Initiation aux processus : Chaînes de Markov

Fabrice Rossi

18 février 2003

1 Espace d'état fini

Exercice 1

On considère une chaîne de Markov à trois états, dont la matrice de transition est donnée par

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Questions :

1. donner une représentation graphique de l'espace d'états et des transitions ;
2. vérifier que la chaîne est irréductible ;
3. calculer la probabilité invariante ;
4. vérifier que 0, 1 et $\frac{1}{2}$ sont des valeurs propres de la matrice de transition et déterminer les espaces propres associés ;
5. la matrice P donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 \\ -6 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

admet pour inverse la matrice

$$P^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

En déduire une preuve que la chaîne admet comme probabilité limite la probabilité invariante.

Exercice 2

On considère une chaîne de Markov à quatre états, dont la matrice de transition est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Questions :

1. donner une représentation graphique de l'espace d'états et des transitions ;
2. donner les classes de la chaîne ;
3. déterminer toutes les probabilités stationnaires de la chaîne ;
4. déterminer le comportement asymptotique de la chaîne.

Exercice 3

On considère une chaîne de Markov à trois états, dont la matrice de transition est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questions :

1. donner une représentation graphique de l'espace d'états et des transitions ;
2. vérifier que la chaîne est irréductible ;
3. calculer la probabilité invariante ;
4. calculer M^n pour tout n. La chaîne possède-t-elle une probabilité limite ? Comment interpréter la probabilité invariante (dans ce cas précis) ?

Exercice 4

On lance indéfiniment un dé à 4 faces (un tétraèdre régulier) non pipé pour définir le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec pour X_j le maximum des j premiers lancés du dé.

Questions :

1. montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ;
2. donner la matrice de transition de la chaîne et une représentation graphique de celle-ci ;
3. déterminer le statut (transitoire ou récurrent) des états de la chaîne ;
4. montrer que la chaîne possède comme probabilité limite son unique probabilité invariante ;
5. calculer le nombre moyen de lancés nécessaires pour atteindre l'état absorbant de la chaîne.

Exercice 5

On considère le modèle suivant : une grenouille vit dans une mare et passe son temps sur deux nénuphars. Des insectes, dont la grenouille se nourrit, se posent régulièrement sur les nénuphars. On observe la mare toutes les minutes :

- quand un nénuphar est vide à l'instant t (pas d'insecte, ni de grenouille), la probabilité qu'un insecte se pose dessus à l'instant $t + 1$ est de p ;
- quand un insecte est sur un nénuphar (à l'instant t), sa probabilité de le quitter (à l'instant $t+1$) est q ;
- si la grenouille est présente sur un nénuphar à l'instant t, aucun insecte ne peut se poser sur ce nénuphar à l'instant $t + 1$;
- si, à l'instant t, la grenouille est sur un nénuphar et voit un insecte sur l'autre nénuphar, elle saute sur celui-ci, à l'instant $t + 1$, avec une probabilité s ;
- s'il n'y a pas d'insecte sur l'autre nénuphar, la grenouille reste sur son nénuphar avec la probabilité r ;
- l'apparition ou la disparition d'un insecte et le mouvement de la grenouille sont simultanés et indépendants ;
- si après son déplacement la grenouille est sur le même nénuphar qu'un insecte, elle le mange.

Questions :

1. mettre en évidence le caractère Markovien de l'évolution du contenu des deux nénuphars ;
2. donner la matrice de transition de la chaîne de Markov associée au problème ;
3. donner une représentation graphique de l'espace d'états et des transitions ;
4. déterminer la (ou les) classe(s) de la chaîne de Markov ;
5. on choisit les probabilités suivantes : $p = q = r = \frac{1}{2}$ et $s = \frac{2}{3}$. Déterminer une probabilité invariante. Est-elle unique ?
6. on suppose que la probabilité initiale de la chaîne est invariante. En conservant les hypothèses de la question 5, calculer le nombre moyen d'insectes mangés par la grenouille à l'instant t.

7. on choisit les probabilités suivantes : $p = q = \frac{1}{2}$, $s = \frac{2}{3}$ et $r = 1$. En supposant que la probabilité initiale de la chaîne est invariante, calculer le nombre moyen d'insectes mangés par la grenouille à l'instant t.

Exercice 6

Bob possède N paires de chaussures de sport. Tous les matins, Bob fait son jogging. Il sort de sa maison soit par la porte de devant, soit par celle de derrière (de façon équiprobable). De même, en rentrant du jogging, Bob entre dans sa maison de façon équiprobable par l'une des deux portes. Bien qu'il soit sportif, Bob est très paresseux et "range" ses chaussures de sport devant les deux portes de sa maison. Plus précisément, il procède de la façon suivante : s'il trouve une ou plusieurs paires de chaussures devant la porte de sortie, Bob fait son jogging avec une paire choisie au hasard. Il dépose ensuite cette paire devant sa porte d'entrée. S'il ne trouve pas de chaussures devant sa porte de sortie, Bob court sans chaussure...

Questions :

1. mettre en évidence le caractère Markovien de l'évolution du nombre de paires de chaussures déposées devant la porte de devant, en précisant la matrice de transition et le graphe de la chaîne ;
2. étudier la chaîne de Markov (classe(s), probabilité(s) invariante(s), etc.).

Exercice 7

Un mobile se déplace sur un cercle selon N positions, numérotées de 1 à N dans le sens trigonométrique. A chaque étape, la probabilité de mouvement du mobile dans le sens trigonométrique est de p, alors qu'elle est de $1 - p$ dans le sens anti-trigonométrique.

Questions :

1. mettre en évidence le caractère Markovien de l'évolution de la position du mobile, en précisant la matrice de transition et le graphe de la chaîne ;
2. étudier la chaîne de Markov (classe(s), probabilité(s) invariante(s), etc.) ;
3. quelle(s) conséquence(s) entraîne la modification suivante du modèle : la probabilité de mouvement dans le sens trigonométrique est de p, la probabilité de ne pas bouger est de r et la probabilité de mouvement dans le sens anti-trigonométrique est de $1 - r - p$.

Exercice 8

Alice joue contre le casino à un pile ou face truqué. Sa probabilité de gain à chaque tour est de p (la probabilité de perte est donc de $q = 1 - p$). Quand Alice gagne, elle engrange 1 brouzouf, quand elle perd, elle donne 1 brouzouf. Alice décide d'arrêter de jouer si elle est ruinée ou si elle atteint la somme de N brouzoufs.

Questions :

1. mettre en évidence le caractère Markovien de l'évolution de la fortune d'Alice, en précisant la matrice de transition et le graphe de la chaîne ;
2. on note Q_i la probabilité d'absorption en N sachant que la fortune initiale d'Alice est i. Déterminer Q_i ;
3. calculer le temps moyen d'absorption en N ou en 0 en partant de l'état initial i dans le cas $p = \frac{1}{2}$.

2 Espace d'état dénombrable

Exercice 9

On considère une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ donnée par le processus Markovien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $P(X_n = i + 1 | X_{n-1} = i) = p$ et $P(X_n = i - 1 | X_{n-1} = i) = 1 - p = q$.

Questions :

1. Montrer que $P(X_n = j|X_0 = i) = C_n^{\frac{n+j-i}{2}} p^{\frac{n+j-i}{2}} q^{\frac{n+i-j}{2}}$, si $n+j-i$ est un entier pair positif et 0 sinon. On pourra procéder par récurrence. Donner une interprétation intuitive de cette formule.
2. Etudier le comportement asymptotique de $P(X_n = i|X_0 = i)$ quand n tend vers l'infini. On pourra utiliser la formule de Stirling qui donne un équivalent de $k!$, à savoir
$$k! \sim \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k$$
3. Etudier la nature des états de la chaîne (transitoires ou récurrents) en fonction de la valeur de p.
4. Montrer que la probabilité de retour de la chaîne à son point de départ est de $1-|p-q|$. $p=q=\frac{1}{2}$, le résultat est une conséquence de la question précendente (pourquoi ?). Pour $p \neq q$, on procédera de la façon suivante :
   (a) On rappelle que si une série est absolument convergente, toute série obtenue en changeant arbitrairement l'ordre de sommation de la série d'origine est aussi absolument convergente. De plus si une série à termes positifs tend vers l'infini, il en est de même de toute série obtenue par changement de l'ordre de sommation. En déduire que pour deux suites à termes positifs, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, on a :
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} v_k u_{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$
   (b) On note r_n la probabilité de retour de la chaîne à son état initial en n coups, c'est-à-dire $P(X_n = i|X_0 = i)$ et p_n la probabilité de *premier* retour de la chaîne à son état initial en n coups, c'est-à-dire $P(X_n = i, X_{n-1} \neq i, X_{n-2} \neq i, \ldots, X_1 \neq i, |X_0 = i)$. Montrer que
$$r_n = \sum_{k=1}^{n} p_k r_{n-k}$$
   (c) Montrer que la probabilité de retour en l'état initial peut s'écrire sous la forme
$$1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} r_n}$$
   (d) On rappelle le développement en série entière suivant (valable pour $|x| < 1$)
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}^k \left(\frac{x}{2}\right)^k$$
   En déduire la probabilité de retour au point de départ de la chaîne.
5. Montrer que la chaîne n'admet pas de probabilité invariante. On commencera par étudier le comportement asymptotique de $P(X_n = j|X_0 = i)$ quand n tend vers l'infini.
6. On souhaite préciser la nature de l'état initial de la chaîne dans le cas $p=q=\frac{1}{2}$, c'est-à-dire étudier le temps moyen de retour à cet état. En reprenant les notations de la question 4, le temps moyen de retour est défini par
$$m = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n$$
   On va montrer que $m = \infty$ et donc que l'état initial n'est pas récurrent positif. On procède de la façon suivante :
   (a) On définit les deux séries entières suivantes (en utilisant les notations de la question 4)
$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n x^n \\ R(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n \end{aligned}$$

On rappelle qu'une série entière de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ telle que $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ est absolument convergente sur l'intervalle $]-R, R[$. En réutilisant les résultats de la question 4, montrer que si $|x| < 1$, $R(x) = 1 + R(x)P(x)$.

(b) En utilisant le développement en série entière de la question 4 (d), donner une expression simple pour $P(x)$ quand $|x| < 1$.

(c) Calculer $P'(x)$ en utilisant la définition de $P(x)$ et l'expression simple obtenue dans la question précédente.

(d) On peut montrer que si les a_n sont positifs et si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$, alors la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ admet une limite en R, à savoir

$$\lim_{x\to R^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Ce résultat est valable même si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge. En déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \infty$.