CHAÎNES DE MARKOV : ÉTUDE POUR UN ESPACE D'ÉTATS AU PLUS DÉNOMBRABLE.

Alexandre Popier

ENSAI, Bruz

Janvier-Mars 2010

Plan du cours

NOTATIONS.

- E : espace fini ou dénombrable ;
- P : matrice de transition ;
- $\mathbb{P}_\nu$ loi sachant que X_0 suit la loi ν ;
- $\mathbb{E}_\nu$: espérance sous $\mathbb{P}_\nu$;
- $\mathbb{P}_x$ loi sachant que $X_0 = x$, i.e. $\nu = \delta_x$
- $\mathbb{E}_x$: espérance sous $\mathbb{P}_x$;
- $\Pi(E)$: ensemble des probabilités sur E.

LEMME

$$\Pi(E) = \left\{ \mu \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \mu(x) \geq 0, \sum_{x \in E} \mu(x) = 1 \right\}.$$

PLAN

ÉTATS RÉCURRENTS ET TRANSITOIRES.

TEMPS DE RETOUR : $T_x = \inf\{n \geq 1,\ X_n = x\}$.

DÉFINITION

L'état $x \in E$ est récurrent si $\mathbb{P}_x(T_x < +\infty) = 1$, et est transitoire si $\mathbb{P}_x(T_x < +\infty) < 1$.

NOMBRE DE RETOURS : $N_x = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{X_n = x}$.

PROPOSITION

1. *Si x est récurrent, $\mathbb{P}_x(N_x = +\infty) = 1$.*
2. *Si x est transitoire,*

$$\mathbb{P}_x(N_x = k) = (1 - \Pi_x)\Pi_x^k, \ \textit{pour } k \geq 0,$$

avec $\Pi_x = \mathbb{P}_x(T_x < +\infty)$.

ÉTATS RÉCURRENTS ET TRANSITOIRES.

NOMBRE DE RETOURS : $N_x = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{X_n = x}$.

PROPOSITION

1. *Si x est récurrent,* $\mathbb{P}_x(N_x = +\infty) = 1$.
2. *Si x est transitoire,*

$$\mathbb{P}_x(N_x = k) = (1 - \Pi_x)\Pi_x^k, \ \textit{pour } k \geq 0,$$

avec $\Pi_x = \mathbb{P}_x(T_x < +\infty)$.

COROLLAIRE

L'état $x \in E$ *est récurrent si et seulement si*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (P^n)(x, x) = +\infty.$$

Classe d'équivalence.

Définition

- *L'état $y \in E$ est* accessible *à partir de $x \in E$ (noté $x \to y$) s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}_x(X_n = y) > 0$.*
- *Les états x et y* communiquent *(noté $x \leftrightarrow y$) si $x \to y$ et $y \to x$.*

Classes d'équivalence : $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence qui crée une partition de E en classes d'équivalence modulo $\leftrightarrow$.

Théorème

Soit $C \subset E$ une classe d'équivalence modulo $\leftrightarrow$. Alors tous les états de C sont soit récurrents, soit transitoires.

IRRÉDUCTIBILITÉ.

DÉFINITION

Une chaîne de Markov (ν, P) est

- *irréductible si E est constitué d'une seule classe d'équivalence ;*
- *irréductible récurrente si elle est irréductible et si tous les états sont récurrents.*
- *irréductible transiente si elle est irréductible et si tous les états sont transitoires.*

PROPOSITION

Une chaîne de Markov irréductible sur un espace E **fini** *est irréductible récurrente.*

Irréductibilité.

Définition

Une chaîne de Markov (ν, P) *est* ***irréductible*** *si, pour tout couple* $(x, y) \in E^2$*, il existe*

- *un entier* $k = k(x, y)$
- *et une suite finie* $x = x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k = y$

tels que $P(x_i, x_{i+1}) > 0$ *pour* $i = 0, \ldots, k-1$.

C'est-à-dire $\mathbb{P}(X_k = y | X_0 = x) = P^k(x, y) > 0$.

Théorème

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est irréductible,

1. les fonctions P-invariantes (i.e. $Pf = f$) sont les fonctions constantes.
2. P admet au plus une probabilité invariante π. De plus $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$.

Plan

EXISTENCE D'UNE MESURE INVARIANTE.

DANS CE PARAGRAPHE,

- E : espace fini de cardinal d ;
- $\Pi(E)$: ensemble des probabilités sur E.

LEMME

$$\Pi(E) = \left\{ \mu \in \mathbb{R}^d \quad \mu(x) \geq 0, \ \sum_{x \in E} \mu(x) = 1 \right\}.$$

THÉORÈME

L'ensemble des probabilités invariantes pour P est un sous-ensemble non vide, compact et convexe de $\Pi(E)$.

REMARQUE

Pas d'unicité en général !

Théorème ergodique.

Théorème

Supposons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irréductible de probabilité invariante π. Alors

1. presque sûrement
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{X_k=x} = \pi(x).$$
2. Pour tout $x \in E$,
$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)} > 0,$$
avec $T_x = \inf\{k \geq 1,\ X_k = x\}$ instant de premier retour en x.

Corollaire

Si la chaîne est irréductible, alors elle visite infiniment souvent tous les points de l'espace d'états E.

Chaîne fortement irréductible.

Proposition

Supposons la chaîne irréductible de probabilité invariante π. Alors pour toute probabilité ν sur E,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mu P^k = \pi, \text{ ou encore } \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_\nu(X_k = x) = \pi(x).$$

Définition

Une chaîne de Markov (ν, P) est fortement irréductible s'il existe un entier k tel que

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad P^k(x,y) > 0.$$

Chaîne fortement irréductible.

Théorème

Supposons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fortement irréductible de probabilité invariante π. Soit k l'entier de la définition précédente et

$$\alpha = \alpha(P) = \sum_{y\in E} \{ \inf_{x\in E} P^k(x,y)\} > 0.$$

Alors pour toute probabilité ν sur E et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{A\subset E} |\mathbb{P}_\nu(X_n \in A) - \pi(A)| \leq (1-\alpha)^{[n/k]},$$

avec $[a]$ la partie entière de a. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \nu P^n = \pi$.

APÉRIODICITÉ (1).

DÉFINITION

Soit $x \in E$ et $R(x) = \{n \in \mathbb{N}^*,\ P^n(x,x) > 0\}$. La période $p(x)$ de x est le plus grand commun diviseur de $R(x)$.

PROPOSITION

Supposons la chaîne irréductible. Alors tous les points de E ont la même période.

DÉFINITION

Cette période commune est la période de la chaîne ; chaîne qui est apériodique si cette période vaut 1.

COROLLAIRE

Supposons P irréductible. S'il existe $x \in E$ tel que $P(x,x) > 0$, alors P est apériodique.

Apériodicité (2).

Définition

Un état est apériodique s'il existe un entier N tel que $P^n(x,x) > 0$ pour tout $n \geq N$.

Théorème

1. Si une chaîne est irréductible et apériodique, tous les états sont apériodiques. Et alors la chaîne est fortement irréductible.
2. Réciproquement une chaîne fortement irréductible est irréductible et apériodique.

PLAN

Retour au cas général.

Attention :

A partir d'ici, E n'est plus supposé fini.

EXCURSIONS.

HYPOTHÈSE : la chaîne est irréductible récurrente.

NOTATIONS :

- $T_x^k = \inf\{n \geq T_x^{k-1},\ X_n = x\}$ avec $T_x^0 = 0$.
- Excursions : $\mathcal{E}_k = (X_{T_x^k}, X_{T_x^k+1}, \ldots, X_{T_x^{k+1}})$.
- $U = \{u = (x, y_1, \ldots, y_n, x), \quad n \geq 0,\ y_k \neq x,\ 1 \leq k \leq n\}$.
- U dénombrable et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}_k \in U$.
- Loi de $\mathcal{E}_k$ donnée par : $\mathbb{P}(\mathcal{E}_k = u)$, $u \in U$.

PROPOSITION

Sous $\mathbb{P}_x$, la suite $(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \ldots)$ est i.i.d., c'est-à-dire qu'il existe une probabilité $(p_u,\ u \in U)$ telle que pour tout $k \geq 0$, $u_0, \ldots, u_k$ dans U :

$$\mathbb{P}_x(\mathcal{E}_0 = u_0, \ldots, \mathcal{E}_k = u_k) = \prod_{l=0}^{k} p_{u_l}.$$

Définition

Une mesure μ est strictement positive *si $\mu_x > 0$ pour tout $x \in E$.*

Théorème

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P, irréductible récurrente. Alors il existe une mesure μ strictement positive invariante, unique à constante multiplicative près.

Parmi les états récurrents...

- x récurrent si $\mathbb{P}_x(T_x < +\infty) = 1$.
- $m_x = \mathbb{E}_x(T_x)$.

Définition

Un état x est récurrent positif si $m_x < +\infty$, et récurrent nul sinon.

Théorème

Supposons la chaîne irréductible.

- Un état x est récurrent positif,
- si et seulement si tous les états sont récurrents positifs,
- si et seulement s'il existe une unique probabilité invariante.

Dans ce cas elle est donnée par $\mu = (\mu_x = 1/m_x,\ x \in E)$.

DICHOTOMIE.

Pour une chaîne irréductible et récurrente

- soit elle est récurrente positive s'il existe une probabilité invariante,
- soit elle est récurrente nulle si toute mesure invariante est de masse totale infinie, i.e. $\sum_{x \in E} \mu_x = +\infty$.

CONSÉQUENCE : si E est fini, il n'existe pas d'état récurrent nul, tout état récurrent est récurrent positif.

COROLLAIRE

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive. Pour $x \in E$, $T_x = \inf\{n \geq 1,\ X_n = x\}$. Alors pour tout $y \in E$,

$$\mathbb{E}_y(T_x) < +\infty.$$

CAS NON IRRÉDUCTIBLE.

SIMPLIFICATION : E est fini.

1. - Il existe au moins une classe récurrente (nécessairement récurrente positive).
   - Donc au moins une probabilité invariante.
2. Une probabilité invariante ne charge que les états récurrents.
3. S'il y a une seule classe récurrente, il y a une unique probabilité invariante.
4. Sinon
   - à chaque classe récurrente, on associe la probabilité invariante de support cette classe,
   - et toutes les mesures invariantes sont des combinaisons linéaires convexes des précédentes.
   - Alors il y a une infinité de probabilités invariantes.

GÉNÉRALISATION de la loi des grands nombres :

THÉORÈME

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne irréductible et récurrente positive. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, alors

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{x\in E} \mu_x f_x \right) = 1.$$

$\mu = (\mu_x,\ x \in E)$ est l'unique probabilité invariante.

THÉORÈME

Soient

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ chaîne irréductible de matrice de transition P,
- μ l'unique probablité invariante,
- $f : E \to \mathbb{R}$ avec $\mu f = \sum_{x \in \mathbb{E}} \mu_x f_x = 0$.

Alors il existe $\sigma_f \geq 0$ tel que la suite $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$ converge en loi vers $\sigma_f Z$, avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Calcul de σ_f : pour $i \in E$,

$$(Qf)_x = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x(f(X_n)).$$

Alors $(I - P)Qf = f$ et

$$\begin{aligned}
\sigma_f^2 &= \sum_{x \in E} \mu_x ((Qf)_x)^2 - \sum_{x \in E} \mu_x (PQf)_x^2 \\
&= 2 \sum_{x \in E} \mu_x (Qf)_x f_x - \sum_{x \in E} \mu_x f_x^2.
\end{aligned}$$

Plan

APÉRIODICITÉ.

DÉFINITION

Un état x est apériodique s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $(P^n)(x,x) > 0$ pour tout $n \geq N$.

LEMME

Si P est irréductible et s'il existe un état apériodique x, alors pour tout $(y,z) \in E^2$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $(P^n)(y,z) > 0$ pour $n \geq M$. En particulier tous les états sont apériodiques.

THÉORÈME

Soient P une matrice irréductible, récurrente positive et apériodique et μ l'unique probabilité invariante. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov (ν, P). Alors pour tout $x \in E$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \mu_x \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (\nu P^n)_x = \mu_x.$$

Vitesse de convergence.

Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\lim_{n \to +\infty} (P^n)(x, y) = \mu_y$.

Condition de Doeblin : il existe une mesure non nulle π sur E et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ (P^{n_0})(x, y) \geq m_y.$$

Notation : $\beta = \sum_{x \in E} m_x$.

- Si E est fini :

Lemme

Soit P irréductible et apériodique. La condition de Doeblin est satisfaite.

- Quand E est infini, en général pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y \in E$, $\inf_{x \in E} (P^n)(x, y) = 0$.

Convergence exponentielle.

Théorème

Supposons P irréductible et vérifiant la condition de Doeblin. Alors P est récurrente positive et apériodique, et si μ désigne sa probabilité invariante, pour tout $i \in E$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{y \in E} |(P^n)(x,y) - \mu_y| \leq 2(1-\beta)^{[n/n_0]}.$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $[\alpha]$ est la partie entière de α.

PLAN

Lemme

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\hat{X}^N = \left\{ \hat{X}^N_n = X_{N-n},\ 0 \leq n \leq N \right\}$$

est une chaîne de Markov, appelée chaîne retournée à partir de l'instant N.

Proposition

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ chaîne de Markov (μ, P) avec μ probabilité invariante et P irréductible. Alors la chaîne retournée $\hat{X}^N = \{\hat{X}^N_n,\ 0 \leq n \leq N\}$ est une chaîne de Markov $(\mu, \hat{P})$ avec

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \mu_y \hat{P}(y, x) = \mu_x P(x, y).$$

Chaîne réversible.

Définition

Une chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réversible *si $\hat{P} = P$, ce qui implique que :*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \mu_y P(y,x) = \mu_x P(x,y).$$

Problèmes :

1. P donnée $\rightarrow$ calculer la probabilité invariante μ ;
2. μ donnée $\rightarrow$ trouver P telle que $\mu P = \mu$.

Chaîne réversible.

Problèmes :

1. P donnée $\to$ calculer la probabilité invariante μ ;
2. μ donnée $\to$ trouver P telle que $\mu P = \mu$.

Éléments de réponses :

1. Vérifier la réversibilité ou le résultat suivant.

Proposition

Soit P matrice de transition irréductible et π probabilité strictement positive sur E. On pose pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\hat{P}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\pi_y}{\pi_x} P(y,x), & si\ x \neq y, \\ \\ P(x,x) & si\ x = y. \end{cases}$$

Alors π est la probabilité invariante de P et $\hat{P}$ est la matrice de la chaîne retournée ssi pour tout $x \in E$, $\displaystyle\sum_{y \in E} \hat{P}(x,y) = 1$.

PROBLÈMES :

1. P donnée $\rightarrow$ calculer la probabilité invariante μ ;
2. μ donnée $\rightarrow$ trouver P telle que $\mu P = \mu$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSES :

1. Vérifier la réversibilité ou le résultat suivant.
2. Assez facile à résoudre. À la base de nombreux algorithmes par chaînes de Markov :
    - méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov,
    - algorithme de Propp-Wilson,
    - etc.

Plan

ESTIMATIONS DE (ν, P).

RAPPEL : loi de $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ déterminée par ν, loi initiale, et P matrice de transition.

ESTIMATION de (ν, P) au vu de $(X_0, X_1, \dots, X_n)$?

ESTIMATEURS : pour tout $(x, y) \in E^2$

$$\hat{\nu}_x^n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{X_k = x}, \quad \text{et} \quad \hat{P}^n(x,y) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{X_k = x, X_{k+1} = y}}{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{X_k = x}}.$$

PROPOSITION

Si ν est la probabilité invariante et que la chaîne est irréductible récurrente et positive, alors p.s.

$$\lim_{n \to +\infty} \hat{\nu}_x^n = \nu_x, \qquad \lim_{n \to +\infty} \hat{P}^n(x,y) = P(x,y).$$