2. Lois de probabilités usuelles.

1. Lois discrètes.

1.1. Loi dégénérée ou de Dirac. On l'appelle encore loi causale. Elle prend ses valeurs dans $E = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ et prend une valeur constante presque sûrement (avec une probabilité égale à 1):

$$P(X = c) = \delta_c(x) = \begin{cases} 1, & x = c \\ 0, & x \neq c \end{cases},$$

où c est une constante entière. Ses moments sont faciles à calculer

$$m = E(X) = c\,,\ \sigma^2 = Var(X) = 0$$

La fonction de répartition $F(x) = 0, x \leq c, F(x) = 1, x > c$.

1.2. Loi uniforme discrète.

C'est la loi d'une variable discrète qui prend chacune des valeurs entières de l'intervalle $[0, N]$ avec des probabilités équiprobables

$$P(X = i) = 1/N, \qquad i = 1,2,...,N.$$

1.3. Loi de Bernoulli (ou loi 0-1). C'est la loi d'une variable aléatoire binaire X à valeurs dans $E = \{0,1\}$. On note $X \in B(p)$. Une telle variable ne prend deux valeurs 0 ou 1 avec les probabilités: $P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$, $0<p<1$. On peut écrire la densité sous la forme: $P(X = i) = p^i (1-p)^{n-i}$, $i = 0,1$. Ses caractéristiques moyennes valent: $m = E(X) = p;\ Var(X) = p(1-p)$.

Interprétation : La nature binaire de la variable permet d'englober une variété de modèles où seules deux éventualités possibles sont prises en compte. Considérons par exemple, un évènement A lié à une expérience aléatoire telle que sa probabilité d'occurrence soit égale à $p = P(A)$ On peut introduire la variable

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si A s'est réalisé dans l'expérience (succés)} \\ 0 & \text{si A ne s'est pas réalisé (échec)} \end{cases}$$

La variable associée à une loi de Bernoulli est assimilée à la fonction indicatrice d'un événement (ou un ensemble). Elle est ainsi très pratique pour le codage binaire (voir chapitre 7), en particulier pour la communication avec les ordinateurs. Par exemple :

(i) Au cours du jet d'une pièce de monnaie, on peut considérer l'évènement A={occurrence de Pile}.

(ii) Considérons la transmission de chiffres binaires (bits) à travers un canal de communication ; A={le chiffre est transmis correctement}.

1.4. Loi binomiale $B(n, p)$.

On dit que X suit une *loi binomiale* de paramètre $n \in \{1,2,...\}\}$ et $0 < p < 1$, si son ensemble des valeurs possibles est $E = \{0,1,2,...,n\}$ et si sa densité de probabilité est donnée par

$$p_i = P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}, \ i = 0,1,2,...,n$$

Interprétation : Considérons une série de n expériences de Bernoulli indépendantes, dans des conditions identiques (par exemple n jets d'une même pièce de monnaie), et dans chacune desquelles on peut observer la réalisation (ou la non réalisation) d'un certain événement A (le résultat du jet est Pile). Pour chaque expérience (la i ème disons), on introduit la variable aléatoire de Bernoulli $X_i = 1$ si l'événement A se réalise dans la ième expérience, $X_i = 0$ si A ne se réalise pas dans cette ième expérience $(i = 1,2,...,n)$. La variable représente le nombre d'occurrences de l'événement A (succès) au cours de ces n expériences. Un exemple de modèle simple est lorsque $X =$ nombre de boules blanches tirées d'une urne (avec remise) qui en contient $n = a + b$ (cf . exercice 1, chapitre 1). Un autre exemple décrit en exercice est la loi du nombre de défectueux dans un lot d'articles.

Exemple 1: On sait que la proportion de disquettes défectueuses est de 20%. Quelle est la probabilité que parmi 10 disquettes, 2 soient défectueuse. Cette probabilité vaut: $p_2 = C_{10}^2 (0.2)^2 (0.8)^8 \approx 0.30199$.

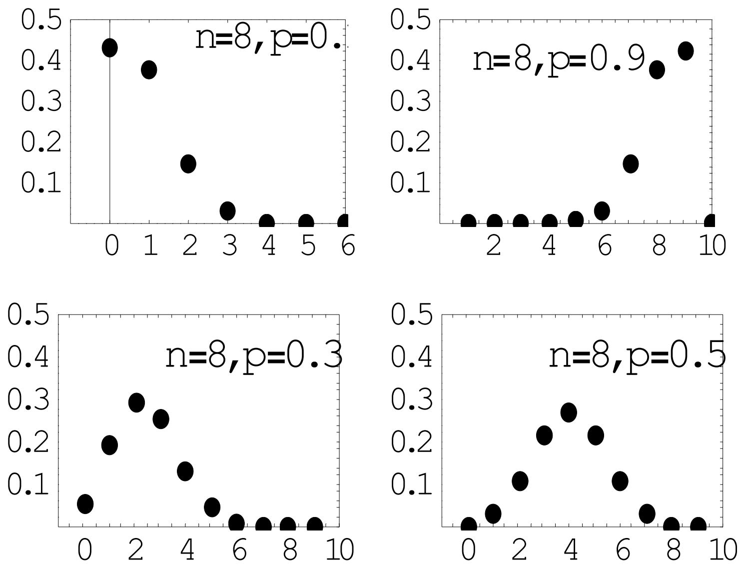
On vérifie que:

(i) Le cas $n = 1$ correspond à la loi de Bernoulli, $B(p)$.

(ii) $E(X) = np$; $Var(X) = np(1-p)$.

Exemple 2: Les graphes de 4 distributions binomiales de paramètres différents sont représentés sur les figures ci-dessous :

(i) $n = 8, p = 0.1$ $m = 0.8$, graphe décroissant ($p = 0.1 < 8/9$;
(ii) $n = 8, p = 0.9$ $m = 7.2$, graphe croissant ($p = 0.9 > 8/9$;
(ii) $n = 8, p = 0.3$ $m = 2.4$, mode=2 ;
(iv) $n = 8, p = 0.5$ $m = 4 = \text{mod}e$.



1.7. Loi géométrique ou de Pascal G(p). On dit que X suit une loi géométrique de paramètre p partant de 1 ($0 < p < 1$), si E=IN*={1,2,…} et $p_i = P(X = i) = (1-p)^{i-1}p, i \in E$. On peut vérifier que $E(X) = 1/p$; $Var(X) = (1-p)/p^2$.

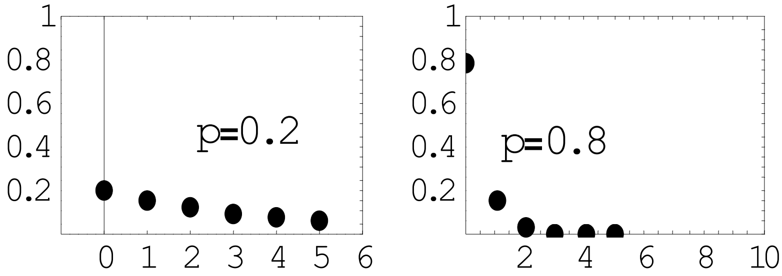


Figure 1. Densité de la loi géométrique de paramètre p=0.2 et 0.8.

Interprétation : X peut-être interprétée comme le nombre d'épreuves de Bernoulli pour obtenir un succès pour la première fois. Par exemple, le nombre de jets d'une pièce de monnaie pour obtenir "Pile" pour la première fois. La quantité p_i représente la probabilité d'obtenir un premier succès à la i-ème tentative (y compris la dernière tentative qui s'achève par un succès).

Remarque: Parfois, on considère plutôt une modification du modèle précédent représenté par la variable $Y = X - 1$ qui représente le nombre d'échecs avant d'obtenir un succès; dans ce cas, $p_i = (1-p)^i p, i=0,1,2,...$ $E(X) = (1-p)/p$; ; $Var(X) = (1-p)/p^2$. On l'appellera loi géométrique partant de 0.

1.10. Loi de Poisson $P(\lambda)$.

Une variable X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, si $E = IN$ et $p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad i = 0,1,2,...$

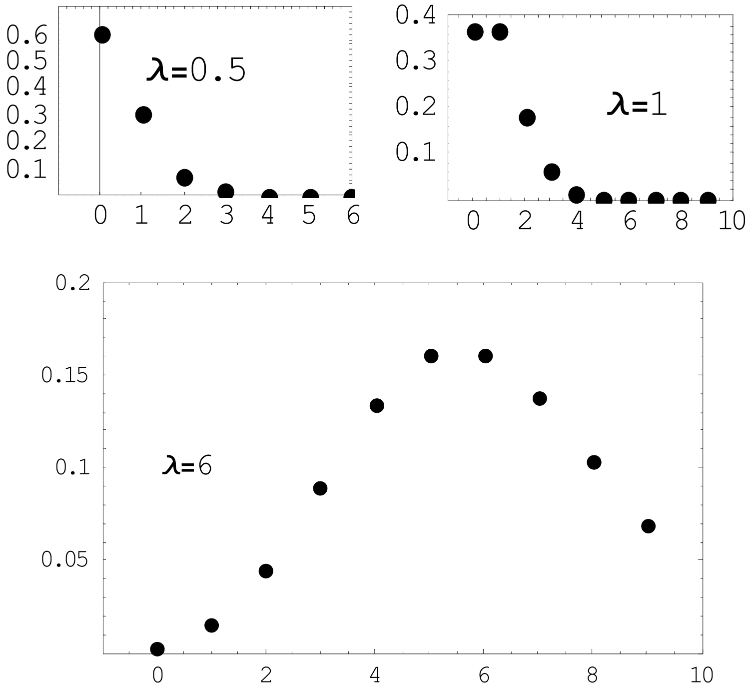


Figure 2. Densité de la loi de Poisson de paramètres $\lambda = 0.5, 1 et\ 6$.

Propriétés :

1. Les caractéristiques de la loi $P(\lambda)$ valent : $E(X) = Var(X) = \lambda$.
2. $m_2 = \lambda(\lambda+1); m_3 = \lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 1)$;
3. La somme de deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant des lois de Poisson $P(\lambda_1)$ et $P(\lambda_2)$ respectivement suit une loi de Poisson $P(\lambda_1 = \lambda_2)$.
4. Soit Y_n le nombre de succès dans n expériences de Bernoulli où **P**(succès)= p_n (ici $p = p_n$ dépend du nombre d'expérience). Cette variable suit donc une loi binomiale B(n,p_n) : $P(Y_n = i) = P_n(i, p_n) = C_n^i p_n^i (1 - p_n)^{n-i}$. Supposons que $p = p_n = \lambda_n / n$ avec $\lambda_n \to \lambda > 0$ lorsque $n \to \infty$, alors

$$\lim_{n\to\infty} P_n(i, p_n) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} , \ i = 0,1,2,...$$

Ce résultat (connu sous le nom de théorème de Poisson) stipule que le modèle de loi binomial $B(n,p)$ peut être approché par un modèle de loi de Poisson lorsque le nombre d'expériences n est suffisamment grand, et que la probabilité de succès p est suffisamment petite, le produit np restant approximativement constant égal à λ. C'est pourquoi, la loi de Poisson s'appelle parfois « *loi des évènements rares* ». En pratique, l'approximation est satisfaisante dès que $n > 200$, $p \leq 0.1$ (ce n'est pas une règle !!!, on trouvera d'autre indications sur la manière de choisir n et p dans la littérature selon la nature de l'application).

Sous certaines hypothèses de nature mathématique, la loi de Poisson est utilisée pour décrire le nombre d'apparitions d'un certain événement dans un intervalle de temps fixé ou dans un domaine spatial fixé. Ainsi, moyennant une traduction des hypothèses mathématiques vers les hypothèses physiques correspondantes, la loi de Poisson a été utilisée pour modéliser par exemple :

- la loi du nombre d'appels à un central téléphonique,
- la loi du nombre de visites à un site Web durant une période donnée,
- la loi du nombre de particules radioactives émise dans une direction ,
- le nombre de défauts ou de pannes d'une machine,
- la loi du nombre de paquets au niveau du routeur d'un réseau mobile,
- nombre de points jetés sur une cible circulaire du plan ou d'un autre espace etc….

Exemple 6 : Le nombre d'étudiants qui arrivent au restaurant universitaire (durant la période d'ouverture) suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$ étudiants par minute. La probabilité d'arrivée de plus de 6 étudiants durant la première minute d'ouverture est

$$P(X \geq 10) = e^{-2} \sum_{i=10}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = 1 - e^{-2} \sum_{i=0}^{10} \frac{\lambda^i}{i!} = 0.00453381$$

Le nombre moyen d'étudiants par minute est justement $E(X) = \lambda = 2/\min ute$, par conséquent, le nombre moyen d'étudiants durant les deux heures d'ouverture sera $2 \times 2 \times 60 = 240$ étudiants.

Exemple 6(bis) : Si l'évènement consiste en l'arrivée de l'étudiant au restaurant universitaire , on doit avoir :

(i) P(un évènement durant Δt)= $\lambda \Delta t + O(\Delta t)$,

(ii) P(2 évènement durant Δt)= $O(\Delta t)$,

(iii) Les nombres d'évènements durant des intervalles disjoints sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi Poisson (λ).