Chapitre 3.
Chaînes de Markov à temps discret.

Une chaîne de Markov est un processus aléatoire possédant la propriété d'absence de mémoire (le futur ne dépend que du présent et non pas du passé). La définition rigoureuse a été donnée au chapitre 2.

1.Exemples d'applications . Les modèles de chaînes de Markov concernent un grand nombre d'applications **(**marche aléatoire, diffusion, transfert de chaleur…). Un intérêt particulier concerne les applications dans la modélisation des systèmes informatiques

- réseau de communication, systèmes d'exploitation
- systèmes automatisé de production
- Evaluation des performances et contrôle des systèmes de gestion
- Automates, réseaux de Pétri…

Pour l'informaticien, les modèles de chaînes de Markov sont intéressant pour décrire la récursivité en environnement aléatoire. En intelligence artificielle , vision…, on a coutume d'utiliser toute une panoplie d'algorithmes stochastiques (recuit simulé, algorithme génétique) pour la résolution de problèmes d'optimisation complexes (combinatoires par exemple). L'évolution de tels algorithmes peut être vue comme celle d'une chaîne de Markov contrôlée ou non.

2.Probabilités d'états et de transition.

La définition d'une chaîne de Markov a été donnée au chapitre 2. Si l'espace des états est discret et le temps mesuré en unité de temps discrète (secondes, minutes, heures, jours, mois, années, nombre de cycles, ….alors les **probabilités de transition** $p_{i,j}^{n,n+1}$=**P**(X_{n+1}=j/X_n=i) de l'état i à l'état j en une étape suffisent pour définir la chaîne. Ces probabilités de transition sont dites homogènes si elles ne dépendent pas de n. La matrice $P=\|p_{ij}\|$ est dite **stochastique** (ses éléments sont non nuls et la somme des éléments d'une ligne est égale à 1).

Proposition 1. La suite $\{X_n\}$ est entièrement spécifiée par la matrice des transitions P et par la donnée de la distribution de l'état initial π_i^0=P(X_0=i).É En effet, les distributions fini-dimensionnelles s'écrivent :

$P\{X_0=i_0 , X_1=i_1,\dots,X_n=i_n\}=P\{X_n=i_n/X_{\text{à}}=i_0, X_1=i_1,\dots,X_{n-1}=i_{n-1}\}. P\{X_{\text{à}}=i_0, X_1=i_1,\dots,X_{n-1}=i_{n-1}\}=$

$P\{X_n=i_n/X_{n-1}=i_{n-1}\}. P\{X_{\text{à}}=i_0, X_1=i_1,\dots,X_{n-1}=i_{n-1}\}=p_{in-1,in}. P\{X_{\text{à}}=i_0, X_1=i_1,\dots,X_{n-1}=i_{n-1}\}=$

$p_{in-1,in}. P\{X_{n-1}=i_{n-1}/X_{\text{à}}=i_0, X_1=i_1,\dots,X_{n-2}=i_{n-2}\}. P\{X_{\text{à}}=i_0, X_1=i_1,\dots,X_{n-2}=i_{n--2}\}=$

$p_{in-1,in}. P\{X_{n-1}=i_{n-1}/ X_{n-2}=i_{n-2}\}. P\{X_{\text{à}}=i_0, X_1=i_1,\dots,X_{n-2}=i_{n--2}\}=$

$p_{in-1,in}. p_{in-2,in-1}. P\{X_{n-1}=i_{n-1}/ X_{n-2}=i_{n-2}\}. P\{X_{\text{à}}=i_0, X_1=i_1,\dots,X_{n-2}=i_{n--2}\}=\dots\dots=$

$p_{in-1,in}. p_{in-2,in-1}\dots. p_{i2,i1}. p_{i1,i0}.P\{X_0=i_0\}$

Proposition 2. Pour une chaîne de Markov homogène,

(i) La matrice des probabilités de transition en n étapes $P^{(n)}=||p_{ij}^{(n)}|$.

(ii) On a $p_{ij}^{(n+m)}=\sum_k p_{ik}^{(n)}.p_{kj}^{(m)}$ ou sous forme matricielle

$$P^{(n+m)}=P^{(n)}.P^{(m)}$$

Ces équations sont appelées équations de Chapman-Kolmogorov .

(iii) Si P^n désigne la n-ème puissance de la matrice P, alors $P^{(n)}=P^n$. En particulier, $P^{(n+m)}=P^{n+m}=P^n.P^m$

(iv) $\pi(n)=\pi(n-1)P=\ldots=\pi(0)P^n$, où $\pi(n)=(\pi_1(n),\pi_2(n),\ldots)$ et $\pi_i(n)=P(X_n=i)$.

Exemple 1 : Soit la chaîne à deux états, E={0,1}. La matrice des probabilités de transition

$$P=\begin{pmatrix} p00 & p01 \\ p10 & p11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

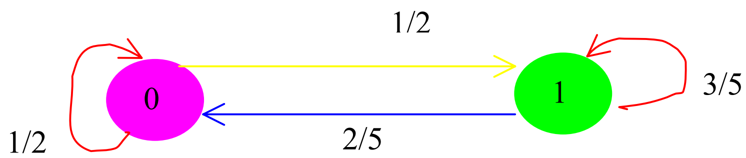


Figure 1. Automate (ou graphe d'états) correspondant à la chaîne de Markov.

Le vecteur d'état $\pi(n)=(\pi_0(n),\pi_1(n))$, où $\pi_i(n)=P(X_n=i)$ se calcule de manière récursive (Voir TP N° 1). Pour une distribution initiale $\pi(0)=(1,0)$ (à l'instant initial la chaîne se trouve à l'état 0) :

n	0	1	2	3	4	5
$\pi_0(n)$	1	0,5	0,45	0,445	0,4445	0,44445
$\pi_1(n)$	0	0,5	0,55	0,555	0,5555	0,55555

Si par contre la distribution initiale $\pi(0)=(0,1)$ (à l'instant initial la chaîne se trouve à l'état 0).

n	0	1	2	3	4	5
$\pi_0(n)$	0	0,4	0,44	0,444	0,4444	0,44444
$\pi_1(n)$	1	0,5	0,56	0,556	0,5556	0,55556

On voit que les probabilités d'état tendent à se stabiliser vers une valeur constante indépendamment de la distribution de l'état initial (une telle chaîne est dite ergodique). Plus loin nous montrerons qu'effectivement $\pi_0(n)\rightarrow 4/9$ lorsque $n\rightarrow\infty$, et $\pi_1(n)\rightarrow 5/9$. La distribution $\pi=(4/9,5/9)$ est appelée distribution stationnaire. Cette distribution est obtenue comme solution du système d'équations linéaires $\pi=\pi P$ avec $\pi_0+\pi_1=1$.

3.Questions liées à l'étude de l'évolution des chaînes de Markov.

Dés que l'on a opté pour une modélisation en termes de chaînes de Markov, diverses questions peuvent se poser :

1. Si la chaîne quitte l'état i, quelle est la probabilité d'atteindre l'état j en n étapes ? Peut-on prédire le temps moyen (nombre d'étapes) pour atteindre j en n étapes en partant de ? Quel est le temps moyen de séjour à l'état i ?

2.Existe-t-il des limites $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ indépendantes de i ?

3.Les limites $\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\ldots)$ forment-elles une distribution de probabilité i.e. les $\pi_i \geq 0$, $\sum_j \pi_j = 1$?

4. La chaîne est-elle ergodique i.e. les limites $\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\ldots)$ sont telles que $\pi_i > 0$; $\sum_j \pi_j = 1$?

5.Existe-t-il une distribution stationnaire unique $q=(q_0,q_1,q_2,\ldots)$ i.e. telle que les $q_i \geq 0$, $qP=q$; $\sum_j q_j = 1$?

6. Quelles instructions ou commandes du logiciel (ou langage informatique) utilisé permettent de répondre à ces questions ?

7. Les résultats fournis par le logiciel (langage), sont-elles correctes ?

Pour répondre à ces questions, il faut savoir classifier les états de la chaîne. Nous procèderons à deux types de classification selon les propriétés arithmétiques et asymptotiques des probabilités $p_{ij}^{(n)}$.;. Les chapitres suivants sont consacrés à l'étude des questions 1-5 ; nous discuterons les questions 6 et 7 dans le chapitre 9 .

4. Classification arithmétique des états.

L'état i est non **essentiel** si $\exists$ n et j tels que $p_{ij}^{(n)}>0$, mais $\forall$n et j, $p_{ji}^{(n)}=0$ (en d'autres termes i est non essentiel s'il est possible de le quitter pour un autre état en un nombre fini d'étapes, mais qu'il n'est pas possible d'y revenir).

On peut donc partager l'ensemble E de tous les états en deux classes disjointes : E_0=ensemble des états non essentiels et E_0'=ensemble des états essentiels.

Considérons uniquement la classe des états essentiels. L'état j est **accessible** à partir de l'état i ($i\to j$) si $\exists$ n tel que $p_{ij}^{(n)}>0$ ($p_{ij}^{(0)}=1$ si $i=j$, $=0$ si $i\neq j$).

Les états i et j **communiquent** entre eux si $i\to j$ et $j\to i$ (on note $i\Leftrightarrow j$). La relation $\Leftrightarrow$ est une relation d'équivalence. Soit $E/\Leftrightarrow=\{E_1, E_2,...,E_k\}$ l'ensemble quotient des classes d'équivalence.

Les classes sont disjointes et forment avec E_0 une partition de l'ensemble des états E. Une classe comporte tous les états qui communiquent entre eux. Si une chaîne est réduite à une seule classe on dit qu'elle est irréductible.

Si on numérote les états, de telle manière qu'on ait d'abord les états de E_0, ensuite ceux de E_1, E_2,...alors la matrice des transitions est de la forme

	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	
E_0	////////////////	////////////////	////////////////	////////////////	///////////////	////////////////	////////
E_1	0	////////////////	0	0	0	0	0
E_2	0	0	////////////////	0	0	0	0
E_3	0	0	0	///////////////	0	0	0
E_4	0	0	0	0	////////////////	0	0

Les blocs sont des matrices stochastiques. A chacune d'elles correspond une sous-chaîne irréductible.

Exemple 1 : (suite). L'ensemble E={0,1} de tous les états forme une seule classe irréductible d'états communiquants. La période de chaque état, donc de la classe est d(1)=d(2)=1 (chaîne apériodique).

Exemple 2 : Soit la chaîne d'espace des états E={1,2,3,4}.

$$P=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$$

Dans cette chaîne, il y a deux classes irréductibles E_1={1,2} et E_2={3,4,5}. L'étude se ramène à celle de deux chaînes indépendantes, l'une correspondant à la matrice P_1 (2x2) et l'autre à la matrice P_2 (3x3).

Exemple 3: Soit la chaîne d'espace des états E={1,2,3,4} de matrice des probabilités de transition :

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

L'ensemble E_0={1,3} forme la classe des éléments non essentiels et E'_0={2,4} celle des états essentiels réduite à une seule classe d'états communiquants de période d=1. (apériodique).

La **période** de l'état j, notée d(j) est par définition $d(j)=PGCD\{n\geq 1 : p_{jj}^{(n)}>0\}$. En d'autres termes $p_{jj}^{(n)}>0$ uniquement pour les entiers n multiples de la période (de la forme n=dm): le retour en j ne peut se faire qu'au bout d'un nombre d'étapes multiple de la période. Si $p_{jj}^{(n)}=0$, on pose d(j)=0.

Dans une classe irréductible C, tous les états ont la même période: si $i,j\in C$ et $i\Leftrightarrow j$, alors d(i)=d(j). Si d(j)=1 (d(C)=1) , alors j (la classe C) est dit(e) apériodique.

Soit d=d(C) la période d'une classe irréductible. Les transitions à l'intérieur de cette classe sont cycliques d'un groupe d'état vers un autre.

Algorithme de construction des classes cycliques

- fixer un état i_0

- construire les classes $C_0=\{j\in C: p_{i0,j}^{(n)}>0 \Rightarrow n\equiv 0 \bmod d\}$ (mettre dans C_0 tous les états dont le retour à i_0 s'effectue en un nombre d'étapes multiple de la période).

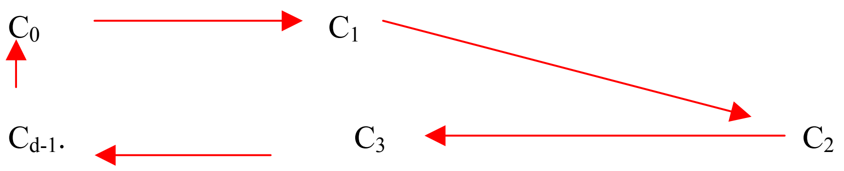
- $C_1=\{j\in C: p_{i0,j}^{(n)}>0 \Rightarrow n\equiv 1 \bmod d\}$ (Dans C_1, on retrouve tous les états dont le retour à i_0 s'effectue en un nombre d'étapes multiple de la période plus un).

....

- $C_{d-1}=\{j\in C: p_{i0,j}^{(n)}>0 \Rightarrow n\equiv d-1 \bmod d\}$

- $C_d=C_0$

Le mouvement d'une classe cyclique vers une autre s'effectue selon le schéma ci-dessous.

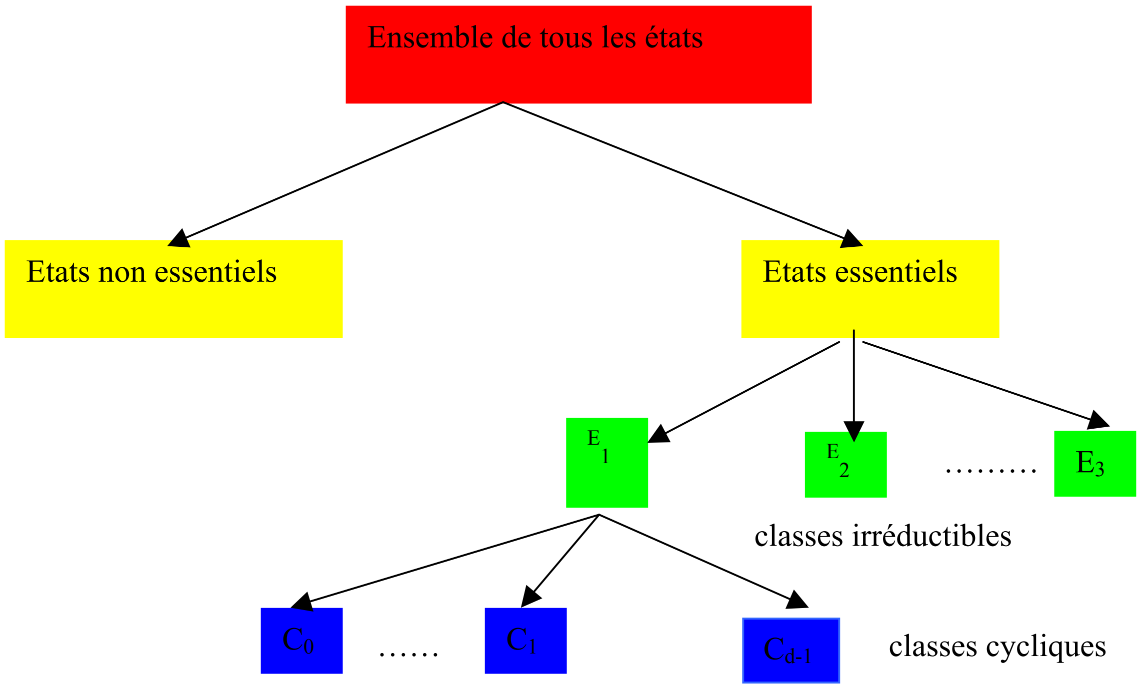


La matrice des probabilités de transition d'une chaîne (classe) irréductible a donc la structure bloc suivante :

	C_0	C_1	C_2	……..	…….	……..	C_{d-1}
C_0	0	//////////////	0	…….	…….	……..	0
C_1	0	0	////////////	0	……..	………..	0
C_2	0	0	0	……..	………	……….	0
………..	………..	………..	………..	………	……….	………	………
………..	……….	………	……….	………	………..	………..	………
C_{d-2}	0	………..	…..	….	…	…	//////////////
C_{d-1}	//////////////	0	………	………	………	……….	0

Soit une certaine classe cyclique C_p. Si on considère qu'à l'instant initial la chaîne se trouve dans l'état C_0, alors aux instants s=p+dt, t=0,1,2,… elle se trouvera dans la classe C_p. Par conséquent, à chaque sous-classe C_p, on peut associer une nouvelle chaîne de Markov de matrice des transitions $\left\|p_{ij}^{d}\right\|$, $i,j\in C_p$ qui est irréductible et apériodique.

On peut résumer la classification des états sous la forme du diagramme suivant :



En vertu de cette classification, pour l'étude des limites des probabilités de transition en n étapes, on peut se limiter à l'étude des chaînes de Markov irréductibles et apériodiques.

Exemple 4: Soit la chaîne d'espace des états E={1,2,3,4} de matrice des transitions

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette chaîne se réduit à une seule classe irréductible d'états qui communiquent entre eux et la période de la classe est d=2. Les classes cycliques sont C_0={1,3} et C_1={2,4}. On peut donc réécrire la matrice P sous la forme.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.Lien avec la théorie des graphes.

La classification et l'étude des chaînes de Markov finies peuvent être effectuée en termes de théorie des graphes. A une chaîne de Markov, on peut associer un graphe ORIENT2 (G,U). G , l'ensemble des sommets correspond à l'ensemble E des états possibles de la chaîne (du système étudié). U est l'ensemble des arcs du graphe. L'arc $(i,j)\in U$ si et seulement si $p_{ij}>0$ (il est possible de passer de i à j en une étape). La relation $i\rightarrow j$ signifie qu'il existe un chemin de i à j. Maintenant, $i\Leftrightarrow j$ signifie que i et j sont sur un même chemin fermé (circuit) de i à j. On convient que si i est confondu avec j, alors il existe un circuit (nul) de i à j. Les classes d'équivalence sont les composantes fortement connexes du graphe.

Remarque : Dans certains ouvrages, on définit la relation de communication sur l'ensemble de tous les états, et non pas sur l'ensemble des états essentiels. On définit alors une relation d'ordre entre les classes : la classe C' est « supérieure » à la classe C si elle est accessible à partir de C ; les éléments minimaux de cet ordre sont des classes absorbantes. Dans cette approche, il est possible de quitter une classe de communication sans jamais pouvoir y revenir.

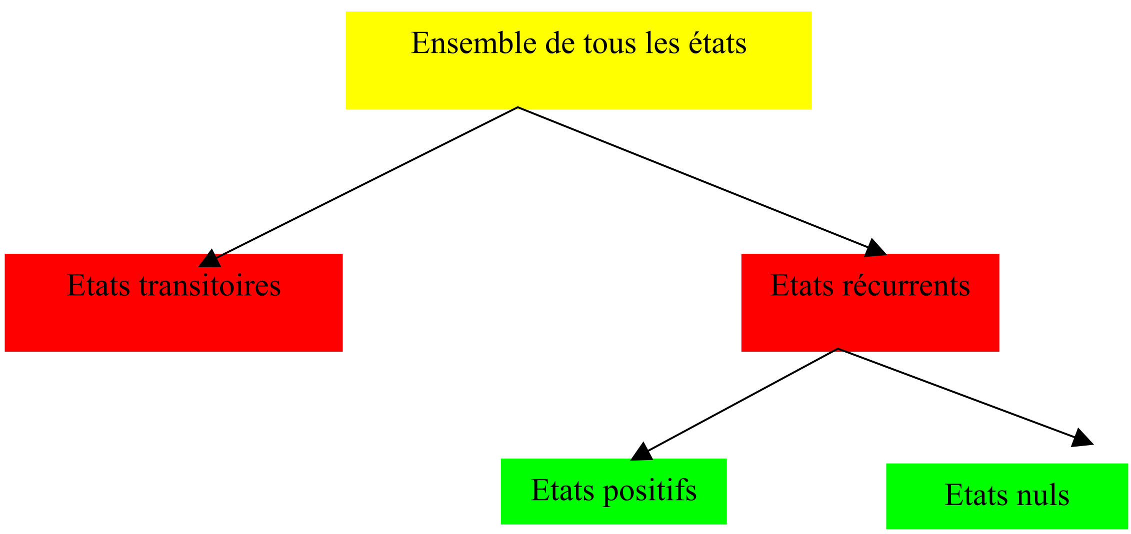
6.Classifications selon les propriétés asymptotiques des probabilités de transition.

On note f_{ii}^{k} la probabilité de premier retour (de récurrence) à l'état i à l'instant k (en k étapes) et f_{ij}^{k} la probabilité de première visite à l'état j à l'instant k lorsqu'on part de l'état i (X_0=i). En vertu de la propriété de Markov :

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k} f_{ij}^{(k)}.p_{jj}^{(n-k)} \qquad (1)$$

Pour passer de l'état i à l'état j en n étapes, il faut d'abord passer en k étapes une première fois à l'état j, ensuite revenir à j au bout des n-k étapes restantes. Notons f_{ii} la probabilité pour que sortant de l'état i , la chaîne retourne tôt ou tard à cet état.

L'état i est **récurrent** (ou persistant) si $f_{ii}=1$. Il est non récurrent (ou transitoire) si $f_{ii}<1$. L'état récurrent i est nul si le temps moyen de premier retour (de récurrence) est infini i.e. $\mu_{ii}=\mu_i=\mu_{ii}=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}=\infty$ (ou $\mu_i^{-1}=0$). Il est récurrent positif si ce temps est fini ($\mu_i=\infty$ ou $\mu_i^{-1}>0$). On obtient ainsi la nouvelle classification des états :



Un état récurrent positif apériodique est appelé **ergodique**.

Algorithme de calcul des probabilités de récurrence

La formule de Markov précédente permet un calcul récursif des probabilités de premier retour ou de première visite à un état donné.

$$f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(k)}.p_{jj}^{(n-k)}$$

Cette formule n'est pas la plus commode à cause des possibilités d'erreurs numériques

Algorithme de calcul des temps moyens de récurrence

$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik}\mu_{kj}$$

Critères de récurrence.

(i) l'état i est récurrent si et seulement si $\sum_n p_{ii}^{(n)} = \infty$.

(ii) Si l'état j est récurrent et i⇔j alors i est également récurrent.

(iii) Si j est transitoire, alors $\sum_n p_{ii}^{(n)} < \infty$ et donc $p_{ij}^{(n)} \to 0$.

(iv) Si j est un état récurrent apériodique, alors $p_{ij}^{(n)} \to \dfrac{f_{ij}}{\mu_j}$. En particulier, si j est positif, alors $p_{ij}^{(n)} \to \dfrac{1}{\mu_j}$, et si j est nul $p_{ij}^{(n)} \to 0$.

(v) Si j est un état récurrent de période d=d(j), $p_{ij}^{(rd+a)} \to \dfrac{d}{\mu_j}.\sum_r f_{ij}^{(rd+a}$. En particulier, si i⇔j et i∈C_{r+a} alors $p_{ij}^{(rd+a)} \to \dfrac{d}{\mu_j}$.

En résumé :

Théorème de solidarité : Dans une chaîne irréductible, tous les états sont de même type :

- Si l'un des états au moins est récurrent, alors tous les états sont récurrents.
- si l'un des états est récurrents nul, alors ils sont tous récurrents nuls.
- si l'un des états est récurrent positif, alors tous les états sont récurrents positifs.
- si l'un d'eux est périodique, ils sont tous périodiques de même période.

Evolution asymptotique des probabilités de transition.

Soit une chaîne irréductible et apériodique. Alors,

(i) si tous les états sont nuls ou non récurrents, alors $p_{ij}^{(n)} \to \pi_j = 0$

(ii) si tous les états sont récurrents positifs, alors $p_{ij}^{(n)} \to \pi_j = \dfrac{1}{\mu_j} > 0.$

Si une chaîne **finie** est irréductible et apériodique, alors elle est automatiquement récurrente positive (donc ergodique).

Une chaîne finie est ergodique si et seulement si $\exists$ n_0 tel que $\forall$ $n>n_0$: $\min\limits_{i,j}\left\{p_{ij}^{(n)}\right\} > 0$. En d'autres termes, de tout état on peut passer à n'importe quel autre état en un nombre fini d'étapes. Cela signifie également que la matrice des probabilités de transition en une étape est telle qu' au moins une de ses puissances n'a que des éléments positifs.

Une chaîne finie est ergodique si la valeur propre unité (1) de P est simple (i.e. de multiplicité 1) et si toute autre valeur propre de P est de module strictement inférieur à 1.

Si une chaîne est ergodique, alors $\pi(n)\to\pi$ et $P^n\to P^*$ où $\pi_i(n)=P(X_n=i)\to\pi_i$, $\pi(n)=(\pi_1(n),\pi_2(n),\ldots.)$, $\pi=(\pi_1,\pi_2,\ldots)$. La matrice P* est une matrice stochastique dont toutes les lignes sont identiques et égales au vecteur π. Le vecteur π est tel que $\pi_i>0$, $\sum_i \pi_i = 1$, et satisfait la condition de stationnarité $\pi=\pi P$ ou bien $\sum_i \pi_i p_{ij} = \pi_j$. Il n'existe pas d'autre vecteur vérifiant ces conditions.

Exemple 1 (suite). La chaîne est finie, irréductible, apériodique, donc elle est récurrente positive et ergodique. Il existe une seule distribution stationnaire solution du système d'équations linéaires $\pi=\pi P$ avec $\pi_0+\pi_1=1$; soit $\pi=(4/9, 5/9)$: i.e. $\pi_0(n)\to\pi_0=4/9$ lorsque $n\to\infty$ et $\pi_1(n)\to\pi_1=5/9$ (comparer avec les résultats expérimentaux obtenus à l'aide de la formule récursive $\pi(n)=\pi(0)P^n$ (au début de l'exercice).

Travaux pratiques (TP N°1).

Ecrire un programme (à l'aide du langage de votre choix) permettant de calculer les probabilités de transition en n étapes (la matrice P^n) et la distribution stationnaire π (On pourra utiliser MATLAB, MAPLE ou MATEMATIKA par exemple) Tester votre programme en comparant avec les résultats obtenus manuellement en TD pour l'exercice 4.

Interprétation de l'ergodicité

S'il existe une distribution limite π, alors il existe une distribution stationnaire unique qui est solution de $\pi=\pi P$. Chaque solution $\pi\geq 0$ vérifiant la condition $\sum_i \pi_i = 1$ s'appelle distribution stationnaire (ou invariante) de probabilité pour la chaîne de Markov. En effet, prenons π en guise de distribution initiale $\pi(0)=\pi$ (i.e. $\pi_i(0)=\pi_i$ $\forall$ i), alors la distribution de probabilité de la chaîne après une étape $\pi(1)=\pi$ (car $\pi_j(1)=\sum_k \pi_k(0)p_{kj} = \pi_j$), et en général la distribution après n étapes $\pi(n)=\pi$. En d'autres termes, si en guise de distribution initiale on prend π, cette distribution ne variera pas dans le temps i.e. $P(X_k=j)=P(X_0=j)$ pour tout état j. De plus, avec une telle distribution initiale, la chaîne sera stationnaire. La condition d'ergodicité garantit l'existence des limites $\pi_j=\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ indépendantes de i, mais également l'existence d'une distribution ergodique i.e. une loi avec $\pi>0$, qui est également stationnaire. On vérifie que cette distribution stationnaire est unique.

Remarque. La distribution de probabilité stationnaire (de plus unique) peut exister pour une chaîne non ergodique. Soit la chaîne de matrice

$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors, $P^{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, par conséquent les limites $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ n'existent pas, et la chaîne n'est pas ergodique. Pourtant, le système $\pi=\pi P$ qui s'écrit encore $\pi_1=\pi_2$, $\pi_2=\pi_1$, admet une solution unique vérifiant $\pi_1+\pi_2=1$ qui est $\pi=(1/2,1/2)$.

Cas dénombrable.

Proposition 5. (Existence des distributions limites stationnaires).

Soit une chaîne de Markov à espace des états dénombrables et de matrice des probabilités de transition P telle que $\forall$i,j $\exists$ $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ indépendantes de i. Alors

$$\pi_j = \sum_k \pi_k p_{kj}\text{ , } j\in E\text{, et } \sum_k \pi_k \leq 1$$

On a deux cas possibles : soit tous les $\pi_j=0$, soit $\sum_k \pi_k = 1$

- Si tous les π_j =0, alors la distribution stationnaire n'existe pas ;
- Si $\sum_k \pi_k = 1$, alors $\pi=(\pi_1,\pi_2,\ldots)$ forme la distribution stationnaire unique.

Proposition 6. Existence et unicité de la distribution stationnaire.

La distribution stationnaire unique existe si et seulement si dans l'espace des états, il existe une et une seule classe récurrente positive (d'états essentiels communiquants).

Plus précisément,

• S'il n'existe pas de classes récurrentes positives, alors tous les états sont transitoires ou récurrents nuls. D'après les propositions 3 et 4, $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ ∀ i,j. Par conséquent d'après la proposition 5, la distribution stationnaire n'existe pas.

• Supposons qu'il existe une et une seule classe récurrente positive, disons C. Si la période d=d(C)=1, alors d'après la proposition 3(a), $p_{ij}^{(n)} \to \frac{1}{\mu_j}$ ∀ i,j∈C. Posons $q_j = \frac{1}{\mu_j} > 0$ pour j∈C, et q+j+=0 pour j∉C. Alors en vertu de la proposition 5, $q=(q_1,q_2,\ldots)$ forme une distribution stationnaire qui est unique.

Supposons d=d(C)>1 et notons $C_0, C_1, \ldots, C_{d-1}$ les sous-classes cycliques. Chacune de ces sous classes forme par rapport à la matrice P^d une classe récurrente apériodique. Donc, si i,j∈C_k, alors d'après la proposition 4, $p_{ij}^{(n)} \to \frac{d}{\mu_j} > 0$. C(est pourquoi sur chaque classe C_k, le vecteur $\{\frac{d}{\mu_j}, j \in C_k\}$ forme (par rapport à la matrice P^d) une distribution stationnaire unique. Si on pose $q_j = \frac{1}{\mu_j}$ pour $j \in C_0+C_1+\ldots+C_{d-1}$ et $q_j=0$ pour j∉C, alors le vecteur $q=(q_1,q_2,\ldots)$ forme pour la chaîne initiale une distribution stationnaire unique.

Supposons maintenant que le nombre de classes récurrentes positives soit N≥2. Notons les C^1, $C^2, \ldots, C^N$ et soit $q^i=(q_1^i, q_2^i, \ldots)$ la distribution stationnaire correspondant à la classe C^i, et construite selon la formule $q_j^i = \frac{1}{\mu_j} > 0, j \in C^i$, et $q_j^i=0$ pour $j \notin C^i$. Alors toute combinaison $a_1q^1+a_2q^2+\ldots+a_Nq^N$ forme également une distribution stationnaire, où $a_1,\ldots,a_N$ sont des réels positifs tels que $a_1+\ldots+a_N=1$. D'ici, il résulte que pour N≥2, il existe une infinité (un continuum) de distributions stationnaires.

Donc, la distribution stationnaire unique n'existe que dans le cas N=1.

Proposition 7. Existence d'une distribution limite.

Pour qu'il existe une distribution limite, il est nécessaire et suffisant que dans l'ensemble E de tous les états de la chaîne, on puisse trouver exactement une classe récurrente positive apériodique telle que $f_{ii}=1$, ∀j∈C, i∈E.

Résumé

Ergodicité ⇔ chaîne irréductible récurrente positive avec d=1.
⇓
∃ distribution limite ⇔ ∃ ! classe récurrente positive avec d=1 ($f_{ij}=1$ j∈C,i∈E)
⇓
∃ distribution stationnaire ⇔ ∃ ! classe récurrente positive d'états essentiels communiquants.

Chaîne finie

Chaîne irréductible d=1 $\Leftrightarrow$ chaîne récurrente positive

$\Leftrightarrow$ chaîne ergodique

Exercice 1: **Transmission de l'information.**

Un réseau de communication transmet un nombre en système binaire (0 ou 1). En traversant le réseau, il y a une probabilité q pour que le chiffre soit transmis correctement à l'étape suivante. Soit X(0)=chiffre transmis à l'entrée du réseau. X(1)=chiffre enregistré à la première transmission., X(2)=chiffre enregistré à la seconde transmission.....Vérifier que X(n) est une chaîne de Markov. Calculer sa matrice des transitions. Etudier la nature de la chaîne. Calculer la distribution stationnaire si elle existe.

Exercice 2: **Disponibilité d'un système informatique** (SI).

Le SI est assimilé à un système physique qui à l'issue d'une inspection peut se trouver à l'un des états suivants: E_1:Le SI est fonctionnel (en bon état); E_2: Le SI comporte en mémoire certains défauts qui permettent toutefois de résoudre les problèmes; E_3: Le SI comporte des défauts significatifs qui ne permettent de résoudre qu'une classe limitée de problèmes; E_4: le SI est entièrement non opérationnel. On suppose qu'à l'instant initial le SI est en bon état (état E_1). L'inspection du SI s'effectue à des instants discrets (jours) t_1, t_2,t_3,...On suppose que l'évolution s'effectue selon une chaîne de Markov de matrice de transition en une étape

$$P= \begin{matrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0 \end{matrix}$$

Etudier la nature de la chaîne, calculer les probabilités d'états après trois inspections. Existe-t-il une distribution stationnaire? Si oui, laquelle?

Exercice 3: Architecture parallèle.

On considère une architecture parallèle bi-processeurs où chaque processeur a une fiabilité (probabilité de ne pas tomber en panne) égale à p au cours d'une journée; la probabilité de panne durant la journée est égale à q=1-p. Modéliser le fonctionnement de cette architecture pour chacun des situations suivantes.

(i) on suppose que les deux processeurs fonctionnent indépendamment l'un de l'autre et qu'il n'y a pas de possibilité de réparation.
(ii) On suppose que si un processeur tombe en panne, il est réparé au cours de la nuit.
(iii) Le processeur en panne n'est pas réparé durant la nuit , mais au cours de la journée suivante.
(iv) Un seul processeur est actif, le second est en redondance passive (stand-by). Dès que le processeur principal est en panne , le second prend la relève sans arrêter le système. Soit a= probabilité que le processeur actif tombe en panne; b= probabilité pour que le processeur soit réparé.

Exercice 4: **Gestion de stocks.**

Un magasin assure la vente d'un certain type d'articles (des micro-ordinateurs disons). Le modèle de micro peut-être commandé chaque semaine. On note D_i la demande durant la ième semaine . Soit a_k=P(Di=k}, k=0,1,... Les variables D_i sont supposées indépendantes, identiquement distribuées de loi $\{a_k\}$ connue. Le jeudi soir , on passe une commande qui est livrée le samedi matin. On utilise la politique de gestion du stock (s-S): si le nombre de micros disponibles à la fin de la semaine est <s, on passe une commande pour ramener le stock au niveau S. Sinon, on ne passe pas de commande. Soit X(n)=nombre de micros en stock à la fin de la semaine n. Pour fixer les idées on posera s=1, S=3, et on supposera que la demande suit une loi de Poisson de paramètre λ=1.

(i) Vérifier que la suite X(n) forme une chaîne de Markov. Ecrire la matrice de transition.
(ii) Calculer $P^{(2),}$ $P^{(4)}$,$P^{(8)}$. Sachant qu'il y a un micro en stock à la fin de la semaine, quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait plus de micros en stocks 4 semaines plus tard? 8 semaines plus tard? Que remarque-t-on?
(iii) Quel est le temps moyen jusqu'à ce que le stock de micro s'épuise si X(0)=0?
(iv) Représenter le graphe des états. En déduire la nature de la chaîne.
(v) Discuter l'existence d'une distribution stationnaire et calcule-la éventuellement.
(vi) Utiliser le résultat de (v) pour répondre à la question (iii).

Exercice 5: **Marches aléatoires**.

On considère les marches aléatoires suivantes:

(i) la marche sur la droite des entiers relatifs , illimitée dans les deux directions: un pas de +1 (vers la droite) avec une probabilité p , et un pas) -1 (vers la gauche) avec une probabilité q=1-p (interpréter les cas p=0 et p=1).
(ii) idem , mais 0 est un état absorbant;
(iii) idem mais 0 et N sont des états absorbants.
(iv) idem avec barrière réfléchissante au point 0, illimitée à droite.
(v) idem avec barrières réfléchissantes en 0 et N.

I.**Analyse**: Pour chacun de ces modèles:
(a) Vérifier que le modèle est bien décrit par une chaîne de Markov.

(b) Etudier la nature de la chaîne (classification des états) et discuter l'existence d'une distribution stationnaire.

II.**Modélisation**: L'étude des modèles suivants peut se ramener à l'étude d'une marche aléatoire. Indiquer comment trouver les paramètres de la marche et interpréter les résultats.

(i) **Modèle de diffusion d'Ehrenfest** . Ce modèle est un classique des problèmes de diffusion en mécanique ou de transfert de chaleur en Thermodynamique. Soient N molécules qui sont réparties dans deux récipients A et B. A chaque expérience , on choisit au hasard l'une des molécules et on la change de récipient: les molécules ont des chances égales d'être tirées. On s'intéresse au nombre de molécules dans le récipient A à l'expérience n.

(ii)**Ruine du joueur**. Deux joueurs A et B (des entreprises concurrentes par exemple) jouent à Pile u Face. A gagne lorsque l'issue du lancer est Pile, auquel cas le joueur B lui remet +1 dinar. Si A perd (lorsque l'issue est Face), c'est lui qui remet +1 dinar à B. Le capital initial de A est C(A)=i dinars et celui de B est C(B)=K-i dinars. La partie s'arrête dès que l'un des deux joueurs est ruiné.

Exercice 6. Une escadrille composée de 4 avions est chargée de missions quotidiennes au dessus du territoire ennemi et y subit des pertes. Elle n'effectue toutefois sa mission journalière que si son effectif au début de la journée s'élève à au moins 3 appareils. Si d'autre part son effectif au soir de la journée précédente est réduit à 2 ou moins de 2 appareils, elle reçoit au cours de la nuit un appareil en renfort. Soit p la probabilité de destruction d'un appareil au cours d'une mission. Soit X(n)=nombre d'appareils au début d'une mission éventuelle.

(a) Montrer que X(n) est une chaîne De Markov d'espace d'état E={1,2,3,4}.

(b) Donner sa matrice de transition.

(c) On suppose que p=1/3. Etudier la nature de la chaîne. En déduire qu'il existe une unique classe récurrente apériodique C.

(d) Soit $\pi(n)=\{\pi_1(n),\pi_2(n),\pi_3(n),\pi_4(n)\}$ où $\pi_i(n)=P\{X(n)=i\}$ la probabilité pour que la chaîne se trouve à l'état i le jour n, i=1,2,3,4. Soit $\pi=\lim \pi(n)$ lorsque n tend vers l'infini. Calculer $\pi(j)$ pour les états j transitoires (sans faire de calcul).

(e) Calculer $\pi(i)$ pour les états récurrents $i\in C$.

Exercice 7. Etudier la nature des chaînes suivantes données par les matrices de transition :

(a)

$$P1=\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$P_2=\begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 & 4/5 \\ 2/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 4/15 & 11/15 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 :Soit X(t) l'état de la chaîne de Markov de matrice des probabilités de transition

$$P=\begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 4/11 & 8/11 \end{pmatrix}$$

A l'instant t=1, 2, 3,… P(X(0)=1)=1. Trouver la probabilité pour qu'à l'instant t=2 la chaîne se trouve à l'état 2. Etudier la nature de cette chaîne et discuter l'existence d'une distribution stationnaire. On forme le nouveau processus aléatoire Y(t)=1 si X(t)=1 et Y(t)=2 sinon. Est-ce que Y5t) est une chaîne de Markov ? Si oui déterminer sa matrice de probabilités des transitions et étudier sa nature

Exercice 9. On considère une suite de variables aléatoires ξ_t, t=1,2,…indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune $P(\xi_t,=+1)=p$, $P(\xi_t,=-1)=1-p$. On forme un nouveau processus aléatoire de la manière suivante : $X(t)=f(\xi_t,,\xi_{t+1})$, où f(-1,-1)=1 ; f(-1,1)=2 ; f(1,-1)=3 ; f(1,1)=4. Le processus X(t) forme-t-il une chaîne de Markov ? Dans l'affirmative, déterminer sa matrice des probabilités de transition en une étape et étudier sa nature (classification, existence de la distribution stationnaire, son calcul éventuel).

NB : On distinguera les différents cas : (i) p=0 ; (ii) p=1 et (iii) 0<p<1.

Chapitre 4.
Chaînes de Markov à temps continu.

Considérons maintenant le cas où le système est observé en temps réel et peut donc être décrit par une chaîne de Markov à temps continu à espace des états E discret. Le processus $\{X(t),\ t\in IR^+\}$ vérifie donc la propriété de Markov. La classification des états s'effectue de manière similaire à la classification d'une chaîne à temps discret. Nous avons vu qu'un tel processus peut être décrit à l'aide de la matrice des probabilités de transition $P(t)=||P_{ij}(t,t')||$, où $P_{ij}(t,t')=P\{X(t')=j/X(t)=i\}$ est la probabilité de passage de l'état i à l'état j entre les instants t et t'. Il est préférable toutefois de décrire l'évolution de la chaîne à l'aide des taux de transition instantanés.

Définition 1. On appelle taux de transition $\lambda_{ij}(t)$ de l'état i vers l'état j la quantité

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{P_{ij}(t,t+h)}{h}$$

La quantité λ_{ij} ((t)h +o(h) peut être interprétée comme la probabilité de transition de l'état i vers l'état j au cours d'un intervalle infiniment petit (t,t+h). La matrice $\Lambda(t)=||\Lambda_{ij}(t)||$ s'appelle matrice des taux de transition. Si la chaîne est homogène, les probabilités $P_{ij}(t)\equiv P_{ij}(t-t')$ et les taux de transition sont indépendants du temps $\lambda_{ij}(t)\equiv\lambda_{ij}$.

Soient $\pi_j(t)=P\{X(t)=j\}$, $j\in E$ les probabilités d'état de la chaîne. Ces probabilités sont solutions du système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$\frac{d\pi_j(t)}{dt} = -\pi_j(t)\sum_{i\neq j}\lambda_{ji}(t) + \sum_{i\neq j}\lambda_{ij}(t)\pi_j(t) \quad , j\in E$$

Si on note (après renumérotation des états) par $\pi(t)=(\pi_1(t),\pi_2(t),\ldots)$le vecteur des probabilités d'états , le système précédent peut être réécrit sous forme matricielle

$$\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t)\Lambda(t)$$

La solution formelle s'écrit $\pi(t) = \pi(0)e^{\int_0^t \Lambda(u)du}$ ou bien dans le cas homogène $\pi(t) = \pi(0)e^{\Lambda t}$.

Si on s'intéresse à la solution stationnaire (si un tel régime stationnaire existe), alors le vecteur $\pi = \lim_{t\to\infty}\pi(t)$ est solution de l'équation $\pi\Lambda=0$.

Remarque : ne pas confondre Λ avec la matrice des probabilités de transition d'une chaîne discrète. Cette matrice n'est pas stochastique . et ses éléments sont de la forme

$$\Lambda_{ij}=\lambda_{ij}(t) \quad i\neq j \ ; \ \Lambda_{ii}(t)=-\sum_{j\neq i}\lambda_{ij}(t)$$

La somme des éléments d'une ligne est nulle.

Exemple 1 : **Disponibilité d'un système**.

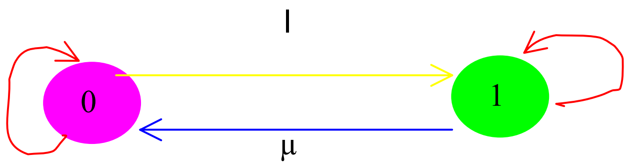
Considérons un système (processeur) pouvant se trouver à deux états possibles.

X(t)=0 si le processeur est en bon état à l'instant t

X(t)=1 si le processeur est en panne à l'instant t

On suppose que la durée de bon fonctionnement jusqu'à la défaillance est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ ; la durée de réparation est également une variable aléatoire Y de loi exponentielle de paramètre μ.

Le graphe des états est le suivant



On remarque que si λ>0 et μ>0 , la chaîne est irréductible et apériodique et comme l'espace des états est fini, elle est ergodique (récurrente positive). Il existe donc une distribution stationnaire unique $\pi=(\pi_0,\pi_1)$.On vérifie que

$$\frac{d\pi_0(t)}{dt} = -\lambda\pi_0(t) + \mu\pi_1(t)$$

$$\frac{d\pi_1(t)}{dt} = -\mu\pi_1(t) + \lambda\pi_0(t)$$

avec la condition de normalisation $\pi_0(t)+\pi_1(t)=1$ pour tout t. En remplaçant $\pi_1(t)=1-\pi_0(t)$ on obtient une seule équation différentielle ordinaire

$$\frac{d\pi_0(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)\pi_0(t) + \mu$$

La solution dépend de la condition initiale

$$\pi_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu[1-\pi_0(0)] - \lambda o_0(0)}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Pour $\pi_0(o)=1$ (le système est initialement en bon état), la solution s'écrit

$$\pi_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Pour $\pi_0(o)=0$ (le système est initialement en panne), la solution devient

$$\pi_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$$

Le graphe représente l'évolution de la probabilité de bon fonctionnement en fonction du temps. On remarque que $\lim_{t \to \infty} \pi_0(t) = \pi_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$ indépendamment de la distribution de l'état initial. La distribution stationnaire est $\pi = \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)$.

A.N. Supposons que λ=2 défaillance par heure et μ=3 réparations par heure. Dans ce cas π_0=3/5 et $\pi_1$2/5. En d'autres termes le système est 60% du temps en bon fonctionnement et 40% du temps immobilisé pour cause de réparation (en régime stationnaire).

Sachant que le système est mis en exploitation à l'instant t=0, la probabilité pour qu'au bout de 10 heures il soit disponible est

$$\pi(10)= \pi 0(10)=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}e-50 \approx$$

Exemple 2 :**Processus de naissance et de mort.**

C'est un cas particulier de processus homogène de Markov dont la matrice des taux de transitions est de la forme

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \lambda_i \quad pour \quad j = i+1 \\ \mu_i \quad si \quad j = i-1 \\ 0 \quad pour \quad |i-j| > 1 \end{cases}$$

Interprétation : Ce type de processus a été utilisé initialement en relation avec des problèmes issus de la Biologie et de médecine (évolution de population).

Soit X(t) = le nombre d'individus d'une population à l'instant t.

 $\lambda_{i,i+1}$h+o(h)=λ_ih+o(h)=P(X(t+h)=i+1/X(t)=i) est la probabilité d'une naissance durant (t,t+h) sachant qu'à l'instant t la taille de la population était de i individus.

 $\lambda_{i,i-1}$h+o(h)=μ_ih+o(h)=P(X(t+h)=i-1/X(t)=i) est la probabilité d'une mort durant (t,t+h) sachant qu'à l'instant t la taille de la population était de i individus.

On suppose que la probabilité d'occurrence de plus de deux évènements est négligeable, d'ordre o(h).

Ces processus ont été également utilisés pour décrire des phénomènes de fission nucléaire en physique, en informatique pour la description des phénomènes d'attente (congestion dans les réseaux de communication, comme nous le verrons plus loin.

A l'aide de la méthode précédente, on établit les équations de Chapman-Kolmogorov :

$$\frac{d\pi_i(t)}{dt} = \lambda_{i-1}\pi_{i-1}(t) + \mu_{i+1}\pi_{i+1}(t) - (\lambda_i + \mu_i)\pi_i(t) \text{ , i=1,2,....}$$

$$\frac{d\pi_0(t)}{dt} = \lambda_1\pi_1(t) - \lambda_0\pi_0(t)$$

avec la condition de normalisation $\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i(t) = 1$, pour tout t$\in$IR$^+$.

Si un régime stationnaire existe, les probabilités $\pi_i = \lim_{t\to\infty}\pi_i(t)$ existent et sont indépendantes de t. Les dérivées dans la partie gauche des équations de Chapman s'annulent, et ont peut facilement résoudre le système par récurrence. On obtient :

$$\pi_i = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_{2\ldots}\mu_i}\pi_0$$

La constante π_0 s'obtient à partir de la condition de normalisation

$$\pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{i-1}\frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}\right)^{-1}$$

Notons

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{k}\frac{\mu_i}{\lambda_i}$$

alors on peut obtenir une classification des états de la chaîne. Si les $\lambda_i>0$ et $\mu_i>0$, alors la chaîne est irréductible, apériodique. Les états sont tous de même nature.

Etats ergodiques (récurrents positifs) si $S_1<\infty$ et $S_2=\infty$ (en effet si $S_1<\infty$, $\pi_0>0$, et tous les $\pi_{i>0}$, voir proposition ? pour les chaînes à temps discret).

Etats récurrents nuls si : $S_1=\infty$ et $S_2=\infty$

Etats non récurrents (transitoires) si : $S_1=\infty$ et $S_2<\infty$.

Dans les deux derniers cas en effet, $\pi_0=0$ et tous les $\pi_i=0$. La distribution stationnaire unique n'existe donc que dans le premier cas.

Exemple 3 :**Processus de Naissance pure.**

C'est un cas particulier du précédent lorsqu'il n'y a pas de mort ($\lambda_k=\lambda$ $\forall$ k, et $\mu_k=0$ $\forall$ k). Dans ce cas, tous les états sont non essentiels et transitoires (il n' y a donc pas de distribution stationnaire). Les équations de Chapman-Kolmogorov sont de la forme :

$$\frac{d\pi_i(t)}{dt} = \lambda\pi_{i-1}(t) - \lambda\pi_i(t), \text{ i=1,2,}\ldots$$

$$\frac{d\pi_0(t)}{dt} = -\lambda\pi_0(t)$$

Il est possible dans ce cas simple de déterminer la distribution de probabilités des états à tout instant en passant aux fonctions génératrices :

$$P(z,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i(t)z^i$$

En appliquant cette transformation à notre système d'équations, on obtient une équation différentielle ordinaire

$$\frac{dP(z,t)}{dt}=-(\lambda-\lambda z)P(z,t)$$

dont la solution est P(z,t)=C$e^{\lambda t(z-1)}$. La condition de normalisation P(z,0)=π_0(0)=1 (X(0)=0 avec une probabilité un) permet d'évaluer la constante C=1 . En développant P(z,t) en série de Taylor

$$P(z,t)=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}z^k$$

et en identifiant terme à terme, on trouve $\pi_k(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$ (k≥0). Cela signifie que le processus de naissance pure n'est rien d'autre que le processus de Poisson de paramètre λ, étudié précédemment.