Chaînes à temps continu. (voir également chapitre 4).

Chapitre 4.

Ex1 : cf. série TD
Ex2 :

Ex 4. *Variante 1* : chaque ligne de 8 kbits forme un système M/M/1 indépendant avec $\lambda = 2, \mu = 4$ (on a précisé dans l'énoncé capacité illimitée). $\overline{V} = \dfrac{1}{\lambda - \mu} = \dfrac{1}{4-2} = 0.5 \text{ sec}\,ondes\ ou\ 500\,ms$. *Variante 2.*Un accès multiple à une même ligne de 64 kbits forme une file M/M/1 avec $\lambda = 16, \mu = 32$; $\overline{V} = \dfrac{1}{32-16} = 0.0625 \text{ sec}\,ondes\ ou\ 62.5\,ms$ qui est évidemment plus avantageux.

Ex 9. (i) c'est un M/M/1/∞/3 (capacité illimitée, source finie). La chaîne de Markov associée étant finie, le système est toujours stable : $\rho = \lambda / \mu = (1/9)/(1/2) = 2/9 = 0.2222$. Probabilités stationnaires : $\pi_1 = \left(\dfrac{2}{9}\right) \times \dfrac{3!}{2!} \pi_0 = \dfrac{2}{3} \pi_0$; $\pi_2 = \left(\dfrac{2}{9}\right)^2 \times \dfrac{3!}{1!} \pi_0 = \dfrac{8}{27} \pi_0$; $\pi_3 = \left(\dfrac{2}{9}\right)^3 \times \dfrac{3!}{0!} \pi_0 = \dfrac{16}{243} \pi_0$; La condition de normalisation $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ donne $\pi_0 = \dfrac{243}{493} = 0.493$; $\pi_1 = \dfrac{162}{493} = 0.328$; $\pi_2 = \dfrac{72}{493} = 0.146$; $\pi_3 = \dfrac{16}{493} = 0.0324$. Nombre moyen de machines en panne : $\overline{N} = 0.329 + 2 \times 0.146 + 3 \times 0.0324 = 0.7182$ (on peut utiliser également la table $\overline{N} = L - \left(1 - \pi_0\right) / \rho$). Probabilité d'oisiveté du réparateur$= \pi_0 = 0.493$ soit 49.3% du temps. Débit absolu : $A = (1 - \pi_0)\pi = 0.507 \times 0.5 = 0.2535$; c'est le nombre moyen de machines réparées par unité de temps qu'on peut interpréter comme la productivité du réparateur. Productivité de l'atelier (le système) $:= (3 - \overline{N}) \times 5 = 11.4\ articles$. Temps moyen d'immobilisation d'une machine : $\overline{V} = \dfrac{\overline{N}}{\overline{\lambda}} = \dfrac{0.7182}{0.03} \approx 24.7$ (car le débit réel ou effectif $\overline{\lambda} = \lambda(L - \overline{N}) = \dfrac{1}{9}(3 - 0.7182) = 0.03$). (ii) On a ici un M/M/1 ($\lambda = 3/9 = 1/3$) et $\mu = 1/2$. Système stable car $\rho = (3/9)/(1/2) = 2/3 < 1$. $\pi_0 = \dfrac{2}{3} = 0.666$; $\pi_1 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^1 \times \dfrac{2}{3} = 0.4444$; $\pi_2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \times \dfrac{2}{3} = 0.1975$; $\pi_3 = \left(\dfrac{2}{9}\right)^3 \times \dfrac{2}{3} = 0.1316$. $\overline{N} = \dfrac{1}{\mu - \lambda} = 6$. (iii) $m = 1,\ \overline{N} = 2.0,\ \overline{C}(1) = 10 \times 1 + 20 \times 2.0 = 50.0$;

$m = 2,\ \overline{N} = 0.75,\ \overline{C}(2) = 10 \times 2 + 20 \times 0.75 = 35.0$;

$m = 3,\ \overline{N} = 0.675958,\ \overline{C}(3) = 10 \times 3 + 20 \times 0.675958 = 43.5192$. D'où m*=2.

Ex 10. C'est une modèle à capacité finie M/M/1/K. $\lambda = 125$ paquets par seconde ; $\mu = 1/0.002 = 500$ paquets par seconde ; $K = 8$. (i) l'espace des états étant fini, le régime stationnaire existe toujours ; le système est toujours stable. Rappelons les formules connues pour ce système : $\pi_k = \rho^k \pi_0, k = 0,1,\ldots,K;\quad \pi_0 = 0, k > K.$ et $\pi_0 = \left[\sum_{j=0}^{K} \rho^j\right]^{-1} = \dfrac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}$

Dans notre cas $\rho = \dfrac{125}{500} = \dfrac{1}{4} = 0.25$. (ii) Charge du système : si on comprend par là la proportion de serveurs occupés Charge$=1-\pi_0 \approx 0.25$. Tous les autres résultats peuvent être ramenés à la précision voulue.(iii) Probabilité de perte (ou de refus)= $\pi_8 = 0.0000114441354527872 19$; (iv) Taux d'arrivées réel= $\lambda(1-\pi_8) \approx 124.9985694830684$

k	π_k	Approximation à 10^{-5}
0	$\pi_0 = 0.7500028610338632$	≈ 0.750000
1	$\pi_1 = 0.1875007152584658$	≈ 0.18750
2	0.04687517881461645	≈ 0.04687
3	0.011718794703654112	≈ 0.01171
4	0.002929698675913528	≈ 0.00292
5	0.000732424668978382	≈ 0.00073
6	0.0001831061672445955	≈ 0.00018
7	0.000045776541811148874	≈ 0.00004
8	$\pi_8 = 0.000011444135452787219$	≈ 0.00001

(v) Taux de perte=$\lambda - \lambda_{réel}$ =125-124.9985694830684$\approx$0.0000894069884793680 1, (vi) Débit relatif=A=$(1-\pi_8) \approx$ 0.9999992847440922, Débit absolu= $\lambda(1-\pi_8) \approx$ 124.9985694830684 (=$\lambda_{réel}$ car système stable) ; (=$\mu(1-\pi_0)$) , (vii) $\overline{V} = E(V) =$ 0.0026664225223163194, (viii) On peut résoudre l'inégalité trouver K tel que

$$\pi_K = \frac{\rho^K}{K!} \times \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} < \varepsilon \quad , \quad \varepsilon = 10^{-4}$$

ici, assez compliqué. Il est plus simple de le faire numériquement en faisant varier la taille de la capacité d'attente

K	π_K
2	π_2=0.047619047619047616$> \varepsilon = 10^{-4}$
3	π_3=0.011764705882352941$> 10^{-4}$

4	π_4=0.002932551319648094$>10^{-4}$
5	π_5=0.0007326007326007326$>10^{-4}$
6	π_6=0.00018311664530305805$<10^{-4}$

Pour le modèle M/M/1, $K=\infty$., (i)La condition de stabilité ici est $\rho=\frac{125}{500}=\frac{1}{4}=0.25<1$ qui est satisfaite. (ii) charge= $\pi_0=1-\rho=0.75$, (iii) probabilité de perte=0 (on a vu précédemment qu'à partir de K=6, la probabilité de refus est inférieure à $\varepsilon=10^{-4}$, (iv) taux d'arrivées réel= $\lambda=125$, (v) taux de perte =0, (vi) débit relatif=1 ; débit absolu= $\lambda=125$, (vi)

$$\overline{V}=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{1}{500-125}=\frac{1}{375}=0.002666666666$$

$$\approx \overline{V}^{K=8}=0.0026664225223163194 \text{ (partie précédente)}$$

Conclusion : Les caractéristiques des modèles M/M/1 (capacité infinie) et M/M/1/8 (capacité finie) ne différent pas. La Question (viii) montre que pour la ,probabilité de refus la différence n'est pas significative pour une capacité d'attente $K\geq 6$. Par conséquent pour les valeurs de K supérieures à 6 il est préférable d'utiliser le modèle M/M/1 pour lequel les mesures de performance peuvent être calculées manuellement. Pour K petit <6, les formules sont plus « complexes calculatoirement » .

Ex11. **(a)** système M/M/1 avec $\lambda=96/24=4$ arrivées/heure, $\mu=60/12=5$ sorties/heure, $\rho=4/5=0.8<1$ système stable, il existe un régime stationnaire unique, $\pi_5=(1-0.8)\times(0.8)^5\approx 0.07$, $\overline{N}=E(N)=4$ malades, $\overline{Q}=3.2$, $\lambda_{eff}=\lambda=4$ malades/heure, débit relatif $A'=1, \overline{V}=\frac{1}{\mu-\lambda}=1\ heure$, $\overline{W}=\frac{\overline{Q}}{\lambda}=48\ \min utes$, $\pi_0=0.2$ (serveur oisif 20% du temps), Pour que $\overline{Q}=\frac{\rho^2}{1-\rho}\leq 1/2$, il faut que $\mu\geq 2\lambda$, d'où $\mu=2\lambda=8$, $P(W>2)=0.8e^{-(8-4)\times 2}\approx 0.000168$; (b) M/M /m, condition de stabilité $\varphi=\lambda/m\mu=4/5m<1$ donc $m>4/5$, m au moins égal à 1. Il faut trouver la première valeur de m pour laquelle $\overline{Q}\leq 1/2$ (le code annexe C donne la valeur).

Ex 14. (I) (1) M/M/1 (le taux de réparation (service) se réfère à celui de toute l'équipe et non pas à celle d'une personne de l'équipe), λ=4 , μ=6. (2) $\rho=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=0.666667<1$, le système est stable et il existe un régime stationnaire.(3) $\overline{N}=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{2/3}{1-2/3}=2$ machines (en moyenne) ;(4) $\overline{Q}=\overline{N}-\rho=\frac{4}{3}=1.333333$ machines (en moyenne);

$\overline{W} = \overline{Q}/\lambda = 1/3 \approx 0.333333$; (5): $C_S = 2\times1000\times30\times8 = 480\ \ 000\ D.A.$; (6) : $C_f = \overline{Q}\times1000\times30\times8 = 320\ \ 000\ D.A.$; (7) $\pi_0 = 1-\rho = \frac{1}{3} = 0.33333$ (l'équipe est oisive 33% du temps).

(II) Scénario 1 : (1) C'est toujours un M/M/1, λ=4, mais de paramètre μ=7 (toujours celui de l'équipe). ; (2) $\rho = 4/7$; (3) $\overline{N} = \frac{4}{3} \approx 1.333333$ clients (en moyenne) ;(4) $\overline{Q} = \frac{16}{21} \approx 0.761905$ clients ; $\overline{W} = 4/21 \approx 0.190476\ (11\min utes\ \ 25\ \sec ondes)$; (5) $C_S^1 = 320\ 000\ D.A.$; (6) $C_f^1 = 182\ \ 857\ D.A.$; (7) Economie : 160 000 D.A. ; (8) $\pi_0 = \frac{3}{7} = 0.428571$ (l'équipe est oisive 42,85% du temps).

Scénario 2 : (1) Ici, c'est un M/M/2, λ=4, μ=6, m=2 ; (2) $\rho = 4/2\times6 = 1/3$; (; 3) $\overline{N} = \frac{3}{4} = 0.75$ machines ; (4) $\overline{Q} = \frac{1}{12} \approx 0.083333$ machines ; $W = 1/48 \approx 0.020833\ \ (1\min utes\ \ 15\ \sec ondes)$; (5) $C_S^2 = 180\ \ 000\ D.A.$; (6) $C_f^2 = 20\ \ \ 000\ \ D.A.$; (7) Economie : 480 000-180 000-50 000=250 000 D.A. ; (8) $\pi_0 = 0.5$ (les équipes sont inactives 50% du temps).

Scénario 3 : Ici, on a deux files indépendantes M/M/1 ; a)(1) M/M/1(homme) avec un taux d'arrivées $\lambda_1 = \lambda\times0.25 = 1$, $\mu_1 = 8,\ m_1 = 1$;(2) $\rho_1 = \frac{1}{8} = 0.125 < 1$ (file stable). ;(3) $\overline{N} = \frac{1}{7} = 0.142257$;(4) $\overline{Q} = \frac{1}{56} = 0.0178571$;

$\overline{W} = \frac{1}{56} = 1\ \min ute\ \ 42\ \sec onde$; (5) $C_s^{3(1)} = 34285.7$; (6) $C_f^{3(1)} = 4285.76$; (7) $\pi_0 = \frac{7}{8} = 0.875$ (inactif 85% du temps).

(b) M/M/1(femme) avec un taux d'arrivées $\lambda_2 = \lambda\times0.75 = 3$, $\mu_2 = 8,\ m_2 = 1$;(2) $\rho_2 = \frac{3}{8} = 0.375 < 1$ (file stable). ; (3) $\overline{N} = \frac{3}{5} = 0.6$; (4) $\overline{Q} = \frac{9}{40} = 0.225$; $\overline{W} = \frac{3}{40} = 4{,}5\ \min utes$ (5) $C_s^{3(2)} = 144\ \ 000$ (6) $C_f^{3(1)} = 54\ 000$; (7) $p_0 = \frac{5}{8} = 0.625$ (inactif 62 .5% du temps). ; Economie : 480 000-178285.7-50000=251 715

Discussion : Ainsi, on a répondu à la question de l'intérêt économique pur (la réduction de l'attente des machines entraîne des gains) ; en revanche les équipes ont plus de temps libre ; c'est intéressant de leur point de vue, mais du point de vue de l'entreprise faut-il les affecter à d'autres tâches ? Mais ceci est une autre histoire. Notons également que ceci représente le temps des deux équipes simultanément. Il faut tenir compte que chaque équipe à un temps supplémentaire d'oisiveté.