Chapitre 8. Solutions des Exercices

Chapitre 3.

Ex 1. Il n'y a qu'une seule classe d'états essentiels communiquants, la chaîne étant finie apériodique, elle est ergodique. Ce petit programme Mathematica calcule les 20 premières puissances de P.

$P = \{\{0.1,0.5,0.4\},\{0.6,0.2,0.2\},\{0.3,0.4,0.3\}\}$

Do[Print[TableForm[MatrixPower[P,i]]//i],{i,20}

Ce programme donne en particulier

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.43 & 0.31 & 0.26 \\ 0.24 & 0.42 & 0.34 \\ 0.36 & 0.35 & 0.29 \end{pmatrix} \; ; \; P^{13} = \begin{pmatrix} 0.340424 & 0.361703 & 0.297873 \\ 0.340428 & 0.361701 & 0.297872 \\ 0.340425 & 0.361702 & 0.297873 \end{pmatrix} \; ;$$

$$P^{19} = \begin{pmatrix} 0.340426 & 0.361702 & 0.297872 \\ 0.340426 & 0.361702 & 0.297872 \\ 0.340426 & 0.361702 & 0.297872 \end{pmatrix} \; ; \; P^{20} = \begin{pmatrix} 0.340426 & 0.361702 & 0.297872 \\ 0.340426 & 0.361702 & 0.297872 \\ 0.340426 & 0.361702 & 0.297872 \end{pmatrix}$$

On voit apparaître la distribution stationnaire $\pi = \{0.340426, 0.361702, 0.297872\}$ On aurait pu déduire cette distribution stationnaire directement en résolvant le système $\pi = \pi P$ (ne pas oublier d'utiliser la condition de normalisation pour lever l'indétermination). Cette distribution stationnaire est plus précisément égale à $\pi = (16/47;17/47;14/47)$. On vérifie que cette distribution stationnaire ne dépend pas de la distribution initiale en testant successivement $\pi(0) = (1,0,0)$; $\pi(0) = (0,0,1)$; $\pi(0) = (0.7,0.2,0.1)$ qui fournissent au bout de 20 étapes les mêmes matrices stationnaires.

$a = \{1,0,0\}$

Do[Print[TableForm[a,MatrixPower[P,i]//i],{i,20}

Loi initiale →	$a = (1,0,0)$	$a = (1,0,0)$	$a = (0.71,0.2,0.1)$
π(1)	(0.1,0.5,0.4)	(0.3,0.4,0.3)	(0.22,0.43,0.35)
π(2)	(0.43,0.31,0.26)	(0.36,0.35,0.29)	(0.385,0.336,0.279)
π(8)	(0.3406,0.3615,0.2977)	(0.3404,0.3616,0.2978)	(0.3405,0.3616,0.2978)
π(10)	(0.3404,0.3616,0.2978)	(0.3404,0.3616,0.2978)	(0.34044,0.3616,0.2978)
π(18)	(0.3404,0.3617,0.2978)	(0.3404,0.3617,0.2978)	(0.3404,0.3617,0.2978)
π(19)	(0.3404,0.3617,0.2978)	(0.3404,0.3617,0.2978)	(0.3404,0.3617,0.2978)
π(20)	(0.3404,0.3617,0.2978)	(0.3404,0.3617,0.2978)	(0.3404,0.3617,0.2978)

En fait, ces valeurs sont fournies par le programme à 6 chiffres après la virgule, mais nous avons décidé de tronquer les résultats pour qu'ils soient plus présentables. De cette dernière suite de calculs, on déduit successivement $\pi_1(0) = 0.7$, $\pi_2(1) = 0.4$, $\pi_3(2) = 0.35$, $\pi_2(3) = 0.3713$. Par conséquent, la probabilité d'avoir la réalisation (1,3,3,2)

$P\{X(0)=1, X(1)=3, X(2)=3, X(3)=2\} = 0.7\times 0.4\times 0.35\times 0.3713 = 0.0363874$

Ex 3. $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.6$.

Ex 4. $X_{n+1} = X_n$ *avec* q (transmission correcte) ; $X_{n+1} = 1 - X_n$ *avec* p (transmission incorrecte, car on travaille en binaire) ; c'est donc bien une chaîne de Markov de matrice des probabilités de transition $P = \begin{pmatrix} q & p \\ p & q \end{pmatrix}$; Par récurrence ou induction,

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(q-p)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(q-p)^n \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(q-p)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(q-p)^n \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} P^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$; $\pi = (1/2, 1/2)$ est la loi stationnaire. On peut utiliser au lieu de la récurrence, la méthode de réduction à une forme diagonale (il faut pour cela que les vecteurs propres soient linéairement indépendants). Une telle matrice a m (=nombre d'états possibles, ici m=2) valeurs propres distinctes et peut être représentée sous la forme $P = T\Lambda T^{-1}$ où $T = \|t_{ij}\|_{m\times m}$ est telle que $\det T \neq 0$,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & .. & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$; les valeurs propres sont solutions de l'équation caractéristique $\det(P-\lambda I) = 0$, où I est la matrice unité. Ici $\det(P-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} q-\lambda p & p \\ p & q-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2q\lambda + q^2 - p^2 = 0$;on trouve $\lambda_1 = q + p = 1$; $\lambda_2 = q - p$; Si $p \neq q \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$. On trouve $T = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1 & p \end{pmatrix}$. Par suite $P^n = T\Lambda^n T^{-1}$ où Λ^n est une matrice diagonale dont les éléments sont les n-ièmes puissances des valeurs propres. On obtient l'expression obtenue ci-dessus par induction. Si p=1/3,

$p_{11}(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^2 = \frac{5}{9}$ qui est la probabilité pour que le 1 soit transmis correctement à la seconde étape. Cas particuliers : si q=0, la chaîne est irréductible, périodique de période 2, les limites n'existent pas (comme contre-exemple du cours, il y a une limite pour n pair, et une limite différente pour les n impairs) ; il y a par contre une distribution stationnaire $\pi = (1/2, 1/2)$ qui est unique. Si q=1, il y a deux classes récurrentes positives(réduites à un état), il n'y a pas non plus de distribution limite, et une infinité de distributions stationnaires. $q_1 = (1,0)$ loi stationnaire concentrée sur la classe {0}, $q_2 = (0,1)$ loi stationnaire concentrée sur la classe {1}. Toute distribution de la forme $aq_1 + bq_2$,$(a+b=1,, a,b \geq 0)$ est encore une distribution stationnaire.

Ex 7 .(ii) $P=\begin{pmatrix}0.2 & 0.8 & 0\\ 0.04 & 0.95 & 0.01\\ 0.3 & 0 & 0.7\end{pmatrix}$; (iii) $P^2=\begin{pmatrix}0.72 & 0.92 & 0.008\\ 0.049 & 0.9345 & 0.0165\\ 0.27 & 0.24 & 0.49\end{pmatrix}$ et $p_{13}^{(2)}=0.008$ **;**

$\Rightarrow \exists$! distribution stationnaire π solution de $\pi P=\pi$ et $\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$. qui est $\pi=(0.0549,0.879,0.0659)$.(iv) chaîne irréductible, apériodique, finie $\Rightarrow$ *récurrente* >0 (*i.e. ergodique*) (v) T =durée d'une interruption est le temps passé à l'état 3 et suit suit une loi géométrique (partant de 1) de paramètre $p=0.3$ ($T=1$ avec une probabilité 0.3, $T=2$ avec $0.7\times 0.3\ldots$; la durée moyenne d'une interruption est donc $E(T)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0.3}=3.3333$ exprimée en caractères. ; (vi) loi géométrique partant de 1 de paramètre $p=0.05$, $N=1$ *avec* 0.95 , $N=2$ *avec* 0.95×0.05 etc $\ldots E(N)=20$ caractères .**Ex 9.** (i) L'espace des états est $E=\{0,1,2,...,S\}$;

$$X_{n+1}=\begin{cases}\max\{(S-D_{n+1},0)\} & Si\ X_n<s\\ \max\{(X_n-D_{n+1},0)\} & Si\ X_n\geq s\end{cases},\quad n=0,1,2,...$$ (c'est donc une chaîne de Markov).

$$p_{00}=P\{X_n=0/X_{n-1}=0\}=P\{S-D_n\leq 0\}=P\{D_n\geq S\}=P\{D_n\geq 3\}=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$$

$p_{00}=0.08030$ (voir table 8 annexe).

$$p_{10}=P\{X_n=0/X_{n-1}=1\}=P\{X_n=\max\{1-D_n,0\}=0\}=P\{D_n\geq 1\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$$

$p_{10}=P\{D_n\geq 1\}=0.63212$ etc…La matrice des probabilités de transition est donc

$$P=\begin{pmatrix}0.32332 & 0.2707 & 0.2707 & 0.1353\\ 0.85466 & 0.1353 & 0. & 0.\\ 0.59399 & 0.2707 & 0.1353 & 0.\\ 0.32332 & 0.2707 & 0.2707 & 0.1353\end{pmatrix};$$

$$P^2=\begin{pmatrix}0.54138 & 0.238342 & 0.160774 & 0.0620513\\ 0.39655 & 0.25237 & 0.234063 & 0.116988\\ 0.506479 & 0.234045 & 0.179099 & 0.0803668\\ 0.543138 & 0.234053 & 0.160774 & 0.0620513\end{pmatrix}$$

$$P^4=\begin{pmatrix}0.502943 & 0.238342 & 0.180876 & 0.0778551\\ 0.497548 & 0.238667 & 0.183555 & 0.080201\\ 0.502259 & 0.238336 & 0.181207 & 0.0781887\\ 0.502943 & 0.238342 & 0.180876 & 0.0778551\end{pmatrix}$$

(ii) Ainsi, $p_{10}^{(4)} = 0.497548$. Sachant qu'il y a un micro en stock à la fin de la semaine, il y a une probabilité de 0.497548 pour que le stock soit vide 4 semaines plus tard. On a à la 10-ème semaine :

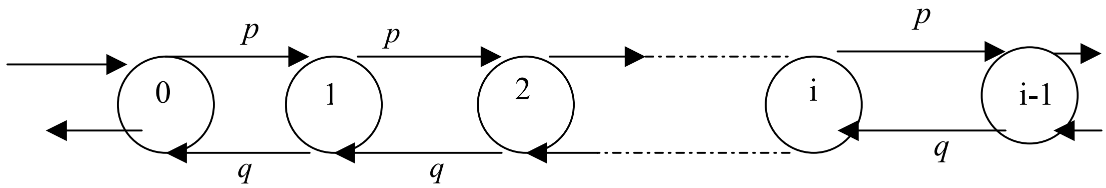
$$P^{10} = \begin{pmatrix} 0.501541 & 0.238423 & 0.181578 & 0.0784784 \\ 0.501518 & 0.238411 & 0.18157 & 0.0784727329 \\ 0.501528 & 0.238416 & 0.181573 & 0.078474332 \\ 0.501541 & 0.238423 & 0.181578 & 0.0784764 \end{pmatrix}$$

Les probabilités de première visite se calculent comme suit :
$f_{30}^{(1)} = p_{30} = 0.32332$; $f_{30}^{(2)} = p_{30}^{(2)} - f_{30}^{(1)} p_{00} = (0.24928) - (0.080)(0.080) = 0.43860217$.
Le temps moyen jusqu'à ce que le stock se vide peut être calculé à l'aide des équations pour le temps moyen de première visite à l'état 0 : $\mu_{30} = 1 + p_{31}\mu_{10} + p_{32}\mu_{20} + p_{33}\mu_{30}$; $\mu_{20} = 1 + p_{21}\mu_{10} + p_{22}\mu_{20} + p_{23}\mu_{30}$; $\mu_{10} = 1 + p_{11}\mu_{10} + p_{12}\mu_{20} + p_{13}\mu_{30}$. Dans notre cas, $\mu_{30} = 1 + 0.2707\mu_{10} + 0.2707\mu_{20} + 0.1353\mu_{30}$; $\mu_{20} = 1 + 0.2707\mu_{10} + 0.1353\mu_{20}$; $\mu_{10} = 1 + 0.2707\mu_{10}$. On trouve $\mu_{10} = 1.37118$ (semaines) ; $\mu_{20} = 1.88013$; $\mu_{30} = 2.08215$. Le temps moyen jusqu'à ce que le stock se vide , sachant qu'initialement 3 micros se trouvaient en stock est donc de 2.08215 semaines. (iv) La chaîne est irréductible, apériodique, finie elle est donc récurrente positive (ergodique) ; (v) On a donc une seule distribution stationnaire qu'on voit apparaître dans la matrice P^{10} ; $\pi = (0.501545, 0.2384245,\ 0.181581,\ 0.0784773)$. On peut l'obtenir également en résolvant le système $\pi = \pi P$. (vi) On peut à l'aide de la distribution stationnaire évaluer les temps moyen de premier retour à un état donné ; ainsi le temps moyen de premier retour à un stock vide $\mu_{00} = \dfrac{1}{\pi_0} = \dfrac{1}{0.501545} = 1.99384$ qui coïncide avec μ_{30}, car la chaîne est ergodique. De la même manière, $\mu_{11} = \dfrac{1}{\pi_1} = 4.1942$; $\mu_{22} = \dfrac{1}{\pi_2} = 5.50721$; $\mu_{33} = \dfrac{1}{\pi_3} = 12.7425$;

Ex 10, I. Dans tous les cas, $X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & avec\ p \\ X_n - 1 & avec\ q \end{cases}$;

$p_{ij} = \begin{cases} p & si\ \ j = i+1 \\ q & si\ \ j = i-1 \end{cases}$; $p_{ij} = 0\ |j-i| > 1$. $E = \{0, \pm1, \pm2, \ldots,\}$.

(i)

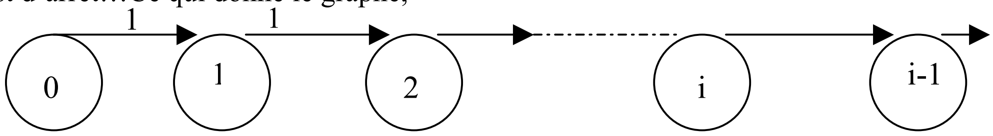


Si $p=0$, alors la particule se déplace de manière déterministe (non aléatoire) vers la gauche. Si $p=1$, la particule se déplace de manière déterministe vers la droite, à la manière de l'algorithme

S=0

S:=S+1

Sans test d'arrêt…Ce qui donne le graphe,

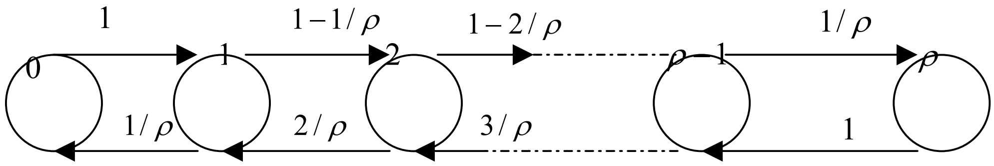


où les états sont tous non essentiels (et transitoires). Il n'y a donc pas de distribution stationnaire. Ce type de processus présente toutefois un intérêt (cf. processus de Poisson) pour la modélisation de certains types de phénomènes (transmissions des paquets dans un réseau mobile). Nous éliminons ces deux cas qui sont étudiés dans un autre cadre. Considérons donc dans la suite uniquement le cas où $0<p<1$. Les états sont tous essentiels, ils communiquent entre eux ; c'est donc une chaîne irréductible, de période 2. Il suffit donc d'étudier la récurrence pour un seul état de la classe, par exemple 0. $p_{00}^{(m)}=0$ pour m impair ; $p_{00}^{(m)}=p_{00}^{(2k)}=C_{2k}^{k}p^{k}q^{k}$ (le retour à l'état 0 s'effectue en un nombre pair de pas, k à droite et k à gauche). Nous n'avons pas besoin de calculer exactement ces probabilités, mais seulement avoir un ordre de grandeur. Utilisons donc l'approximation de Stirling de la factorielle ($k!\approx k^{k}e^{-k}\sqrt{2\pi k}$) et estimons $p_{00}^{(2k)}\approx\dfrac{(2k)!}{k!k!}(pq)^{k}\approx\dfrac{(4pq)^{k}}{k\sqrt{\pi}}$. Si $p=q=1/2$, alors $\sum_k p_{00}^{2k}=\infty$ et 0 est récurrent (la chaîne également); si par contre $p\neq q$ (ou $p\neq 1/2$), alors $\sum_k p_{00}^{2k}<\infty$ et 0 (la chaîne) est transitoire (mais essentiel !) .Pour $p=q=1/2$, on montre(!) que le temps moyen de premier retour à 0 vaut approximativement $f_{00}^{(2k)}\approx\dfrac{1}{2k^{3/2}\sqrt{\pi}}$ et par conséquent le temps moyen de premier retour $\mu_{00}=\sum_k(2k)f_{00}^{2k}=\infty$ i .e. 0 est récurrent nul ; tous les états sont récurrents nul. Il n'y a pas de distribution limite, ni de distribution stationnaire. (ii) $E=\{0,1,2,...\}$, $\{1,2,...\}$ classes d'états transitoires, $\{0\}$ unique classe récurrente positive, une seule distribution stationnaire $\pi=(1,0,0,...)$. Probabilités d'absorption : (voir (ii),La solution de l'équation récurrente avec $\alpha(0)=1$ $f_{i0}=(q/p)^{i}, p>q$., $f_{i0}=1, p\leq q$. (iii) voir 10, II,(ii). (iv) voir 10, II,(i).

II : (i). $X_{n+1}=\begin{cases}X_n+1 & avec\ \ p\\ X_n-1 & avec\ \ q\end{cases}$; $p_{ij}=\begin{cases}p=1-j/\rho & si\ \ j=i+1\\ q=j/\rho & si\ \ j=i-1\end{cases}$; $p_{ij}=0\ |j-i|>1.$

$E=\{0,1,2,...,\rho\}$. La matrice des probabilités de transition a donc la forme

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ..... & 0 & 0 \\ 1/\rho & 0 & 1-1/\rho & 0 & ..... & 0 & 0 \\ 0 & 2/\rho & 0 & 1-2/\rho & .... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & & & ... & & & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & ... & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .... & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



La chaîne est finie, irréductible, de période 2. Il existe une distribution stationnaire solution de $\pi P=\pi,\ \sum_{i=0}^{\rho}\pi_i=1$. Lorsque la matrice est tri diagonale comme ici (les seuls éléments non nuls sont situés sur la diagonale principale, et les deux diagonales adjacentes), le problème se résout facilement par récurrence par exemple $\pi_0=p_{00}\pi_0+p_{10}\pi_1$; $\pi_1=p_{01}\pi_0+p_{11}\pi_1+p_{21}\pi_2+...$ etc . Dans ce cas,

$\pi_1=\dfrac{p_{01}}{p_{10}}\pi_0$; $\pi_2=\dfrac{p_{01}p_{12}}{p_{10}p_{21}}\pi_0$; $\pi_3=\dfrac{p_{01}p_{12}p_{23}}{p_{10}p_{21}p_{32}}\pi_0$; …..On vérifie que la solution est dans notre cas une loi binomiale $\pi_i=C_\rho^i\pi_0$ i=0,1,…,ρ. Pour que ce soit une densité de probabilité, il faut que $\pi_0=1/2^\rho$; C'est donc la loi binomiale ($B(\rho,1/2)$. Interprétation : Considérons une boule (molécule) ; à chaque unité de temps, cette boule a une chance sur ρ d'être transférée cers l'autre urne, indépendamment des autres boules. Par conséquent notre molécule a une chance sur deux de se trouver dans l'urne A (ou B) au bout d'un temps suffisamment long. Comme les ρ boules ont le même comportement, indépendamment les unes des autres , la loi de la chaîne X_n est binomiale lorsque $n\to\infty$. Pour $\rho\to\infty$, cette loi binomiale est approximativement une loi normale (cf. annexe A).

Ex 10,II,(ii). $X_{n+1}=X_n+1$ dinars si Pile sort (avec une probabilité p) ; : $X_{n+1}=X_n-1$ dinars si Face sort (avec une probabilité q). Il y a trois classes {0},{K} et {1,2,…,K-1} . Cette dernière est visiblement une classe d'états non essentiels donc transitoires. On note que $p_{00}^{(n)}=1\ \forall n\Rightarrow\sum_n p_{00}^{(n)}=\infty\Rightarrow$ l'état 0 est récurrent et donc la classe {0}est elle-même récurrente. Puisque $p_{00}^{(n)}\to 1>0, lorsque\ n\to\infty$ et donc 0 est récurrent positif, et il en est de même de la classe {0}. Même raisonnement pour la classe {K}. La chaîne n'est pas irréductible (2 classes récurrentes positives) : il y a donc une infinité de distributions stationnaires vérifiant $\pi_0 = a, \pi_K = b, \pi_1 = \pi_2 = ... = 0, \quad a,b > 0,\ a+b=1$. Il n'y a donc pas de distribution limite. On peut évaluer toutefois la probabilité d'absorption par une des classes récurrentes positives (absorbantes donc). Notons ces probabilités d'absorption par $\alpha(i) = P(ruine\, de A) = \lim_{n\to\infty} p_{i0}^n$ (absorption par 0 lorsque le capital initial est i), et $\beta(i) = P(ruine\, de B) = \lim_{n\to\infty} p_{iK}^n$ (absorption par K). Il y a trois classes $\{0\},\{K\}$ et $\{1,2,...,K-1\}$;Cette dernière est visiblement une classe d'états non essentiels donc transitoires. On note que $p_{00}^{(n)} = 1\ \forall n \Rightarrow \sum_n p_{00}^{(n)} = \infty \Rightarrow$ l'état 0 est récurrent et donc la classe

$\{0\}$est elle-même récurrente. Puisque $p_{00}^{(n)} \to 1$,*lorsque* $n \to \infty$ et donc 0 est récurrent positive, et il en est de même de la classe $\{0\}$. Même raisonnement pour la classe $\{K\}$. La chaîne n'est pas irréductible (2 classes récurrentes positives) : il y a donc une infinité de distributions stationnaires vérifiant $\pi_0 = a, \pi_K = b, \pi_1 = \pi_2 = ... = 0, \quad a,b > 0,\ a+b=1$. Il n'y a donc pas de distribution limite. On peut évaluer toutefois la probabilité d'absorption par une des classes récurrentes positives (absorbantes donc). Notons ces probabilités d'absorption par $\alpha(i) = P(ruine\, de A) = \lim_{n\to\infty} p_{i0}^n$ (absorption par 0 lorsque le capital initial est i), et $\alpha(i) = P(ruine\, de A) = \lim_{n\to\infty} p_{i0}^n$ (absorption par K). $\alpha(i) = p\alpha(i+1) + q\alpha(i-1)$, $\alpha(0) = 1, \alpha(K) = 0$. Pour $p \neq q$, la solution s'obtient par récurrence $\alpha(i) = A + B\rho^i$, $\rho = q/p$. En utilisant les conditions aux limites et le fait que $A+B=1$ on a $\alpha(i) = \dfrac{\rho^i - \rho^K}{1-\rho^K},\ \rho \neq 1$ et $\alpha(i) = 1 - i/K,\ \rho = 1$. Par exemple, pour $K=4, i=2$,

$$f_{20} = \alpha(2) = \frac{\rho^2 - \rho^4}{1-\rho^4} = \frac{\rho^2 + \rho^3}{1+\rho+\rho^2+\rho^3}.$$

Ex 11. L' espace des états $E = \{1,2,3,4\}$,

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 \quad si \quad X_n \leq 2 \\ (X_n - D_n + 1) + \chi(X_n - D_{n+1} \leq 2) \quad si \quad X_n \geq 3 \end{cases}$$

où D_n est le nombre de pertes durant la n-ème mission (v.a.i.i.d.) et $\chi(A) = 1$ si A se réalise et =0 si c'est le contraire qui se réalise. Sa matrice de transition

pour $p = 1/3$ on a $$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p^3 & 3p^2q & 3pq^2 + q^3 & 0 \\ p^4 & 4p^3q & 6p^2q^2 + 4pq^3 & q^4 \end{pmatrix};$$

deux classes $\{4\}$ (transitoire) et $\{1,2,3\}$ (apériodique et récurrente). La distribution stationnaire existe (confondue avec distribution limite) $\pi = (1/35, 7/35, 27/35, 0)$.

Ex 12 : voir exemple 1, p.12.

Ex 15. Soit $\hat{\pi}_i\,(0)$ l'estimation de la vraie distribution initiale inconnue avant le sondage. En vertu des résultats de statistique (méthode du maximum de vraisemblance pour l'estimation d'une proportion, annexe C), $\hat{\pi}_1\,(0) = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2} = 0.5$; $\hat{\pi}_2\,(0) = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5} = 0.2$; $\hat{\pi}_3\,(0) = \frac{300}{1000} = \frac{3}{10} = 0.3$. D'où l'estimation du vecteur de la demande initiale $\hat{\pi}(0) = (0.5,0.2,0.3)$. On peut donner un intervalle de confiance en considérant l'approximation normale de la loi binômiale

$\hat{\pi}_1\,(0) - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}_1\,(0)\times\left[1-\hat{\pi}_1\,(0)\right]}{n}} < \pi_1\,(0) < \hat{\pi}_1\,(0) + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}_1\,(0)\times\left[1-\hat{\pi}_1\,(0)\right]}{n}}$, ou encore $0.5 - 1.96\sqrt{\frac{0.5\times 0.5}{1000}} < \pi_1\,(0) < 0.5 + 1.96\sqrt{\frac{0.5\times 0.5}{1000}}$, soit $0.469 < \pi_1\,(0) < 0.53$. Pour que ce soit une chaîne de Markov, il faut supposer que l'évolution de la clientèle ne dépend que de l'état actuel du marché et pas du passé. L'estimation de la matrice des probabilités de transition s'effectue de la même manière que précédemment . L'estimation de p_{ij} vaut $\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$ où n_{ij} est le nombre de consommateurs du produit i qui optent le mois suivant pour le produit j. Par exemple, $\hat{p}_{11} = \frac{450}{500} = 0.9$, $\hat{p}_{21} = \frac{80}{200} = 0.4$, etc…Soit,

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.08 & 0.02 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad P^2 = \begin{pmatrix} 0.81 & 0.0064 & 0.0004 \\ 0.16 & 0.09 & 0.09 \\ 0.49 & 0.01 & 0.04 \end{pmatrix}$$

L'intervalle de confiance pour p_{12} s'écrit

$$0.08 - 1.96\sqrt{\frac{0.08\times 0.92}{500}} < p_{12} < 0.08 + 1.96\sqrt{\frac{0.08\times 0.92}{500}} .$$

Soit, $0.00688 - < p_{12} < 0.092$. et $0.0786 < p_{32} < 0.14$.
Au 31 janvier , l'état du marché est déterminé par $\pi(1) = \pi(0)P = (0.74,0.13,0.13)$. Au bout de cette première période la majorité, soit 74% de la demande sera en faveur du produit A . La chaîne est irréductible, apériodique, finie, elle est automatiquement récurrente positive, donc ergodique. La distribution stationnaire unique vaut $\pi = (0.835962,0.104101,0.599369)$ ou bien environ $\pi = (0.84,0.10,0.6)$.

Ex 21. (i) $\alpha + \beta = 0.75$; $\alpha \geq 0, \beta \geq 0.$; (ii) a : $\beta = 0.75$,irréductible, apériodique, finie donc récurrente positive (ergodique); distribution stationnaire unique $\pi = (10/26,7/26,9/26)$;(ii) : $\alpha = 0.75$,ergodique; $\pi = (7/11,1/11,3/11)$; (iii) $\alpha = \beta = 0$, P n'est pas stochastique, ce n'est pas une chaîne de Markov ; (iii) $\alpha = 0.8$ idem (la somme des éléments de la ligne est >1).

Ex 22. $P = \begin{pmatrix} 3/7 & 4/7 \\ 1/11 & 10/11 \end{pmatrix}$

Ex 23. Oui. $p_{11} = p_{23} = p_{31} = p_{44} = 1-p$; $p_{12} = p_{24} = p_{32} = p_{44} = p.$ (ii) Non si p≠q ; oui si p=q=1/2. (iii) Oui ; $P\{X(t+1) = 1 / X(t=1\}p,\ P\{X(t+1) = 1 / X(t) = -1\}1-p$.

Ex 24. On peut écrire $N_j = \sum_{n=1}^{\infty} I_j(n)$ où $I_j(n) = \begin{cases} 1, & si\ X_n = j \\ 0, & si\ X_n \neq j \end{cases}$. Par suite,

$$\tau_j = E\left(N_j / X_0 = i\right) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_j(n) / X_0 = i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} E\left(I_j(n) / X_{à} = i\right) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\left(X_n = j / X_0 = i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$$

Ex 25. Considérer une chaîne à deux états i et k, où k est un état absorbant représentant le reste du graphe et. La probabilité p est la probabilité de sortir de l'état i.