Rappels de probabilités

Dans Le chapitre lié aux chaînes de Markov on n'utilise que des propriétés élémentaires de probabilité qui sont rappelées brièvement ici.

1. Hasard et déterminisme. Evènement aléatoire.

Par évènement aléatoire, on comprend un évènement qu'on ne peut prévoir. L'exemple :jet d'une pièce de monnaie, dont le résultat (Pile ou Face ?)

Ensemble des'évènements élémentaires $\Omega = \{\omega\}$ appelés ensemble des *éventualités, des issues*, des *épreuves* (*univers des issues possibles*).

Tout événement A peut être décrit à l'aide d'évènements élémentaires de Ω : A se réalise si l'un de ses évènements élémentaires se réalise.

Exemple : jeu de Pile ou Face, $\Omega = \{Pile, Face\}$; On peut coder Pile=0 , Face=1 et $\Omega = \{0,1\}$

Exemple : jet d'un dé, ce peut être $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ …

L'évènement A= »le résultat qui sort au cours d'un lancer est pair »= $A = \{2,4,6\}$contient trois éléments correspondants aux 3 possibilités.
On peut former d'autres évènements résumés dans le tableau A et B se réalisent simultanément) et la réunion $A \cup B$ (qui se réalise si A ou (inclusif) B se réalise).

Exemple $A = \{2,4,6\}$=résultat pair $B = \{1,3,5\}$= résultat impair. Dans ce cas $A \cup B = \Omega$ l'évènement certain.

Opération algébrique sur les évènements

Φ	Evènement impossible
Ω	Evènement certain

$A \subset B$	L'événement A entraîne l'événement B
$A = B$	$A \subset B$ et $B \subset A$
$A \bigcup B$	Evènement qui se réalise si au moins A, B ou (A et B) se réalisent
$A \bigcup B = \Omega$	Il est certain que A ou B (ou les deux) se réalisent
$A \bigcap B$	Se réalise si A et B se réalisent simultanément
$A \bigcap B = \Phi$	A et B sont exhaustifs ou incompatibles : ils ne peuvent se réaliser simultanément
$A + B$	Evènement qui se réalise si A ou B se réalise (lorsque $A \bigcap B = \Phi$)
$A + B = \Omega$	Il est certain que soit A, soit B se réalise
AB	Evènement $A \bigcap B$ pour simplifier
$A \setminus B$	Se réalise lorsque A se réalise et B ne se réalise pas
$\overline{A} = \Omega \setminus A$	Se réalise lorsque A ne se réalise pas
$A \Delta B$	$(A \setminus B) + (B \setminus A)$

Note : pour simplifier l'écriture, on écrit indifféremment

$$P(A \cap B) = P(A, B) = P(A.B)$$

Exemple 5: $\Omega = \{Pile, Face\}$. Si l'expérience consiste à lancer deux pièces, alors $\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$.

Notons que $A \bigcap B = \Phi$, et dans ce cas, on dit que les évènements A et B sont *incompatibles* (ils ne peuvent se réaliser simultanément).

Lorsque $C \subset A$, on dit que l'événement C *entraîne* l'événement A (la réalisation de C entraîne ou implique celle de A).

Exemple 8 : Considérons le modèle d'expérience suivant qui consiste à jeter un « objet » au hasard dans le plan $x0y$. Par exemple, si on cherche à déterminer la position du propriétaire d'un téléphone mobile par satellite, l'ensemble Ω représente toutes les positions possibles du plan i.e. $\Omega = \{ (x, y) : -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty \}$. Il aurait été possible au lieu du plan cartésien de considérer le système de coordonnées polaires $\Omega = \{ (\rho, \theta) : 0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$.

5. Probabilité : La *probabilité* est une fonction $P : \Im \rightarrow [0,1]$ qui à chaque événement A associe un réel compris entre 0 et 1 appelé probabilité de l'événement A.

P(A) « mesure » l'évènement A ; le nombre (en fait la proportion) de chance pour que l'évènement A se réalise.

La probabilité vérifie les propriétés suivantes:

(i) $P(\Phi) = 0$ et $P(\Omega) = 1$. Par conséquent, $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall A$ F.

(ii) Si A et B sont incompatibles ($A \cap B = \Phi$), alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas d'espace infini (dénombrable ou non), la construction du modèle probabiliste impose que la probabilité vérifie la condition :

Si $A_1, A_2, \ldots$ sont des évènements incompatibles deux à deux ($A_i \cap A_j = \Phi$ pour $i \neq j$), alors $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Exemple 9: Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ est un ensemble *fini* à n éléments équiprobables (de même probabilité), alors F =P(Ω). Puisque $\sum_{i=1}^{n} P\{\omega_i\} = P(\Omega) = 1$, alors $P\{\omega_i\} = \frac{1}{n}$, $i = 1,2,\ldots,n$. La probabilité de tout événement A s'écrit $P(A) = \frac{nombre \quad d'éléments \quad de \quad A}{n}$; ce qu'on exprime souvent de la manière suivante :

$$P(A) = \frac{nombre \quad de \quad cas \quad favorables \quad à \quad l'évènement \quad A}{nombre \quad de \quad cas \quad possibles} \qquad (1)$$

Exemple 10: Supposons que les évènements élémentaires soient équiprobables : $P\{i\}=1/6$ pour $i=1$ à 6. La probabilité d'avoir un nombre pair $P(A)=\frac{cardA}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. De la même manière: $P(B)=\frac{1}{2}$ et $P(C)=\frac{1}{6}$.

Exemple : A_i =le système (la chaîne) se trouve à l'état i à l'instant n

N=nombre d'états possibles $\sum_{i=1}^{N} P(A_i) = \sum_{i=1}^{N} \pi_i(n) = P(\Omega) = 1$

8. Propriétés de la probabilité : De la définition, il découle que :

(i) $P(\overline{A})=1-P(A)$. En particulier, $P(\Phi)=1-P(\Omega)=1-1=0$. Notons cependant que si $P(A)=0$, cela ne veut pas dire que $A=\Phi$ est l'événement impossible. On dit dans ce cas que A est de probabilité nulle ou négligeable.

(ix) Si $\{A_i, i=1,...,n\}$ est *système exhaustif d'évènements* (une famille d'évènements incompatibles deux à deux et A un certain événement), alors

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap A_i) \quad (\textit{formule des probabilités totales})$$

9. Probabilité conditionnelle, Causalité et Indépendance.

Dans les problèmes de modélisation, la notion d'influence d'un événement par rapport à un autre (par exemple, est-ce que l'événement A est la cause de l'événement B) reste souvent une notion assez vague. La notion de probabilité conditionnelle permet dans de nombreuses applications de réévaluer la probabilité d'un événement lorsqu'on dispose d'une information supplémentaire.

La probabilité de l'événement A sachant B, s'écrit

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}, \text{ si } P(B)\neq\Phi \tag{2}$$

Si $B=\Omega$, alors $P(A/\Omega)=P(A)$. Pour $P(B)=0$, $P(A/B)$ n'est pas définie.

Deux évènements A et B sont *indépendants* si $P(A/B)=P(A)$ ou si $P(B/A)=P(B)$. En d'autres termes, l'événement A est indépendant de l'évènement B, ou la non réalisation de B n'influe pas sur la réalisation de A (et/ou vice-versa). Ces deux dernières relations sont équivalentes et on peut réécrire (2) sous la forme : $P(A\cap B)=P(A).P(B)$.

Exemple 12: Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules noires. On tire deux boules successivement sans remise. (i) Si la première boule est blanche, quelle est la probabilité pour que la seconde soit blanche ? (ii) la probabilité pour que les deux boules soient blanches ?
Soient les évènements A= « la première boule tirée est blanche » ; B= « la deuxième boule tirée est blanche ».

(i) $P(B/A)=\frac{3}{9}$ (en effet si la 1$^{\text{ère}}$ boule tirée est blanche, alors il reste 9 boules dont 3 blanches).

(ii) $P(A\cap B)=P(A).P(B/A)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}$.

Par induction, on obtient la formule générale :

$$P(A_1 A_2 ... A_n)=P(A_1).P(A_2/A_1)...P(A_n/A_1 A_é ... A_{n-1})$$

Et si ces évènements sont indépendants, alors

$$P(A_1 A_2 ... A_n)=P(A_1).P(A_2)...P(A_n)$$

E**xemple** : Pour montrer qu'une chaîne homogène ne dépend que de $\pi(0)$ et P, on utilise cette propriété :

A_{i_j} = = »X_j=i»=la chaîne se trouve à l'état i à l'instant j)

.

10. Formule des probabilités totales : Soient $H_1, H_2, ..., H_n$ des évènements aléatoires (interprétés comme des hypothèses) formant un système exhaustif d'évènements i.e. incompatibles deux à deux ($H_i \cap H_j = \Phi$ pour $i \neq j$), et tels que $H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_n = \Omega$ (il est certain que l'un de ces n évènements doit se réaliser). Une telle famille d'évènements est appelée *système complet*. Soit d'autre part A un certain événement, alors

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i) \qquad (3)$$

ou encore

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) \qquad (4)$$

Exemple 13: *Contrôle de qualité*. Une usine contient trois machines M_1, M_2, M_3 assurant chacune 25%, 35% et 40% de la production d'un certain produit P. Les statistiques du contrôle de qualité ont montré que les proportions de défectueux sont respectivement 5%, 4% ? 2% pour chacune des machines. Quelle est la probabilité pour qu'un article choisi au hasard s'avère défectueux ?

Notons H_i= « l'article a été fabriqué par la machine N°i », i=1,2,3. et A= « l'article choisi est défectueux ». Alors, en vertu de la formule (3) :

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)$$

$$= 0.25 \times 0.05 + 0.35 \times 0.04 + 0.40 \times 0.02 = 0.0345$$

Exemple : $A_{i,n}$=la chaîne se trouve à l'état i à l'instant n

L'élément $p_{i,j} = P(X_n = j / X_{n-1} = i) = P(A_{i,n} / A_{i,n-1})$

Pour une chaîne homogène

$p_{i,j} = P(X_{n+1} = j / X_n = i) = P(A_{i,n+1} / A_{i,n}) = P(A_{i,n+2} / A_{i,n+1})....$

Exercice : montrer la propriété

$$p_{ij}^{n+m} = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}^{n}.p_{kj}^{m}$$

$A_{i,j,n}$ = passer de i à j en n étapes : $p_{ij}^{n+m} = P(A_{i,j,n+m})$

Pour passer de i en j en n+m étapes, il faut transiter par un état k en n étapes , puis passer de k vers j durant les m étapes suivantes.

Il faut simplement énumérer toutes les éventualités possibles

1. Transit par l'état k=1 (évènement B_1)

$P(B_1) = P(A_{i,1,n}\ et\ A_{1,j,m}) = P(A_{i,1,n}) \times P(A_{1,j,m}) = p_{i1}^{n}.p_{1j}^{m}$ (on a utilisé le fait que si deux évènements sont indépendants, la probabilité de leur intersection (leur réalisation simultanée) est égale au produit des évènements. $P(AetB) = P(A).P(B))$

2. Transit par l'état k=2 (évènement B_2)

$$P(B_2) = P(A_{i,2,n}\ et\ A_{2,j,m}) = P(A_{i,2,n}) \times P(A_{2,j,m}) = p_{i2}^{n}.p_{2j}^{m}$$

etc.. pour k=3, k=4 jusqu'à k=N.

$$p_{ij}^{n+m} = P(A_{i,j,n+m}) = P(B_1 U B_2 ... \cup B_N) = P(B_1) + P(B_2) + ... + P(B_N)$$

on a utilisé ici le fait que les évènements B_i incompatibles (qui ne peuvent se réaliser simultanément : le transit se fait par un seul état k à la fois, c'est soit 1, (évènement B_1 , soit 2 évènement B_2 ;;;soit k=N)

Si A et B sont incompatibles la probabilité de leur réunion (que ce soit A ou B qui se réalise), est égale à la somme des probabilités de A et B . Ici vous avez la réunion de N évènements B_1 …… B_N

$p_{ij}^{n+m} = \sum_{k=1}^{N} P(B_k) = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}^{n}.p_{kj}^{m}$ ce qui correspond à notre affirmation.

Exemple : On utilise les sommes $\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{k}$

$D_{i,k}$= le retour à i se fait en k étapes

D_i=l'évènement qui consiste au retour à l'état i une fois qu'on l'a quitté.
Probabilité de retour en i= $P(D_i) = P(D_{i,1} ou D_{i,2} ou ....) =$

$$P(D_i) = P(D_{i,1}) + P(D_{i,2}) + ... = \sum_{k=1}^{\infty} P(D_{i,k}) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{k}$$

Autre exemple : calcul de $\pi(n+1) = \pi(n)P$

$\pi(n) = (\pi_1(n), \pi_2(n), ..., \pi_i(n), ..., \pi_N(n))$

la ième coordonnée $\pi_i(n) = P(C_{i,n})$

$C_{i,n}$ est l'évènement « le système (la chaîne) se trouve à l'état i à l'instant n »

Comme ci-dessus, énumérer les différentes éventualités

$A_{i,j,1}$ = passer de i à j en 1 étapes
Pour que la chaîne se trouve à l'état i à l'instant n+1 (évènement $C_{i,n+1}$), il faut que l'un des évènements suivant se réalise :

1. Soit la chaîne se trouvait à l'instant précédent n à l'état 1 (évènement $C_{1,n}$) et il y a transition (en une étape) vers l'état i (évènement $A_{1,i,1}$

La probabilité de cette éventualité est $P\left(C_{1,n} et A_{1,j,1}\right) = P(C_{1,n}).P(A_{1,j,1}) =$

$\pi_1(n).p_{1i}^{1} = \pi_1(n).p_{1i}$

2. Soit la chaîne se trouvait à l'instant précédent n à l'état 2 (évènement $C_{2,n}$) et il y a transition (en une étape) vers l'état i (évènement $A_{2,i,1}$

La probabilité de cette éventualité est $P\left(C_{2,n} et A_{2,j,1}\right) = P(C_{2,n}).P(A_{2,j,1}) =$

$\pi_2(n).p_{2i}^1 = \pi_2(n).p_{2i}$

3. Soit la chaîne se trouvait à l'instant précédent n à l'état 3 (évènement $C_{3,n}$) et il y a transition (en une étape) vers l'état i (évènement $A_{3,i,1}$

La probabilité de cette éventualité est $P\left(C_{3,n} et A_{3,j,1}\right) = P(C_{3,n}).P(A_{3,j,1}) =$

$\pi_3(n).p_{3i}^1 = \pi_3(n).p_{3i}$

4. Et ainsi de suite jusqu'à la possibilité que la chaîne se trouvait à l'instant précédent n à l'état N (évènement $C_{N,n}$) et il y a transition (en une étape) vers l'état i (évènement $A_{N,i,1}$

La probabilité de cette éventualité est $P\left(C_{N,n} et A_{N,j,1}\right) = P(C_{N,n}).P(A_{N,j,1}) =$

$\pi_N(n).p_{Ni}^1 = \pi_N(n).p_{Ni}$

Enfin,

$$\pi_i(n+1) = P(C_{i,n+1}) = P(C_1 et A_{1,i,1}) + P(C_2 et A_{2,i,1}) + ... + P(C_N et A_{N1,i,1})$$

$$= \pi_1(n).p_{1i}^1 + \pi_2(n).p_{2i} + \ldots + \pi_N(n).p_{Ni} = \sum_{k=1}^{N} \pi_k . p_{ki}$$

aspect statistique

2. **Fréquence et notion intuitive de la probabilité**. (loi des grands nombres).

La définition classique (ou intuitive) de la *probabilité* est basée sur la notion *fréquentielle* (ou *statistique*): c'est la fréquence d'occurrence d'un événement (Par exemple Face) observée au cours d'un grand nombre d'*expériences aléatoires* (par exemple des lancers de pièces de monnaie). Cette définition trouve l'une des ses justifications dans la fameuse *loi des grands nombres* énoncée plus loin. Si on lance notre pièce un grand nombre de fois, on peut s'attendre à obtenir autant de Pile que de Face, soit une fréquence de ½ .

Exemple 1: Le tableau ci-dessous résume des séries de jet d'une pièce de monnaie. Chaque expérience est répétée 100 fois, et on observe le nombre de fois où l'événement « Face » se réalise. On constate que la fréquence de réalisation est voisine de 0.5.

Nombre de faces dans des séries de n=100 expériences										Nombre total de « face » dans une série de 1000 expériences
54	46	53	55	46	54	41	48	51	53	504
48	46	40	53	49	49	48	54	53	45	485
43	52	58	51	51	50	52	50	53	49	509
58	60	54	55	50	48	47	57	52	55	536
48	51	51	49	44	52	50	46	53	41	485
49	50	45	52	52	48	47	47	47	51	488
45	47	41	51	49	59	60	55	53	50	500
53	52	46	52	44	51	48	51	46	54	497
45	47	46	52	47	48	59	57	45	48	494
47	41	51	59	51	52	55	39	41	48	484

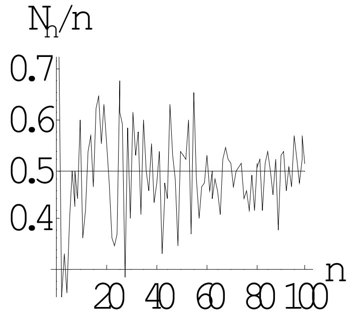
On peut émettre la conjecture que cette stabilité (« limite ») observée peut faire usage de loi.

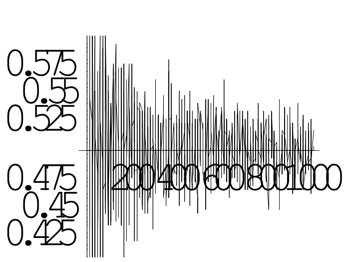
Pour formaliser cette intuition, on considère une série de n observations, où intervient le hasard (appelées expériences aléatoires). On note pour chaque expérience si un *événement* donné A se réalise ou non. Soit $N_n(A)$ le nombre d'occurrences de l'événement A au cours des n expériences. Par *probabilité de l'événement* A, on comprend la « limite »

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(A)}{n}$$

si elle existe. La quantité $\frac{N_n(A)}{n}$, s'appelle *fréquence relative* de l'événement A : c'est la *proportion* de fois où l'événement A s'est réalisé au cours des n expériences. Le numérateur de cette expression $N_n(A)$ s'appelle *fréquence absolue* de l'événement A. La probabilité de A, est donc définie ici comme la limite de la fréquence de réalisation de A dans une série d'expériences. On utilise alors l'approximation $P(A) \approx \frac{N_n(A)}{n}$, pour peu que n soit suffisamment grand. Cette définition correspond tout à fait à notre intuition. Cependant, elle ne peut être vérifiée expérimentalement de manière traditionnelle, car il est pratiquement impossible d'observer une série réelle infinie d'expériences et vérifier si la limite existe.

Exemple 2: Aujourd'hui, la plupart des logiciels permettent de générer artificiellement des suites de Face (ou Pile) (codées en binaires : 0 ou 1) avec des probabilités équiprobables et de vérifier expérimentalement cette loi. Les graphiques ci-dessous illustrent ces expériences sur ordinateur, et montrent bien la tendance (convergence) de la fréquence $\frac{N_n(A)}{n}$ à se « stabiliser » autour de la valeur ½ lorsque le nombre de lancers n augmente. C'est cette valeur ½ qui sera prise en guise de valeur de la probabilité d'occurrence de pile.





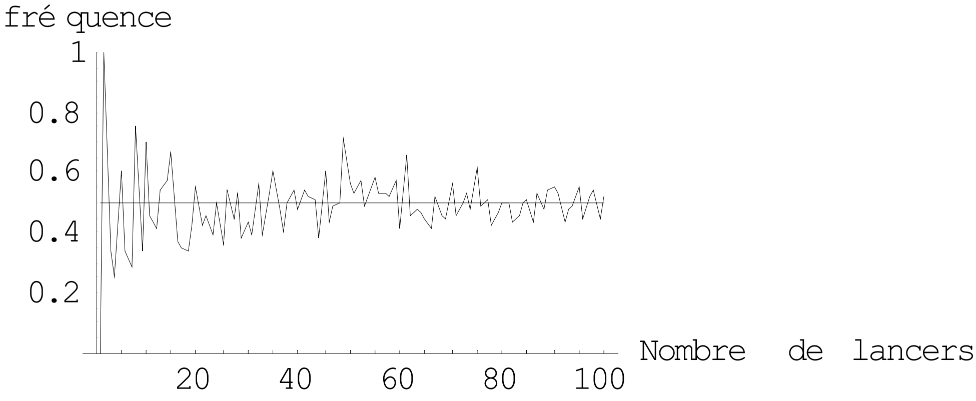


Figure 1. Fréquence d'apparition de « Face » lors de $n = 100$ et 1000 lancers d'une pièce parfaite

(i)

7. Cas non dénombrable.

Exemple 11: *Probabilité géométrique* (*2D* et *3D*) : Supposons que l'expérience du jet d'un objet au hasard dans le plan possède la propriété de symétrie (« équiprobabilité » de tous les évènements élémentaires). On peut ainsi admettre que si S_1 et S_2 sont deux domaines de surfaces égales, et que $p_1 = P$ (l'objet tombe dans le domaine S_i), $i = 1{,}2$ alors $p_1 = p_2$. Si A est un événement de Ω, de mesure de surface $S(A)$, alors $P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$. Cette formule peut-être considérée comme une généralisation de la formule précédente au cas d'ensemble non dénombrable d'évènements élémentaires. En 3D (espace à 3 dimensions), au lieu des surfaces, on considèrera les volumes $P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}$.