2. Lois continues.

2.1. Loi uniforme sur [a,b] (ou du rectangle). C'est la loi d'une variable aléatoire continue qui a pour fonction de densité

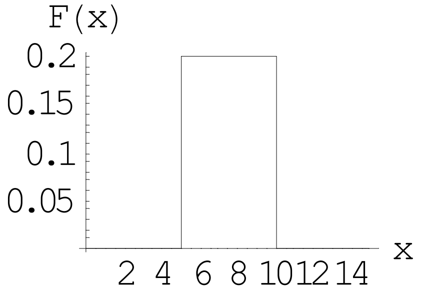
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & si \quad x\in[a,b]\\ 0 & si \quad x\notin[a,b]\end{cases}$$

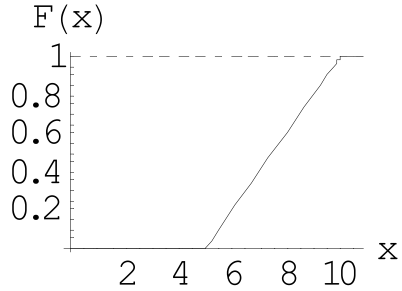
La fonction de répartition est de la forme:

$$F(x)=\begin{cases}0 & si \quad x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad x\in[a,b]\\ 1 & si \quad x>b\end{cases}$$

Les premiers moments valent $m=E(X)=(a+b)/2 \;\; ; \;\; \sigma^2=(b-a)/12.$

Si $x-x'=y-y'$, alors $P(x\le X<x')=P(y\le X<y')=x'-x$, pour $a\le x,x',y,y'\le b.$
La densité et la fonction de répartition de la loi uniforme sur l'intervalle [5,10] sont représentés ci-dessous.

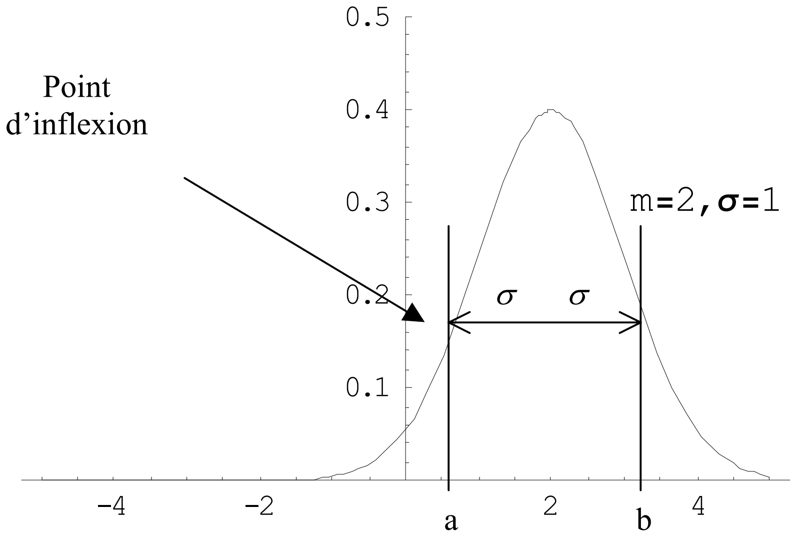




On la rencontre lorsque les valeurs de la variable (continue) sont équiprobables sur l'intervalle [a,b]. Dans cet esprit, la loi uniforme sur [0,1] est à la base des techniques de simulation : génération de nombres aléatoires pour la simulation de systèmes, cryptologie, jeux vidéos…

2.4. Loi normale (ou de Gauss, ou Laplace-Gauss) La variable X suit une loi normale de paramètres m et σ^2, on note $X\in N(m,\sigma^2)$, si sa densité est de la forme :

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \quad , \quad F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)^2}dy\,.$$



La courbe de Gauss est en forme de cloche. Sur la courbe ci-dessus, $P(X > a) = 0.1587$, $P(a \leq X < b) = 0.68$.

Propriétés :

1. $E(X) = m$; $Var(X) = \sigma^2$. Le mode, la médiane coïncident avec m (la fonction de densité est symétrique par rapport à la droite $x = m$.
2. La variable centrée réduite $Z = (X - m)/\sigma$ suit une loi normale $N(0,1)$, de moyenne nulle et de variance unité.
3. La somme de deux variables aléatoires indépendantes $X \in N(m_1, \sigma_1^2)$ et $Y \in N(m_2, \sigma_2^2)$ suit également une loi normale $N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
4. La différence de deux variables aléatoires indépendantes $X \in N(m_1, \sigma_1^2)$ et $Y \in N(m_2, \sigma_2^2)$ suit également une loi normale $X \in N(m_1 - m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
1. La fonction de répartition de la *loi normale standard* $N(0,1)$ (i.e. de la v.a. Z)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$$

et la densité de Z

$$\varphi_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

sont tabulées ou existent sous forme de sous-programmes dans la plupart des logiciels comportant un module statistique. On peut donc calculer la probabilité de tout événement

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

Notons que la fonction $\Phi(x)$ s'exprime en fonction de la fonction de Laplace ou fonction d'erreur $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy,\ x \ge 0$, $\Phi(x) = \frac{1}{2}\left[erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 1\right]$, ce qui permet éventuellement d'utiliser les tables ou commandes informatiques de cette fonction.

6. $\Phi(0) = 1/2, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \Phi(\infty) = 1$. $P(|X - m| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1$

7.Le taux de défaillance de la loi normale est une fonction monotone du temps.

8. Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes (deux à deux) de lois normales $N(m, \sigma_i^2)$, et α_i, des nombres réels ≥0, tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$ alors la variable pondérée $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est encore une variable normale de paramètres $N(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 m_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2)$. La moyenne empirique $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi normale $N(m, \frac{\sigma^2}{n})$.

9. En fait, la propriété précédente reste vraie pour des variables aléatoires quelconques. La somme d'un grand nombre de « petites » variables aléatoires suit approximativement une loi normale (Théorème de limite centrale).

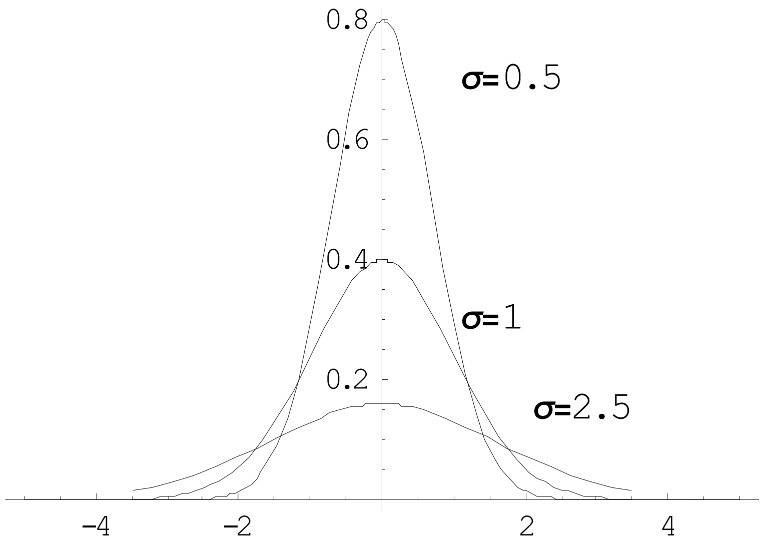


Figure 5. Densités des lois Normales pour $\sigma = 0.5, \sigma = 1, \sigma = 2.5 \ (m = 0)$.

Exemple 8 : Indiquons brièvement comment utiliser les tables de la loi normale (versions papier ou logicielle).

Supposons $X \in N(1,4)$; alors $Y = \dfrac{X-1}{2} \in N(0,1)$.On peut évaluer à l'aide des tables de la loi normale (cf. table 1, annexe D) ou à l'aide de logiciels comportant un module statistique :

$$\theta = P(X < 1.5) = P\left(Y < \frac{1.5-1}{2}\right) = P(Y < 0.25) = 0.59871$$

Remarque : Il faut toujours se référer au menu d'aide de la table ou du logiciel pour avoir en retour la valeur correcte. Voici quelques scénarios

(i) version tables.

Quel que soit le menu d'aide, la table fournit la valeur de la surface hachurée, et qui correspond à la valeur $\theta = u_{0.59871} = 0.25$

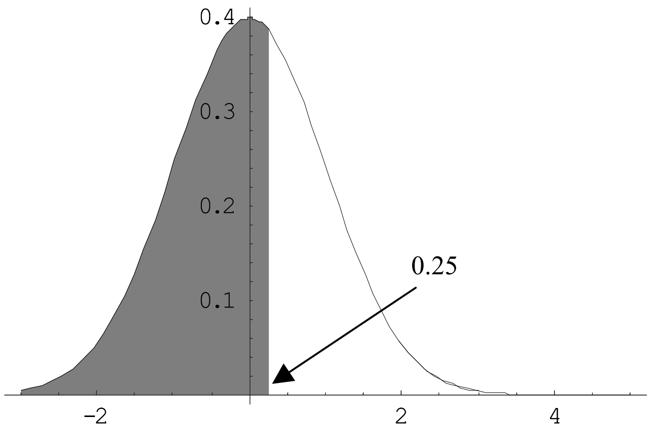


Figure 6. Aire hachurée=0.59871

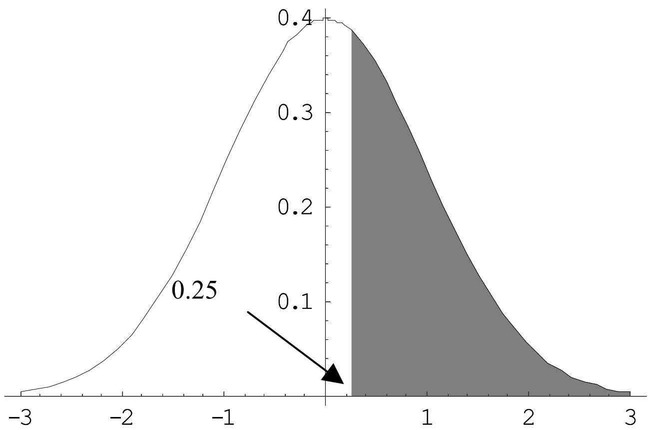


Figure 7. Aire hachurée=$1 - P(Y < 0.25) = P(Y \geq 0.25)$=0.40129

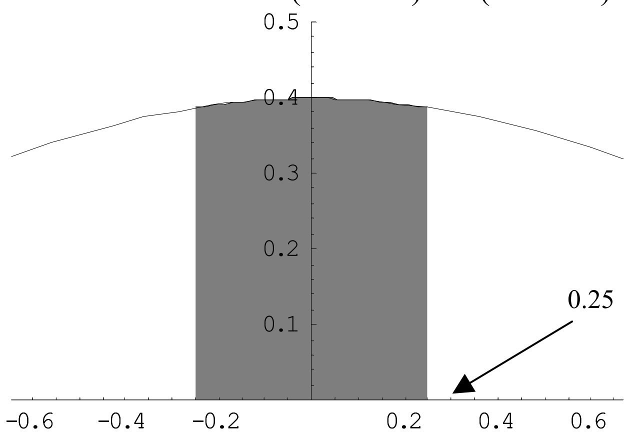
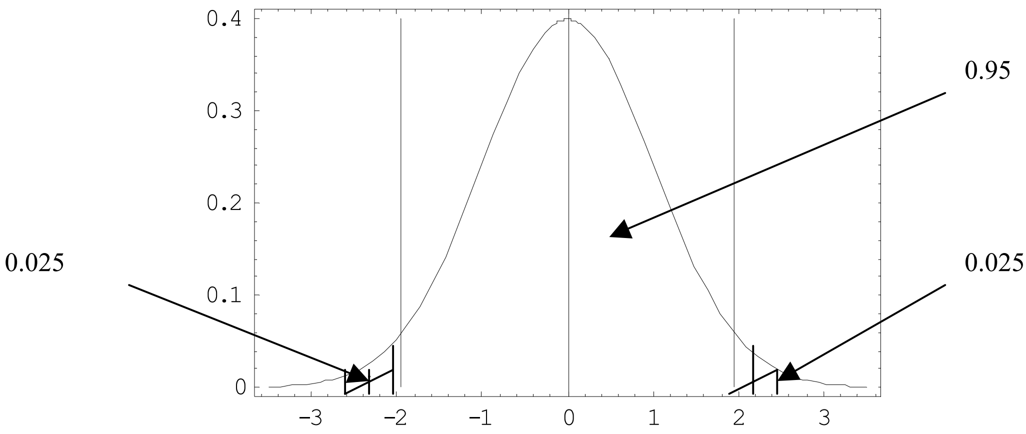


Figure 8. Aire hachurée= $P(-0.25 < Y < 0.25)$ =0.29742

Certaines tables fournissent les surfaces à gauche et à droite (hachurées sur la courbe ci-dessous) des deux parallèles aux axes des ordonnées, soit ici
$P(Y < -1.96) + P(Y > 1.96) = 0.5$.



(ii) Version logicielle :

- La synthaxe en Excel pour évaluer θ est la suivante

LOI.NORMALE(x ;m ; σ ; C)

Soit la feuille de calcul Excel suivante

	A	B	C	D	E
1					
2	1.5				
3	1				
4	2				

La commande prend la syntaxe suivante : LOI.NORMALE(A2;A3;A4;VRAI)

La variable logique C prend la valeur VRAI si on souhaite évaluer la valeur de la fonction de répartition $\Phi(x)$ et FAUX si l'on souhaite celle de la valeur de la fonction de densité $\varphi(x)$

- En Mathematica, la syntaxe est

```
dist=NormalDistribution[1 ,2]
CDF[dist,1.5]
```
Ou bien en passant par la loi normale standard

```
dist=NormalDistribution[0 ,1]
CDF[dist,0.25]
```

La valeur renvoyée correspond à celle de la figure 6.
Avec Matlab (ou Maple), on peut utiliser directement la fonction erf[x] et la formule de la propriété 5 ci-dessus.

Exemple 9: La durée de vie d'un élément est exprimée en cycles et suit une loi normale de moyenne m=20 000 cycles et σ=2 000 cycles. Trouver la probabilité de bon fonctionnement pendant une période de 19000 cycles et la valeur correspondante du taux de défaillance

$\overline{F}(x) = P\left(Z > \dfrac{X - 20000}{2000} \right) = P(Z > -0.5) = \Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5)$ La valeur est donnée par les tables de la fonction $\Phi(0.5) =$ et $\overline{F}(19000) = 0.69146$.

2.5. Loi exponentielle. C'est la loi d'une variable aléatoire positive de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \;\; x \geq 0 \\ 0 & si \;\; x < 0 \end{cases} \qquad \text{et } F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & si \;\; x \geq 0 \\ 0 & si \;\; x < 0 \end{cases}$$

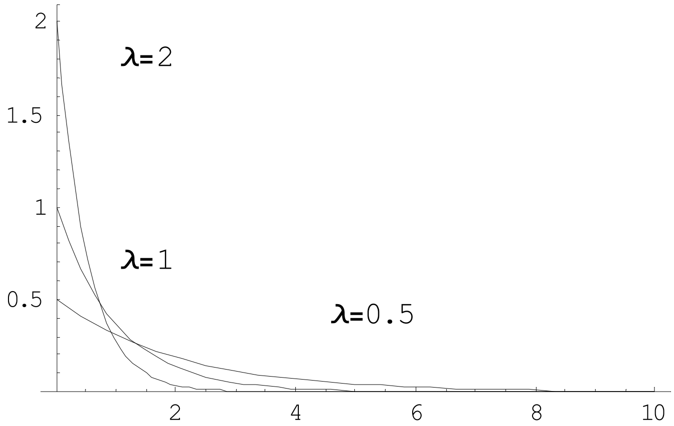


Figure 3. Densités de la loi Exponentielle de paramètre $\lambda = 0.5{,}1$ *et* 2.

Propriétés :

2. $m = E(X) = 1/\lambda\,; m_2 = 2/\lambda^2\ ,\ \sigma^2 = 1/\lambda^2;$

   Le risque instantané $\lambda(t) = \lambda$ (on l'appelle encore *taux de défaillance* ou taux d'incidence) est constant .
3. Cette loi est particulièrement adaptée pour modéliser des durées de temps ayant la propriété d'absence de mémoire, i.e. $P(X - t > x / X > t) = P(X > x)$.

2.7. Loi d'Erlang $E_k(\lambda)$.

C'est la variable aléatoire de fonction de densité

$$p_i = \frac{\lambda^i x^{i-1} e^{-\lambda i}}{(i-1)!}\ ,\ i = 0{,}1{,}2{,}....$$

et de fonction de répartition $\quad F(i) = 1 - e^{-\lambda i} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}$

$$E(X) = k/\lambda\,;\ \ \sigma^2 = k/\lambda^2\ \ ;\ \ \lambda(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)! \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!}}$$

La loi d'Erlang est en fait un cas particulier de la loi Gamma décrite plus loin lorsque le paramètre k n'est pas forcément un entier, mais un nombre réel positif. Cette appellation est due aux travaux de A.K. Erlang, l'un des précurseurs de la théorie des files d'attente actuellement utilisée pour la modélisation des systèmes informatiques, télécommunication et systèmes de production. Elle a été utilisée à l'époque pour modéliser la durée des conversations téléphoniques.

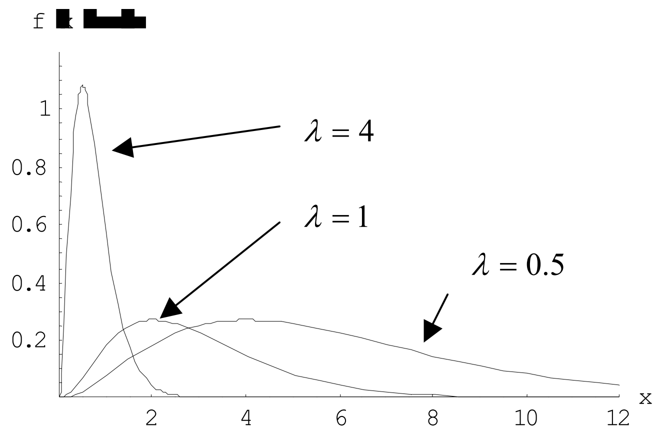


Figure 4. Densité de la loi d'Erlang de paramètres λ=4 ; λ=1 et λ= 0.5 (k=3)

- Si $X_1, X_2, ..., X_k$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi commune exponentielle de paramètre λ, alors la somme $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i$ suit une loi d'Erlang d'ordre k et de paramètre λ. Ceci sert souvent de définition de cette loi.
- On interprète la loi d'Erlang comme la loi d'une variable qui s'exprime comme la somme de k étapes exponentiellement distribuées. A titre d'exemple, imaginons une chaîne de fabrication en série constituée de k phases de production (perçage, fraisage, alésage,…). Si chaque étape de fabrication a une durée de loi exponentielle de même paramètre λ, alors la durée totale du processus de fabrication suit une loi d'Erlang. Pour $k = 1$, on obtient évidemment la loi exponentielle.