3.4. Exercices. (Chaînes à temps discret).

Exercice 1: Vérifier que la chaîne de matrice des transitions

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

est bien ergodique et que par conséquent la distribution stationnaire est unique. Déterminer-là expérimentalement d'abord, puis théoriquement. Trouver les probabilités pour qu'aux instants n=0,1 ,2 ,3 la chaîne se trouve aux états 1, 3,3 ,2 si la distribution initiale est $\pi(0) = \{0.7, 0.2, 0.1\}$.

Exercice 2. Etudier la nature des chaînes (classification, périodicités des classes) données par les matrices de probabilités des transitions P_1, P_2, P_3 suivantes. Discuter dans chaque cas l'existence d'une distribution stationnaire (si elle existe).

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 & 4/5 \\ 2/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 4/15 & 11/15 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_4 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & \alpha \\ 0.1 & \beta & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Exercice 3: Soit la matrice P_4 ci-dessus. Déterminer les valeurs de α et β pour que cette matrice puisse servir de matrice des probabilités de transition d'une chaîne de Markov homogène.

Exercice 4: *Transmission de l'information (suite).* Un réseau de communication transmet un nombre en système binaire (0 ou 1). En traversant le réseau, il y a une probabilité q pour que le chiffre soit transmis correctement à l'étape suivante. Soit $X(0)$=chiffre transmis à l'entrée du réseau. $X(1)$=chiffre enregistré à la première transmission., $X(2)$=chiffre enregistré à la seconde transmission.....Vérifier que $X(n)$ est une chaîne de Markov. Calculer sa matrice des transitions. Etudier la nature de la chaîne. Calculer la distribution stationnaire si elle existe. *NB* : On distinguera les différents cas : (i) $p = 0$; (ii) $p = 1$ et (iii) $0 < p < 1$.

Exercice 5: *Disponibilité d'un système informatique* (SI). Le SI est assimilé à un système physique qui à l'issue d'une inspection peut se trouver à l'un des états suivants: E_1 :Le SI est fonctionnel (en bon état); E_2: Le SI comporte en mémoire certains défauts qui permettent toutefois de résoudre les problèmes; E_3 : Le SI comporte des défauts significatifs qui ne permettent de résoudre qu'une classe limitée de problèmes; E_4 : le SI est entièrement non opérationnel. On suppose qu'à l'instant initial le SI est en bon état (état E_1). L'inspection du SI s'effectue à des instants discrets (jours) $t_1, t_2, t_3, \ldots$ On suppose que l'évolution s'effectue selon une chaîne de Markov de matrice de transition en une étape

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etudier la nature de la chaîne, calculer les probabilités d'états après trois inspections. Existe-t-il une distribution stationnaire? Si oui, laquelle?

Exercice 6: *Fiabilité d'une architecture parallèle.* On considère une architecture parallèle bi-processeurs où chaque processeur a une fiabilité (probabilité de ne pas tomber en panne) égale à p au cours d'une journée; la probabilité de panne durant la journée est égale à $q = 1 - p$. Modéliser le fonctionnement de cette architecture pour chacune des situations suivantes. (i) On suppose que les deux processeurs fonctionnent indépendamment l'un de l'autre et qu'il n'y a pas de possibilité de réparation ; (ii) Maintenant, si un processeur tombe en panne, il est réparé au cours de la nuit ; (iii) Le processeur en panne n'est pas réparé durant la nuit, mais au cours de la journée suivante ; (iv) Un seul processeur est actif, le second est en redondance passive (stand-by). Dès que le processeur principal est en panne, le second prend la relève sans arrêter le système. Soit $a=$ probabilité que le processeur actif tombe en panne; $b=$ probabilité pour que le processeur soit réparé.

Exercice 7: *Fonctionnement d'une imprimante.* On modélise le fonctionnement d'une imprimante comme un processus à trois états distincts: **Etat 1** : attente d'un caractère à imprimer ; **Etat 2** : impression d'un caractère ; **Etat 3** : interruption après avoir reçu un caractère de contrôle. Lorsque l'imprimante est en attente, elle reçoit un caractère à imprimer avec la probabilité 0.80. Lorsqu'elle est en impression, elle reçoit : (a) (état 1) un caractère « normal » avec la probabilité 0.95 (caractère courant du fichier à imprimer). (b) (état 2) un caractère de fin de fichier avec la probabilité 0.04, l'imprimante retourne dans l'état d'attente.(c) (état 3) un caractère d'interruption avec la probabilité 0.01, l'imprimante passe alors dans l'état 3. Lorsque l'imprimante est dans l'état 3, elle retourne dans l'état d'attente avec la probabilité 0.3, sinon elle reste dans l'état 3. (i) Avancer des arguments qui permettent de justifier l'utilisation d'une chaîne de Markov pour modéliser le fonctionnement de l'imprimante ; (ii) Représenter le graphe des états de cette chaîne, ainsi que la matrice des probabilités de transition ; (iii) Si l'imprimante est en attente à un instant donné, quelle est la probabilité de se trouver à l'état d'interruption au bout de 2 étapes ? (iv)Etudier la nature de la chaîne (classification, existence de la distribution stationnaire, ergodicité ; (v) Quel est le temps moyen d'une interruption ? (vi)

Quelle est la taille moyenne d'un fichier ? ;(vii) Quel est le taux d'utilisation de l'imprimante (proportion de temps pendant lequel l'imprimante est en exploitation) ?

Exercice 8 : *Gestion d'un fichier***.** Un fichier comporte trois enregistrements distincts **(**e_1 , e_2, e_3) pour chacun desquels on connaît les probabilités d'accés (resp. p_1,p_2,p_3). L'ordre de rangement des enregistrements dans le fichier est celui qui a résulté de la règle LRU (*least recently used*, ou le plus récemment utilisé). En d'autres termes : lorsque e_i est appelé, e_i devient (ou reste) le premier enregistrement du fichier, l'ordre relatif des autres fichiers reste inchangé. Exemple:

Appel		ordre dans le fichier
t=0	-	e_1 e_2 e_3
t=1	e_3	e_3 e_1 e_2
t=2	e_1	e_1 e_3 e_2
t=3	e_2	e_1 e_3 e_2

On s'intéresse à une suite infinie d'appels des e_i .(1) Modéliser l'évolution du fichier à l'aide d'une chaîne de Markov (déterminer ses états, sa matrice des transitions). Etudier la nature de cette chaîne ; (2) Etudier l'existence d'une distribution stationnaire ; (iii) On suppose que le fichier est séquentiel (i.e. la lecture du ième enregistrement exige la lecture des $i-1$ enregistrements précédents). On admet alors que le temps d'accès à un enregistrement est égal à $r.L$ où r est le rang dans le fichier de l'enregistrement appelé et L le temps de lecture d'un enregistrement. Quel est le temps moyen d'exécution d'une requête ? (iv) Que peut-on dire si L_i est le temps de lecture de e_i ? (v) Le temps d'exécution d'un appel e_i est égal à la somme des temps de lecture des enregistrements qui précèdent e_i dans le fichier et du temps de lecture de e_i .

Exercice 9: *Gestion de stocks***.** Un magasin assure la vente d'un certain type d'articles (des micro-ordinateurs portables, disons). Le modèle de micro peut-être commandé chaque semaine. On note D_i la demande durant la ième semaine . Soit $a_k = P(D_i = k),\ k = 0,1,...$ Les variables D_i sont supposées indépendantes, identiquement distribuées de loi $\{a_k\}$ connue. Le jeudi soir, on passe une commande qui est livrée le samedi matin. On utilise la politique de gestion du stock $(s-S)$: si le nombre de micros disponibles à la fin de la semaine est $<s$, on passe une commande pour ramener le stock au niveau S. Sinon, on ne passe pas de commande. Soit $X(n)$ =nombre de micros en stock à la fin de la semaine n. Pour fixer les idées on posera $s = 1,\ S = 3$, et on supposera que la demande suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$. (i) Vérifier que la suite $X(n)$ forme une chaîne de Markov. Ecrire la matrice de transition ; (ii) Calculer $P^{(2)}, P^{(4)}, P^{(10)}$. Sachant qu'il y a un micro en stock à la fin de la semaine, quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait plus de micros en stocks 4 semaines plus tard? 10 semaines plus tard? Que remarque-t-on? (iii) Quel est le temps moyen jusqu'à ce que le stock de micro s'épuise si $X(0)=0$? (iv) Représenter le graphe des

états. En déduire la nature de la chaîne ; (v) Discuter l'existence d'une distribution stationnaire et calculer-là éventuellement ; (vi) Utiliser le résultat de (v) pour répondre à la question (iii).

Exercice 10: *Marches aléatoires*. On considère les marches aléatoires suivantes: (i) la marche sur la droite des entiers relatifs, illimitée dans les deux directions: un pas de $+1$ (vers la droite) avec une probabilité p, et un pas -1 (vers la gauche) avec une probabilité $q=1-p$ (interpréter les cas $p=0$ et $p=1$) ; (ii) idem, mais 0 est un état absorbant; (iii) idem mais 0 et K sont des états absorbants ; (iv) idem avec barrière réfléchissante au point 0, illimitée à droite ; (v) idem avec barrières réfléchissantes en 0 et K.

Ces modèles ont été utilisés en physique pour décrire le mouvement des particules (atomes, molécules,…). L'informaticien (électronicien) pourra imaginer l'implémentation du modèle (algorithme ou automate) qui réalise une succession d'opérations qui consistent à ajouter +1 ou −1 à la somme stockée dans la mémoire de sa machine.

(I.) ***Analyse***: Pour chacun de ces modèles: (a)Vérifier que le modèle est bien décrit par une chaîne de Markov ; (b) Etudier la nature de la chaîne (classification des états) et discuter l'existence d'une distribution stationnaire

(II). ***Modélisation***: L'étude des modèles classiques suivants peut se ramener à l'étude d'une marche aléatoire. Indiquer comment trouver les paramètres de la marche et interpréter les résultats. (a) M*odèle de diffusion d'Ehrenfest*. Ce modèle est un classique des problèmes de diffusion en mécanique ou de transfert de chaleur en Thermodynamique. Soient N molécules qui sont réparties dans deux récipients A et B. A chaque expérience, on choisit au hasard l'une des molécules et on la change de récipient: les molécules ont des chances égales d'être tirées. On s'intéresse au nombre de molécules dans le récipient A à l'expérience n.

(i) *Ruine du joueur.* Deux joueurs A et B (des entreprises concurrentes par exemple) jouent à Pile ou Face. A gagne lorsque l'issue du lancer est Pile, auquel cas le joueur B lui remet +1 dinar. Si A perd (lorsque l'issue est Face), c'est lui qui remet +1 dinar à B. Le capital initial de A est $C(A)$=i dinars et celui de B est $C(B) = K - i$ dinars. La partie s'arrête dès que l'un des deux joueurs est ruiné.

(ii) *Marché boursier*. Un certain titre boursier vaut v_0 \$ au temps initial 0. A chaque unité de temps la valeur du titre peut être multipliée par une grandeur β (avec une probabilité p) ou bien divisée par cette même grandeur β (avec la probabilité complémentaire $q = 1 - p$) ($\beta > 1,\ 0 < p < 1$). On supposera que les fluctuations de la valeur du titre sont indépendantes les unes des autres. La valeur du titre s'écrit alors $V_n = v_0 \beta^{\xi_1} \beta^{\xi_2} ... \beta^{\xi_n}$ où $\{\xi_i, i = 1,2,...\}$est une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées (les pas) de loi $P\{\xi_i = 1\} = p = 1 - P\{\xi_i = -1\}$. En général, on préfère étudier cette marche sous une forme équivalente, plus commode $X_n = \dfrac{Log(V_n) - Log(v_0)}{Log(\beta)}$.

(iii) *Echange de fichiers.* Un réseau permet de relier plusieurs sites qui en général, possèdent chacun leur propre système de fichiers. On peut permettre à chaque utilisateur d'accéder aux fichiers des différents sites, même si l'organisation de ces fichiers diffère d'un site à un autre. La notion de fichier virtuel est une manière de définir une représentation standard de fichier. Dans le cas où l'utilisateur manipule un fichier distant, il est parfois plus économique de transférer tout le fichier pour effectuer un traitement local plutôt que de soumettre des requêtes éventuelle successives au site sur lequel est implanté le fichier. L'ensemble des règles qui prennent en compte les différences de représentation constitue le protocole de transfert de fichiers. Une autre méthode est la définition de verrou. Considérons l'échange de N fichiers entre le réseau $\Re$ et l'ensemble des utilisateurs (U). Le temps est partagé en heures, et on suppose que chaque heure, une et une seule opération de transfert serveur→client ou client→serveur est réalisée. Soit X_n le nombre de fichiers en cours d'utilisation ($N - X_n$ sont disponibles dans le réseau) à la nième heure. On note p=probabilité qu'un fichier quelconque soit sollicité par un usager (transfert serveur→client et q = probabilité (client→serveur). (i) Quel type de modèle utiliseriez-vous et pourquoi ? (Indiquer les conditions de validité de votre modèle) ; (ii) Discuter l'existence d'un régime stationnaire ? (Préciser si nécessaire les conditions d'existence d'un tel régime) ; (iii) Quelle est la proportion de temps où le réseau est saturé (au sens où tous les fichiers sont en cours d'utilisation) ?
(iv) Quel est le temps moyen jusqu'à la saturation du réseau ?

Exercice 11. Une escadrille composée de 4 avions est chargée de missions quotidiennes au dessus du territoire ennemi et y subit des pertes. Elle n'effectue toutefois sa mission journalière que si son effectif au début de la journée s'élève à au moins 3 appareils. Si d'autre part son effectif au soir de la journée précédente est réduit à 2 ou moins de 2 appareils, elle reçoit au cours de la nuit un appareil en renfort. Soit p la probabilité de destruction d'un appareil au cours d'une mission. Soit $X(n)$=nombre d'appareils au début d'une mission. (a) Montrer que $X(n)$ est une chaîne de Markov d'espace d'état $E = \{1,2,3,4\}$; (b) Donner sa matrice de transition ; (c) On suppose que $p = 1/3$. Etudier la nature de la chaîne. En déduire qu'il existe une unique classe récurrente apériodique C ; (d) Soit $\pi(n) = \{\pi_1(n), \pi_2(n), \pi_3(n), \pi_4(n)\}$ où $\pi_i(n) = P\{X(n) = i\}$ la probabilité pour que la chaîne se trouve à l'état i le jour n, $i = 1,2,3,4$. Soit $\pi = \lim_{n\to\infty} \pi(n)$ lorsque n tend vers l'infini. Calculer π_j pour les états j transitoires (sans faire de calcul) ; (e) Calculer π_i pour les états récurrents $i \in C$.

Exercice 12 : *Etude de marché.* Une micro-entreprise produit un certain type d'article. Si à une semaine donnée l'article se vend bien, alors il y a 50% de chances pour qu'il le soit encore la semaine suivante (en moyenne). Si par contre, l'article n'est pas demandé, il n'y a que 40% de chances pour qu'il se vende bien la semaine d'après. Quelle est la proportion de temps où les produits de l'entreprise sont appréciés sur le marché ?

Exercice 13 : *Météorologie* : Les enquêtes statistiques menées par l'Office de Météorologie ont montré que s'il pleut un jour donné, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est égale à 0.8. Par contre, s'il fait beau ce jour, la probabilité pour qu'il fasse beau encore le lendemain est estimée à 0.9. (i) Quelles hypothèses faut-il faire pour pouvoir assimiler l'évolution du temps (le climat) à une chaîne de Markov ? Décrire l'espace des états, écrire la matrice des probabilités de transition en une, deux, trois étapes. Déterminer la nature de la chaîne. En déduire la probabilité stationnaire, si elle existe. Quelles sont les proportions annuelles attendues de pluviosité et d'ensoleillement ? Remarque ? (ii) On peut affiner le modèle en reconsidérant l'espace des états possibles : Beau temps, Nuageux, Pluie. Supposons que la matrice des probabilités de transition soit de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Reprendre l'étude du point (i) dans ce cas.

Exercice 14. *Performances des études.* Les études de spécialité dans une grande Ecole durent 3 années. A l'issue de la première année, chaque élève a une probabilité p_1=0.6 de passer en deuxième année ; une probabilité q_1=0.3 de redoubler, et une probabilité r_1=0.1 d'être réorienté. Pour un élève de deuxième année, ces probabilités sont respectivement de p_2=0.7 ; q_2=0.2 et r_2=0.1. Enfin, un élève de troisième année a une probabilité p_3=0.90 d'avoir son diplôme et une probabilité q_3=0.10 de redoubler. (1) Justifier l'hypothèse selon laquelle le cursus d'un élève peut être modélisé par une chaîne de Markov à cinq états dont deux sont absorbants. (2) Quelle est la probabilité pour un élève qui entre en première année d'obtenir son diplôme de fin d'études selon son état présent dans le cursus. (3) Calculer la durée moyenne d'obtention d'un diplôme ; (4) Si la scolarité d'un étudiant revient à environ 10 000 DA/an, quelle économie ferait-on en améliorant le taux de succès de 10% en première année ?

Exercice 15 : *Efficacité du Marketing*. Trois produits de consommation courante (A,B,C) sont en concurrence sur le marché. Les fabricants du produit A lancent une campagne de publicité qui dure 15 jours afin de tenter d'accroître leur part de marché. Une enquête a été réalisée le 31 janvier sur un même échantillon de 1000 clients potentiels. Il s'avère que 500 personnes continuent à acheter la produit A, 200 optent pour le produit B, et 300 pour C. Parmi 500 clients du produit A (au 15 janvier), 450 continuent de l'acheter ; 40 optent pour B et seulement 10 achètent C. Parmi 200 clients du produit B, 60 continuent d'acheter B et 80 achètent A. Parmi un échantillon de 300 clients du produit C, 60 continuent d'acheter C ; et 210% achètent A , et seulement 30 optent pour B. (1) Montrer que l'évolution du marché peut être décrite par une chaîne de Markov dont on déterminera la distribution initiale et la matrice des probabilités de transition (on admettra que les résultats de l'enquête sont toujours les mêmes ; par exemple, l'enquête du 15 février donne des résultats identiques à celle au 31 janvier, etc…(2) Déterminer l'état du marché au 31 janvier. (3) Quel serait cet état au bout d'une seconde campagne de publicité de 15 jours ? (5) Y a t-il une limite à l'état du marché au bout d'un grand nombre de campagnes de publicité ? (6) Quelle est la durée de vie moyenne du produit A sur le marché ?

Exercice 16: Même questions que l'exercice précédent avec les données suivantes. Au 15 janvier, une enquête réalisée sur un échantillon représentatif de consommateurs a donné le résultat suivant : 30% des personnes interrogées ont déclaré consommer le produit A ; 50% ont déclaré B et 20% ont déclaré C. Parmi les clients du produit A (au 15 janvier), 50% continuent d'acheter A ; 40% achètent B et 10% achètent C. Parmi les clients du produit B, 70% continuent d'acheter B et 30% achètent A. Parmi les clients du produit C, 80% continuent d'acheter C ; et 20% achètent A.

Exercice 17 : *Modèle Génétique*. L'un des premiers modèles étudiés par S. Wright tentait d'accréditer l'hypothèse selon laquelle l'information apportée par le passé du patrimoine génétique d'un individu est entièrement contenue dans le patrimoine génétique de ses parents. Une population contient N individus haploïdes i.e. qui ne possèdent que la moitié des chromosomes propres à l'espèce. On suppose que la taille de cette population est constante au cours des générations. Le nombre total de gènes est de $2N$ dont j sont de type A, et $2N-j$ de type a. On définit la variable aléatoire X_n =nombre de gènes a à la n-ème génération. La suite $\{X_n, n \geq 0\}$ peut être assimilée à une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{0,1,2,...,2N\}$. On néglige les phénomènes de mutation et sélection, et on admet que la population de gènes à la génération n+1 est obtenue comme suit. Si l'on a i gènes de type a à la génération n, chaque gène de la génération suivante (n+1) est le résultat d'une expérience de Bernoulli de paramètre $p_i = \dfrac{i}{2N}$ (cela revient à supposer qu'un gène de la population n tiré au hasard donne naissance à un individu du même génotype avec la probabilité indiquée). Par conséquent, la probabilité d'obtenir j gènes de type a est égale à

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j / X_n = i) = C_{2N}^{i} p_i^j (1 - p_i)^{2N-j}$$

On note que les états 0 et 2N sont absorbants, car $p_{00} = p_{2N,2N} = 1$. Il n'existe donc pas de distribution limite. Ce modèle est peu réaliste car il ne tient pas compte de la mutation et de la sélection. On peut introduire un taux de mutation de a en A et un taux de mutation β de A en a, auquel cas les probabilités de transition gardent la même expression avec $p_i = \dfrac{i}{2N}\alpha + \left(1 - \dfrac{i}{2N}\right)\beta$, mais dans ce cas, les états 0 et 2N ne sont plus absorbants, et il existe une distribution limite. La sélection peut être introduite en supposant que le gène a a un avantage sélectif sur le gène A. Dans ce cas, $p_i = \dfrac{(1+u)i}{2N + iu}$, où le terme 1+u représente la pondération de sélection.

Exercice 18: *Le téléphone arabe*. Une rumeur se propage entre individus par bouche à oreille sous trois versions différentes. Chaque personne à qui on raconte une version la restitue telle quelle avec une probabilité p, et trouve le moyen de la modifier en l'une des deux autres versions avec la probabilité complémentaire $q = 1 - p$. Quelle est la version la plus répandue?

Exercice 19 : *Phénomène de migration*. Le phénomène de migration territoriale est assimilé à une chaîne de Markov en considérant par exemple l'existence de trois groupes de population: (1) Ceux qui n'ont pas du tout l'intention d'émigrer ; (2) Ceux qui hésitent ou s'apprêtent à le faire ; (3) Les individus ayant déjà émigré. A l'issue d'une enquête statistique, on a pu établir les probabilités de transition d'un groupe d'état à un autre :

Etat initial de l'individu	Probabilité de l'état j de l'individu au bout d'une année		
	1	2	3
1. sans intention	0.8	0.1	0.1
2 . hésitants	0.1	0.6	0.3
3. émigré	0.0	0.1	0.9

(1) Quelle hypothèse faut-il faire pour que l'évolution de ce processus aléatoire puisse être assimilée à celle d'une chaîne de Markov ? (2) Quelle est la probabilité pour qu'un individu émigré soit encore convaincu au bout de trois ans de sa décision ? (3) Etudier la nature de la chaîne. Discuter l'existence d'une stabilisation du processus de migration. (4) Trouver le temps moyen mis par un individu pour émigrer. Interpréter .

Exercice 20 : *La loterie***.** On considère k roues de loterie $R_1,R_2,\ldots,R_k$, divisées chacune en k secteurs $S_1,S_2,\ldots,S_k$. Soit A_{ij}=angle au centre du secteur S_j de la roue R_i, i.e. $A_{ij} = 2\pi\, p_{ij}$ (exprimé en radians) : si $p_{ij} = 0$, l'angle est nul, et le secteur est réduit à un rayon. On choisit une roue en tirant au sort suivant une loi de probabilité initiale $\{ p_i^0 , i = 1,2,...,k\}$. On lance cette roue qui s'arrêtera à un numéro donné. On lance ensuite la roue portant le dernier numéro sorti, et ainsi de suite. On construit la suite aléatoire suivante : X_n=numéro sortant à l'issue du n-ième lancer de la roue. (i) Pourquoi peut-on assimiler cette expérience à l'évolution d'une chaîne de Markov ? Préciser l'espace des états, la matrice des probabilités de transition en une étape. (ii) Représenter le graphe des états et donner la classification des états. En déduire la nature de la chaîne. (iii) Discuter l'existence d'une distribution stationnaire et son calcul éventuel.

Exercice 21: Soit la chaîne de Markov à 3 états, de matrice des probabilités de transition en une étape de la forme :

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

(i) Pour quelles valeurs de α et β, cette matrice P peut-elle servir de matrice des probabilités de transition d'une chaîne de Markov ? (ii) Déterminer la nature de la chaîne (classification, existence d'une distribution stationnaire), dans chaque cas, en particulier les cas (a) α=0 ; (b) β=0 ; (c) α=β=0 ; (d) α=0.8 ? (iii) Calculer la distribution stationnaire dans les cas où elle existe.

Exercice 22: Soit $X(t)$ l'état de la chaîne de Markov de matrice des probabilités de transition

$$P = \begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 4/11 & 6/11 \end{pmatrix}$$

A l'instant $t = 1,2,3,..$, $P\{X(0) = 1\} = 1$. Trouver la probabilité pour qu'à l'instant $t = 2$ la chaîne se trouve à l'état 2. Etudier la nature de cette chaîne et discuter l'existence d'une distribution stationnaire. On forme le nouveau processus aléatoire $Y(t) = 1$ si $X(t) = 1$ et $Y(t) = 2$ sinon. Est-ce que $Y(t)$ est une chaîne de Markov ? Si oui déterminer sa matrice de probabilités des transitions et étudier sa nature.

Exercice 23. On considère une suite de variables aléatoires ξ_t , $t = 1,2,...$ indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune $P\{\xi_t = +1\} = p,\ P\{\xi_{tt} = -1\} = 1 - p$. On forme un nouveau processus aléatoire de la manière suivante : $X(t) = f(\xi_t , \xi_{t+1})$, où $f(-1,-1) = 1;\ f(-1,+1) = 2;\ f(+1,-1) = 3;\ f(+1,+1)=4$. (i) Le processus $X(t)$ forme-t-il une chaîne de Markov ? Dans l'affirmative, déterminer sa matrice des probabilités de transition en une étape et étudier sa nature (classification, existence de la distribution stationnaire, son calcul éventuel). Même question dans les cas suivants : (ii) $X(t) = \xi_t\, \xi_{t+1}$; (iii) $X(t) = \xi_1\, \xi_2 ... \xi_t$

Exercice 24 : Montrer que dans une chaîne de Markov homogène, j est accessible à partir de i ($i \to j$) si et seulement si $\tau_j > 0$.

Exercice 25: Soit T le temps passé par une chaîne de Markov à temps discret dans un état fixé i. Montrer que T suit une loi géométrique de paramètre $p = \sum_{j \neq i} p_{ij} = 1 - p_{ii}$.

Exercice 26: Etudier les méthodes suivantes de calcul de P^n sur l'exemple de la chaîne à deux états. (i) Pour n pair, écrire $P^n = (P^2)^{n/2}$; (ii) Lorsque P est une matrice diagonale $P = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, l'élévation à la puissance est immédiate car $P^k = diag(\lambda_1^k, \lambda_2^k, ..., \lambda_n^k)$ est encore diagonale ;ici les λ_i sont les valeurs propres de la matrice P. (iii) Si P n'est pas diagonale, il existe une matrice inversible Λ telle que $P = \Lambda D \Lambda^{-1}$, où D est une matrice diagonale, ce qui nous ramène au cas précédent.

Exercice 27: *Automates probabilistes.* Dans la littérature d'informatique un *automate* est définit comme un quintuplet $A = (V, Q, \delta, q_0, F)$ où $V = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ est alphabet d'entrée (ensemble fini de symboles), $Q = \{q_1, q_2, ..., q_n\}$ est alphabet des états (ensemble fini de symboles), δ une fonction de transition $Q \times V \to Q$, $q_0 \in Q$ l'état initial, $F \subseteq Q$, l'ensemble des états finaux. Une configuration instantanée de cet automate est la donnée d'un état q et d'une liste de symboles d'entrée. A chaque configuration initiale, on associe une trajectoire (ou exécution de l'automate) : une suite d'états compatible avec la suite de symboles d'entrée et la fonction de transition. On caractérise le comportement de l'automate par

Algorithme : Automate à état

q=q_0	*Initialisation de l'automate*
n=0	*Initialisation de la lecture des entrées*
Répéter	
Lire σ_n	*Lecture du symbole n*
q :=Transition(q,σ_n)	*Choisir l'état suivant*
n:=n+1	
Jusqu'à terminaison	

La version non déterministe est que les valeurs de la fonction de transition ne sont pas des états, mais des ensembles d'états (ou en terme de commandes, les différentes commandes possibles). Un *automate probabiliste* est encore un quintuplet $A_S = (V_1, Q, M, \pi_0, F)$ où V_1 est l'alphabet d'entrée, Q l'espace des états de l'automate, $\pi_0 = \{\pi_0(i), i = 1,2,...,n\}$ la distribution de probabilité de l'état initial, M une application de V_1 dans l'ensemble des matrices (stochastiques) de transition de dimension $n \times n$ (n ensemble des transitions)

$$M(a) = \|p_{ij}(a)\|,\ 0 \le p_{ij} \le 1,\ \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \text{ pour tout } i = 1,2,..,n.$$

L'élément $p_{ij}(a)$ est interprété comme la probabilité de transition de l'automate de l'état q_i à l'état $_j$ lors de la lecture du symbole d'entrée $a \in V_1$.

Exercice 27 : *Analyse d'algorithmes* : Dans les techniques d'*intelligence artificielle* (vision et analyse d'images), *cryptanalyse* (*décrypter* ou « *casser* » des algorithmes), recherche opérationnelle (voyageur de commerce, sac-à-dos) ; contrôle (optimisation) des performances on utilise des algorithmes de recherche pour optimiser des fonctions combinatoires ou de « *grande taille* ».On utilise une stratégie de type suivant :

1. Choisir une solution « *aléatoire* » (i.e. avec une certaine loi de probabilité) ;

2. Appliquer à la solution courante une transformation dans le but de l'améliorer. La version améliorée devient la solution « courante » (à cette étape de l'algorithme). Le passage d'une solution à une autre s'effectue de nouveau selon une certaine loi de probabilité qui ne dépend que de la solution courante, mais pas des solutions précédentes.
3. Répéter la procédure jusqu'à ce qu'aucune amélioration ne soit plus possible.

Lorsqu'il existe plusieurs optimums locaux, la vitesse de convergence peut être améliorée en contrôlant (ou guidant) la recherche vers l'optimum global. Des exemples de tels algorithmes de recherche: recuit simulé, algorithme génétique ….Les chaînes de Markov permettent d'analyser les performances de telles méthodes (conditions et vitesse de convergence , par exemple :voir chapitre 5).