Chapitre : Les chaines de Markov

Le fondateur de la discipline
Andrei Andreevich Markov (1856-1922) un mathématicien russe. Ses travaux sur la théorie des probabilités l'ont amené à mettre au point les chaines de Markov qui l'ont rendu célèbre. Ceux-ci peuvent représenter les prémices de la théorie du calcul stochastique.

1 Les processus stochastiques : définition et classification

Définition
Un processus stochastique $\{X_t, t \in T\}$ est une collection de variables aléatoires indexées par un paramètre t et définies sur un même espace de probabilités (Ω, F, P).

La variable X_t représente l'état du processus au temps t et l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour cette variable est appelée l'espace des états du processus et sera noté S.
Classification
Un processus stochastique dont l'ensemble des états S est fini ou dénombrable est appelé une chaine.
Un processus est à temps discret lorsque l'ensemble T est fini ou dénombrable.

2 Les chaines de Markov finies et homogènes à temps discret

2.1 Définitions

Une chaine de Markov à temps discret est un processus stochastique $\{X_n, n = 0, 1, ...\}$ à temps discret, défini sur un espace d'états S fini ou dénombrable et vérifiant la propriété de Markov

$$P[X_n = i | X_0, ..., X_{n-1}] = P[X_n = i | X_{n-1}],$$

pour tout $i \in S$ et quel que soit $n \geq 1$.
En mots, l'état courant résume, à lui seul, tout l'historique du système susceptible d'influencer son évolution future.

Une chaine de Markov à temps discret est homogène (dans le temps) si, pour tout paire d'états (i, j) et tout instant n,

$$P[X_n = j | X_{n-1} = i] = P[X_{n+k} = j | X_{n+k-1} = i],$$

quel que soit $k \geq 0$.

Restriction

Dans ce chapitre, l'étude portera sur *une chaine de Markov à temps discret, définie sur un espace d'états S fini, et homogène dans le temps.*

Notons que les résultats que nous allons présenter s'appliquent le plus souvent tels quels aux chaines de Markov à temps discret, homogènes mais définies sur un espace d'états dénombrable (par exemple lorsque $S = Z$).

2.2 Probabilité de transition et matrice de transition

Pour une chaine de Markov homogène $\{X_n, n = 0, 1, ...\}$, on a

$$P[X_n = j | X_{n-1} = i] = P[X_1 = j | X_0 = i] \ \ \forall n \geq 1.$$

On peut donc définir la probabilité de transition (en 1 étape) de i à j comme

$$p_{ij} = P[X_1 = j | X_0 = i] \ \ \forall (i, j) \in S^2.$$

En mots, la probabilité p_{ij} est égale à la probabilité conditionnelle que le système se retrouve dans l'état j à l'étape suivante sachant qu'il se trouve actuellement dans l'état i.

Si la chaine possède $s = |S|$ états, les probabilités précédentes peuvent être rangées dans une matrice de transition $P = (p_{ij})$ de taille $s \times s$ dont les lignes et les colonnes sont indexées par les éléments de S.

Matrice stochastique

Une matrice carrée $P = (p_{ij})$ est stochastique si

1) ses éléments sont non négatifs : $p_{ij} \geq 0$ pour tout i et j ;

2) la somme des éléments de chacune de ses lignes est égale à 1 : $\sum_j p_{ij} = 1$ pour tout i.

Propriété 2.1 *Soit P une matrice stochastique de taille s finie, alors toute puissance P^m, $m \geq 0$, de P est une matrice stochastique.*

Preuve : Par induction. Le résultat est vrai pour $m = 0$ ($P^0 = I$ pour tout P carrée) et $m = 1$. Pour $m \geq 1$, on a $(P^m)_{ij} \geq 0, \forall i, j$ et, $\forall i$,

$$\sum_j (P^m)_{ij} = \sum_j \sum_k (P^{m-1})_{ik} P_{kj} = \sum_k [(P^{m-1})_{ik} \sum_j P_{kj}] = 1.$$

Propriété 2.2 *Une matrice de transition d'une chaine de Markov est une matrice stochastique.*

2.3 Probabilités de transition en m étapes

La probabilité conditionnelle d'aller de i à j en m étapes exactement est

$$p_{ij}^{(m)} = P[X_m = j | X_0 = i] = P[X_{n+m} = j | X_n = i] \ \ \forall n \geq 1.$$

Cette probabilité est indépendante de n car le processus est homogène et est appelée la probabilité de transition en m étapes de i à j.
La matrice $P^{(m)}$ dont l'élément (i, j) est égal à $p_{ij}^{(m)}$ est appelée la matrice de transition en m étapes.
Remarque. On a évidemment $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$ et $P^{(1)} = P$.
Convention. On adoptera la convention naturelle $P^{(0)} = I$, c.-à-d.

$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ i = j \\ 0 & \text{si } \ i \neq j \end{cases}$$

Théoreme 2.1 *Pour tout $m \geq 0$, la probabilité $p_{ij}^{(m)}$ de transition de i à j en m étapes est donnée par l'élément (i, j) de la matrice P^m.*
Sous forme matricielle ce résultat s'écrit : $P^{(m)} = P^m$, pour tout $m \geq 0$.

Preuve : Par induction. Le résultat est vrai pour $m = 0$ et 1. Supposons-le vrai pour $m - 1$. Utilisant la loi des probabilités totales, nous obtenons, pour tout $i, j \in S$,

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(m)} &= P[X_m = j | X_0 = i] \\ &= \sum_{k \in S} P[X_m = j | X_{m-1} = k] P[X_{m-1} = k | X_0 = i] \\ &= \sum_{k \in S} p_{kj}^{(1)} p_{ik}^{(m-1)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m-1)} p_{kj} \\ &= \sum_{k \in S} (P^{(m-1)})_{ik} (P)_{kj} = (P^{(m)})_{ij}. \end{aligned}$$

2.4 Equation de Chapmann-Kolmogorov

Corollaire 2.1 *Soit $P^{(n)}, n \geq 0$, la matrice de transition en n étapes d'une chaine de Markov. Alors, pour tous entiers non négatifs l et m*

$$P^{(l+m)} = P^{(l)} P^{(m)}$$

ce qui s'écrit sous forme développée

$$p_{ij}^{(l+m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(l)} p_{kj}^{(m)} \ \ \forall i, j \in S.$$

2.5 Graphes représentatifs et classification des états

2.5.1 Graphes représentatifs

La matrice de transition $\boldsymbol{P}$ d'une chaine de Markov peut être représentée par un graphe orienté $\boldsymbol{G}$ dont
- **les sommets** = états de la chaine
- **arc** relie les sommets associés aux états $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ si la probabilité de transition de $\boldsymbol{i}$ à $\boldsymbol{j}$ est positive, c-à-d. si $\boldsymbol{p_{ij} > 0}$.
Le graphe ainsi défini est appelé *le graphe représentatif*, ou *graphe de transition*, de la chaine de Markov.
Exemple
La matrice de transition d'une chaine de Markov est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Donner le graphe représentatif.
(L'ensemble des états de la chaine est $\boldsymbol{S = \{1, 2, 3, 4, 5\}}$).

2.5.2 Classes et graphe réduit

Soit $\boldsymbol{P}$ la matrice de transition d'une chaine de Markov et $\boldsymbol{G}$ le graphe représentatif de $\boldsymbol{P}$.
L'état $\boldsymbol{j}$ est **accessible** depuis l'état $\boldsymbol{i}$ s'il existe, dans $\boldsymbol{G}$, au moins un chemin de $\boldsymbol{i}$ à $\boldsymbol{j}$.
Remarque. Tout état $\boldsymbol{j}$ est accessible depuis lui-même.

Propriété 2.3 *L'état $\boldsymbol{j}$ est accessible depuis l'état $\boldsymbol{i}$ si et seulement s'il existe $\boldsymbol{n \geq 0}$ tel que $\boldsymbol{p_{ij}^{(n)} > 0}$.*

Les états $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ **communiquent** s'ils sont accessibles l'un à partir de l'autre.

Propriété 2.4 *Les états $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ communiquent si et seulement s'il existe $\boldsymbol{n \geq 0}$ et $\boldsymbol{m \geq 0}$ tels que $\boldsymbol{p_{ij}^{(n)} > 0}$ et $\boldsymbol{p_{ji}^{(m)} > 0}$.*

La relation "$\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ communiquent" est une relation d'équivalence dont les **classes** correspondent aux **composantes fortement connexes** de $\boldsymbol{G}$. Ainsi, les états $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ communiquent si et seulement s'ils appartiennent à la même

composante fortement connexe de G.
Les classes de la chaine correspondent aux composantes fortement connexes de G.
Si $C_1, \ldots, C_r$ dénotent les classes d'une chaine de Markov, le graphe réduit G_R de la chaine est obtenu en associant un sommet à chaque classe C_i et en reliant les sommets u et v par un arc (u, v) s'il existe $i \in C_u$ et $j \in C_v$ avec $p_{ij} > 0$.

Propriété 2.5 *Le graphe réduit G_R d'une chaine de Markov est un graphe sans circuit.*

Exercice
Pour la chaine de Markov de l'exemple précédent, donner le graphe représentatif.

2.5.3 Classification des états

Une classe est **persistante** si elle correspond à un sommet sans successeur de G_R. Si tel n'est pas le cas, la classe est **transitoire**.
Les états d'une classe persistante sont **persistants ou récurrents** et ceux d'une classe transitoire sont transitoires.
Une classe persistante composée d'un seul état est **absorbante** et un état est absorbant s'il forme, à lui seul, une classe persistante.

Propriété 2.6 *L'état i est absorbant si et seulement si $p_{ii} = 1$ (on a alors $p_{ij} = 0, \forall j \neq i$).*

Une chaine de Markov est **irréductible** si elle ne compte qu'une *seule classe.* Dans le cas contraire, elle est **réductible**.

Propriété 2.7 *Une chaine de Markov est irréductible si et seulement si son graphe représentatif est fortement connexe.*

Propriété 2.8 *Une chaine de Markov est irréductible si et seulement si toutes ses paires d'états communiquent.*

Une chaine de Markov est absorbante si tous ses états persistants le sont.

2.5.4 Période

La période d de l'état i d'une chaine de Markov est égale au plus grand diviseur commun de tous les n pour lesquels $p_{ii}^{(n)} > 0$.
L'état i est périodique lorsque $d > 1$ et apériodique lorsque $d = 1$.

Propriété 2.9 *L'état i a période d si et seulement si d est le plus grand diviseur commun des longueurs des circuits (pas forcément élémentaires) du graphe représentatif G passant par i.*

Propriété 2.10 *Si $p_{ii} > 0$, l'état i est apériodique.*

Théoreme 2.2 *Les états d'une classe ont tous la même période.*

La période étant une propriété de classe, on parlera de classes périodiques / apériodiques et de chaines de Markov irréductibles périodiques / apériodiques selon les propriétés de leurs états.

3 Distribution initiale et comportement transitoire

3.1 Distribution initiale

La distribution des états d'une chaine de Markov après n transitions est notée $\pi^{(n)}$. Cette distribution est un vecteur de probabilités contenant la loi de la variable aléatoire X_n

$$\pi_i^{(n)} = P[X_n = i], \quad \forall i \in S.$$

La distribution initiale est $\pi^{(0)}$.
Remarque : Si l'état initial est connu avec certitude et est égal à i, on a simplement $\pi_i^{(0)} = 1$ et $\pi_j^{(0)} = 0$ pour tout $j \neq i$.

3.1.1 Comportement transitoire

Théoreme 3.1 *Soit P la matrice de transition d'une chaine de Markov et $\pi^{(0)}$ la distribution de son état initial. Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} P \quad et \quad \pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n.$$

Preuve : Premièrement, on a, pour tout $j \in S$,

$$\pi_j^{(1)} = P[X_1 = j] = \sum_{i \in S} P[X_1 = j | X_0 = i] P[X_0 = i]$$

$$= \sum_{i \in S} p_{ij} \pi_i^{(0)} = \sum_{i \in S} \pi_i^{(0)} p_{ij}.$$

et $\boldsymbol{\pi}^{(1)} = \boldsymbol{\pi}^{(0)}\boldsymbol{P}$.
La chaine étant homogène, on obtient immédiatement le premier résultat $\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}^{(n-1)}\boldsymbol{P} \;\; \forall \boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$.
Pour démontrer le second il suffit de résoudre l'équation de récurrence précédente par substitution.

4 Comportement asymptotique des chaines irréductibles

4.1 Objectifs et comportement asymptotique

L'étude du comportement à long terme d'une chaine de Markov cherche à répondre à des questions aussi diverses que
- la distribution $\boldsymbol{\pi}^{(n)}$ converge-t-elle, lorsque $\boldsymbol{n} \longrightarrow \infty$?
- si la distribution $\boldsymbol{\pi}^{(n)}$ converge lorsque $\boldsymbol{n} \longrightarrow \infty$, quelle est la limite $\boldsymbol{\pi}^*$ et cette limite est-elle indépendante de la distribution initiale $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$?
- si l'état $\boldsymbol{i}$ est persistant, quelle est la proportion du temps passé dans cet état et quel est le nombre moyen de transitions entre deux visites successives de cet état ?
- si l'état $\boldsymbol{i}$ est transitoire, quel est le nombre moyen de visites de cet état ?

Distribution invariante
Une distribution $\boldsymbol{\pi}$ est invariante ou stationnaire si $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}$.

Propriété 4.1 *Si* $\lim_{\boldsymbol{n}\longrightarrow\infty} \boldsymbol{\pi}^{(n)}$ *existe, alors la limite est une distribution invariante.*

Les deux résultats suivants sont cités sans preuve.

Propriété 4.2 *Une chaine de Markov possède toujours au moins une distribution invariante.*

Théoreme 4.1 *Une chaine de Markov possède autant de distributions invariantes linéairement indépendantes que la multiplicité de la valeur propre* $\mathbf{1}$ *de sa matrice de transition.*

On démontre aussi le résultat suivant :

Théoreme 4.2 *La distribution* $\boldsymbol{\pi}^{(n)}$ *des états d'une chaine de Markov converge vers une distribution (invariante)* $\boldsymbol{\pi}^*$ *indépendante de la distribution* *initiale* $\pi^{(0)}$ *si et seulement si la suite des puissances de la matrice de transition* P *de la chaine converge vers une matrice (stochastique)* P^* *dont toutes les lignes sont égales entre elles. De plus, si tel est le cas, chaque ligne de* P^* *est égale à* π^* *.*

Preuve. La condition est nécessaire car si, indépendamment de $\pi^{(0)}$, $\lim_{n\to\infty} \pi^{(n)} = \pi^*$, il suffit de considérer successivement les distributions initiales

$$\pi_1^{(0)} = (10...0) \ldots \pi_s^{(0)} = (0...01)$$

pour obtenir

$$\pi^* = \lim_{n\longrightarrow\infty} \pi^{(n)} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \pi_i P^n = \lim_{n\longrightarrow\infty} (P^n)_i = (P^*)_i.$$

Ainsi P^* existe et toutes ses lignes sont égales à π^*.
La condition est suffisante. Si P^* existe et si $p^*_{ij} = p^*_j$ pour tout $i \in S$, on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \pi^{(n)} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \pi^{(0)} P^n = \pi^{(0)} \lim_{n\longrightarrow\infty} P^n = \pi^{(0)} P^*$$

et la limite π^* existe. De plus

$$\pi_j^* = \sum_{i\in S} \pi_i^{(0)} p^*_{ij} = \sum_{i\in S} \pi_i^{(0)} p^*_j = p^*_j \sum_{i\in S} \pi_i^{(0)} = p^*_j$$

et π^* est indépendante de $\pi^{(0)}$ et identique à n'importe quelle ligne de P^*.
Remarque : Si $\pi^* = \lim_{n\longrightarrow\infty} \pi^n$, on parlera de distribution asymptotique, stationnaire ou invariante.

4.2 Comportement asymptotique des chaines irréductibles et apériodiques

Le théorème suivant résume le comportement asymptotique des chaines irréductibles et apériodiques.

Théoreme 4.3 *Soit* P *la matrice de transition d'une chaine irréductible et apériodique. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*
- La matrice P^n *tend vers une matrice stochastique* P^* *lorsque* n *tend vers l'infini.*
- Les lignes de P^* *sont toutes égales entre elles.*
- $p^*_{ij} > 0$ *pour tout* $i, j \in S$*.*
- Pour toute distribution initiale $\pi^{(0)}$*,*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \pi^{(n)} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \pi^{(0)} P^n = \pi^*.$$

- π^* *est la solution unique du système*

$$\begin{cases} \pi P &= \pi \\ \pi \mathbf{1} &= 1 \end{cases}$$

- π^* *est égal à n'importe quelle ligne de la matrice* P^*.
- *Pour tout* $i \in S$, $\pi^*_i = \frac{1}{\mu_i}$
où μ_i *est l'espérance du nombre de transitions entre deux visites successives de l'état* i.

Remarque. Pour n suffisamment grand, on a $\pi^{(n)} \simeq \pi^*$et π^*_i est la probabilité que la chaine se trouve dans l'état i à un instant quelconque. Cette valeur représente aussi la proportion du temps passé dans l'état i.
Exemple
Soit la chaine de Markov irréductible et apériodique définie par la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

L'unique solution du système

$$\begin{cases} \pi P &= \pi \\ \pi \mathbf{1} &= 1 \end{cases}$$

est $\pi^* = (1/4 \;\; 3/10 \;\; 9/20)$.
Le processus passe donc, en moyenne, 30% du temps dans l'état 2 et il faut, en moyenne, 4 transitions entre deux visites successives de l'état 1.

4.3 Les chaines ergodiques

Une chaine de Markov est ergodique si elle admet une distribution asymptotique, i.e. si $\lim_{n \longrightarrow \infty} \pi^{(n)}$ existe, unique et indépendante de la distribution initiale.

Propriété 4.3 *Les chaines irréductibles et apériodiques sont ergodiques.*

Théoreme 4.4 (Théorème ergodique) *Soit* $\{X_n, n = 0, 1, ...\}$ *une chaine de Markov ergodique de distribution stationnaire* π^* *et* f *une fonction réelle définie sur l'espace des états* S *de la chaine. Alors,*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(X_k) = \sum_{i \in S} \pi^*_i f(i)$$

presque sûrement.

4.4 Comportement asymptotique des chaines irréductibles périodiques

Lemme 4.1 *Si une chaine de Markov a période $\boldsymbol{d}$, l'ensemble $\boldsymbol{S}$ de ses états peut être divisé en $\boldsymbol{d}$ classes disjointes $\boldsymbol{D_0, D_1, \ldots, D_{d-1}}$ de manière à ce que chaque transition se fasse d'une classe $\boldsymbol{D_k}$ à la classe $\boldsymbol{D_{k+1}}$, les indices étant pris modulo $\boldsymbol{d}$.*

En (re-)numérotant de manière consécutive les états de chaque classe $\boldsymbol{D_k}$, la matrice $\boldsymbol{P^d}$ prend la forme

$$\boldsymbol{P^d} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_0} & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{P_{d-1}} \end{pmatrix}.$$

Chaque matrice $\boldsymbol{P_i}$ définit une chaine irréductible et apériodique sur l'ensemble des états de la classe $\boldsymbol{D_i}$. Une transition de la chaine associée à $\boldsymbol{P_i}$ correspond à $\boldsymbol{d}$ transitions de la chaine initiale.

Rappel : Convergence au sens de Cesàro

Une suite $\boldsymbol{\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}}$ converge au sens de Cesàro vers $\boldsymbol{X^*}$ si

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{X_k} = \boldsymbol{X^*}.$$

La convergence au sens de Cesàro est une convergence en moyenne contrairement à la définition ordinaire qui est une convergence en valeur.

La convergence ordinaire implique la convergence au sens de Cesàro mais la réciproque est fausse.

Contre-exemple. La suite $\boldsymbol{\{0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots\}}$ converge vers $\frac{1}{2}$ au sens de Cesàro.

Comportement asymptotique

En remplaçant la convergence ordinaire par celle au sens de Cesàro, les chaines de Markov irréductibles présentent toutes les mêmes propriétés asymptotiques, indépendamment de leur période.

En particulier, la suite des puissances de $\boldsymbol{P}$ converge en moyenne vers une matrice stochastique $\boldsymbol{P^*}$ ayant toutes ses lignes égales. De même, la suite des distributions $\boldsymbol{\pi^{(n)}}$ converge, au sens de Cesàro, vers une distribution $\boldsymbol{\pi^*}$, unique et indépendante de la distribution initiale $\boldsymbol{\pi^{(0)}}$. De plus $\boldsymbol{\pi^*}$ est égal à n'importe quelle ligne de $\boldsymbol{P^*}$.

Remarque. Si la chaine a période $\boldsymbol{d}$, chaque matrice $\boldsymbol{P_i}$ définit une chaine érgodique possédant une distribution stationnaire unique π_i^* . On a alors

$$\pi^* = \frac{1}{d}(\pi_0^* + ... + \pi_{d-1}^*).$$

4.5 Comportement asymptotique des chaines absorbantes

4.5.1 Les chaines réductibles

Théoreme 4.5 *Pour tout état initial i, la probabilité de se retrouver dans un état persistant à l'étape n tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Symboliquement,*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 1, \quad \text{avec } j = \text{ état persistant.}$$

Preuve : Soit $p_i(m) = P[X_m = \text{état transitoire}|X_0 = i]$. Si $s = |S|$, on a $p_i(s) < 1$ pour tout $i \in S$ car il est possible d'atteindre un état persistant en au plus s transitions depuis n'importe quel état initial. Ainsi

$$p = \max_{i\in S}(p_i(s)) < 1$$

et, pour tout $i \in S$,

$$p_i(2s) = \sum_{j=\text{état trans.}} p_{ij}^{(s)} p_j(s) \leq \sum_{j=\text{état trans.}} p_{ij}^{(s)} p$$

$$= p_i(s)p \leq p^2.$$

Ainsi $p_i(ks) \leq p^k$ et $\lim_{k\longrightarrow\infty} p_i(ks) = 0$.
D'autre part, pour tout $n \geq 0$,

$$p_i(n+1) = \sum_{j=\text{état trans.}} p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{j,k=\text{état trans.}} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$$

$$= \sum_{k=\text{état trans.}} p_{ik}^{(n)} \left[\sum_{j=\text{état trans.}} p_{kj} \right] \leq p_i(n)$$

ce qui permet de conclure que $\lim_{n\longrightarrow\infty} p_i(n) = 0$.

Corollaire 4.1 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ *pour tout j transitoire, quel que soit i.*

Forme canonique
La matrice de transition d'une chaine de Markov réductible est sous forme canonique si

1. les sommets d'une classe (persistante) sont numérotés consécutivement ;
2. les sommets persistants sont numérotés en premier.

Si une chaine a $\boldsymbol{k}$ classes persistantes, sa matrice sous forme canonique ressemble à

$$\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{P_1} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & \boldsymbol{P_k} & \mathbf{0} \\ \hline \boldsymbol{R_1} & \ldots & \boldsymbol{R_k} & \boldsymbol{Q} \end{array} \right).$$

Chaque sous-matrice $\boldsymbol{P_i}$ définit une chaine de Markov irréductible sur l'ensemble des états de la classe persistante $\boldsymbol{C_i}$.

Remarque. Pour obtenir une matrice de transition sous forme canonique, il est important de numéroter consécutivement les états de chaque classe persistante.

La matrice de transition, sous forme canonique, d'une chaine absorbante est

$$\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \hline \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{array} \right).$$

Matrice fondamentale

Lemme 4.2 *Soit* $\boldsymbol{Q}$ *telle que* $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{Q}^n = \mathbf{0}$, *alors*

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}^n.$$

Corollaire 4.2 *Soit* $\boldsymbol{P}$ *la matrice de transition, sous forme canonique, d'une chaine de Markov absorbante. Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n = \lim_{n\to\infty} \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \hline \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{Q}^k \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q}^n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \hline (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1} \boldsymbol{R} & \mathbf{0} \end{array} \right),$$

La matrice $\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}$ *est appelée la matrice fondamentale de la chaine de Markov.*

4.5.2 Temps avant absorption

Théoreme 4.6 *Le nombre moyen de périodes séjournées dans l'état transitoire* $\boldsymbol{j}$ *par une chaine de Markov débutant sont évolution dans l'état transitoire* $\boldsymbol{i}$ *est égal à l'élément* $\boldsymbol{n_{ij}}$ *de la matrice fondamentale* $\boldsymbol{N}$.

Preuve : Posons $F_j(X_n) = 1$ si $X_n = j$ et $F_j(X_n) = 0$ sinon. Le nombre de visites dans l'état j est $\sum_{n=0}^{\infty} F_j(X_n)$
et l'espérance cherchée est

$$E[\sum_{n=0}^{\infty} F_j(X_n)/X_0 = i].$$

Or,

$$E[\sum_{n=0}^{\infty} F_j(X_n)/X_0 = i] = \sum_{n=0}^{\infty} E[F_j(X_n)|X0 = i]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n=0} q_{ij}^{(n)} = n_{ij}.$$

Corollaire 4.3 *Partant de l'état transitoire i, le nombre moyen de transitions avant d'atteindre un état absorbant (persistant) est égal à la somme des termes de la ie ligne de la matrice fondamentale N.*

4.5.3 Probabilités d'absorption

Théoreme 4.7 *La probabilité d'être absorbé par l'état j partant de l'état transitoire i est donnée par l'élément b_{ij} de la matrice*

$$B = NR = (I - Q)^{-1}R.$$

Preuve : La probabilité cherchée est

$$\sum_{n=0} (\sum_{k:trans.} p_{ik}^{(n)} p_{kj}).$$

Or, $p_{ik}^{(n)} = q_{ik}^{(n)}$ et $p_{kj} = r_{kj}$. Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k:trans.} p_{ik}^{(n)} p_{kj}) = \sum_{k:trans.} (\sum_{n=0}^{\infty} q_{ik}^{(n)}) r_{kj}$$

$$= \sum_{k:trans.} n_{ik} r_{kj} = b_{ij}.$$

4.6 Récapitulatif

Les chaines ergodiques (suite)
Une chaine de Markov à temps discret est ergodique si la distribution de ses états converge vers une distribution stationnaire unique, qui est alors indépendante de la distribution initiale de la chaine.

Les chaines irréductibles et apériodiques sont ergodiques mais ce ne sont pas les seules.
En fait une chaine est ergodique si et seulement si
1) elle possède une seule classe persistante ;
2) ses états persistants sont apériodiques.

Etude d'une chaine réductible

L'étude d'une chaine de Markov réductible se décompose en deux étapes.
1) étude des classes persistantes
On applique les résultats obtenus pour les chaines irréductibles afin de déterminer la période et la distribution stationnaire de chacune des sous-chaines associées aux classes persistantes.
2) Etude des classes transitoires
On rend la chaine absorbante soit en contractant les classes persistantes en un seul état, soit en rendant absorbants tous les états persistants. On calcule ensuite les temps moyens avant absorption (donnés par la matrice fondamentale $\boldsymbol{N}$) et les probabilités d'absorption (données par la matrice $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{NR}$).