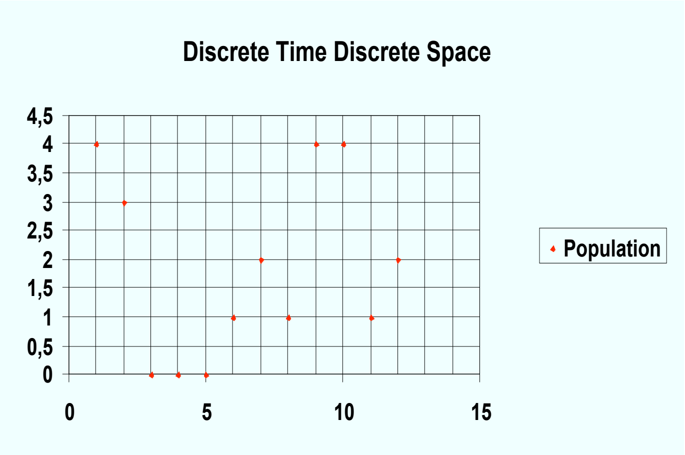
# Processus Stochastique

- Evolution d'une variable aléatoire avec le temps
- Espace :
  - discret (fini ou infini) : une population
  - continu : des coordonnées
- Temps :
  - discret : horloge
  - continu : temps physique
  - événement discret :

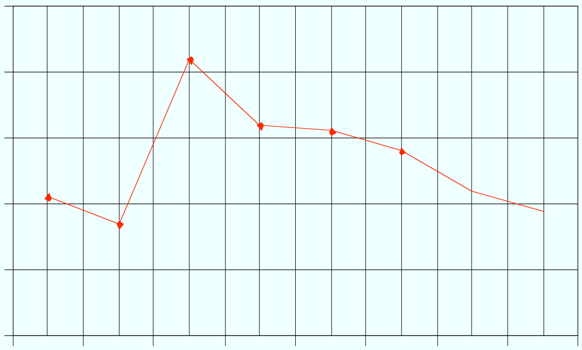
# Exemples

- Temps discret, Espace discret : la fortune d'un joueur
- Temps discret, Espace continu : une hauteur d'eau à un barrage, chaque jour
- Temps continu, Espace discret : le nombre de particules au cours d'une réaction
- Temps continu, Espace continu : les positions de corps dans une intéraction gravitationnelle
- Evénement discret, Espace discret : le nombre de paquet dans un routeur
- Evénement discret, Espace continu : prix d'une action boursière.

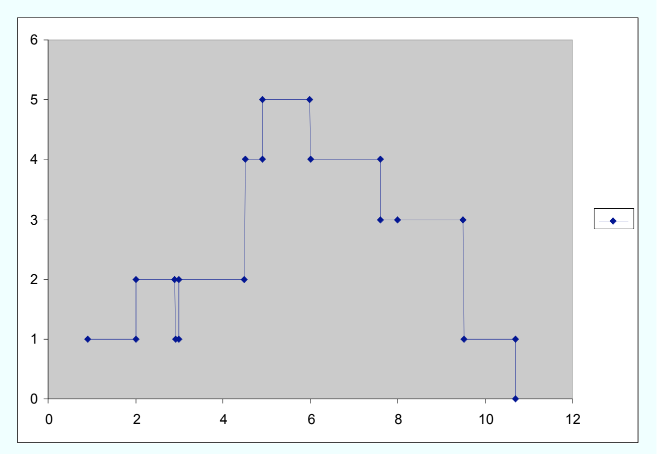
# Trajectoire Temps Discret Espace Discret



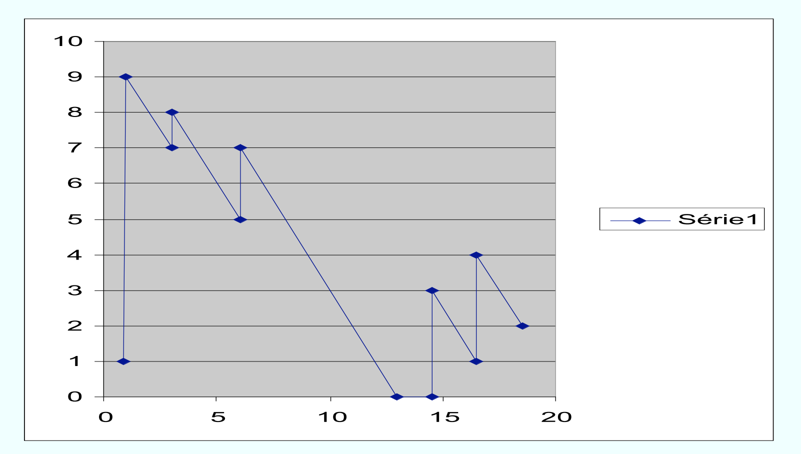
# Trajectoire Temps Discret Espace Continu



# Trajectoire Evenement Discret Espace Discret



# Trajectoire Evenement Discret Espace Continu



# Processus de Poisson

- Un processus de comptage tel que le nombre d'événements entre $0$ et $t$ suit une loi de Poisson.

$$P(N_t = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

- Pour représenter
  - apparition de pannes
  - arrivées de paquets (réseau)
  - arrivées de sessions (serveur Web)
  - arrivées de jobs (OS)

# Propriétés du processus de Poisson

- La superposition de deux processus de Poisson indépendants est un processus de Poisson. Le taux global est la somme des taux.
- Le découpage (splitting) d'un processus de Poisson (de taux $\lambda$) selon un processus de Bernoulli indépendent (de taux $p$) crèe deux processus de Poisson indépendents de taux $\lambda p$ et $\lambda(1-p)$.
- PASTA : Poisson Arrivals See Time Average.

# Les inter-arrivées sont exponentielles

- Soit la variable aléatoire discrète $N_t$, le nombre de requêtes arrivées à un serveur dans l'intervalle de temps $(0, t]$
- Soit $N_t$ distribuée selon la loi de Poisson de paramètre $\lambda t$

$$P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

- Soit $X$ la date d'arrivée de la prochaine requête $P(X > t) = P(N_t = 0) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$
- $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$
- $X$ **est une variable aléatoire exponentielle**

# Chaines de Markov en temps continu

- La suite des variables aléatoires indexés par $t$ : $\{X(t), t \geq 0\}$
- L'évolution est continue.
- $X(t)$ prend des valeurs dans un espace d'états dénombrable (espace d'états est discret).

## Définition (Markov)

*Un processus $X(t)$ est Markovien si et seulement si pour $t_0 < t_1 \cdots < t_n < t$, the conditional property*

$$Pr(X(t) = x | X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \cdots, X(t_0) = x_0)$$
$$= P(X(t) = x | X(t_n) = x_n)$$

- Si on connaît l'état présent, on connaît l'état futur sans connaître l'historique

# Transition rates

- $q_{i,j}, \;\; i \neq j$ : probabilité de transition de l'état $i$ vers l'état $j$ durant l'intervalle de temps $\delta t$ tel que $\lim \delta t \rightarrow 0$
- Un seul événement peut se produire à l'instant $t$
- CTMC est homogène, si les $q_{i,j}$s ne dépendent pas de temps, $t$.
- $Q = [q_{i,j}]$ est le générateur infinitesimal :
  - la somme de chaque ligne $= 0$
  - les éléments hors diagonale sont non-négatifs
  - les éléments diagonaux sont non-positives : $q_{i,i} = \sum_{j \neq i} q_{i,k}$

Soit $P = Q\Delta t + I$

$$
\begin{aligned}
p_{i,j} &= q_{i,j}\Delta t \;\; i \neq j \\
p_{i,i} &= -|q_{i,i}|\Delta t + 1
\end{aligned}
$$

Si $\Delta t \leq 1/\max|q_i|$ la matrice $P$ est stochastique

# CTMC

- les durées de séjour dans un état sont exponentielles
  Soit $X_i$ la durée de séjour à l'état $i$ :
  $P(X_i \leq t) = 1 - e^{-|q_{i,i}|t}$
  La durée de séjour moyenne$= 1/|q_{i,i}|$.

- $\frac{q_{i,j}}{|q_{i,i}|}$ est la probabilité que la transition de l'état $i$ vers l'état $j$ soit franchie en premier parmi les transitions possibles à partir de l'état $i$.

# Analyse transitoire

$\mathbf{\Pi(t)} = [\Pi_1(t)\ \Pi_2(t) \cdots \Pi_n(t)]$ la distribution transitoire à l'instant $t$.
où $\Pi_i(t)$ est la probabilité que le système soit à l'état $i$ à l'instant $t$.

$\mathbf{\Pi(0)} = [\Pi_1(0)\ \Pi_2(0) \cdots \Pi_n(0)]$ est la distribution initiale , à l'instant $0$.

$$\frac{\partial \Pi(t)}{\partial t} = \Pi(t) Q$$

$$\mathbf{\Pi(t)} = \mathbf{\Pi(0)} e^{Qt}$$

$$\mathbf{\Pi(t)} = \mathbf{\Pi(0)} (I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q^k t^k}{k!})$$

# Equilibre Stationnaire

- La distribution d'équilibre est solution de

$$\pi Q = 0 \quad et \quad \pi e = 1$$

- $e$ est un vecteur plein de $1$ (notation classique)
- On n'étudiera pas les distributions transitoires (équations différentielles)

# Flux Stationnaire

- Considérons l'équation d'équilibre sous forme matricielle :

$$\pi Q = 0$$

- En développant pour un $i$ quelconque, on a :

$$\sum_{j} \pi(j) Q(j,i) = 0$$

- Séparons la somme :

$$\sum_{j \neq i} \pi(j) Q(j,i) = -\pi(i) Q(i,i)$$

- Mais :

$$Q(i,i) = -\sum_{k \neq i} Q(i,k)$$

- Donc :
$$\sum_{j\neq i} \pi(j)Q(j,i) = \sum_{k\neq i} \pi(i)Q(i,k)$$
- Interprétation en terme de flux : tout ce qui permet de sortir de $i$ (partie droite) est égal à tout ce qui permet de rentrer en $i$.
- Interprétation simple et plus facile à utiliser

# Modèle de Disponibilité à deux états

- $Q(up, down) = \alpha$, $Q(up, up) = -\alpha$, $Q(down, down) = -\beta$, $Q(down, up) = \beta$,
- $\alpha$ est le taux de panne, $\beta$ le taux de réparation.
- Stationnaire : résoudre $\pi Q = 0$
- 2 inconnues, 2 équations, mais une seule indépendante.
- On rajoute $\pi(up) + \pi(down) = 1$.
- Donc $\pi(up) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$
- Et la fiabilité asymptotique vaut $\pi(up)$.
- On a aussi $\pi(down) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

# Transitoire

- On doit maintenant résoudre $\pi(t)Q = \frac{\partial \pi}{\partial t}$ sachant $\pi_{UP}(0) = 1$.
- $\frac{\partial \pi_{UP}}{\partial t} = \beta \pi_{DOWN}(t) - \alpha \pi_{UP}(t)$
- Mais on a pour tout $t$, $\pi_{DOWN}(t) = 1 - \pi_{UP}(t)$.
- Ce qui donne l'équation (solution connue) :

$$\frac{\partial \pi_{UP}}{\partial t} = \beta - (\alpha + \beta)\pi_{UP}(t)$$

- Et donc,

$$\pi_{UP}(t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} - \frac{exp(-(\alpha + \beta)t)}{\alpha + \beta}$$

# Système à deux composants

- On suppose maintenant que l'on a ajouté un second composant redondant.
- Les pannes sont exponentielles (taux $\alpha$) et indépdendantes.
- Les réparations sont exponentielles et indépendantes. Il y a un réparateur et le taux de réparation est $\beta$.
- Le systàme est DOWN quand tous les composants sont DOWN.
- On ne peut réparer qu'un seul composant à la fois.

**Modèle**

- Etats : nombre de composants en activité : $0$, $1$, $2$.
- Transitions :
  - $2$ vers $1$ : taux $2\alpha$
  - $1$ vers $0$ : taux $\alpha$
  - $0$ vers $1$ : taux $\beta$
  - $1$ vers $2$ : taux $\beta$

**Equation Stationnaire**

$$\begin{array}{lcl} 2\alpha\pi(2) & = & \beta\pi(1) \\ (\alpha+\beta)\pi(1) & = & 2\alpha\pi(2)+\beta\pi(0) \\ \alpha\pi(1) & = & \beta\pi(0) \\ 1 & = & \pi(0)+\pi(1)+\pi(2) \end{array}$$

# Résolution

- Apres substitution on a :

$$\pi(1) = \frac{\beta}{\alpha}\pi(0) \qquad \pi(2) = \frac{\beta}{2\alpha}\pi(1)$$

- Donc

$$\pi(0)(1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{2\alpha^2}) = 1$$

- Et la disponibilité stationnaire vaut $1 - \pi(0)$.