

# FONCTIONS NUMÉRIQUES DÉFINIES SUR UN INTERVALLE

## CONTINUITÉ, CONTINUITÉ UNIFORME. APPLICATIONS

---

### SOMMAIRE

<b>1. Continuité</b>	<b>2</b>
1.1. Définition de la continuité en un point	2
1.2. Caractérisation de la continuité par les suites. Exemple : $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ ne peut pas se prolonger par continuité en 0	2
1.3. Définition de la continuité sur un intervalle	3
1.4. Théorème des valeurs intermédiaires	3
1.5. Corollaire : image d'un intervalle par une application continue	5
<b>2. Continuité uniforme</b>	<b>5</b>
2.1. Définition de la continuité uniforme sur un intervalle. Exercice : si $f$ est $u$ -continue, elle admet une limite finie	5
2.2. Théorème : les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues	6
2.3. CNS pour qu'une fonction dérivable soit lipschitzienne.	8
2.4. Théorème de Heine. Exercice : si $f$ continue sur $[a, +\infty[$ admet une limite finie en $+\infty$ , alors $f$ est $u$ -continue	8
<b>3. Applications</b>	<b>10</b>
3.1. Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes	10
3.2. Théorème du point fixe	11
3.3. Sommes de Riemann	14
3.4. Approximation d'une fonction continue sur un segment par des fonctions en escalier	17
<b>4. Annexe : étude de quelques fonctions usuelles</b>	<b>18</b>

## 1. Continuité

### 1.1. Définition

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

On dit que  $f$  est continue en  $a$  lorsque :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)$$

Cette définition revient à dire :

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow f \text{ admet une limite en } a \text{ égale à } f(a)$$

### 1.2. Théorème *Caractérisation de la continuité par les suites*

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i)  $f$  continue en  $a$

(ii) Pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $I$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$

#### Démonstration

(i)  $\Rightarrow$  (ii)

Supposons  $f$  continue en  $a$ . Soit  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $I$ . Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ .

Comme  $f$  est continue en  $a$ , on a :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que : } (|x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)$$

Mais la suite  $(x_n)$  converge vers  $a$ . Donc pour ce réel  $\eta$  ci-dessus, on peut trouver  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - a| \leq \eta$$

On a donc, par transitivité des implications :

$$n \geq N \Rightarrow |f(x_n) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Ceci prouve que la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $f(a)$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i)

Raisonnons par contraposition et montrons : non (i)  $\Rightarrow$  non (ii).

Supposons  $f$  non continue en  $a$ .

Construisons une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $I$  qui converge vers  $a$  sans que la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $f(a)$ .

Puisque  $f$  n'est pas continue en  $a$  :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in I, (|x - a| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| > \varepsilon)$$

En particulier avec  $\eta = \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), il existe  $x_n$  dans  $I$  tel que :

$$|x_n - a| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(a)| > \varepsilon$$

La suite  $(x_n)$  ainsi définie converge vers  $a$  (par encadrement) et la suite  $(f(x_n))$  ne converge pas vers  $f(a)$

(puisque l'écart  $|f(x_n) - f(a)|$  est minoré par un réel strictement positif)

Par contraposition, on obtient l'implication souhaitée.

D'où le théorème.

Remarque : ce théorème est faux si  $a \in \bar{I} \setminus I$ . Considérons, par exemple, la fonction "partie entière" sur  $I = [0, 1[$  avec  $a = 1$  et la suite  $(x_n)$  définie par  $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ . Cette suite tend vers 1, mais la suite  $(E(x_n))$  étant nulle sa limite est  $0 \neq E(1)$ .

Il se peut même que la suite  $(f(x_n))$  diverge : prendre  $f : x \in ]0 ; 1] \mapsto \frac{1}{x}$  et la suite  $(x_n) : n \in \mathbb{N}^* \mapsto \frac{1}{n}$ .

Cependant, nous verrons plus loin que si  $f$  est uniformément continue, la convergence de  $(x_n)$  vers une borne de  $I$  entraîne celle de  $(f(x_n))$ .

Exemple :

Soit  $\lambda \in [-1, 1]$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \lambda & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Démontrer que  $f$  n'est pas continue en 0.

On considère les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :

$$u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

Or,  $f(u_n) = 1$  et  $f(v_n) = -1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = -1$

Si  $f$  était continue en 0, on devrait avoir :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(0)$$

C'est-à-dire :

$$1 = \lambda$$

De même, on devrait avoir :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = f(0)$$

C'est-à-dire :

$$-1 = \lambda$$

D'où une contradiction.

Donc  $f$  n'est pas continue en 0.

### 1.3. Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . On dit que  $f$  est continue sur  $I$  lorsque :

$$\forall a \in I, f \text{ est continue en } a$$

Notons que la continuité (simple) est une notion locale (chaque  $\eta$  de la définition 1.1. est dépendant de  $a$ )

### 1.4. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit  $I$  un intervalle. Soient  $a$  et  $b$  dans  $I$ .

Soit  $f$  une application continue sur l'intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\lambda$  un réel compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .

Il existe  $c$  dans  $[a, b]$  tel que :  $f(c) = \lambda$ .

Démonstration :

Déjà, si  $f(a) = f(b)$  alors nécessairement  $\lambda = f(a) = f(b)$  et le théorème est vrai en choisissant  $c = a$  ou  $c = b$ .

Dans toute la suite, on peut donc supposer :  $f(a) < f(b)$ . (Quitte à poser  $g = -f$  si  $f(a) > f(b)$ ).

Notons :  $X = \{x \in [a, b] \text{ tels que } f(x) \leq \lambda\}$

Cet ensemble  $X$  est **non vide**. En effet,  $f(a) \leq \lambda$ , donc  $a \in X$ .

Cet ensemble  $X$  est **majoré** par  $b$  (puisque  $X$  est un sous ensemble de  $[a, b]$ ).

Donc  $X$  admet une **borne supérieure**  $c$ . (Et  $c \in [a, b]$ )

Montrons que  $f(c) \leq \lambda$  :

Comme  $c = \sup X$ , il existe une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  qui converge vers  $c$ .

Comme les  $x_n$  sont dans  $X$ , on a :  $f(x_n) \leq \lambda$

Or,  $f$  est continue en  $c$ , donc par passage à la limite :

$$f(c) \leq \lambda$$

Montrons que  $f(c) \geq \lambda$  :

Déjà, si  $c = b$  alors  $f(c) = f(b) \geq \lambda$  auquel cas la démonstration s'achève.

Supposons désormais que  $c < b$ .

Comme  $c = \sup X$ , on a :  $\forall x \in ]c, b], x \notin X$ , c'est-à-dire  $f(x) > \lambda$

Soit  $(y_n)$  une suite d'éléments de  $]c, b]$  qui converge vers  $c$ . On a donc :

$$f(y_n) > \lambda$$

Or,  $f$  est continue en  $c$ , donc par passage à la limite :

$$f(c) \geq \lambda$$

Bilan : on a donc  $f(c) = \lambda$ , ce qui achève la démonstration.

Autre démonstration à l'aide du théorème des segments emboîtés :

Supposons  $f(a) < f(b)$ . (Quitte à poser  $g = -f$  sinon)

Soit  $u$  le milieu de  $[a, b]$ .

Notons  $a_1 = a$  et  $b_1 = u$  si  $f(u) \geq \lambda$ .

Notons  $a_1 = u$  et  $b_1 = b$  si  $f(u) < \lambda$ .

Ainsi, on a toujours :  $f(a_1) \leq \lambda \leq f(b_1)$

En réitérant ce procédé, on construit, par récurrence, une suite de segments emboîtés :

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

De plus, par construction, la longueur de  $[a_n, b_n]$  est  $\frac{b-a}{2^n}$ .

Les segments  $[a_n, b_n]$  ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont donc adjacentes.

Notons  $c$  leur limite commune. Montrons que  $f(c) = \lambda$ .

On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $f(a_n) \leq \lambda \leq f(b_n)$

Par passage à la limite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \leq \lambda \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)$

Or,  $f$  est continue, donc :  $f(c) \leq \lambda \leq f(c)$

Donc  $f(c) = \lambda$ .

Attention : le théorème ne s'applique pas si  $a$  et  $b \in \bar{I}$  (dans le cas où  $I$  n'est pas fermé). Considérons, par exemple, la fonction "partie entière"  $E$  qui est continue sur  $[0, 1[$ . On a  $E(0) = 0$  et  $E(1) = 1$ . Mais il n'existe pas de réel  $c$  tel que  $E(c) = \frac{1}{2}$  ...

Application : toute fonction polynomiale (à coefficients réels) de degré impair admet une racine réelle.

### 1.5. Corollaire

Soit  $f$  une application continue sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Alors  $f(I)$  est un intervalle.

Démonstration : on utilise ici le fait que les intervalles de  $\mathbb{R}$  sont les **convexes** de  $\mathbb{R}$ .

Soient  $y_1$  et  $y_2$  dans  $f(I)$  avec  $y_1 \leq y_2$ . Il s'agit de montrer tout élément  $\lambda$  de  $[y_1, y_2]$  est élément de  $f(I)$ .

Comme  $y_1$  et  $y_2$  sont dans  $f(I)$ , il existe  $a$  et  $b$  dans  $I$  tels que  $f(a) = y_1$  et  $f(b) = y_2$ .

Comme  $I$  est un intervalle, on a  $[a, b] \subset I$ .

Comme  $f$  est continue sur  $[a, b]$  (puisque  $[a, b] \subset I$ ), on a, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\forall \lambda \in [y_1, y_2], \exists c \in [a, b] \text{ tel que } f(c) = \lambda.$$

D'où :  $\lambda \in f(I)$

Donc  $f(I)$  est bien un intervalle.

## 2. Continuité uniforme

### 2.1. Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

On dit que  $f$  est uniformément continue (ou  $f$  est u-continue) sur  $I$  lorsque :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in I^2 : (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

La notion de continuité uniforme est globale ( $\eta$  ne dépend que  $\varepsilon$ )

Il est clair que la continuité uniforme sur  $I$  entraîne la continuité sur  $I$ .

Par contre, la réciproque est fautive : l'application  $x \mapsto x^2$  n'est pas uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ . (Voir annexe)

Exercice : comportement d'une fonction uniformément continue au voisinage d'un point

Soit  $f$  une fonction u-continue sur un intervalle  $I$  du type  $]a, b[$  ( $b$  étant fini ou non)

1. Soit  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $I$  qui converge vers  $a$ . Alors la suite  $(f(x_n))$  converge.
2. En déduire que  $f$  admet une **limite finie** à droite en  $a$ .

Solution :

1. Fixons  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Comme  $f$  est uniformément continue sur  $I$ , on a :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (|x_p - x_q| \leq \eta \Rightarrow |f(x_p) - f(x_q)| \leq \varepsilon)$$

Mais puisque  $(x_n)$  converge, elle est de Cauchy. Donc :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p > q \geq N \Rightarrow |x_p - x_q| \leq \eta)$$

On a alors par transitivité des implications :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p > q \geq N \Rightarrow |f(x_p) - f(x_q)| \leq \varepsilon)$$

Ce qui montre que la suite  $(f(x_n))$  est de Cauchy dans  $\mathbb{R}$  complet donc converge vers un certain réel  $\ell$ .

2. Fixons  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Comme  $f$  est uniformément continue sur  $I$ , on a :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, (|x - x_n| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_n)| \leq \varepsilon)$$

Comme la suite  $(x_n)$  converge vers  $a$  :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_0 \Rightarrow |x_n - a| \leq \frac{\eta}{2})$$

Comme la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $\ell$  :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow |f(x_n) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Pour  $n \geq N_0$ , on a alors :

$$0 < |x - a| \leq \frac{\eta}{2} \Rightarrow |x - x_n| \leq |x - a| + |a - x_n| \leq \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} \leq \eta$$

Posons  $\eta' = \frac{\eta}{2}$ . Ainsi, pour  $n \geq \max\{N_0, N_1\}$ , on a :

$$0 < |x - a| \leq \frac{\eta}{2} \Rightarrow |x - x_n| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - \ell| \leq 2\varepsilon$$

Ce qui prouve que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  par valeurs supérieures.

Un des intérêts de cet exercice réside dans la contraposée de la question 2 :

**Si  $f$  est définie sur  $I = ]a, b[$  ( $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ) et n'admet pas de limite finie en  $a$ , alors  $f$  n'est pas u-continue sur  $I$ .**

Ainsi, des fonctions telles que  $x \mapsto \frac{1}{x}$ ,  $x \mapsto \ln x$  et  $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$  ne sont pas uniformément continues sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour qu'une fonction soit uniformément continue :

### 2.2. Théorème Application lipschitzienne

Soit  $f$  une fonction lipschitzienne sur un intervalle  $I$  ( $\exists k \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in I^2 : |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ ).

Alors  $f$  est uniformément continue sur  $I$ .

### Démonstration

Soit  $f$  une fonction lipschitzienne sur  $I$ .

Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Posons  $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$ . Soient  $x$  et  $y$  dans  $I$  tels que  $|x - y| \leq \eta$ . On a alors :

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \leq \varepsilon$$

Ceci prouve que  $f$  est uniformément continue sur  $I$ .

Exemple :  $f : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ . La fonction  $f$  est impaire et pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}_+$ , on a :

$$|f(y) - f(x)| = \left| \frac{y}{1+y} - \frac{x}{1+x} \right| = \frac{|y-x|}{(1+x)(1+y)} \leq |y-x|$$

Donc  $f$  est 1-lipschitzienne sur  $\mathbb{R}_+$  donc elle l'est aussi sur  $\mathbb{R}$  (puisque  $f$  impaire).

On donnera d'autres exemples en annexe.

Remarques :

- **la réciproque du théorème 2.2. est fausse.** L'application  $x \mapsto \sqrt{x}$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}_+$  mais non lipschitzienne. (Voir annexe)
- par contraposition, on a :

$$f \text{ non } u\text{-continue sur } I \Rightarrow f \text{ non lipschitzienne sur } I$$

Exercice : Comportement global d'une fonction uniformément continue.

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une application uniformément continue.

Alors, il existe des réels  $a$  et  $b$  tels que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq ax + b$

Preuve :

Fixons  $\varepsilon = 1$ .

Par hypothèse :  $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1$

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ .

Soit  $n$  un entier naturel non nul tel que :  $\frac{x}{n} \leq \eta$

Remarque : cet entier  $n$  existe toujours, il suffit de choisir par exemple  $n = E\left(\frac{x}{\eta}\right) + 1$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , l'hypothèse d'uniforme continuité nous permet d'écrire :

$$\left| f\left(\frac{(k+1)x}{n}\right) - f\left(\frac{kx}{n}\right) \right| \leq 1$$

En sommant ces inégalités pour  $k$  allant de 0 à  $n-1$ , nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{(k+1)x}{n}\right) - f\left(\frac{kx}{n}\right) \right| \leq n$$

Mais d'après l'inégalité triangulaire :

$$|f(x) - f(0)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{(k+1)x}{n}\right) - f\left(\frac{kx}{n}\right) \right|$$

On a donc :

$$|f(x) - f(0)| \leq n \leq E\left(\frac{x}{\eta}\right) + 1 \leq \frac{x}{\eta} + 2$$

En particulier :  $f(x) \leq \frac{x}{\eta} + 2 + f(0)$

Il suffit de poser  $a = \frac{1}{\eta}$  et  $b = 2 + f(0)$  pour achever la démonstration.

Remarque : on peut rechercher des majorations affines plus précises en choisissant un  $\varepsilon$  plus petit.

Application : par contraposition, on a :

Si  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  n'est pas majorée par une fonction affine sur  $\mathbb{R}_+$ , alors elle n'est pas  $u$ -continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

Par exemple, les fonctions polynômes de degré supérieur ou égal à 2 ne sont pas  $u$ -continues sur  $\mathbb{R}_+$ .

Idée : on subdivise l'intervalle  $[0, x]$  en  $n$  tranches de largeurs inférieures à  $\eta$ .

Remarque : on a un résultat analogue sur  $\mathbb{R}_-$ . Mais pas d'extension possible à  $\mathbb{R}$  tout entier. En effet la fonction valeurs absolue est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$  (puisque 1-lipschitzienne) et pourtant elle n'est majorée par aucune fonction affine sur  $\mathbb{R}$ .

### 2.3. CNS pour qu'une fonction dérivable soit lipschitzienne :

Soit  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$ . Alors :

$$f \text{ est lipschitzienne sur } I \Leftrightarrow f' \text{ est bornée sur } I$$

Démonstration :

$\Rightarrow$  Supposons  $f$  lipschitzienne sur  $I$  :  $\exists k \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in I^2 : |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

$$\text{Soit } x \in I. \text{ Comme : } \forall y \in I \quad -k \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq k$$

On déduit, par passage à la limite lorsque  $y$  tend vers  $x$  :

$$k \leq f'(x) \leq k$$

Ceci, quelque soit  $x \in I$ . Donc  $f'$  est bornée sur  $I$ .

$\Leftarrow$  Supposons  $f'$  bornée :  $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall t \in I, |f'(t)| \leq M$ .

Soit  $(x, y) \in I^2$ . D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à  $f$  sur le segment  $[x, y]$  :

$$|f(y) - f(x)| \leq M|x - y|$$

Donc  $f$  est  $M$ -lipschitzienne.

Évidemment, par contraposition, on a pour  $f$  dérivable sur  $I$  :

$$f \text{ est non lipschitzienne sur } I \Leftrightarrow f' \text{ n'est pas bornée sur } I$$

Exemple :  $x \mapsto \operatorname{argch} x$  est non lipschitzienne sur  $]1, +\infty[$ .

En effet, pour  $x > 1$ ,  $\operatorname{argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$  qui n'est pas bornée sur  $]1, +\infty[$ .

### 2.4. Théorème de Heine

Toute fonction numérique continue sur un segment  $I$  est uniformément continue sur ce segment  $I$ .

On rappelle qu'un segment est un intervalle fermé borné.

Démonstration :

Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$ .

Supposons  $f$  non uniformément continue sur  $I$ .

Alors :  $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  tel que :

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \exists (x, y) \in I^2 \text{ tel que : } (|x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon)$$

En particulier, en choisissant  $\eta = \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ),



$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_n; y_n) \in I^2 \text{ tel que : } (|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon) \quad (1)$$

Comme ***I* est borné**, les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  ainsi définies le sont également.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut donc en extraire des sous-suites qui convergent.

Soit  $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  une application strictement croissante telle que la suite  $(x_{\sigma(n)})$  converge.

Notons  $\ell$  sa limite. (On a nécessairement  $\ell \in I$  puisque ***I* est fermé**).

Fixons  $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ . On a donc :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow |x_{\sigma(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon'}{2})$$

Mais, d'autre part, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a d'après (1) :

$$|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| \leq \frac{1}{\sigma(n)}$$

Comme  $\frac{1}{\sigma(n)}$  tend vers 0, on a :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_2 \Rightarrow \left| \frac{1}{\sigma(n)} \right| \leq \frac{\varepsilon'}{2})$$

Pour tout  $n \geq \max(N_1, N_2)$ , on a alors :

$$|y_{\sigma(n)} - \ell| \leq |y_{\sigma(n)} - x_{\sigma(n)}| + |x_{\sigma(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} \leq \varepsilon'$$

Ceci prouve que la suite  $(y_{\sigma(n)})$  converge également vers  $\ell$ .

Or,  $f$  étant continue sur  $I$ , on peut affirmer (d'après le théorème 1.2) que les suites  $(f(x_{\sigma(n)}))$  et  $(f(y_{\sigma(n)}))$  convergent vers  $f(\ell)$ . Donc :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |f(y_{\sigma(n)}) - f(x_{\sigma(n)})| \leq \varepsilon)$$

Ce qui contredit (1).

Conclusion :  $f$  est uniformément continue sur le segment  $I$ .

Exercice :

Soient  $a$  un réel et  $f$  une application continue sur  $[a, +\infty[$  admettant une limite finie en  $+\infty$ .

Alors  $f$  est uniformément continue sur  $[a, +\infty[$ .

Solution :

Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ .

Notons  $\ell$  la limite de  $f$  en  $+\infty$ . On a donc, par hypothèse :

$$\exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a, +\infty[, (x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Par ailleurs, d'après le théorème de Heine,  $f$  est uniformément continue sur le segment  $[a, A]$  :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in [a, A]^2, (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

Montrons que  $f$  est uniformément continue sur  $[a, +\infty[$ .

Soit  $(x, y) \in [a, +\infty[^2$ . Supposons  $x \leq y$  (ce n'est pas une perte de généralité) et  $|x - y| \leq \eta$  (pour le  $\eta$  ci-dessus)

Distinguons trois cas :

$$\underline{x \leq y \leq A}$$

Dans ce cas, comme  $f$  est uniformément continue sur  $[a, A]$ , il vient :

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

$$\underline{A \leq x \leq y}$$

Dans ce cas, comme  $f$  admet une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$ , on a par l'inégalité triangulaire

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |f(y) - \ell| \leq 2\varepsilon$$

$$\underline{x \leq A \leq y}$$

Alors  $|x - A| \leq |x - y| \leq \eta$

Coupons en  $f(A)$  :

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(y) - f(A)| \leq 2\varepsilon$$

Bilan : on a prouvé :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in [a, +\infty[^2, (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2\varepsilon)$$

D'où l'uniforme continuité de  $f$  sur  $[a, +\infty[$ .

### 3. Applications

#### 3.1. Théorème *Fonction continue sur un segment*

Soit  $I = [a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue.

Alors  $f$  est **bornée sur  $I$**  et  $f$  **atteint ses bornes**.

C'est une application du théorème des segments emboîtés et du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Démonstration :

##### 1. Montrons : $f$ bornée sur $I$

Supposons  $f$  non **bornée** sur  $I$ .

Soit  $c$  le milieu de  $I$ .

Posons  $a_1 = a$  et  $b_1 = c$  si  $f$  non bornée sur  $[a, c]$ .

Posons  $a_1 = c$  et  $b_1 = b$  sinon.

En réitérant ce procédé, on construit, par récurrence, une suite de segments emboîtés :

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

Sur chacun de ces intervalles,  $f$  est, par construction, non bornée.

De plus, par construction, la longueur de  $[a_n, b_n]$  est  $\frac{b-a}{2^n}$ .

Les segments  $[a_n, b_n]$  ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont donc adjacentes.

Notons  $x_0$  leur limite commune.

Comme  $f$  est continue en  $x_0$ , on a (avec  $\varepsilon = 1$ ) :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I : (|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq 1)$$

C'est-à-dire :  $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I : (|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow f(x_0) - 1 \leq f(x) \leq f(x_0) + 1)$

Donc  $f$  est bornée sur  $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ .

Comme les segments  $[a_n, b_n]$  ont des longueurs qui tendent vers 0, on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}^* : (n \geq N \Rightarrow b_n - a_n \leq \varepsilon)$$

Donc, pour un certain  $N$ , les segments  $[a_n, b_n]$ ,  $n \geq N$ , sont contenus dans  $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ .

Or,  $f$  n'est pas bornée sur  $[a_n, b_n]$  d'où une contradiction.

Donc  $f$  est bornée sur  $I$ .

## 2. Montrons : $f$ atteint ses bornes

On vient de voir que  $f$  est bornée sur  $I$ . Notons  $M = \sup_I f$  et  $m = \inf_I f$ .

Montrons qu'il existe  $x_0$  dans  $I$  tel que  $f(x_0) = M$ .

Comme  $M$  est la borne supérieure de  $f$  sur  $I$  :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in I : M - \varepsilon < f(x) \leq M$$

En particulier, avec  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  :

$$\exists x_n \in I : M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

La suite  $(f(x_n))$  converge donc vers  $M$ .

En outre, la suite  $(x_n)$  est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut donc en extraire une sous suite qui converge vers un certain réel  $x_0$ . Notons  $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  une application strictement croissante telle que  $(x_{\sigma(n)})$  converge vers  $x_0$ .

La fonction  $f$  étant continue en  $x_0$ , on a :  $M = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\sigma(n)}) = f(x_0)$ .

Donc  $f$  atteint son maximum.

On démontre, de même, que  $f$  atteint son minimum.

## 3.2. Théorème Point fixe

Soit  $I$  un intervalle fermé non vide.

Soit  $f : I \rightarrow I$  une application contractante sur  $I$ .

Alors :

1)  $f$  admet un unique point fixe  $\ell$  dans  $I$ .

2)  $\forall u_0 \in I$ , la suite  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  converge vers  $\ell$ .

On peut remplacer l'hypothèse " $f : I \rightarrow I$  contractante"

par " $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  contractante et telle que  $f(I) \subset I$ "

On rappelle que " $f$  contractante sur  $I$ " signifie :

$$\exists k \in [0, 1[, \forall (x, y) \in I^2, |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$$

## Démonstration

Remarquons au préalable que,  $u_0$  étant dans  $I$  et  $I$  étant stable par  $f$ , la suite  $(u_n)$  est bien définie et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$$

Existence d'un point fixe :

Montrons, par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , la propriété :

$$\wp(n) : |u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$$

- On a évidemment  $\wp(0)$ .
- Montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$  :

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $\wp(n)$ . Alors :

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \stackrel{f \text{ contractante}}{\underset{f(I) \subset I}{\leq}} k |u_{n+1} - u_n| \stackrel{\wp(n)}{\leq} k^{n+1} |u_1 - u_0|$$

D'où  $\wp(n+1)$ .

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \wp(n) : |u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$$

Déduisons-en que  $(u_n)$  **est de Cauchy** :

Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ .

Soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  avec  $q > p \geq 0$ .

Notons  $r = q - p$ .

On a :

$$|u_q - u_p| = |u_{p+r} - u_p| = \left| \sum_{i=p}^{p+r-1} u_{i+1} - u_i \right| \leq \sum_{i=p}^{p+r-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=p}^{p+r-1} k^i |u_1 - u_0|$$

Or :

$$\sum_{i=p}^{p+r-1} k^i |u_1 - u_0| = k^p |u_1 - u_0| \sum_{i=0}^{r-1} k^i$$

Et comme  $k \in [0, 1[$ , la série géométrique de terme général  $k^i$  converge et est majorée par  $\frac{1}{1-k}$ .

D'où :

$$|u_q - u_p| \leq \frac{k^p}{1-k} |u_1 - u_0|$$

Et enfin, toujours parce que  $k \in [0, 1[$  :

$$\frac{k^p}{1-k} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

En conséquence :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (p \geq N \Rightarrow \frac{k^p}{1-k} |u_1 - u_0| \leq \varepsilon \Rightarrow |u_q - u_p| \leq \varepsilon)$$

Ce qui prouve que la suite  $(u_n)$  est de Cauchy.

Et comme  $\mathbb{R}$  est complet,  $(u_n)$  converge.

Notons  $\ell$  sa limite. Comme  $I$  est fermé, on a  $\ell \in I$ .

Or,  $f$  est continue en  $\ell$  (puisque contractante sur  $I$ ) donc, d'après le théorème 1.2. :

$$\ell = f(\ell)$$

On a donc prouvé que  $f$  admet un point fixe  $\ell$  dans  $I$  et que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

Unicité du point fixe :

Supposons :

$$\exists \ell, \ell' \in I, f(\ell) = \ell \text{ et } f(\ell') = \ell'$$

Comme  $f$  est contractante sur  $I$  :

$$|f(\ell) - f(\ell')| \leq k|\ell - \ell'|$$

$$|\ell - \ell'| \leq k|\ell - \ell'|$$

$$(1 - k)|\ell - \ell'| \leq 0$$

Or,  $k \in [0, 1[$ , donc :

$$|\ell - \ell'| \leq 0$$

$$\ell = \ell'$$

Remarques :

- L'hypothèse " $I$  fermé" n'est là que pour assurer  $\ell \in I$ . Si on sait déjà, par ailleurs, que  $\ell \in I$  (en pratique, on a parfois déjà calculé  $\ell$  en résolvant l'équation  $f(\ell) = \ell$ ), cette hypothèse devient inutile.
- Le théorème du point fixe ne s'applique pas si l'on remplace l'hypothèse " $f$  contractante sur  $I$ " par l'hypothèse " $f$  1-lipschitzienne sur  $I$ ". Voici un contre-exemple :

$$I = [1, +\infty[$$

$$f : I \rightarrow I$$

$$x \mapsto x + \frac{1}{x}$$

Soient  $x$  et  $y$  dans  $I$  avec  $x < y$ .

Comme  $f$  est croissante sur  $[1, +\infty[$ , on a :

$$|f(y) - f(x)| \leq f(y) - f(x) \leq y - x + \frac{x - y}{xy} \leq y - x \leq |y - x|$$

Ce qui prouve que  $f$  est 1-lipschitzienne sur  $I$ .

Cependant  $f$  n'a pas de point fixe sur  $I$ . (L'équation  $f(x) = x$  n'a pas de solution)

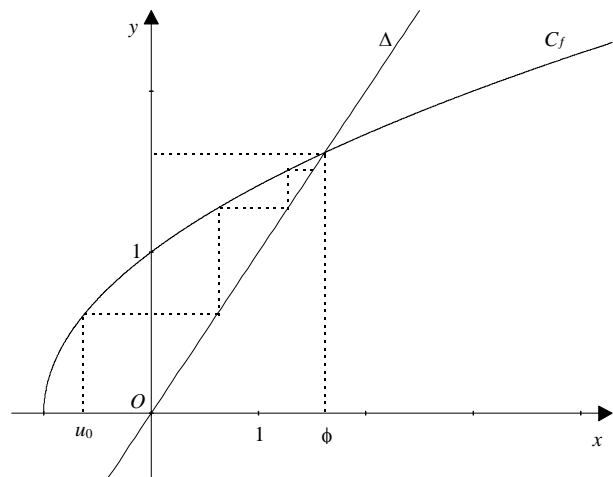
Exemple :

Étudier la convergence de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [-1, +\infty[ \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

On introduit l'application  $f$  définie sur  $[-1, +\infty[$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1 + x}$$



Point fixe de  $f$  :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

On montre facilement que  $f$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$ , croissante sur  $[-1, +\infty[$ , puis que :

$$f([-1, +\infty[) = [0, +\infty[ \subset [-1, +\infty[$$

L'intervalle  $I = [-1, +\infty[$  est donc stable et la suite  $(u_n)$  est bien définie.

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |b - a|$$

Donc  $f$  est  $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur  $I$ , donc contractante sur  $I$ .

En outre :

$$f(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[ \subset \mathbb{R}_+$$

Donc  $\mathbb{R}_+$  est stable par  $f$ .

D'après le théorème du point fixe, la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$  converge donc vers  $\phi$ .

Enfin, si  $u_0 \in [-1, 0]$  alors  $u_1 \in \mathbb{R}_+$  et d'après ce qui précède,  $(u_n)$  converge encore vers  $\phi$ .

### 3.3. Sommes de Riemann

Contexte :

- $f$  est une application **continue** définie sur un **segment**  $[a, b]$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
- $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$  est une **subdivision** de  $[a, b]$ . (Cela signifie :  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ )
- $h$  est le pas de la subdivision  $\sigma$ . (C'est-à-dire :  $h = \max_i (a_{i+1} - a_i)$ )
- $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$ .

On appelle alors *somme de Riemann* associée à  $(f, \sigma, (\xi_i)_{0 \leq i \leq n})$  le réel :  $\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i)$

Théorème

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) = \int_a^b f(x) dx$$

Démonstration :

Montrons que la différence suivante peut être rendue aussi petite que voulue :

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx - (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(x) - f(\xi_i)) dx \right)$$

En passant aux valeurs absolues, on a la majoration suivante :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left( \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(x) - f(\xi_i)| dx \right)$$

Or, du théorème de Heine appliqué à  $f$  continue sur le segment  $[a, b]$ , on déduit :

$f$  **uniformément continue** sur  $[a, b]$  (et donc aussi sur chaque  $[a_i, a_{i+1}]$ )

C'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in [a, b]^2 : (|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Pour une subdivision  $\sigma$  de pas  $h$  tel que :  $0 < h < \eta$ , on aura :

$$\forall x \in [a_{i+1}, a_i], |x - \xi_i| \leq a_{i+1} - a_i \leq h < \eta$$

Ce qui entraînera :

$$|f(x) - f(\xi_i)| < \varepsilon$$

Dans ces conditions, on peut écrire :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left( \int_{a_i}^{a_{i+1}} \varepsilon dx \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon (a_{i+1} - a_i) = \varepsilon (b - a)$$

Ceci prouve bien que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) = \int_a^b f(x) dx$$

Toute intégrale d'une fonction continue sur un segment est donc une limite de somme de Riemann.

Remarque : le résultat ci-dessus reste valable si  $f$  est continue par morceaux. Il suffit de refaire la même démonstration avec des subdivisions adaptées à  $f$ .

### Cas particulier d'une subdivision régulière :

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on particularise :  $a_i = a + i \frac{b-a}{n}$  et  $\xi_i = a_i$ . (Donc  $h = \frac{b-a}{n}$ )

On a alors :

$$a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n}$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

### Cas particulier des fonctions définies sur $[0, 1]$ :

La formule ci-dessus devient alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

Remarque : en particulier :  $a_i = a + i \frac{b-a}{n}$  et  $\xi_i = a_{i+1}$

On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + (i+1) \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

D'où aussi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

### Exemples :

1. Étudier la limite de la somme :  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}$ .

On considère l'application  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ .

On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \ln 2$$

2. Étudier la limite de la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(n+i)^2}$

On considère l'application  $f$  définie sur  $[0 ; 1]$  par  $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ .

On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(n+i)^2} = \frac{1}{2}$$

3. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\ln \left( \frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{2n} \ln k - \sum_{k=1}^n \ln k - n \ln n \right) = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=n+1}^{2n} \ln k - n \ln n \right) = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=n+1}^{2n} \ln \frac{k}{n} \right) = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+n}{n} \right)$$

D'où 
$$\ln \left( \frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right) \right)$$

On considère maintenant l'application  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par  $f(x) = \ln(1+x)$

On a alors : 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 + \frac{i}{n} \right) = \int_0^1 \ln(1+x) dx = [(1+x) \ln(1+x) - (1+x)]_0^1 = 2 \ln 2 - 1 = \ln 4 - 1$$

D'où : 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e}$$



### 3.4. Approximation d'une fonction continue sur un segment par des fonctions en escalier

#### Théorème

Soit  $f$  une application continue sur un segment  $[a, b]$ .

Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ .

Il existe des applications en escaliers  $\varphi$  et  $\psi$  telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ sur } [a, b] \text{ et } \psi - \varphi \leq \varepsilon \text{ sur } [a, b]$$

#### Démonstration

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit une subdivision régulière  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  du segment  $[a, b]$  par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = a + k \frac{b-a}{n}$$

Comme  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , elle l'est aussi sur chacun des segments  $[a_k, a_{k+1}]$  ( $0 \leq k \leq n-1$ ), donc y est bornée, ce qui permet de définir :

$$M_k = \sup_{t \in [a_k, a_{k+1}]} f(t) \quad \text{et} \quad m_k = \inf_{t \in [a_k, a_{k+1}]} f(t)$$

On définit alors des applications en escalier  $\varphi$  et  $\psi$  sur  $[a, b]$  par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall t \in [a_k, a_{k+1}[ , \varphi(t) = m_k \text{ et } \psi(t) = M_k$$

et :

$$\varphi(b) = m_{n-1} \text{ et } \psi(b) = M_{n-1}$$

Ainsi, on a bien :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ sur } [a, b]$$

Par ailleurs,  $f$  étant continue sur le segment  $[a, b]$ , elle y est **uniformément continue** (théorème de Heine) :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in [a, b]^2, (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

Soit  $\eta$  le réel obtenu pour le réel  $\varepsilon$  fixé dans les hypothèses.

On sait que le pas de la subdivision est :

$$\frac{b-a}{n}$$

Soit  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  et  $(x, y) \in [a_k, a_{k+1}]$ . On a donc :

$$|x - y| \leq a_{k+1} - a_k \leq \frac{b-a}{n}$$

Choisissons un pas plus fin que  $\eta$ , obtenu pour les entiers  $n$  qui vérifient :

$$n \geq E\left(\frac{b-a}{\eta}\right) + 1$$

Ainsi :

$$|x - y| \leq \eta$$

De la continuité uniforme de  $f$ , on déduit alors :

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Cette dernière inégalité étant valable pour tous  $x$  et  $y$  de  $[a_k, a_{k+1}]$ .

En particulier pour un  $x$  tel que  $f(x) = M_k$  et un  $y$  tel que  $f(y) = m_k$  (existent bien car  $f$  atteint ses bornes) :

$$M_k - m_k \leq \varepsilon$$

D'où

$$\psi - \varphi \leq \varepsilon \text{ sur chaque } [a_k, a_{k+1}] \text{ et donc sur } [a, b]$$

Remarque : cette démonstration peut être adaptée aux fonctions continues par morceaux sur le segment  $[a, b]$ .

#### 4. Annexe : étude de quelques fonctions usuelles

On a vu que :

$$f \text{ lipschitzienne} \Rightarrow f \text{ uniformément continue} \Rightarrow f \text{ continue}$$

Par contraposition :

$$f \text{ non continue} \Rightarrow f \text{ non uniformément continue} \Rightarrow f \text{ non lipschitzienne}$$

Fonction $f$	$f$ continue ?	$f$ uniformément continue ?	$f$ lipschitzienne ?
$x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$	oui	non (voir démonstration ci-dessous)	non
$x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$	oui	oui (voir démonstration ci-dessous)	non (voir démonstration ci-dessous)
$x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$	oui	non (voir démonstration en exercice section 2.1.)	non
$x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$	oui	non (voir démonstration en exercice section 2.1.)	non
$x \mapsto \frac{x}{1+ x }$ sur $\mathbb{R}$	oui	oui	oui (voir démonstration en section 2.2.)
$x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$	oui	non (voir démonstration en exercice section 2.1.)	non
$x \mapsto \sin x$ sur $\mathbb{R}$	oui	oui	oui

#### Quelques preuves

##### Non continuité uniforme de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$

Prenons  $\varepsilon = 1$ . Pour tout  $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ , on a en choisissant un réel  $x > \frac{1}{\eta}$  et  $y = x + \frac{\eta}{2}$  :

$$y - x = \frac{\eta}{2} \quad \text{et} \quad y^2 - x^2 \geq x\eta + \frac{\eta^2}{4} > x\eta > 1$$

C'est-à-dire :  $|y - x| \leq \eta$  et  $|y^2 - x^2| > \varepsilon$

On a bien prouvé :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, (|x - y| \leq \eta \text{ et } |x^2 - y^2| > \varepsilon)$$

Donc la fonction  $x \mapsto x^2$  n'est pas uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

##### Uniforme continuité de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$

##### Une inégalité bien pratique :

Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}_+$  avec  $x \leq y$ , on a :  $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y - x}$

Preuve :

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y - x})^2 = x + 2\sqrt{x(y - x)} + y - x \geq y \geq 0$$

Par croissance de  $t \mapsto \sqrt{t}$  sur  $\mathbb{R}_+$ , il vient :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y - x} \geq \sqrt{y}$$

D'où le résultat.

Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Pour  $\eta < \varepsilon^2$ , on a :

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}_+$  tel que  $|x - y| \leq \eta$ . Alors

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{|y - x|} \leq \varepsilon$$

D'où la continuité uniforme de  $x \mapsto \sqrt{x}$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

$x \mapsto \sqrt{x}$  **n'est pas lipschitzienne sur  $\mathbb{R}_+$**

Si elle l'était, il existerait un réel  $K \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ , on ait :

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq K |y - x|$$

Si  $K = 0$ , cela entraînerait  $\sqrt{y} = \sqrt{x}$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ , ce qui est absurde.

Si  $K \in \mathbb{R}_+^*$ , il suffit de choisir  $x = 0$  et  $y = \frac{1}{4K^2}$  pour avoir une contradiction.