Lois de Probabilité Usuelles

On rappelle que
$C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$,
$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$,
$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx$.
Le support est l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire ayant une loi donnée.

1/ Lois discrètes

Rappel : l'espérance est obtenue par la formule : $\mathbb{E}X = \sum_{k\in\text{support}} k\mathbb{P}(X=k)$.

Nom et Symbole	**Paramètre(s)**	**Support**	**Loi**	**Espérance**	**Variance**
Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$	$p \in]0,1[$	$\{0,1\}$	$\begin{cases} \mathbb{P}(X=0) = 1-p \\ \mathbb{P}(X=1) = p \end{cases}$	p	$p(1-p)$
Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	$n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$	$\{0,...,n\}$	$\mathbb{P}(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$p \in]0,1[$	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)\,p^{k-1}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
Binomiale négative $\mathcal{BN}(n,p)$	$n \in \mathbb{N}^*$ $p \in]0,1[$	$\{n, n+1, ...\}$	$\mathbb{P}(X=k) = C_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$	$\dfrac{n}{p}$	$n\dfrac{1-p}{p^2}$
Hypergéométrique $\mathcal{H}(N,m,n)$	$N \in \mathbb{N}^*$ $(m,n) \in \{1,...,N\}^2$	$\{0,...,\min(m,n)\}$	$\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}$	$\dfrac{nm}{N}$	$nm\dfrac{(N-n)(N-m)}{N^2(N-1)}$
Multinomiale $\mathcal{M}(n,p_1,...,p_m)$	$n \in \mathbb{N}^*$ $0 < p_i < 1, \sum p_i = 1$	$\{0,...,n\}^m$	$\mathbb{P}(X_i = k_i, 1 \leq i \leq m)$ $= \dfrac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1}...p_m^{k_m}$ si $\sum k_i = n$	$(np_i)_{1\leq i\leq k}$	$var(X_i) = np_i(1-p_i)$ $cov(X_i,X_j) = -np_ip_j$

N.B : La loi multinomiale est une loi vectorielle (associée à la variable $(x_1,...,x_k)$).

2/ Lois continues

Nom et Symbole	**Paramètre(s)**	**Support**	**Densité**	**Espérance**	**Variance**
Uniforme $\mathcal{U}[a,b]$	$a < b \in \mathbb{R}$	$[a,b]$	$f(x) = \dfrac{1}{b-a}$	$(a+b)/2$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$m \in \mathbb{R}$ $\sigma^2 \in \mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}$	$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	m	σ^2
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^+$	$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Gamma $\gamma(\alpha,\lambda)$	$(\alpha,\lambda) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$	$\mathbb{R}^+$	$f(x) = \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x)$	$\dfrac{\alpha}{\lambda}$	$\dfrac{\alpha}{\lambda^2}$
Cauchy $\mathcal{C}$	$a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f(x) = \dfrac{a}{\pi(a^2+x^2)}$	∞	∞
Pareto $\mathcal{P}a(\alpha)$	$\alpha > 0$	$[1,+\infty[$	$f(x) = \alpha/x^{1+\alpha}$	$\dfrac{\alpha}{\alpha-1}, \alpha > 1$	$\dfrac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \alpha > 2$
Weibull $\mathcal{W}(\alpha,\beta)$	$(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$	$\mathbb{R}^+$	$f(x) = \dfrac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}$	$\beta\Gamma\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)$	$\beta^2\left[\Gamma\left(1+\dfrac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)\right]$
Béta de 1ère espèce $\beta_1(a,b)$	$(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$	$[0,1]$	$f(x) = \dfrac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\beta(a,b)}$	$a/(a+b)$	$\dfrac{ab}{(a+b)^2(a+\beta+1)}$
Béta de 2ème espèce $\beta_2(a,b)$	$(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$	$\mathbb{R}^+$	$f(x) = \dfrac{x^{a-1}}{\beta(a,b)(1+x)^{a+b}}$	$a/(b-1), b > 1$	$\dfrac{a(a+b-1)}{(b-1)^2(b-2)}, b > 2$

Lois dérivées de la loi normale

Nom et Symbole	**Paramètre(s)**	**Support**	**Densité**	**Espérance**	**Variance**
Chi-deux $\chi^2(n)$	$n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^+$	$\gamma\left(\dfrac{n}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ (Cf au dessus)	n	$2n$
Student $\mathcal{T}(n)$	$n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f(x) = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)} \left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$	0	$\dfrac{n}{n-2}$
Fischer $\mathcal{F}(n,m)$	$(n,m) \in \mathbb{N}^{*2}$	$\mathbb{R}^+$	$f(x) = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+m}{2}\right) n^{m/2} m^{n/2}}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$	$\dfrac{m}{m-2}, m > 2$	$2\dfrac{m^2}{n}\dfrac{n+m-2}{(m-2)^2(m-4)}$, $m > 4$
Log-Normale $\mathcal{LN}(m,\sigma^2)$	$m \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^+$	$f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\dfrac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right]$	$e^{m+\sigma^2/2}$	$e^{2m+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2-1}\right)$