Analyse Opérationnelle

- Quelques lois opérationnelles
- sur des quantités mesurables (simulations, mesures)
- sans hypothèses probabilistes ou statistiques
- permettant de faire des tests
- et de borner les performances pour valider une première analyse.

Quantités Concernées

Les quantités que l'on peut mesurer d'un système i pendant un temps fini d'observation T :

- A_i le nombre d'arrivées
- C_i : le nombre de service accompli (départs)
- B_i : la durée pendant laquelle il est occupé

. Taux d'arrivées, $\lambda_i = \frac{A_i}{T}$

. Débit, $X_i = \frac{C_i}{T}$

. Utilisation, $U_i = \frac{B_i}{T}$

. Temps moyen de service, $S_i = \frac{B_i}{C_i}$

Plan

- Utilisation
- Conservation de Flux
- Formule de Little
- Temps de réponse
- Systèmes interactifs
- Bottleneck (engorgement)

Utilisation

- Par définition
$$U_i = \frac{B_i}{T} = \frac{C_i}{T}\frac{B_i}{C_i}$$
- et donc $U_i = X_i S_i$
- L'utilisation est le produit du temps moyen de service par le débit.

Conservation de Flux

- Conservation Entrées Sorties :

  Lorsque T devient grand, si le système est stable,

  alors le flux entrant est égal au flux sortant (conservation)

$$A_i = C_i$$

Conservation de Flux

- Conservation Entrées Sorties :

  Lorsque T devient grand, si le système est stable,

  alors le flux entrant est égal au flux sortant (conservation)

  $$A_i = C_i$$

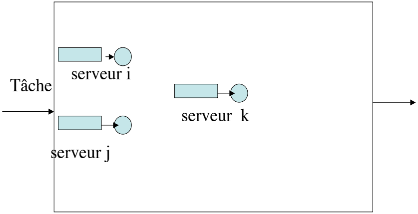
- Conservation et Routage

  Une tâche demande V_i services (visites) au serveur i,

  si C_0 est le flux entrant dans le système (et le flux sortant si le système est stable)

  alors le serveur i accompli $C_i = V_i C_0$ services

  $C_i = V_i C_0$ est le nombre de visites au serveur i



- Le débit du système est par définition $X = \frac{C_0}{T}$
- Le débit du serveur i est $X_i = \frac{C_i}{T} = \frac{C_i}{C_0}\frac{C_0}{T}$ Donc

$$X_i = XV_i$$

- Loi de conservation du flux

- Puisque l'utilisation U_i vaut par définition $X_i S_i$, on a :

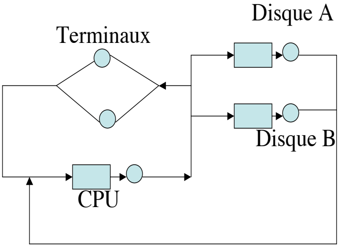
$$U_i = X_i S_i = X V_i S_i$$

- On pose $D_i = V_i S_i$.
  où D_i est la demande(charge) totale de service au serveur i

- goulot d'étranglement (bottleneck) est le serveur qui a la charge la plus élevée

- le nombre maximal de tâches exécutables est obtenu lorsque le serveur le plus chargé (bottleneck) a une utilisation de 1.

Exemple - Serveur Central



- Chaque tâche demande 5 secondes de CPU, 80 accès sur le disque A et 100 accès sur le disque B.
- Entre chaque tâche, l'utilisateur attend 18 secondes.
- Un accès disque sur A dure 50 ms, et sur B 30 ms.
- Il y a 17 terminaux connectés
- On mesure un débit de 15.7 accès par seconde sur le disque A
- Calcul du débit et de l'utilisation de la CPU et des disques.

Données Initiales

- $D_{CPU} = 5s$
- $V_A = 80$
- $V_B = 100$
- $S_A = 0.05s$
- $S_B = 0.03s$
- $X_A = 15.7$ tâches/s

Données Initiales

- $D_{CPU} = 5s$
- $V_A = 80$
- $V_B = 100$
- $S_A = 0.05s$
- $S_B = 0.03s$
- $X_A = 15.7$ tâches/s

Utilisations

- $D_A = S_A V_A = 4s$
- $D_B = S_B V_B = 3s$
- Donc la CPU est le bottleneck.
- On reprendra l'exemple pour finir....

Routage par probabilités de transition

- $p_{i,j}$ est la probalilité d'aller en j après avoir terminé un travail en i.
- Terminaison d'une tâche correspond à la sortie du CPU ($i = 1$) vers les terminaux ($i = 0$)
- $p_{i,1} = 1 \ \ \forall i \neq 1$,$p_{i,j} = 0 \ \ \forall i, j \neq 1$

Routage par probabilités de transition

- $p_{i,j}$ est la probalilité d'aller en j après avoir terminé un travail en i.
- Terminaison d'une tâche correspond à la sortie du CPU ($i = 1$) vers les terminaux ($i = 0$)
- $p_{i,1} = 1 \ \forall i \neq 1$,$p_{i,j} = 0 \ \forall i, j \neq 1$
- Equation de flux : $C_j = \sum_{i=0}^{M} C_i p_{i,j}$

  En divisant par C_0 (nombre de tâches terminés)

$$V_j = \sum_i V_i p_{i,j} \; j = 1, \cdots M \quad V_0 = 1$$

- Les ratios de visites sont :

$$\begin{aligned} 1 &= V_1 p_{1,0} \\ V_1 &= 1 + V_2 + V_3 = \cdots V_M \\ V_j &= V_1 p_{1,j} = \frac{p_{1,j}}{p_{1,0}} \end{aligned}$$

  les ratios de visites sont obtenus en divisant $p_{1,j}$ par $p_{1,0}$

Exemple

$$V_{CPU} = V_A + V_B + 1$$

Probabilités de transition

Après un service au CPU, les probabilités de routage :

- vers Disque A : $\frac{V_A}{V_{CPU}} = \frac{80}{181}$
- vers Disque B $\frac{V_B}{V_{CPU}} = \frac{100}{181}$
- terminaison : $\frac{1}{181}$

Conservation de flux

Les débits sont :

$$X = \frac{X_A}{V_A} = \frac{15.70}{80} = 0.1963$$

$$X_{CPU} = X.V_{CPU} = 0.1963 \times 181 = 35.48$$

$$X_B = X.V_B = 0.1963 \times 100 = 19.6$$

Conservation de flux

Les débits sont :

$$X = \frac{X_A}{V_A} = \frac{15.70}{80} = 0.1963$$
$$X_{CPU} = X.V_{CPU} = 0.1963 \times 181 = 35.48$$
$$X_B = X.V_B = 0.1963 \times 100 = 19.6$$

Utilisation

Les utilisations sont :

$$U_{CPU} = XD_{CPU} = 0.1963 \times 5 = 98\%$$
$$U_A = XD_A = 0.1963 \times 4 = 78.4\%$$
$$U_B = XD_B = 0.1963 \times = 58.8\%$$

Formule de Little

Soit $\mathcal{Z}$ un système dans lequel arrivent des objets. Ces objets demeurent un certain temps dans le système puis sortent de $\mathcal{Z}$.

- $\overline{N}$ est le nombre moyen d'objets dans $\mathcal{Z}$
- $\overline{T}$ est le temps moyen passé dans $\mathcal{Z}$ par un objet
- λ est le taux d'arrivée en $\mathcal{Z}$ des objets.

$$\overline{N} = \lambda \overline{T}$$

Temps de réponse

- Grâce à la formule de Little on obtient :

$$N_i = X_i R_i$$

- N_i nombre moyen de clients dans le serveur i
- et R_i temps moyen de réponse du serveur i.
- si le serveur est stable, $\lambda_i = X_i$

- $U_i = X_i S_i$ est la formule de Little appliquée sur le serveur sans la file.

Temps de réponse

- Grâce à la formule de Little on obtient :

$$N_i = X_i R_i$$

- N_i nombre moyen de clients dans le serveur i
- et R_i temps moyen de réponse du serveur i.
- si le serveur est stable, $\lambda_i = X_i$

- $U_i = X_i S_i$ est la formule de Little appliquée sur le serveur sans la file.

- V_i passage par tâche dans la station i
- le temps de réponse total est :

$$R = \sum_i V_i R_i$$

Exemple

Soient les nombres moyens de tâches observées dans les serveurs sont :
$N_A = 3.19$, $N_B = 1.4$, $N_{CPU} = 8.88$

Le théorème de Little :

- $N_{CPU} = X_{CPU} \times R_{CPU}$

  $R_{CPU} = \frac{N_{CPU}}{X_{CPU}} = \frac{8.88}{35.48} = 0.25s.$
- $R_A = \frac{N_A}{X_A} = \frac{3.19}{15.7} = 0.203s.$
- $R_B = \frac{N_B}{X_B} = \frac{1.4}{19.6} = 0.071s.$

Temps de Réponse Géneralisé

- En appliquant la formule de Little au système entier :

$$N = XR$$

- $$N = N_{CPU} + N_A + N_B$$

- $$XR = X_{CPU}R_{CPU} + X_AR_A + X_BR_B$$

- En divisant par X

$$R = V_{CPU}R_{CPU} + V_AR_A + V_BR_B$$

- Pour cet exemple :

$$R = 0.25 \times 181 + 0.203 \times 80 + 0.071 \times 100 = 68.6$$