0,1,2,\dots$$

converge vers l'unique solution de F(x)=0

Et on a l'estimation d'erreurs suivante :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{M}{2m} |x_{n-1} - x_n|^2$$

Où : $M = \sup_{[a,b]} |F''(x)|$ et $m = \inf_{[a,b]} |F'(x)|$

**Remarques :**

R1 **:** Les conditions i) et ii) assurent l'existence et l'unicité de la solution.

R2 : **La** condition iii) montre que la fonction considérée ne change pas de concavité sur [a,b] .

R3 : Ce théorème assure la convergence dans un voisinage de $x_0$ .

**Exemple d'application :**

Soit la fonction : $F(x) = x^3 + x - 1$

1) Cette fonction admet une racine séparée sur $[\frac{1}{2}, 1]$ car :

$$\begin{cases} F\left(\frac{1}{2}\right) = -0,375 \\ F(1) = 1 \end{cases} \qquad \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

et

$$F' > 0 \; sur \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Vérifions maintenant les conditions du théorème de Newton :

La condition i) déjà vue dans 1) .

ii) $F'(x) = 3x^2 + 1 \neq 0 \ sur \ \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$iii) \ F''(x) = 6x > 0 \ sur \ \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Le choix de $x_0$.

$F''(x) > 0 \ et \ F(1) > 0 \ \Rightarrow \ F''(1).F(1) > 0 \Rightarrow x_0 = 1$

$sup|F''(x)| = 6 \ \ sur \ \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$Inf|F'(x)| = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}. \ sur \ \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

On calcule une approximation avec une précision $\varepsilon = 10^{-2}$

Partant du choix de $x_0 = 1, \ on \ a \ : x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} = 0{,}64.$

$$|x_1 - \alpha| \leq \frac{M}{2m}|x_1 - x_0|^2 = \frac{6 \times 4}{2 \times 7}|x_1 - x_0|^2 \approx 0{,}22 > \varepsilon.$$

On calcule alors $x_2$.

$x_2 = 0{,}67$

$|x_2 - \alpha| \leq 1{,}71.|x_1 - x_0|^2 \approx 0{,}0015 < 0{,}5.10^{-2} = \varepsilon$

$d'où \ x_2$ est la valeur approchée de $\alpha$ à $0{,}5.10^{-2}$.

**Estimation** :

$\begin{cases} m - n + 1 = -2 \\ m = -1 \end{cases} \Rightarrow$ n=2 Le nombre a deux chiffres significatifs exacts.

$$\boxed{\alpha = 0{,}67 \pm 0{,}01}$$

## 2-4) Méthode de Régula-Falsi

Dans la méthode de Newton, le calcul de $F'(x)$ peut être complexe ou impossible. On remplacera alors cette dérivée par son approximation :

$$F'(x) = \frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

D'où la méthode de régula-Falsi :

$$\begin{cases} x_0 \ et \ x_1 \ données, \ \ n = 1, 2, \ldots \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n.F(x_{n-1}) - x_{n-1}.F(x_n)}{F(x_{n-1}) - F(x_n)} \end{cases}$$

La méthode de Régula-Falsi est plus facile par rapport à la méthode de Newton, car elle n'exige qu'une seule évaluation de la fonction (celle de $F(x_n)$), ($F(x_{n-1})$ est calculée dans l'itération précédente). Par contre, Newton exige deux: $F(x_n)$ et ($F'(x_n)$).

## 3) La méthode de Newton et les Polynômes (Théorème de STURM)

On suppose que F est un polynôme $P_n$ de degré n n'ayant que des racines distinctes.

$$F(x) = P_n(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n,\ a_0 \neq 0.$$

- Comment séparer les racines de ce polynôme ?

**Définition :** On appelle suite de Sturm, la suite définie par :

$$S_0(x) = P_n(x)$$

$$S_1(x) = P_n'(x)$$

$$S_2(x) = -Reste(\frac{S_0(x)}{S_1(x)})$$

..

$$S_i(x) = -Reste(\frac{S_{i-2}(x)}{S_{i-1}(x)})$$

$$S_n(x) = -Reste(\frac{S_{n-2}(x)}{S_{n-1}(x)})$$

(Les polynômes de Sturm sont donnés à un coefficient près).

**Théorème de Sturm 1 :** (Nombre de racines réelles)

Le nombre de racines réelles (qui sont supposées simples) de l'équation : $P_n(x) = 0$ est égal à :

$N(a) - N(b)$ où $N(\xi),\ \xi = a\ ou\ b$ est le nombre de changement de signe de la suite $S_i(x)$.

Les réelles a et b sont les extrémités de l'intervalle contenant les racines.

**Théorème 2 :**

Les racines réelles de l'équation : $P_n(x) = 0$ se trouvent dans]-T, T [avec :

$$T = \frac{1}{|a_0|}[\max_{i=1..n}|a_i|]$$

**Cas des racines multiples :**

**Propriétés :** s'il existe $j$ tel que $S_{j+1} = 0$ , alors les racines multiples de $P_n(x)$ sont les racines simples de $S_j(x)$.

**Remarque :** La divergence de la méthode de Newton dans le cas des polynômes est due à deux raisons :

-soit au mauvais choix de $x_0$.

-soit qu'on n'a pas de racines réelles.

**Exemples d'application (degré 3) :**

$\mathrm{F(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0}$

1) On détermine l'intervalle dont se trouvent les racines de $F(x) = 0$ si elles existent.

   $T = \frac{1}{|a_0|}\left[\max_{i=1,3}|a_i|\right] = 1 + \frac{1}{1}.|3| = 4.$

   $d'où \;\; \mathrm{I} = ]-4,4[.$

2) On cherche le nombre de racines : pour cela, on considère la suite de Sturm associée au polynôme $P_3(x)$.

$\mathrm{S_0(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3}$

$\mathrm{S_1(x) = 3x^2 - 6x + 1}$

$S_2(x) = -Reste\left(\frac{S_0(x)}{S_1(x)}\right) = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3} = \frac{4}{3}(x+2), \qquad On\, prend : S_2(x) \equiv (x+2)$

$S_3(x) = -Reste\left(\frac{S_1(x)}{S_2(x)}\right) = -Reste\left(\frac{(3x^2-6x+1)}{x+2}\right)$ =-25

En prenant les valeurs de cette suite pour -4 , 4 et 0 , on peut dresser le tableau suivant :

| $x$ | $S_0$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|
| -4 | - | + | - | - | 2 |
| 0 | - | + | + | - | 2 |
| 4 | + | + | + | - | 1 |

Le nombre de racines réelles de l'équation considérée $= N(-4) - N(4) = 1.$

**Localisation des racines :**

$N(-4) - N(0) = 2 - 2 = 0$ Pas de racines dans [-4,0]

$N(0) - N(4) = 1$ La racine réelle se trouve dans [0, 4] ( $P_3(0) = -3$ *et* $P_3(4 > 0)$.

<u>A ce moment</u> : On applique la méthode de Newton pour approcher cette racine.

$F' = 3x^2 - 6x + 1 > 0$ sur $[2,4]$.

$F'' > 0$ *sur* $[2,4]$.

$$x_0 = 4, \qquad x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} = 3{,}32.$$

$x_2$=3,05, $x_3$=3,002. …. On remarque que cette suite converge vers la racine $\bar{x}$=3.

***<u>Cas des racines multiples</u>*** :

$P_4(x) = F(x) = 4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1$

$S_0(x) = F(x)$

$S_1(x) = 16x^3 - 12x^2 - 6x + 4 \equiv 8x^3 - 6x^2 - 3x + 2$

$$S_2(x) = \frac{9}{4}x^2 - \frac{21}{8}x + \frac{3}{4} \equiv 6x^2 - 7x + 2.$$

$$S_3(x) = \frac{16}{9}x - \frac{8}{9} \equiv 2x - 1$$

$S_4(x) = 0$

Il existe donc des racines multiples qui sont racines de $S_3(x)$, soit $x = \frac{1}{2}$.

**L'intervalle où se trouvent les racines est :**

$$T = \frac{1}{|a_0|}[\max_{i=1,4}|a_i|] = 1 + \frac{1}{4}.|4| = 2.$$

$$\Rightarrow I = ]-2, 2[$$

Pour la localisation, prenez les valeurs de la suite de Sturm pour -2, 0 et 2.

| $x$ | $S_0$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|
| -2 | + | - | + | - | 3 |
| 0 | - | + | + | - | 2 |
| 2 | + | + | + | + | 0 |

Comme $N(-2) - N(2) = 3$ alors, il existe trois racines réelles distinctes.

La racine $\frac{1}{2}$ est donc double.

$N(-2) - N(0) = 3 - 2 = 1$, l'une des racines se trouve dans [-2,0].

$N(0) - N(2) = 2 - 0 = 2$, deux racines se trouvent entre [0, 2].

**Exercice supplémentaire :**

On considère le polynôme : $F(x) = P_3(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

1) Former la suite des polynômes de Sturm et séparer les racines de $P_3(x)$.
2) Déterminer à $10^{-3}$ près une des racines par la méthode de Newton en partant de la valeur initiale $x_0 = -3$.



# Chapitre 3 :

# Approximation

## 1) Position du problème :

Considérons une fonction $f(x)$ définie en un nombre fini de points $x_1, x_2, \dots, x_n$ d'un intervalle [a, b] ou l'expression de $f$ est trop compliquée. L'approximation de f sur [a, b] consiste à déterminer une fonction $\emptyset^*(x)$ d'écriture connue , tel un polynôme, une exponentielle, une somme trigonométrique,… de telle sorte que l'écart :

$$E(x) = f(x) - \emptyset^*(x)$$

soit minimal.

## 2) Meilleure approximation dans un espace vectoriel :

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

**Définition 1 :**

On appelle produit scalaire sur E l'application :

$<,>: E \times E \to \mathbb{R}^+$

$\quad (f,g) \to < f,g >$

Vérifiant les propriétés :

i) $< f,f > \, > 0$

ii) $< f,f > 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$

iii) $< f,g >=< g,f >$

iv) $< f,\lambda g + \mu h > \; = \; \lambda < f,g > +\mu < f,h >$

- Le produit scalaire $<,>$ défini une norme sur E notée $\|.\|$ et on a : $\|f\| = \sqrt{< f,f >}$.
- E muni d'une norme $\|.\|$ est appelé espace vectoriel normé.
- Deux polynômes $P_1$, $P_2$ sont dit orthogonaux si $< P_1, P_2 >= 0$.
- Un système de polynômes $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ est dit orthogonal si :

(1) $\quad < P_i, P_j >= \begin{cases} 0 \; si \; i \neq j \\ \alpha_i > 0 \; si \; i = j \end{cases}$ et, il est dit orthonormé si $\alpha_i = 1, i = 1, \ldots n$.

**Théorème 1 :** soit E un espace vectoriel et F un sous espace de E de dimension finie.

La meilleure approximation $\emptyset^* \in F$ de $f \in E$ est unique , et est définie par :

$\|f - \emptyset^*\| = min_{\emptyset}\|f - \emptyset\|, \qquad \emptyset \in F$

De plus, une condition nécessaire et suffisante pour que $\emptyset^* \in F$ soit une meilleure approximation de $f \in E$ est que : $< f - \emptyset^*, \emptyset >= 0$ pour tout $\emptyset \in F$.

**Comment construire la meilleure approximation $\emptyset^*$?**

$\emptyset^*$ se construit de la manière suivante : soit $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\}$ une base de F. La meilleure approximation s'écrit alors :

$$\emptyset^* = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^* \varphi_k$$

La condition d'orthogonalité : $< f - \emptyset^*, \emptyset >= 0$ où $\emptyset = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k$ est un élément quelconque de F conduit au système à n équations à n inconnues $a_k^*$.

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{n-1} < \varphi_k, \varphi_j > a_k^* =< f, \varphi_j > \qquad j = 0,2, \dots, n-1$$

**Cas particulier :**

Dans le cas où le système de vecteurs de base est orthonormée c.à.d.:

$< \varphi_k, \varphi_j >= 0 \; si \; k \neq j \; et \; < \varphi_k, \varphi_j >= 1 \; si \; j = k$

La résolution du système (2) est immédiate puisque :

$a_k^* =< f, \varphi_k >, \qquad k = 0,2, \dots, n-1$

D'où

$$\emptyset^* = \sum_{k=0}^{n-1} < f, \varphi_k > \varphi_k$$

## 3) Evaluation de L'erreur

$$(3) \qquad \|f - \emptyset^*\| = \sqrt[2]{\|f\|^2 - < f, \emptyset^* >}$$

Cas d'une base orthonormée :

$$(4) \qquad \|f - \emptyset^*\| = \sqrt[2]{\|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n-1} {a_k^*}^2}$$

## 4) Approximation au sens des moindres carrées

Soit $f \in E = C([a,b])$ dont on connaît les valeurs $f(x_i)$ en (N+1) points, $x_i \in [a,b]$.

On défini sur E le produit scalaire : $< f, g >= \sum_{i=0}^{n} w(x_i) f(x_i) g(x_i)$

Où w(x) est une fonction poids positive et ne pouvant s'annuler en tous les points $x_i$

Et soit F un sous espace de E de dimensions n (n < N).

$\emptyset^*$ réalise la meilleure approximation au sens des moindres carrées de $f$ si :

$$\sum_{i=0}^{N} w(x_i)(f(x_i) - \emptyset^*(x_i))^2 = min_{\emptyset} \sum w(x_i)(f(x_i) - \emptyset(x_i))^2, \emptyset \in F$$

Soit $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\}$ une base de F.

(5) $\qquad \emptyset^* = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^* \varphi_k$

Ses coefficients sont donnés par le système :

(6) ... $\begin{cases} \sum_{i=0}^{N} w(x_i)\, \varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i) = \sum_{i=0}^{N} w(x_i)\varphi_j(x_i)f(x_i) \\ j = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$

Dans le cas de l'approximation polynômiale on prend : $\varphi_0 = 1,\ \varphi_1 = x, \dots \varphi_{n-1} = x^{n-1}$

L e système (6) s'écrit alors :

(7)... $\begin{cases} \sum_{i=0}^{N} w(x_i)\, x_i^{k+j}) = \sum_{i=0}^{N} w(x_i)x_i^j\, f(x_i) \\ j = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$

Et $\emptyset^* = P^*(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k^*\, x^k$

**(Application : Voir exercice 11 plus loin)**



# Chapitre 4 :

## Interpolation polynômiale

### 1-Introduction

Soit $y = f(x)$ une fonction dont on ne connait que les valeurs $y_i$ qu'elle prend aux $(n+1)$ points distincts $x_i$, $i = 0, 1, \dots n$ on a donc :

$f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots n$.

### Problème

Déterminer un polynôme $P_n(x)$ de degré $\leq n$ tel que :

$P_n(x_i) = y_i = f(x_i),\ i = 0, 1, \dots n$

de manière à pouvoir estimer les valeurs $f(x)$ au moyen de $P_n(x)$ pour $x$ tel que :

$$\min x_i \leq x \leq \max x_i$$

C'est ce qu'on appelle Interpolation de la fonction $f$ par le polynôme $P_n(x)$ aux points $x_0, x_1, \dots x_n$.

**Remarque :**

Dans l'approximation discrète au sens des moindres carrés, on a supposé que $n < N = nombre\ de\ points - 1$ .

Si $n = N$, le polynôme $P$ passe par les points $x_i$ , et dans ce cas on parle d'interpolation.

## 2- Polynôme d'interpolation

**Définition**

Le polynôme $P(x)$ est dit polynôme d'interpolation de $f$ aux points $x_i$ , $i = 0, 1, \dots n$ si :

**(1)** $$\begin{cases} degré\ de\ P \leq n \\ P(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots n \end{cases}$$

**Théorème**

Si les points $x_i$ sont distincts, alors le polynôme d'interpolation de $f$ aux points $x_i$ ,$i = 0, 1, \dots n$ existe et il est unique.

**Preuve** : voir réf [2].

Comment construire ce polynôme d'interpolation ?

## 3- Méthodes utilisées :

### 3-1-Méthode de Lagrange :

#### 3-1-1- Les polynômes de Lagrange :

Les polynômes de Lagrange notés $L_i(x)$, sont définies par :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left( \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

-Les polynômes $L_i(x)$ sont de degré $\leq n$ et vérifient

$L_i(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \; si \; i \neq j \\ 1 \; si \; i = j \end{cases}$

- Les $L_i(x)$ s'annulent en $n$ points $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$.

**3-1-2-Polynôme d'interpolation de Lagrange**

(2) $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i).L_i$ est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange de $f$ aux points $x_i$, $i = 0, 1, \dots n$ et on a : $\begin{cases} degré \; de \; P_n(x) \leq n \\ P_n(x_i) = f(x_i) \; \forall \, i \end{cases}$

**Remarque :**

Les polynômes de Lagrange s'adaptent mal aux changements de points (si on ajoute un point on doit refaire tous les calculs).

**Question :** La méthode suivante permet-elle de compléter les valeurs déjà obtenues sans refaire tous les calculs ?

## 3-2- Méthode de Newton

**3-2-1- Différences divisées d'une fonction**

On considère l'expression suivante :

(3) $P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \dots + a_n (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$.

Pour le calcul de $a_0$ on utilise le fait que :

$f(x_0) = P_n(x_0) = a_0$

Pour $a_1$, $f(x_1) = P_n(x_1) \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

On procède de la même manière jusqu'à l'obtention de $a_n$.

**Définition**

Soit $f$ une fonction définie sur [a, b] et $x_0, x_1, \dots, x_n$ (n+1) points de [a, b] distincts. On appelle différences divisées de $f$ d'ordre successifs 0, 1, …, n les expressions suivantes :

- d'ordre 0 : $\delta[x_i]\, f = f(x_i)$

- d'ordre 1 : $\delta[x_i\,,\, x_j]\, f = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$

- d'ordre $k > 1$ : $\delta[x_i\,,\, x_{i+1}, \dots\, x_{i+k-1},\; x_{i+k}]\, f = \frac{\delta[x_{i+1}, \dots\, x_{i+k}]f - \delta[x_i\,, x_{i+k-1}]f}{x_{i+k} - x_i}$

**Application :**

$$a_0 = \delta[x_0]f = f(x_0)$$

$$a_1 = \delta[x_0,\ x_1]f$$

$$a_2 = \delta[x_0, x_1, x_2\ ]f$$

$$a_n = \delta[x_0, x_1, \dots, x_n\ ]f$$

**Remarque :**

Les différences divisées sont indépendantes de la numérotation des points $x_i$.

En remplaçant ces expressions dans (3) on obtient le polynôme d'interpolation de $f$ sous forme de Newton :

(4) $P_n(x) = \delta[x_0]f + (x - x_0)\ \delta[x_0, x_1]f + \cdots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})\ \delta[x_0, \dots x_n]f$

Vérifiant : $\begin{cases} degré\ de\ P_n(x) \leq n \\ P(x_i) = f(x_i)\ \ \forall\, i \end{cases}$

**3-2-2- Calcul des différences divisées**

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $d'ordre 1$ | $d'ordre 2 \dots \dots d'ordre\ n$ |
|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f(x_0)$ | | |
| | | $\delta[x_0, x_1]f$ | |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | | |
| | | $\delta[x_1, x_2]f$ | |
| $x_2$ | $f(x_2)$ | | |
| . | . | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| . | . | | ............... $\delta[x_0, \dots x_n]f$ |
| . | . | | |
| $x_{n-1}$ | $f(x_{n-1})$ | | |
| | | $\delta[x_{n-1}, x_n]f$ | |
| $x_n$ | $f(x_n)$ | | |

**Remarque :**

a) La méthode de Newton est la plus utilisée pour calculer le polynôme d'interpolation d'une fonction $f$.

b) Avantage de la méthode : si on ajoute p points supplémentaires, il suffit de les écrire à la suite du tableau et de compléter les différences divisées. Si l'on veut, au contraire négliger les q derniers points, il suffira d'arrêter le tableau des différences divisées aux nombres de points demandés.

c) La différence divisée d'ordre (n+1) d'un polynôme d'ordre n est nulle.

## 4) Erreur d'interpolation :

Le problème fondamental est d'étudier l'erreur commise $f(x) - P_n(x)$.

**Théorème :** Soit [a, b] un intervalle contenant $x_0, x_1, \dots, x_n$, on suppose que $f$ est (n+1) fois dérivables sur [a, b].

Alors pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in [a, b]$ tel que :

$$(5) \quad f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

**Remarque:**

La formule (5) ne permet pas d'estimer d'une manière exacte la valeur de l'erreur, par contre, elle permet d'en calculer une majoration d'où :

**Corollaire** : Sous les hypothèses du théorème précédent on a :

$$(6) \quad |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \left|\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\right|$$

Où :

$$M = \sup_{x \in [a,b]} |f^{n+1}(x)|$$ ,

**Remarque :**

Si le polynôme d'interpolation est donné sous forme de Newton on a : (voir [2])

$$\text{(7)} \qquad \delta[x_0, x_1, \dots, x_n]f = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad \xi \in [a,b]$$

## 6) Différences finies (cas des points équidistants)

Ce cas a une grande importance dans l'interpolation des fonctions données sous forme de tableau. Dans ce cas les points d'interpolation sont en progression arithmétiques, i.e. :

$x_0 \quad , x_1 = x_0 + h \ , \quad x_2 = x_0 + 2h \ , \dots\dots . x_n = x_0 + nh$ , h> 0

Définition : Soient $f(x_i) = y_i$ , $i = 0, 1, \dots n$ des nombres réels. On appelle différence finie d'ordre 1 l'expression

$$\text{(8)} \qquad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad , i = 0, 1, \dots n-1$$

D'ordre 2 :

$$\text{(9)} \qquad \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \quad , i = 0, 1, \dots n-2$$

En général, une différence finie d'ordre k :

$$\text{(10)} \qquad \Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i \quad , i = 0, 1, \dots n-k$$

Par convention : $\Delta^0 = y_i \quad , i = 0, 1, \dots n$

**Remarque** : pour (n+1) points, on ne peut définir que des différences finies allant jusqu'à l'ordre n.

### 6-1) Relation entre les différences finies et les différences divisées :

**Théorème** : Soit f une fonction dont on connait les valeurs $f(x_i) = y_i$ , $i = 0, 1, \dots n$ , avec $x_i = x_{i-1} + h$ , h> 0 .

Alors :

$$(11) \quad \delta[x_i , x_{i+1}, \dots x_{i+k-1}, \ x_{i+k}] \, f = \frac{\Delta^k(f(x_i))}{h^k k!} \qquad ,0 \leq i \leq i+k \leq n$$

Où $\delta[x_i , x_{i+1}, \dots x_{i+k-1}, \ x_{i+k}] \, f$ est la différence divisée d'ordre k de f aux points $x_i , x_{i+1}, \dots x_{i+k-1}, \ x_{i+k}$ et $\Delta^k(f(x_i))$ et la différence finie d'ordre k au point $f(x_i)$ .

**Preuve** : La preuve se fait par récurrence (réf [2 ] et[ 3]) .

### 6-2) Polynôme d'interpolation de Newton par les différences finies :

En utilisant les formules (4) et (11) on obtient :

$$(12) \ P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{\Delta(f(x_0))}{h} + \cdots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \frac{\Delta^n(f(x_0))}{n! h^n}$$

## 7) Algorithme de HORNER :

Algorithme de calcul d'une valeur d'un polynôme : Dans le cas d'un polynôme de Newton on utilise l'algorithme suivant :

$$(13) \quad \begin{cases} p_0(x) = \delta[\, x_0, x_1, \dots, x_n \,] f \\ p_k(x) = (x - x_{n-k}) p_{k-1}(x) + \delta[\, x_0, x_1, \dots, x_{n-k} \,] f, \quad k = 1, \dots . n-1 \\ p_n(x) = P_n(x) \end{cases}$$

**Application** : voir TD

# Chapitre 5 :

# Dérivation et intégration numérique

## I) Intégration numérique :

Soit $f \in C([a,b])$ , soit à calculer :

(1) $$I = \int_a^b f(x)dx$$

Si F est une primitive de $f$ alors :

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Dans plusieurs cas , on ne peut pas évaluer l'expression de la primitive F pour différentes raisons :

*) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$ La primitive de f est inconnue.

*) Le cas où la fonction $f$ n'est connue que pour un nombre fini de points.

*) F est connue mais le calcul de F(a) et F(b) est imprécise. Ex : $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-t}dt$

**Question : Quelle est la procédure adoptée pour calculer une valeur approximative de :**

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

1) ***Une méthode générale :***

Pour des points $x_i$ quelconques, $I$ sera approchée par $I_n$ :

(2) $$I_n = \int_a^b P_n(x)\,dx$$

Où $P_n(x)$ est le polynôme d'interpolation de $f$ aux points $x_i$.

2) **Formule générale de quadrature de Newton –Côtes :**

Cette formule est appliquée dans le cas où les points $x_i$ sont équidistants.

**Théorème :** Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (n+1)points équidistants dans [a,b] avec $x_0 = a, x_n = b$

et $x_i = x_0 + ih$ , $h = \frac{b-a}{n}$ , $y_i = f(x_i)$ $\forall i$

Alors la formule générale de quadrature de Newton –Côtes est donnée par :

(3) $$I \cong (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i\, f(x_i)$$

Où $$H_i = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!n}\int_0^n \frac{q(q-1)\ldots\ldots(q-n)}{q-i}$$

et $$q = \frac{x-x_0}{h}$$

Les constantes $H_i$ sont appelées coefficients de Côtes, elles vérifient :

$$\sum H_i = 1 \quad , \quad H_i = H_{n-i}$$

## 3) Application de la formule (3)

### 3-1) Formule des trapèzes : n=1 :

(4) $$I \cong \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1))$$

### 3-2) Formule de Simpson n=2 :

(5) $$I \cong \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

### 3-3) Formules composées :

L'idée est d'appliquer les formules des trapèzes et de Simpson sur des sous intervalles de [a,b] =[ $x_0, x_n$].

On décompose alors l'intervalle [a,b] en n sous intervalles égaux [$x_i, x_{i+1}$] , *i=0, ….n-1*

Et on applique la méthode des trapèzes ou celle de Simpson sur chaque sous intervalle. On obtient alors :

- **Pour Trapèzes composée :**

(6) $$I \cong \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

-**Pour Simpson composée :** On divise l'intervalle [a,b] en 2n sous intervalles égaux.

(7)
$$I = \int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)dx \cong$$
$$\frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_{2n}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}\right)$$

## II) Dérivation numérique :

Soit la fonction *f* donnée aux points équidistants $x_0, x_1, \dots, x_n$ par des valeurs

$f(x_i) = y_i$ , $i = 0, 1, \dots n$ . Afin d'évaluer dans un intervalle [a,b] les dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$

on considère la formule de Newton avec les différences finies. On choisit alors comme $x_0$ l'abscisse $x_i$ le plus proche de x et on a :

(8) $$f'(x) \cong \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 \frac{2t-1}{2} + \Delta^3 y_0 \frac{3t^2-6t+2}{6} + \cdots\right]$$

(9) $$f''(x) \cong 1/(h^2)[\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 (t-1) \dots]$$

Avec $t = \frac{x - x_0}{h}$

Quand il s'agit de chercher les dérivées de *f* aux abscisses $x_i$ , les formules (8) et (9) deviennent simples. On prend alors comme $x_0$ le $x_i$ lui-même et donc t=0. Il vient :

(10) $$f'(x) \cong \frac{1}{h}\left[\Delta y_i - \frac{1}{2}\Delta^2 y_i + \frac{1}{3}\Delta^3 y_i + \cdots\right]$$

(11) $$f''(x) \cong 1/(h^2)\left[\Delta^2 y_i - \Delta^3 y_i + \frac{11}{12}\Delta^5 y_i \dots\right]$$

# Chapitre 6 :

## Résolution des systèmes linéaires $A.x = B$

### 1) Position du problème

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}.x_2 + \cdots + a_{1n}.x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}.x_2 + \cdots + a_{2n}.x_n = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}.x_2 + \cdots + a_{nn}.x_n = y_n \end{cases}$$

Ce système s'écrit sous la forme : $Ax = y$

Si $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ et $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$

$i$ représente le numéro de ligne et j le numéro de colonne.

Une matrice est dite triangulaire si $a_{ij} = 0$ pour $j > i$ ou pour $i > j$. Une matrice bande est une matrice dont tout les éléments sont nuls sauf sur une bande autour de la diagonale principale.

Ces matrices se rencontrent dans la résolution d'équations aux dérivées partielles par la méthode des différences finies ou dans la méthode des éléments finis.

## I) Rappel sur l'algèbre des matrices

1) On appelle matrice d'ordre $(m \times n)$ la donnée d'un tableau de m lignes et n colonnes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & \dots & . \\ a_{1m} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2) La matrice A est dite carrée d'ordre n si m=n. La matrice A s'écrit souvent sous la forme : $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

   Dans toute la suite, on s'intéresse aux matrices carrées d'ordre n.

3) La matrice $A^t = (a_{j,i})_{1 \le i, j \le n}$ est appelée transposée de la matrice A qui satisfait les propriétés suivantes :

   a) $A^{tt} = A$.

b) $(A+B)^t = A^t + B^t$.

c) $(AB)^t = B^t A^t$.

4) Une matrice A est dite régulière si son déterminant est différent de zéro.
5) Si A et B sont deux matrices régulières telles que : $A.B = B.A = I$ alors B est dite inverse de A et $B = A^{-1}$.
6) Valeur absolue de A : $|A| = (|a_{j,i}|)$, $|a_{j,i}|$ sont les modules des éléments de A.
7) Si A et B sont deux matrices carrées, il vient :

a) $|A+B| \leq |A| + |B|$

b) $|A.B| \leq |A|.|B|$

c) $|kA| = |k|.|A|$ k est un nombre quelconque.

8) E n particulier : $|A^p| \leq |A|^p$ p est un nombre naturel.
9) Norme d'une matrice A : c'est le nombre réel $\|A\|$ qui satisfait aux conditions suivantes :

a) $\|A\| \geq 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0.$

b) $\|kA\| = |k|.\|A\|.$

c) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

d) $\|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|$

e) Pour A carrée, on a : $\|A^p\| = \|A\|^p$

En pratique, on utilise les normes canoniques (facilement calculables) :

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\rho(A.A^t}$$

Où $\rho(A)$ est appelé rayon spectral de A .

La résolution du système précédent $(A.x = b)$ peut s'effectuer par plusieurs méthodes :

- Une méthode classique (Cramer).
- Les méthodes directes.
- Les méthodes itératives.

**1) Méthode de Cramer :** Cette méthode repose sur les déterminants. Si $\det A \neq 0$ alors le système $A.x = b$ admet une solution unique x donnée par : $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$ Où $A_i$ est la matrice obtenue en remplaçant, dans **A,** la $i^{ème}$ colonne par **b**.

**Numériquement :** on calcule : $\det A_i$ , $\det A$ et $\frac{\det A_i}{\det A}$.

Pour n=10, Cramer nécessite $3.10^9$ opérations (beaucoup plus de $n^4$).

- Notre objectif : est de faire appel à des méthodes numériques ayant des temps de calcul acceptables (le nombre ne dépasse pas $n^3$).

## 2) Méthodes directes :

Une méthode est dite directe, si elle donne au bout d'un nombre fini d'opérations (acceptable) une solution exacte du problème.

**Remarque :** cette méthode est utilisée généralement lorsque $n \leq 100$ → matrice pleine.

### 2-1) Méthode de Gauss-Jordan :

Soit le système linéaire $A.x = b$ où A est une matrice régulière ($\det A \neq 0$).

**Principe :** Transformation de la matrice A en une matrice identité.

$$\text{i.e: } [A:B] \xrightarrow{\text{transformation}} [I:b'] \text{ où } I = \text{identité}.$$

D'où : $A.x = b$ $\quad I.x = b'$ $\quad x = b'$

**Etapes :** on pose $A = A^{(1)}$ et $b = b^{(1)}$.

**$1^{ère}$ Etape** :

$$[A:b] = [A^{(1)}:b^{(1)}] = \begin{bmatrix} a_{11}{}^{(1)} & \dots & a_{1n}{}^{(1)} & . & b_1{}^{(1)} \\ a_{21}{}^{(1)} & \dots & a_{2n}{}^{(1)} & . & b_2{}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & . & . \\ a_{n1}{}^{(1)} & \dots & a_{nn}{}^{(1)} & . & b_n{}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ . \\ L_n^{(1)} \end{matrix}$$

On suppose que $a_{11}{}^{(1)} \neq 0$ (pivot de la première étape) et on fait les opérations suivantes :

$$L_1^{(2)} = \frac{1}{a_{11}{}^{(1)}} L_1^{(1)}$$

$$L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - a_{i1}{}^{(1)}.L_1^{(2)}; i = 2, \dots, n$$

On obtient:

$$[A^{(2)}\vdots b^{(2)}]=\begin{bmatrix} 1 & a_{12}{}^{(2)} \ldots\ldots a_{1n}{}^{(2)} & . & b_1{}^{(2)} \\ 0 & a_{22}{}^{(2)} \ldots\ldots a_{2n}{}^{(2)} & . & b_2{}^{(2)} \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots & . & . \\ 0 & a_{n2}{}^{(2)} \ldots\ldots a_{nn}{}^{(2)} & . & b_n{}^{(2)} \end{bmatrix}\begin{matrix} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \\ . \\ L_n^{(2)} \end{matrix}$$

Avec:

$$\begin{cases} a_{1j}{}^{(2)} = \dfrac{a_{1j}{}^{(1)}}{a_{11}{}^{(1)}}, \quad j = 1, \ldots, n. \\ a_{ij}{}^{(2)} = a_{ij}{}^{(1)} - a_{i1}{}^{(1)}.a_{1j}{}^{(2)}, \quad i = 2, \ldots, n \; et \; j = 2, \ldots, n \\ a_{i1}{}^{(2)} = 0, \quad i = 2, \ldots, n \end{cases}$$

Et : $\begin{cases} b_1{}^{(2)} = \dfrac{b_1{}^{(1)}}{a_{11}{}^{(1)}} \\ b_i{}^{(2)} = b_i{}^{(1)} - a_{i1}{}^{(1)}.b_1{}^{(2)}, \quad i = 2, \ldots, n \end{cases}$

**$k^{ème}$ Etape**

$a_{kk}{}^{(k)} \neq 0$

$$\begin{cases} L_k^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{kk}{}^{(k)}} L_k^{(k)} \; (ligne \; du \; pivot) \\ L_i^{(k+1)} = L_i^{(k)} - a_{ik}{}^{(k)}.L_k^{(k+1)}, \quad i = 1, \ldots, n \; avec \; i \neq k. \end{cases}$$

Et $\begin{cases} a_{kj}{}^{(k+1)} = \dfrac{a_{kj}{}^{(k)}}{a_{kk}{}^{(k)}} \\ a_{ij}{}^{(k+1)} = a_{ij}{}^{(k)} - a_{ik}{}^{(k)}.a_{kj}{}^{(k+1)}, \quad i = 1, \ldots, n \; ; i \neq k \quad et \; j = k+1, \ldots, n. \end{cases}$

A la dernière étape, on obtient :

$A.x = b \;\Leftrightarrow\; \mathrm{I}.x = b^{(n)}$ Où : $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ $et \; b^{(n)} = b_i{}^{(n)}{}_{1 \leq i \leq n}$

**Méthode pratique** : On normalise d'abord la ligne du pivot puis, on passe à la réduction.

**Exemple :**

Soit à résoudre le système $A.x = b$ où :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$ Par la méthode de Gauss-Jordan (Sera traité en détail en TD)

**Remarques sur la méthode de Gauss-Jordan**

1) Le passage de la matrice [A⋮b] en une matrice [I⋮b'] où x=b' nécessite $n^3$ opérations.
2) Elle est aussi conseillée pour inverser une matrice : il suffit d'effectuer les opérations précédentes sur le système (A⋮I) pour avoir (I⋮ $A^{-1}$).

## 2-2) Méthode de Gauss ordinaire

Soit A une matrice d'ordre $n$ régulière.

**Principe** : Transformation de la matrice A en une matrice triangulaire supérieure. Pour cela, on construit [A:b] et

$[A:B] \xrightarrow{\text{transformation}} [A^{(n)}:b^{(n)}]$ Où $A^{(n)}$ est une matrice triangulaire supérieure.

$$i.e: [A:b]=\begin{bmatrix} a_{11}{}^{(1)} & \dots & a_{1n}{}^{(1)} & . & b_1{}^{(1)} \\ . & \dots & . & . & . \\ . & \dots & . & . & . \\ a_{n1}{}^{(1)} & \dots & a_{nn}{}^{(1)} & . & b_n{}^{(1)} \end{bmatrix} \rightarrow [A^{(n)}:b^{(n)}]=.\begin{bmatrix} a_{11}{}^{(n)} & \dots & a_{1n}{}^{(n)} & . & b_1{}^{(n)} \\ 0 & \dots & . & . & . \\ 0 & \dots & . & . & . \\ 0 & \dots & a_{nn}{}^{(n)} & . & b_n{}^{(n)} \end{bmatrix}$$

Puis, on résout le système $A^{(n)}.x = b^{(n)}$ dont $x$ est la solution exacte du système $A.x = b$.

On procède de la manière suivante :

**Etapes :** On pose $A = A^{(1)}, b = b^{(1)}$

Si $a_{11}{}^{(1)} \neq 0$ on fait les opérations suivantes :

$$L_1 \text{ est maintenue } \Leftrightarrow \begin{cases} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - \dfrac{a_{i1}{}^{(1)}}{a_{11}{}^{(1)}} L_1^{(1)} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$[A^{(2)}:b^{(2)}]=\begin{bmatrix} a_{11}{}^{(2)} & a_{12}{}^{(2)} & \dots \\ 0 & a_{22}{}^{(2)} & \dots \\ 0 & . & \dots \\ 0 & . & \dots \\ 0 & a_{n2}{}^{(2)} & \dots \end{bmatrix}$$

Et ainsi de suite ;

A la $k^{ème}$ étape, on effectue les opérations suivantes :

$$\begin{cases} L_k^{(k+1)} = L_k^{(k)} \\ L_i^{(k+1)} = L_i^{(k)} - \dfrac{a_{ik}{}^{(k)}}{a_{kk}{}^{(k)}} L_k^{(k)} \end{cases}$$

**Résolution de $A^{(n)}.x = b^{(n)}$**

$$A.x = b \qquad A^{(n)}.x = b^{(n)} \qquad \begin{cases} a_{11}^{(n)} x_1 + \dots = b_1^n \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{nn}^{(n)} x_n = b_n^n \end{cases}$$

On commence par déterminer $x_n$, puis $x_{n-1}$, ...(résolution par retour en arrière).

**Remarque :**

1) La méthode de Gauss nécessite $\frac{2}{3}n^3$ opérations.( Cramer $nécissite\ (n+1)^2 n!$ opérations ) pour résoudre un système d'ordre n .
2) Si l'un des pivots est nul , on permute la ligne du pivot avec une ligne supérieure .
3) $\det A = (-1)^p \prod a_{kk}^{(k)}$. $p$ est le nombre de permutation de lignes .(Dans le cas de Gauss ordinaire p=0) .

## 3) Décomposition de A en L.U :

Soit à résoudre le système $A.x = b$……(1).

**Principe** : mettre la matrice A sous forme L.U.

Où :

L : matrice triangulaire inferieure unitaire.

U : matrice triangulaire supérieure obtenue par la méthode de Gauss ordinaire.

**Résolution :** le système (1) devient :

$$A.x = b \Leftrightarrow L.U.x = b \Leftrightarrow \begin{cases} L.y = b \ldots (2) \\ U.x = y \ldots (3) \end{cases}$$

Donc la résolution de $A.x = b$ revient à la résolution des deux systèmes (2) et (3) (la résolution de ces dernières est immédiate, puisque les matrices L et U sont triangulaires).

**La méthode :** par Gauss ordinaire, on obtient :

$$A^{(n)}.x = b^{(n)}$$

On pose alors $U = A^{(n)}$ et on démontre par identification que:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 0 \\ \alpha_{n1} & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \text{Avec : } \alpha_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

L est donc la matrice des multiplicateurs à chaque étape de la méthode. Par conséquent, en appliquant la méthode de Gauss ordinaire à A, on obtient la décomposition L.U.

$$\boxed{A = L.U}$$

Il s'ensuit que :

$$\det A = \det(L.U) = \det L . \det U = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k)}.$$

**Question** : Sous quelles conditions à priori, la méthode L. U est applicable à la matrice A ?

**Théorème :** soient A une matrice d'ordre n et $A_{(k)}{}_{1\leq k\leq n-1}$ les sous matrices principales d'ordre k de A.

A se décompose sous forme L. U si et seulement si : $\det A_{(k)} \neq 0 \ \forall k, \ 1 \leq k \leq n.$

**Preuve :**

Il suffit de montrer par récurrence que :

$$a_{kk}^{(k)} = \frac{\det A_{(k)}}{\prod_{i=1}^{k-1} a_{ii}^{(i)}} \neq 0$$

**Exemple :** Sans faire les calculs, peut-on dire que A admet la décomposition L.U ?

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & -3 & -8 & -1 \\ 2 & -32 & 25 & -3 \\ -2 & 8 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

Comme $\det A_{(k)} \neq 0, 1 \leq k \leq 4 \ \Rightarrow$ **La méthode de Gauss ordinaire est applicable** $alors\ A$ se décompose sous forme LU , i.e. : $A = L.U$.

**Remarque :**

1) Si $a_{kk}^{(k)} \neq 0 \ \forall k$ alors la méthode de Gauss ordinaire est applicable et donc A se factorise sous forme L.U.
2) La décomposition L.U est unique.
3) S'il existe $1 \leq k \leq n-1$ tel que $a_{kk}^{(k)} = 0$. La méthode de Gauss ordinaire n'est plus applicable. On applique la méthode de Gauss avec permutations de lignes pour avoir la décomposition de A sous forme : A=P. L. U tel que : P est la matrice de permutation.
4) Si A se factorise sous forme L.U alors : A=L.D.V avec :

$$\begin{cases} \text{L: matrice triangulaire inférieure unitaire.} \\ \text{D: matrice diagonale de U.} \\ V = D^{-1}.U = \left(\frac{U_{ij}}{U_{ii}}\right). \end{cases}$$

## 4) Décomposition en L. D. $L^t$ d'une matrice symétrique :

**Définition :** A est dite symétrique si : $A = A^t$ ; $(a_{ij} = a_{ji})$

$A = L.U \Rightarrow L.D.V = A$

$A = A^t \Rightarrow L.D.V = (L.D.V)^t = V^t.D.L^t$ donc :

$L = V^t \text{ ou } V = L^t$ d'où :

$A = L.D.L^t$

grâce à l'unicité de la décomposition LU.

## 5) Méthode de Cholesky :

**Définition :** Soit A une matrice symétrique, on dit qu'elle est définie positive si et seulement si $\begin{cases} x^t A\, x \geq 0 \;\forall x \text{ vecteur de } \mathbb{R}^n \\ \quad et \\ x^t A\, x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$

**Exemple :**

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$x^t A\, x = (x_1, x_2).\begin{pmatrix} x_1 + 2\,x_2 \\ 2\,x_1 + 8\,x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + 2\,x_2)^2 + 4\,x_2{}^2 \geq 0$

Et

Si : $x^t A\, x = 0$ alors $(x_1 + 2\,x_2)^2 + 4\,x_2{}^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad x = 0$

**Théorème 1:** A est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs ($\det A_{(k)} \neq 0$), $1 \leq k \leq n$.

**Théorème 2:** Si A est strictement définie positive alors elle admet la décomposition L. D. $L^t$ et $d_{kk} > 0, \forall\, k, 1 \leq k \leq n$

On a:

$A = L.D.L^t = L.\sqrt{D}.\sqrt{D}.L^t$

Et

$(L.\sqrt{D})^t = \sqrt{D}.L^t$

Donc :

$A = (L.\sqrt{D}).(L.\sqrt{D})^t$

Posons :

$R = L.\sqrt{D}$

R : Matrice triangulaire inférieure et les éléments diagonaux de R sont strictement positifs.

On a donc :

**Théorème 3 :**

Soit A une matrice symétrique d'ordre n, alors $A = R.R^t$ où R est triangulaire inférieure à éléments diagonaux strictement positifs si et seulement si A est strictement définie positive.

**Remarque :**

1) R n'est pas unique.
2) La décomposition devient unique si l'on fixe à l'avance les éléments diagonaux $R_{ii}$ avec $R_{ii} > 0$.

## 5-1) Algorithme de Cholesky :

Pour le calcul de R, on peut utiliser soit la décomposition L. U puis $L.D.L^t$ puis $R = L.\sqrt{D}$, soit utiliser un procédé d'identification qu'on appelle « **Algorithme de Cholesky** ».

On multiplie les matrices R et $R^t$, puis on identifie les coefficients respectifs dans l'égalité : $A = R.R^t$ colonne par colonne on obtient :

| $1^{ère}$ colonne | $2^{ème}$ colonne |
|---|---|
| $r_{11} = \sqrt{a_{11}}$ <br> $r_{i1} = \frac{a_{i1}}{r_{11}},\ i \geq 2$ | $r_{22} = \sqrt{a_{22} - r_{21}^2}.$ <br> $r_{i2} = \frac{1}{r_{22}}(a_{i2} - r_{i1}.r_{21}),\ 3 \leq i \leq n$ |

Ainsi à la $k^{ème}$ colonne :

On a l'algorithme suivant :

$$r_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} r_{kj}^2}\ ,\ 2 \leq k \leq n.$$

$$r_{ik} = \frac{1}{r_{kk}}(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} r_{ij}.r_{kj})$$

### 5-2) Résolution du système $A.x = b$

Résoudre $A.x = b$ revient alors à résoudre : $R.R^t.x = b \Rightarrow \begin{cases} R.y = b \\ R^t.x = y \end{cases}$

**Remarque :**

1) La méthode de Cholesky nécessite $\frac{n^3}{3}$ opérations élémentaires (meilleure que celle de Gauss).
2) $\det A = \det\,(R.R^t) = (\det R)^2 = \prod_{i=1}^{n} r_{ii}^2$
3) Pour une matrice définie positive, on a :

$$r_{kk}{}^2 = a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} r_{kj}^2 > 0$$

4) Si à une étape de calcul on trouve $r_{kk}{}^2 \leq 0$ alors A n'est pas définie positive et par conséquent A n'admet pas la décomposition de Cholesky .Par contre elle peut être décomposé sous forme A=R.S avec S égale à $R^t$ à un signe prés.

## 3) Méthodes itératives :

Lorsque n est très grand $(n \geq 100)$, la résolution des systèmes $A.x = b$ pour les matrices directes devient très compliquée.
On fait appel donc à des méthodes, dites itératives.

**Définition :**
Une méthode itérative de résolution de $A.x = b$ , consiste d'abord à passer au système $x = B.x + c$ (que l'on déterminera) et sa solution est alors la limite de la suite définie par :
$x^{(k+1)} = B.x^{(k)} + c$

D'une manière générale : On décompose A sous forme $A = M - N$ avec $M$ facilement inversible. Alors :
$A.x = b \Leftrightarrow (M - N)x = b \Leftrightarrow x = M^{-1}.N.x + M^{-1}.b$

On pose :

$B = M^{-1}.N \;\; et \;\; C = M^{-1}.b$

On obtient : $x = B.x + C$

En utilisant le principe du théorème point fixe , on construit la suite :

$x^{(k+1)} = F(x^k) = B.x^k + C$

**Convergence :**

$(*)\ldots\begin{cases} x^{(k+1)} = B.x^k + C \\ x^0 \; donné \end{cases}$

La méthode itérative (*) converge si et seulement si $\rho(B) < 1$.

( $\rho(B) = \max_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|\}$ Où $\lambda_i$ *sont* les valeurs propres de B)

Lorsque (*) converge, la suite $x^{(k+1)}$ possède une limite $\bar{x}$ et dans ce cas :

$Lim_k.x^{(k+1)} = B.Lim_k.x^{(k)} + C \Leftrightarrow A.x = b.$

Donc : la limite $\bar{x}$ est la solution de $A.x = b$.



## 3-1) Méthode de Jacobi

On suppose que les $a_{ii} \neq 0 \; \forall \, i = 1, \ldots n$

On décompose la matrice sous forme :

A = D-E-F = D-(E+F).

Avec :

D = diagonale de A.

E= $\begin{cases} -a_{ij} & si \; i > j \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

F= $\begin{cases} -a_{ij} & si \; i < j \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

On pose : $M = D, \;\; N = E + F$

En partant de : $B.x^{(k)} + C$ avec $B = M^{-1}.N$ , on obtient l'algorithme suivant :

(1) $\begin{cases} x^{(k+1)} = J.x^k + C \;\; \text{avec} \, J = D^{-1}(E+F) \;,\; C = D^{-1}b \\ x^0 \; \text{donné} \end{cases}$

(1) est l'algorithme de Jacobi, J étant la matrice de Jacobi

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j<i} a_{ij}.x_j^{(k)} - \sum_{j>i} a_{ij}.x_j^{(k)}]$$

$$J = D^{-1}(E+F) = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j \\ 0 \text{ si } i = j \end{cases}$$

## Convergence de la méthode de Jacobi

**Théorème :** L'algorithme de Jacobi converge $\forall x^{(0)}$ si et seulement le rayon spectral de J est strictement inférieur à 1 ,

C'est-à-dire :

$\rho(J) < 1$ où $\rho(J) = \max(|\lambda_i|)$, $\lambda_i$ sont les valeurs propres de J.

**Remarque :**

1) En pratique, le calcul de $\rho(J)$ est très compliqué. Il suffit alors de vérifier si $\|J\| < 1$ puisque $\rho(J) \leq \|J\|$.
2) La méthode de Jacobi converge si l'une des conditions suivantes est vérifiée :
   a) $\|J\|_i < 1$ pour l'une des normes matricielles.
   b) Si $|J_{i,j}| < \frac{1}{n}, \forall i,j$, où n est la dimension du système alors la méthode de Jacobi converge.
   c) Si $|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \forall i$ Alors le processus converge.

Dans ce cas, on dit que la matrice A est à diagonale strictement dominante.

### 3-2) Méthode de Gauss-Seidel

Posons : $M = D - E$, $N = F$

$G = M^{-1}.N = (D-E)^{-1}.F$

Et l'algorithme de Gauss –Seidel s'écrit :

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = G.x^{(k)} + C \text{ avec } x^{(0)} \text{ donné} \\ G = (D-E)^{-1}.F \text{ et } C = (D-E)^{-1}.b \end{cases}$$

Ou encore :

$x^{(0)}$ donné

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j<i} a_{ij}.x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}.x_j^{(k)}], \qquad i = 1, \dots, n$$

**Remarque :**

1) Pour pouvoir appliquer la méthode de Gauss-Seidel, il faut que (comme Jacobi) $a_{ii}\ soient\ \neq 0.$
2) Tous les résultats de convergences pour Jacobi restent valables pour la méthode de Gauss-Seidel.
3) Si A symétrique strictement définie positive alors Gauss-Seidel converge.
4) Si A est tridiagonale alors : $\rho(G) = \rho(J)^2$.

**Evaluation de l'erreur :**

**Théorème :**

Soit $\begin{cases} x^{(k+1)} = B.x^{(k)} + C \\ x^{(0)} \text{ donné} \end{cases}$

Une méthode itérative quelconque avec B= G ou J ou une autre matrice d'itération.

Si $\|B\| < 1$ alors la suite $(x^{(k)})$ converge vers la solution $x\ de\ A.x = b\ \ \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et on a l'inégalité suivante :

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

$\|B\|$ peut être remplacer par $\rho(B)$.

La dernière inégalité permet d'estimer à l'avance le nombre d'itérations possibles pour approcher la solution avec une précision $\varepsilon$ donnée.

# Série d'exercices du chapitre 1 :

## Exercice1:

Soient $x=3.14159$ et $x_1^*$, $x_2^*$, $x_3^*$ des valeurs approchées de x où :

$x_1^*=3.013726$, $x_2^*=3.14285$, $x_3^*=3.1416$

Déterminer le nombre de chiffres significatifs exacts de chaque valeur

Approchée $x_i^*$ de x $(i=1, 2,3)$ . Conclure.

## Exercice2:

Donner une borne supérieure de l'erreur absolue dans chacun des cas suivants en supposant que tous les chiffres significatifs des nombres suivants sont significatifs exacts.

*a)12.4610* *b)0.00421* *c)-1.0012*

*d)800219* *e)4.200* *f)0.001001*

## Exercice3:

Arrondir les nombres suivants à 4 c.s.e et indiquer l'erreur absolue d'arrondi :

$x^*=20.3281$ $x^*=2.46105$

$x^*=0.0246551$ $x^*=4568912$

$x^*=99998$ $x^*=-12.3589$

## Exercice 4 :

On veut calculer la surface d'un disque de dimensions :

R=2,3400 , $\pi = 3,1416$ , $S = \pi R^2$

En admettant que tous les chiffres de R et de π sont significatifs exacts .

1) Calculer S et déterminer son nombre de chiffres significatifs exacts.
2) Arrondir S au dernier chiffre significatif exact et calculer les deux erreurs absolue et relative .

## Exercice 5(corrigé) :

Soit $x = 124{,}3675$ donné avec une erreur de 0,5% .

4) Donner l'erreur absolue de x.
5) Déterminer le nombre de chiffres significatifs exacts (c.s.e)de ce nombre.
6) Arrondir le résultat au dernier c.s.e.

**Solution :**

***Ex1*** : *x=124,3675* *et* *r(x)=0.005*

$\Delta x = r(x).|x| = 0.6218 \leq 0.5.10$

Nombre de c.s.e. *m=2, m-n+1=1* $\Rightarrow n = 2$ et $x = 120 \pm 10$ $(x = 12 \times 10 \pm 10)$

## Série d'exercices du chapitre 2 :

### Exercice 1 :

Séparer les racines des équations :

1) $e^x \sin(x) - 1 = 0$ dans $[-\wedge, \wedge]$, 2) $x^2 + Log(x) = 0$ dans $IR^*_+$ 3) $x^3 - 3x + 1 = 0$ dans $[-3,3]$

### Exercice 2 :

1) Localiser les racines de l'équation $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ et vérifier que f admet une racine séparée s dans [1,2]

2) Calculer le nombre d'itérations suffisant pour approcher s à $0.5.10^{-1}$ prés par la Dichotomie

3) Calculer cette approximation et donner un encadrement pour la racine *s*.

### Exercice 3:

Le problème « résoudre l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$ » peut être formulé de différentes façons : par la méthode du point fixe. L'équation peut s'écrire:

*a)* $x = 2x^2 - 6$

*b)* $x = \pm\sqrt{\dfrac{x+6}{2}}$

*c)* $x = x - (2x^2 - x - 6)/3$

Lesquelles de ces expressions conduisent –elles à une convergence par la méthode du point fixe.

### Exercice 3 :

Soit l'équation (1) $f(x) = \dfrac{1}{x} - Logx = 0$ où $x > 0$ (Log désigne logarithme népérien de x)

1) Montrer que l'équation (1) admet une racine unique a .Vérifier que $a \in [1.2]$.
2) a- Montrer que l'équation (1) est équivalente à l'équation :

$$(2) \quad x = \psi(x) = \frac{1}{Logx} \quad \text{où } x \in ]1,2]$$

b- Montrer que le processus itératif $x_{n+1} = \psi(x_n)$ est instable.

3) a- Montrer que l'équation (1) est équivalente à l'équation :

$$(3) \quad x = \varphi(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad \text{où } x \in [1,2]$$

b- Les hypothèses du théorème du point fixe sont elles vérifiées par $\varphi$ dans [1,2] ?

c- Déterminer un sous intervalle $I$ de [1,2] tel que $\varphi$ réalise les hypothèses du théorème du point fixe.



**Exercice 4** : Soit $F(x) = x^2 \exp(x)+2x-1$

1) Montrer, graphiquement que l'équation $F(x)=0$ admet une racine positive s (vérifier que $s \in [0.3,0.4]$) .
2) Montrer que la méthode de Newton est applicable sur [0.3,0.4].
3) Approcher la racine s à $\varepsilon=0.5.10^{-1}$.

**Exercice 5** :

Soit $F(x) = x^3-x^2-3x+1$

1) Montrer que s une racine séparée de F sur [2,3].

2) Montrer que l'algorithme de Newton permet de calculer les valeurs approchées $x_1$ , $x_2$

de la racine s .

**Exercice 6** :

Soit $F(x) = x^3+5x-1$

1) Montrer que $F(x)=0$ admet une racine séparée s dans [0 ,1/2].

2) Montrer que l'algorithme de Newton associée à *F(x) =0* s'écrit : $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 5}$ .
3) Montrer que l'algorithme de Newton converge vers s $\forall x_0 \in [0,1/2])$.
4) Approcher s à $10^{-2}$ prés par cette méthode.

**<u>Exercice 7</u>**:

Soit f(x)=x²+ln x , x>0

1) Montrer que f admet une racine s dans [1/4,1].

2) Montrer que f(x)=0 $\Leftrightarrow$ $\varphi$ (x)=x où x=exp(-x²) sur [(1/4),1].

3) Montrer que $\varphi$ vérifie les conditions du théorème du point fixe dans [1/4,1].

4) Quel est le nombre d'itérations suffisant pour approcher la racine s à

$\varepsilon$ =10 ² prés en prenant x =1.

5) La méthode de Newton est-elle applicable à f dans [1/4,1] ?

**<u>Exercice 8:</u>**

Soit la fonction f définie par

f(x)=x-1+sin x x$\in$IR

1) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une unique racine s$\in$ [0,π].

2) Montrer que f(x)=0 $\Leftrightarrow$ $\varphi$ (x)=x où $\varphi$ (x)=0,6(1-sin x)+0,4x

a- $\varphi$ vérifie t- elle les hypothèses du théorème du point fixe sur [0, π]?

b- Montrer que la méthode du point fixe est applicable dans [0,39, 0,65]

c- Quel est le nombre d'itérations suffisant pour approcher s à 10 ² prés

en partant de x =0,39.

d- Calculer cette approximation. Exprimer le résultat au dernier c.s.e.

**<u>Exercice 9:</u>**

Soit l'équation définie par : f(x)=x³ +5x-1=0 ….(1) .

1) a) Etudier les variations de f et montrer que f(x) =0 admet une racine séparée s dans IR

   b) Etablir que $s \in [0\ ,\ 1/2]$

2) Montrer que f(x) =0 $\Leftrightarrow \varphi(x) = \dfrac{1-x^3}{5} = x$

3) Montrer que le processus itératif $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers s $\forall x_0 \in [0{,}1/2]$

4) Pour $x_0=1/2$ calculer $x_1$ et $x_2$.

**Exercice 10 (Corrigé):**

Soit l'équation *F(x)=0* où : *F(x)*=x+5$e^{-x}$ -5

1) a- Déterminer le nombre de racines réelles de l'équation *F(x)=0* . on note s la plus grande racine positive
   b - Améliorer la localisation de s en l'encadrant par des nombres entiers. Soit [a,b] l'intervalle choisi

2) En appliquant la méthode de la Dichotomie sur [a,b] , déterminer une valeur approchée de s à $0.5.10^{-2}$ prés . Soit $s_1$ cette valeur.
3) a- Peut on appliquer le théorème du point fixe sur [a,b] à la fonction f définie par :
   *f(x)=2x+5* $e^{-x}$ *-5 ,* x *dans IR*

   b- Déterminer une fonction φ telle que la suite définie : $x_n = \varphi(x_{n-1})$ *n>1* converge vers s sur [a,b] .

   c- Calculer le nombre d'itérations permettant de calculer s à $5.10^{-2}$, par la méthode du point fixe avec $x_0=a$

Soit $s_2$ cette approximation .calculer $s_2$ .

4) En appliquant la méthode de Newton, déterminer une valeur approchée de $s_2$ , à $0.5.10^{-2}$ avec $x_0=a$
5) Quelle la méthode la plus avantageuse. Justifier votre réponse
6) Soit $\bar{x}$ la valeur choisie à la question précédente. Arrondir le résultat obtenu au dernier c.s.e.

**Solution :**

**1)** a) En étudiant les variations de F , on conclut que :
   F admet deux racines $s_1 \in ]-\infty, \ln 5[$ et $s_2 \in ]\ln 5, +\infty[$

   b) $s_2 = s \in [4{,}5]$

2) n=4 , s$\cong$ $4{,}96875$

3) a) $f(5) \notin [4{,}5]$ , f n'est pas stable sur $[4{,}5]$

b) On prend $\varphi(x) = 5(1 - e^{-x})$

$\varphi$ est strictement croissante sur $[4{,}5]$ et $\varphi([4{,}5]) = [4{,}908, 4{,}96]$ d'où la stabilité de $\varphi$ sur $[4{,}5]$

Sup | $\varphi(x)| = 0{,}09 < 1$ et $\varphi$ est contractante .

Conclusion ; La suite $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers s .

d) n=2 et $s \cong x_2 = 4{,}9630793$

5) F vérifie les conditions du théorème de Newton

La solution approchée qui vérifie le test d'arrêt est $x_3 = 4{,}965135$

La méthode la plus avantageuse dans ce cas est la méthode du point fixe car elle nécessite moins d'itérations.



## Application du théorème de Sturm

**Exercice 1** : On considère la fonction polynômiale : $F(x)= x^3-4x^2-4x+16$.

1) Former la suite des polynômes de Sturm et séparer les zéros de $F(x)$ .
2) Déterminer à $10^{-3}$ prés l'une des racines par la méthode de Newton en partant de la valeur initiale $x_0$=-3.

**Exercice 2** : Soit la fonction polynômiale : $F(x)= x^3-7x^2-x+7$

1) Montrer à l'aide du théorème de Sturm que toutes les racines de cette fonction sont réelles puis :
   a) Calculer l'une des racines à l'aide de la méthode du point fixe . On partira de $x_0=0.5$
   b) Calculer une des racines par la méthode de Newton .On partira de $x_0=10$.

## Série d'exercices des chapitre 3 et 4 :

**Exercice 1** : Soit f une fonction définie par le tableau :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *xi* | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| *f(xi)* | 17 | 4 | 3 | 8 | 61 |

1) Déterminer le polynôme $P_2^*(x)$ de meilleure approximation discrète de *f* au sens des moindres carrés ($w(x)=1$) .
2) Donner la table des différences finies de *f* et en déduire le polynôme d'interpolation de f de degré inférieur ou égal à 4 .
3) Calculer *f(0.5)* par les deux méthodes .Conclure .

**Exercice2 :**

On considère la fonction *f(x)* définie sur l'intervalle [0,0.4] par la table de valeurs :

| *xi* | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f(xi)* | 0 | 0.097554 | 0.190428 | 0.278919 | 0.363304 |

1) Déterminer le polynôme (la droite) de meilleure approximation au sens des moindres carrés de degré inférieur ou égal à 1 de f sur [0,0.4] . En déduire une valeur approchée de $f(0.15)$.

**Exercice3** :

Calculer le polynôme d'interpolation de la fonction *f*

$F(x)=3+|x|+2\tan(\pi/4)x$ aux points -1, 0 et 1.

**Exercice 4** :

Soient $f(x)=\sin(\pi x)$ et les points $x_0=-1$ , $x_1=1/2$, $x_2=1$ et $x_3=3/2$

Parmi les polynômes suivants, quel est celui qui interpole f aux points $x_0$ , $x_1$, $x_2$ et $x_3$

Où $P_1(x) =x^3-2x^2+1$ , $P_2(x) =x^4-1$ et $P_3(x) =8/3x(x^2-3x+2)$

**Exercice 5 :**

On considère le tableau suivant :

| *xi* | 9.0 | 9.5 |
|---|---|---|
| *Ln(xi)* | 2.197225 | 2.251292 |

A l'aide du polynôme d'interpolation de Lagrange, calculer la valeur approchée de Ln (9.2).

Estimer le résultat.

**Exercice 6 :**

*1)* Construire le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction *f* passant par les points *(0, 0), (1/6,1/2) et (1/2,1)*

2) Calculer la valeur approchée de $f(1/5)$ et estimer le résultat si on suppose que $|f^{(3)}(x)| \leq 1$ sur [0,1/2].

**Exercice 7** :

On le tableau suivant :

| | | | |
|---|---|---|---|
| *xi* | 9.0 | 9.5 | 9.7 |
| *f(xi)* | 2.197 | 2.251 | 2.272 |

1) Faire la table des différences divisées et écrire le polynôme sous forme de Newton.
2) Calculer la valeur approchée de $f(9.2)$ par cette méthode .Estimer le résultat .

**Exercice 8 :**

Un pays recense sa population tous les dix ans . La table ci-dessous résume les résultats des recensements survenus dans la période :1965-2005.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Année | 1965 | 1975 | 1985 | 1995 | 2005 |
| Pop en milliers | 105711 | 123203 | 131669 | 150697 | 203212 |

En analysant ces données , peut-on savoir quelle était la population en 1970 ? .

**Exercice 9** :

La fonction racine cubique étant définie par le tableau ci-dessous .Utiliser une méthode de l'interpolation polynomiale pour déterminer la valeur approchée de $(1.0015)^{1/3}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *xi* | 1 | 1.001 | 1.002 | 1.003 |
| *f(xi)* | 1 | 1.00033 | 1.00066 | 1.00099 |

**Exercice 10** (corrigé):

I) Soient $x_0, x_1, x_2$ trois points d'interpolation distincts équidistants et *h* le pas d'interpolation

1) Montrer que :

$$\delta[x_0, x_1, x_2]f = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}$$

II) On considère la fonction $f(x) = e^{-\frac{x}{10}}$ définie sur l'intervalle [1,4] par la table de valeurs :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 0.905 | 0.819 | 0.741 | 0.670 |

1) a- Calculer à l'aide de la méthode d'interpolation de Lagrange la valeur de *f (1,5)* .
b- Estimer le résultat si $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq 10^{-2}$.

2) Déterminer le polynôme d'interpolation de degré 3 passant par les points donnés si dessus par la formule de Newton progressive.

3) En utilisant la dérivation numérique, déterminer la valeur approchée $f^{'}(1)$ de la fonction *f* .Calculer la valeur exacte et estimer le résultat.

**Solution** :

I) $x_{i+1} - x_i = h$

$$\delta[x_0, x_1, x_2]f = \frac{\delta[x_1, x_2]f - \delta[x_0, x_1]f}{x_2 - x_0} = \frac{1}{2h}\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right) \stackrel{(1)}{=}$$

$$= \frac{1}{2h^2}\left[\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)\right] = \frac{1}{2h^2}\left[\Delta(f(x_1) - f(x_0))\right] = \frac{1}{2h^2}\Delta(\Delta(f(x_0)) = \frac{1}{2!h^2}\Delta^2(f(x_0))$$

$$P_3(x)=\sum_{i=0}^{3} f(x_i)L_i(x) \quad \text{où} \quad L_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{3}\frac{x-x_i}{x_i-x_j} \qquad i=0.1.2.3$$

On a donc : $f(1.5)\approx P_3(1.5)=\sum_{i=0}^{3} f(x_i)L_i(1.5)=f_0L_0+f_1L_1+f_2L_2+f_3L_3$

$L_0=0.3125,\quad L_1=0.9375,\quad L_2=-0.3125,\quad L_3=0.0625$

$f(1.5)=0.8609375$

*E(1.5) ≤ 0.00039 ≤ 0.0005=0.5.$10^{-3}$*

**Estimation** : *m=-1 et m-n+1=-3 $\Rightarrow$ n=3 et f(1.5)=0.861±$10^{-3}$*

2) Le polynôme de Newton (Formule progressive) :

*$f(x_0)=0.905$*

*$\Delta f(x_0)=-0.086$*

*$f(x_1)=0.819$*

*$\Delta^2 f(x_0)=0.008$*

*$\Delta f(x_1)=-0.078$*

*$\Delta^3 f(x_0)=-0.001$*

*$f(x_2)=0.741$*

*$\Delta^2 f(x_1)=0.007$*

*$\Delta f(x_2)=-0.071$*

*$f(x_3)=0.670$*

$$P_3(x)=f(x_0)+(x-x_0)\frac{\Delta f(x_0)}{h}+(x-x_0)(x-x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!h^3}$$

$$P_3(x)=0.905+(x-1)(-0.086)+(x-1)(x-2)\left(\frac{0.008}{2}\right)+(x-1)(x-2)(x-3)\left(\frac{-0.001}{3}\right)$$

*3) f'(1)=?*

*f'(1) ≈ 1/h { Δ f(x$_0$)-1/2 Δ$^2$ f(x$_0$)+1/3 Δ$^3$ f(x$_0$) } ≈ -0.090333*

La valeur exacte : *f'$_e$(1)=-0.0904831*

Estimation :

$$|f'(1) - f'_e(1)| = 0.00014 \leq 0.5.10^{-2}$$

$$f'(1)=-(0.09 \pm 0.01)$$

**Exercice 11 (corrigé):**

On cherche le polynôme $P_2^*(x) = a_0^* + a_1^* x + a_2^* x^2$ qui minimise l'expression :

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - P_2(x))^2 dx \quad \text{où} \quad f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30$$

1) Déterminer le polynôme $P_2^*(x)$ de meilleure approximation au sens des moindres carrés de $f(x)$ pour $\mathrm{w}(x) = 1$ et $x \in [-1,1]$.
2) On considère les polynômes orthogonaux $H_i(x)$ définis par la relation de récurrence :

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x \text{ et } H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

Calculer $H_2$, $H_3$ et $H_4$

a) Exprimer $x^2$ et $x^3$ en fonction des $H_i(x)$ et en déduire l'expression de *f* en fonction des $H_i(x)$.

b) En déduire alors la valeur de l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-x^2} dx$

on donne : $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$

**Solution :**

Trouver la meilleure approximation $P_2^*(x) = a_0^* + a_1^* x + a_2^* x^2$ au sens des moindres carrés de *f* revient à minimiser la quantité :

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - P(x))^2 dx$$

Par rapport à $a_i$ .

Ce qui conduit au système d'équations :

$$\begin{pmatrix} \int dx & \int x dx & \int x^2 dx \\ \int x dx & \int x^2 dx & \int x^3 dx \\ \int x^2 dx & \int x^3 dx & \int x^4 dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0^* \\ a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int f(x) dx \\ \int x f(x) dx \\ \int x^2 f(x) dx \end{pmatrix}$$

Soit encore :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0^* \\ a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4/15 \\ -2/5 \end{pmatrix}$$

La solution de ce système étant : $a_0^* = 3, a_1^* = -2/5, a_2^* = -6$

Le polynôme s'écrit donc : $P_2^*(x) = 3 - \frac{2}{5}x - 6x^2$

2) $H_0 = 1, H_1 = 2x$ de la relation de récurrence on peut écrire :

$$H_2 = 4x^2 - 2$$
$$H_3 = 8x^3 - 12x$$

Ce qui donne :

$$1 = H_0, x = \frac{1}{2}H_1, x^2 = \frac{1}{4}H_2 + \frac{1}{2}H_0, x^3 = \frac{1}{8}H_3 + \frac{3}{4}H_1$$

La fonction *f* s'écrit alors :

$$f(x) = \frac{1}{8}H_3 - \frac{3}{2}H_2 + \frac{1}{4}H_1$$

## **<u>Série d'exercices du chapitre 5 :</u>**

TP : Programmation d'une méthode numérique d'intégrale .

Pour avoir une valeur approchée numérique de $\int_a^b f(x)dx$ on divise donc [a,b] en n sous intervalles égaux [$x_i$,$x_{i+1}$] pour chaque sous intervalle on remplace

$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ par l'aire du rectangle correspondant *f(x$_i$) *(b-a)/n* , puisque $x_{i+1}$- $x_i$ =*(b-a)/n*

Procédure :

Ecrire la procédure correspondante.

Application: Calculer l'intégrale $\int_0^4 x^2 dx$ et stocker le résultat dans z .

**Exercice1 :**

Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ en utilisant :

1) La méthode des trapèzes 2) Trapèzes composées (en prenant 4 intervalles , 8 intervalles)
3) Simpson simple 4) Simpson composée avec h= Pi/8

**Exercice 2 :**

Calculer une valeur approchée de l'intégrale I= $\int_a^b f(x)dx$ où f est donnée par

| x | 1/4 | 1/2 |
|---|---|---|
| f(x) | 2 | 3 |

**Exercice 3 :**

Intégrer les polynômes de degré 1et 2 respectivement permettant d'obtenir les formules des trapèzes simple et de Simpson simple. Préciser l'intervalle sur lequel porte l'intégration (utiliser le changement de variables $\delta = \frac{x - x_0}{h}$

***Exercice 4(corrigé):***

On se propose d'approximer l'intégrale :

$$\int_2^4 \frac{dx}{x-1} = Log3 = 1{,}098612289$$

par les méthodes d'intégration des trapèzes et de Simpson 1/3 pour différents nombres de sous intervalles de [2,4] . Donner ces approximations en remplissant le tableau ci-dessous.

| n | Méthode des trapèzes | Méthode de Simpson 1/3 |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |

Conclure.

**Solution :**

Formule des Trapèzes généralisée :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left\{ f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right\} \qquad x_i = x_0 + ih$$

Formule de Simpson généralisée (n pair) : *n=2n'*

$$\int_{x_0}^{x_{2n'}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left\{ f(x_0) + 4\sum_{i=0}^{n'-1} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=0}^{n'-1} f(x_{2i}) + f(x_{n'}) \right\}$$

| n | Méthode des trapèzes | Méthode de Simpson 1/3 |
|---|---|---|
| 1 | 1.33333333 | |
| 2 | 1.16666666 | 1.11111111 |
| 3 | 1.13015873 | |
| 4 | 1.11666666 | 1.1 |

**<u>Exercice 5 :</u>**

Etablir les formules d'intégration des trapèzes et de Simpson généralisées

Sachant que : Arctg(x)= $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ , Calculer Arctg(3) par les deux méthodes pour n=10

## Série d'exercices du chapitre 6 :

### Exercice 1 :

Inverser les matrices A et B par la méthode de Gauss-Jordon

$$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\-1&2&1\\1&1&-4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&6&2\\1&4&2\\1&1&2\end{pmatrix}$$

Et déduire la solution du système $Ax=b=(1\quad 1\quad 1)^t$

**Exercice 2** : Résoudre par la méthode de Gauss le système $Ax=b$ suivant :

$$A=\begin{bmatrix}4&2&0&6\\-2&2&-6&10\\0&2&-14&-2\\8&-4&10&-8\end{bmatrix}\quad \text{et } b=\begin{bmatrix}2\\4\\-2\\0\end{bmatrix}$$

En déduire la décomposition LU de A et det(A).

### Exercice 3 :

$$A=\begin{pmatrix}10^{-4}&1\\1&1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

i) Par la méthode de Gauss ordinaire.
j) En permutant la 1er ligne avec la 2e ligne.
k) Sachant que la solution exacte est (1,1) . Comparer les solutions obtenues avec la solution exacte et conclure. (Effectuer les calculs avec 4 c.s).

### Exercice 4 :

Déterminer les décompositions LU, LDV, LDL$^t$ et RR$^t$ de la matrice A suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

**Exerice5 :**

Résoudre par la méthode LU les deux systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 100x + 99y = 398 \\ 99x + 98y = 394 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 100x' + 99y' = 398 \\ 99x' + 98y' = 393{,}98 \end{cases}$

Que remarquez-vous ?

**Exercice 6 :**

On considère le système Ax=b d'ordre 3 défini par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2\alpha & 2 \\ 2\alpha & 2 & 2/\alpha \\ 2 & 2/\alpha & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $A_{[2]}$ et $A_{[3]}$ en déduire l'ensemble des valeurs a telles que :
   - A admet la décomposition LU
   - A admet la décomposition RR$^t$

**Exercice 7 :**

I) a) Rappeler le principe de la méthode LU .
   b) Montrer l'unicité de cette décomposition.

II) Soit A $\in M_4(IR)$ définie par :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & a \\ -3 & 10 & 3 & -3a \\ 0 & 3 & 10 & 0 \\ a & -3a & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ a dans IR

1) Triangulariser le système *Ax=B* par la méthode de Gauss ordinaire en précisant les valeurs a pour lesquelles :
   a- Cette décomposition est possible   b- *A* est définie positive
2) Utiliser la décomposition LU pour calculer la matrice R. de Cholesky
3) Pour a= 4/3 .Déterminer la matrice R en utilisant l'algorithme de Cholesky.

En déduire la solution de Ax=b .

4) Comparer les deux méthodes (Gauss et Cholesky ) dans le cas d'un système linéaire d'ordre n=4.
5) Déterminer la matrice de Jacobi associée à la sous matrice d'ordre 3 ($A_{[3]}$ ) de A.
6) Etudier la convergence de l'algorithme correspondant .

**Exercice 8** :

Soit *A* $\in M_4(IR)$ définie par :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & a \\ b & 0 & 2 & 0 \\ 0 & b & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7) Triangulariser le système *Ax=B* par la méthode de Gauss ordinaire en précisant les valeurs de $a$ $et$ b pour lesquelles :
   a- Cette décomposition est possible   b- *A* est définie positive
8) Utiliser l'algorithme de Cholesky pour calculer la décomposition $R.R^T$ de A.
9) Comparer les deux méthodes (Gauss et Cholesky) .
10) Pour $a = .b = 3$ . Montrer que *A* se décompose sous forme *A =R.S* et en déduire la solution x de *Ax=B* (utiliser la décomposition R.S)

**Exercice 9 :**

On considère le système *Ax=b* suivant :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer la matrice de Jacobi et donner l'ensemble des valeurs de a et b pour lesquelles la méthode de Jacobi converge.
2) Calculer la matrice de Gauss Seidel et donner l'ensemble des valeurs de a et b pour lesquelles la méthode de Gauss Seidel converge.
   (Pour les deux questions vérifier d'abord les conditions suffisantes de convergence, puis calculer $\rho(J)$ et $\rho(G)$) .



**Exercice 10 :**

Soit le système *Ax=b* défini par :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On considère la méthode itérative de Gauss - Seidel associée à A notée

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + C\,,\ \ x^{(0)} \in IR^3$$

1) Calculer G , C et $\rho(G)$ en déduire que la méthode converge $\forall x^{(0)} \in IR^3$.
2) Pour $x^{(0)} = 0_{IR^3}$ , calculer $x^{(1)}$.
3) Montrer par récurrence que $x_2^{(k)} = 0 \ \ \forall k \geq 0$ en déduire la solution x de *Ax =b*

**Exercice 11(corrigé)** :

Soit à résoudre le système $Ax = b$ suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/8 \end{pmatrix} \qquad \text{b} = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 1/3 \\ 5/8 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que la matrice A se factorise sous forme LU.
2) Résoudre alors le système $\boldsymbol{Ax = b}$ par la méthode LU.
3) A partir de $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , calculer $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ par la méthode de Jacobi.
4) En calculant les valeurs propres de J, Montrer que la méthode de Jacobi ne converge pas $\forall x^{(0)} \in IR^3$ .
5) Si on permute la 1re ligne et la 3e ligne dans le système $\boldsymbol{Ax = b}$ , que remarquez vous ? (concernant la convergence de la méthode de Jacobi)

**Solution :**

1) A admet la décomposition L.U si et seulement si tous ses mineurs sont # de zéro.

On a : $\det A_{[1]} = \dfrac{1}{8}$ , $\det A_{[2]} = \dfrac{1}{24}$ et $\det A_{[3]} = \det A = -\frac{1}{24} \times \frac{7}{8}$

D'où A se décompose sous forme L.U.

2)

L= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ U= $\begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -7/8 \end{pmatrix}$

**Résolution** : Le système Ax=b devient :

Ax=b $\Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

y=(3/8,1/3,-7/8)$^t$ , x=(1,1,1)$^t$

**3)** $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , on calcule $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ par la méthode de Jacobi :

L'algorithme de Jacobi s'écrit : $x^{(0)} \in IR^3$ , $x^{(k+1)} = D^{-1}(E+F)x^{(k)} + D^{-1}b$

Avec : D = $\begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}$ E+F= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où : $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$x^{(1)} = (1,1,3)$ $x^{(21)} = (-3,1,1)^t$

2) $P(\lambda) = \lambda(-\lambda^2 + 8)$

Les valeurs propres de J sont 0 :$\pm\sqrt{8}$

$\rho(J) = \sqrt{8} \succ 1$ : donc la méthode de Jacobi ne converge pas $\forall x^{(0)} \in IR^3$

3) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1/8 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ $\widetilde{b} = \begin{pmatrix} 5/8 \\ 1/3 \\ 3/8 \end{pmatrix}$

a) La solution exacte du système : $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\widetilde{A}$ est D.D.S : donc la méthode de Jacobi converge

**Remarque** : A partir du 15 février, nous complétons ce document par une série d'examens donnée aux étudiants (synthèses et E.M.D) ainsi que leurs corrections.

**Références :**

1) J.P.DEMAILLY : Analyse numérique et équations différentielles. Collection Grenoble Sciences, Grenoble, 1991

2) M.LAKRIB : Cours d'analyse numérique. OPU, Alger, 2005.
3) M.DALDOUL : Une introduction à l'analyse numérique .OPU, Alger, 1992.
4) M.FELLAH-N.H.ALLAL : Exercices corrigés en analyse numérique élémentaire.
5) CHTCHERBATSKI : Analyse numérique, cours et problèmes. OPU, Alger 1999