LOI DE PROBABILITÉ

I. Notion de loi de probabilité

1) Qu'est-ce qu'une expérience aléatoire ?

> Une *expérience aléatoire* est une expérience dont on ne peut ni prévoir, ni calculer le résultat.

Aléatoire, *adj* : que rend incertain, dans l'avenir, l'intervention du hasard (Dictionnaire Robert).
Il est cependant essentiel dans une expérience aléatoire d'être en mesure de déterminer l'ensemble E de tous les résultats possibles.

$$E = \{x_1 ; ... ; x_n\}$$

Par exemple, si l'on lance un dé à six faces, on prend généralement comme résultats possibles 1, 2, 3, 4, 5, 6. On a donc $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2) Loi de probabilité

> Définir une loi de probabilité P sur l'ensemble E, c'est associer à chaque résultat x_i un nombre positif p_i tel que la somme des p_i soit égale à 1.

On a donc :

x_1	x_2	...	x_n
p_1	p_2	...	p_n

avec, pour tout entier i compris entre 1 et n, $p_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i$.

p_i mesure la probabilité que le résultat x_i se réalise : plus p_i est proche de 1, plus x_i a de chances de se réaliser ; à l'inverse plus p_i est proche de 0, moins x_i a de chances de se réaliser.

3) Estimer une probabilisé

- On peut faire **une simulation statistique** (par exemple, le jet de la punaise).
- **Loi équirépartie**

> Si tous les résultats x_i de l'ensemble E ont la même probabilité, alors la loi est dite équirépartie.

Si E possède n éléments, chaque élément x_i a une probabilité $p_i = 1/n$.
C'est en général la situation que l'on choisit quand on lance une pièce équilibrée, un dé non pipé, quand on tire une carte au hasard d'un jeu bien battu etc. On parle aussi de situation d'équiprobabilité.
Pour un dé non pipé, on prendra alors la loi de probabilité suivante :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

II. Événements et probabilité

1) Qu'est-ce qu'un événement ?

> Un *événement* A est une partie, ou un sous-ensemble, de l'ensemble E de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Par exemple, si on lance un dé, l'événement A = « obtenir un numéro pair » correspond à la partie $A = \{2 ; 4 ; 6\}$ de E.

L'événement *impossible* correspond au sous-ensemble $\emptyset$ de E.
L'événement *certain* correspond au sous-ensemble E de E.

2) Probabilité d'un événement

- **Cas d'une loi quelconque**

> La probabilité d'un événement A est par définition la somme des probabilités des résultats qui constituent A.

$p(A)$ est toujours compris entre 0 et 1.
Il est clair que $p(\emptyset) = 0$ et que $p(E) = 1$.

- **Cas d'une loi équirépartie**

La probabilité d'un événement A est le quotient :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E}$$

(on dit aussi aussi que la probabilité de A est le quotient des cas favorables à A sur les cas possibles).

En reprenant l'exemple du dé, supposé non pipé, calculons la probabilité de l'événement B = « tirer un numéro multiple de 3 ».

Comme $B = \{3, 6\}$, $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

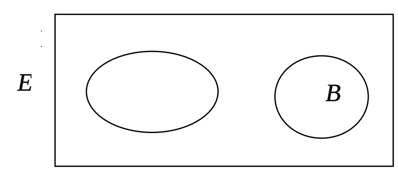
2) Propriétés des probabilités d'événements

- **Réunion de deux événements**

Un résultat de $A \cup B$ est dans A *ou* dans B

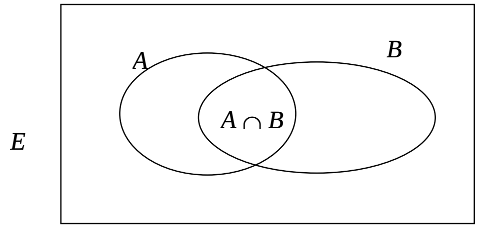
Si A et B sont des événements *disjoints* ($A \cap B = \emptyset$), on a

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$



Si A et B sont *quelconques*,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$



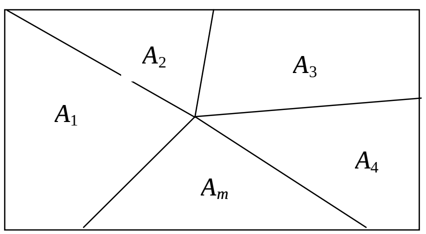
- **Événement contraires**

L'événement contraire de A est noté $\overline{A}$: il est constitué de tous les résultats possibles qui ne sont pas dans A.
On a :

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A).$$

- **Partition de E**

Les événements A_1, A_2, ..., A_m constituent une partition de E quand :
leur réunion donne l'ensemble E tout entier ;
ils sont deux à deux disjoints.



Dans ce cas, $p(A_1) + p(A_2) + ... + p(A_m) = 1$

III. Espérance et variance d'une loi de probabilité

P est une loi de probabilité définie sur un ensemble fini de résultats :

x_1	x_2	...	x_n
p_1	p_2	...	p_n

L'espérance de la loi de probabilité est le nombre :

$$m = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + ... + p_n \times x_n.$$

La variance de la loi de probabilité est le nombre :

$$V = p_1 (x_1 - m)^2 + p_2 (x_2 - m)^2 + ... + p_n (x_n - m)^2.$$

L'écart-type est la racine carrée de la variance :

$$s = \sqrt{V}.$$

Autre formule de la variance :
La variance est la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne :

$$V = \sum_{i=1}^{p} \left(p_i x_i^2 \right) - m^2.$$