Université d'Orléans

Formulaire des fonctions usuelles

Licence 1 de Mathématiques – Groupe 2

Baptiste Morelle
29/09/2008

Table des matières

Fonctions particulières

Fonction valeur absolue

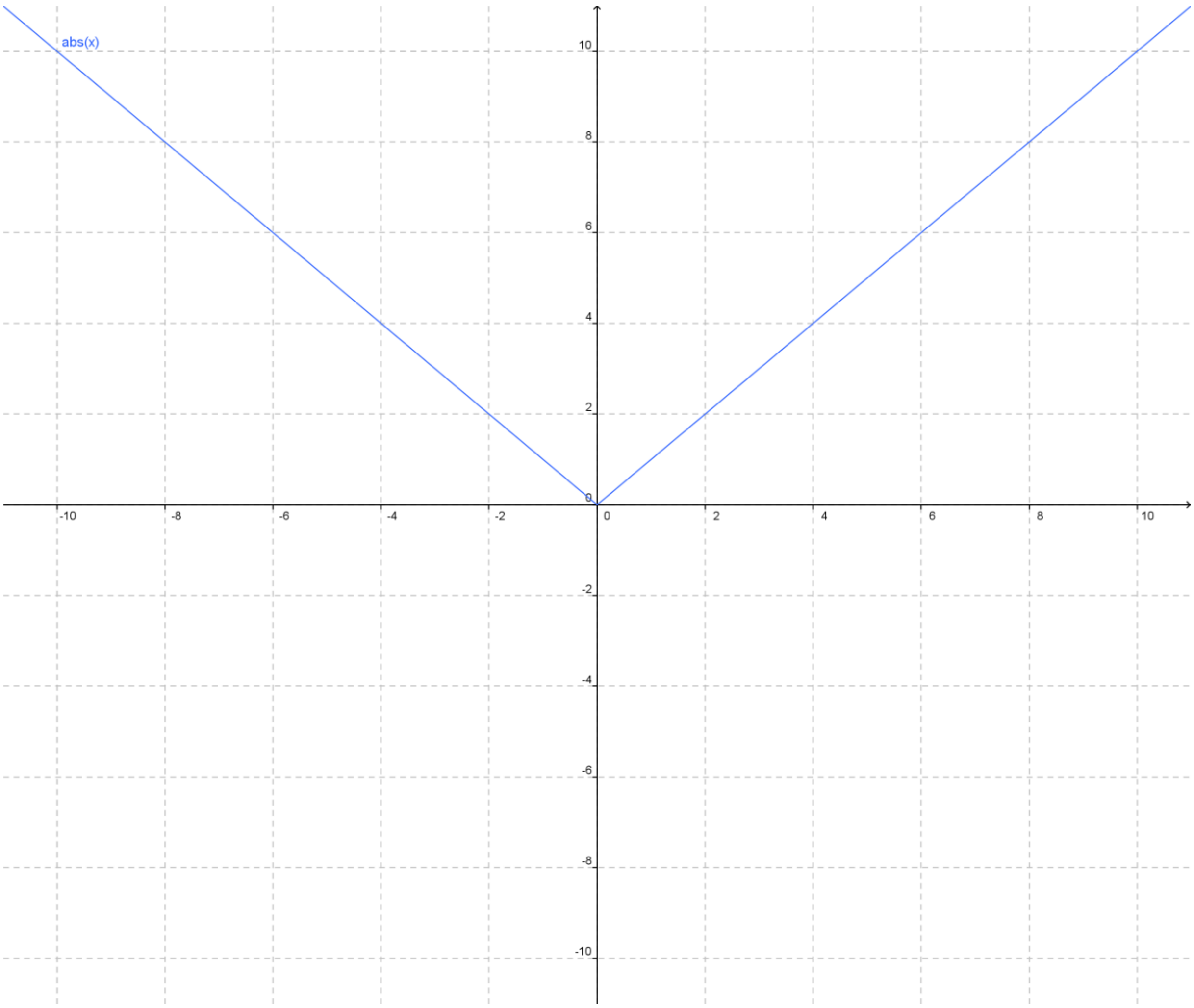
Définition : La fonction valeur absolue de x, notée |x|, est définie sur $\Re$ par :

$$|x| = \begin{cases} +x \; si \; x \geq 0 \\ -x \; si \; x \leq 0 \end{cases}$$

Propriétés :

- |x| est strictement décroissante sur]- ∞;0], et strictement croissante sur [0 ;+∞[
- |x| est une fonction positive
- |x| est paire
- Tout nombre réel strictement positif admet deux antécédents par cette fonction
- Un nombre strictement négatif n'admet pas d'antécédent par cette fonction
- |0| = 0

Graphe :



Fonctions particulières

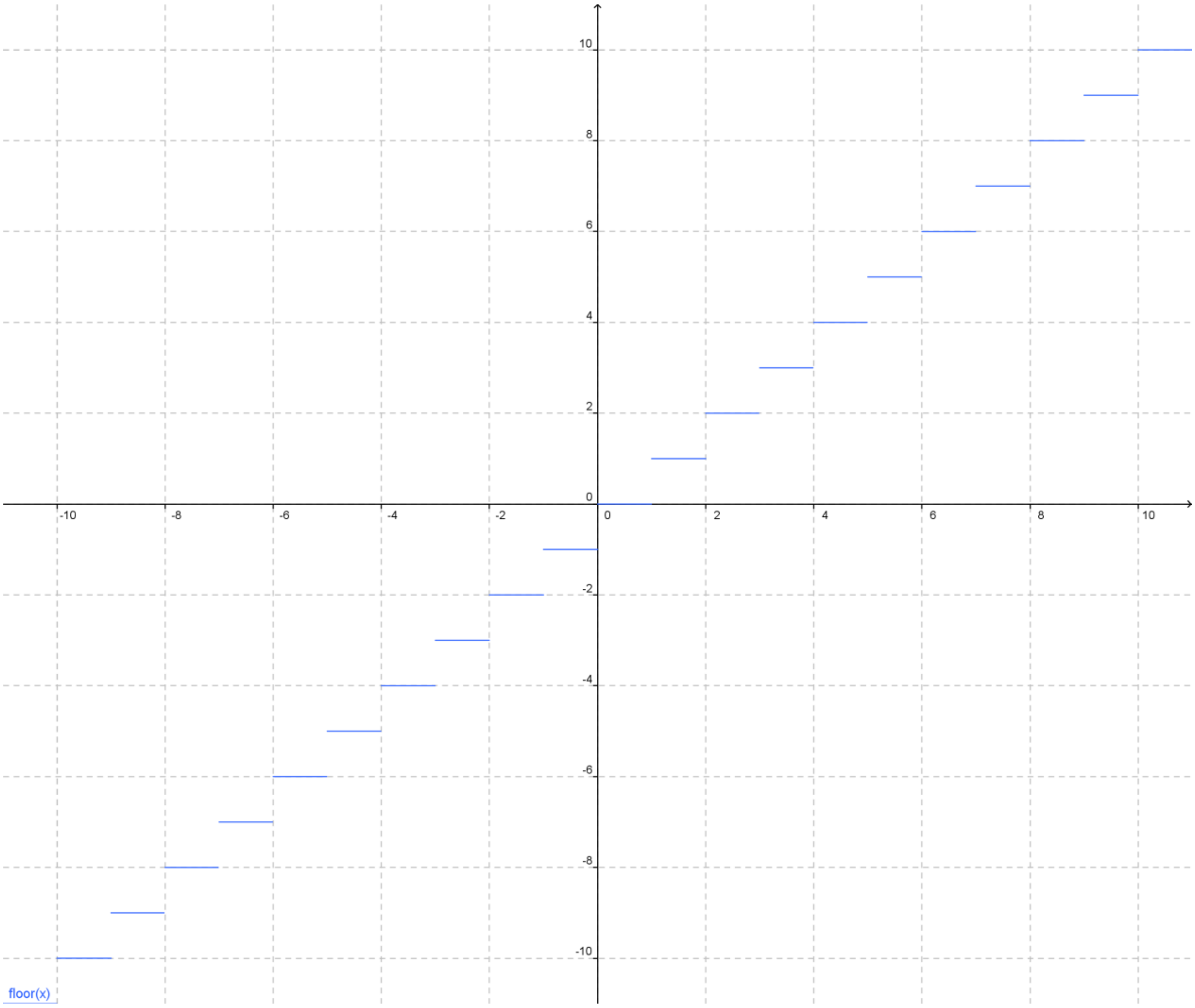
Fonction partie entière

Définition : La partie entière du réel x, notée E(x), est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Propriétés :

- La fonction partie entière est discontinue en tout p de $\mathfrak{Z}$

Graphe :



Fonctions particulières

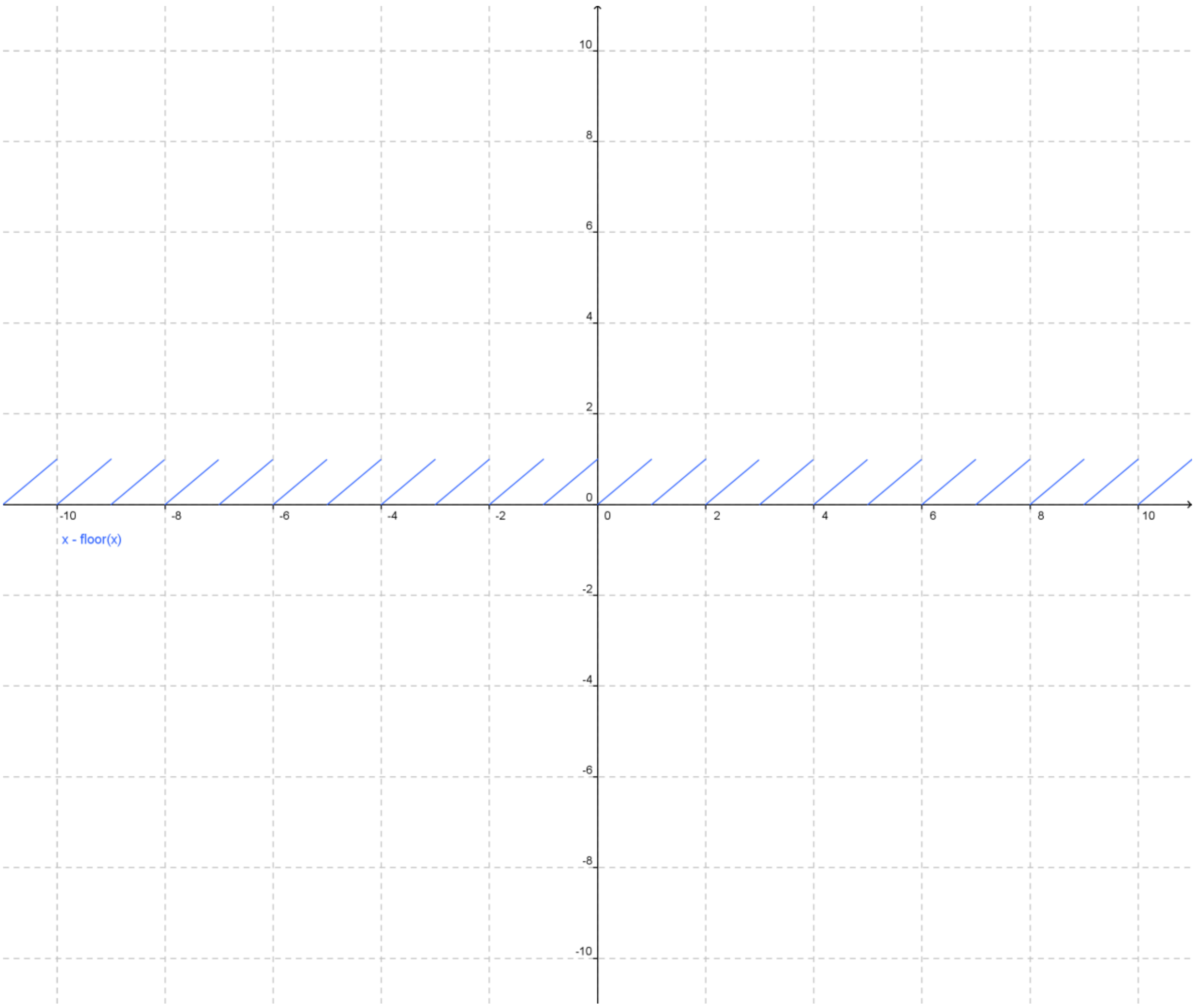
Fonction partie fractionnaire

Définition : La fonction partie fractionnaire du réel x, notée {x}, est définie par la relation :
{x} = x – E(x).

Propriétés :

- La fonction partie fractionnaire est discontinue en tout p de $\mathbb{Z}$
- {x} est 1-périodique

Graphe :



Fonctions polynômes et racines

Fonction constante

Définition : La fonction constante est la fonction qui à tout réel x, associe le réel C.

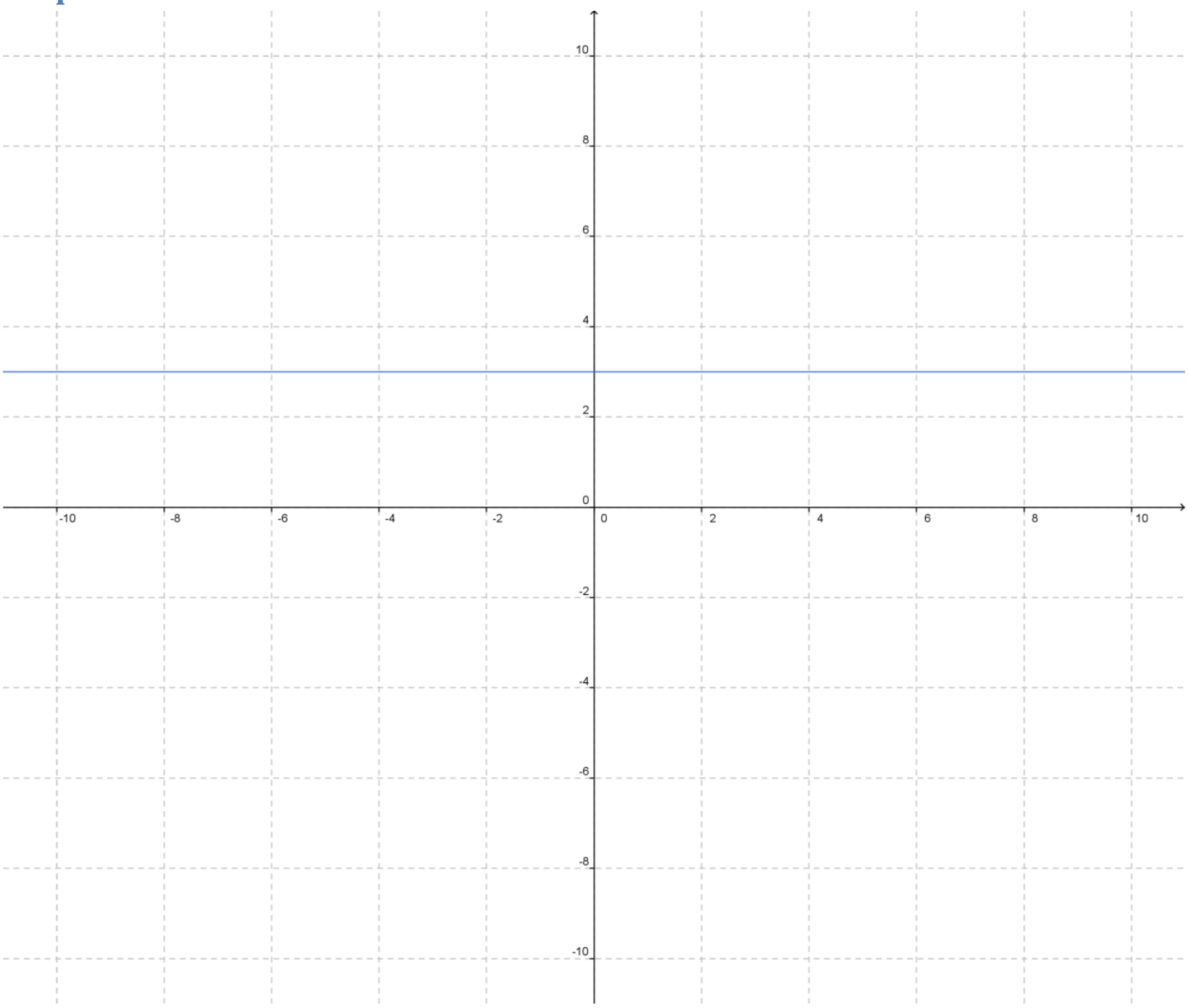
Propriétés :

- La fonction constante est paire
- C est le seul réel admettant des antécédents par la fonction constante, $\mathfrak{R}$ est l'ensemble des antécédents de C

Dérivée : f'(x) = 0

Primitive : F(x) = Cx

Graphe :



Fonctions polynômes et racines

Fonction linéaire

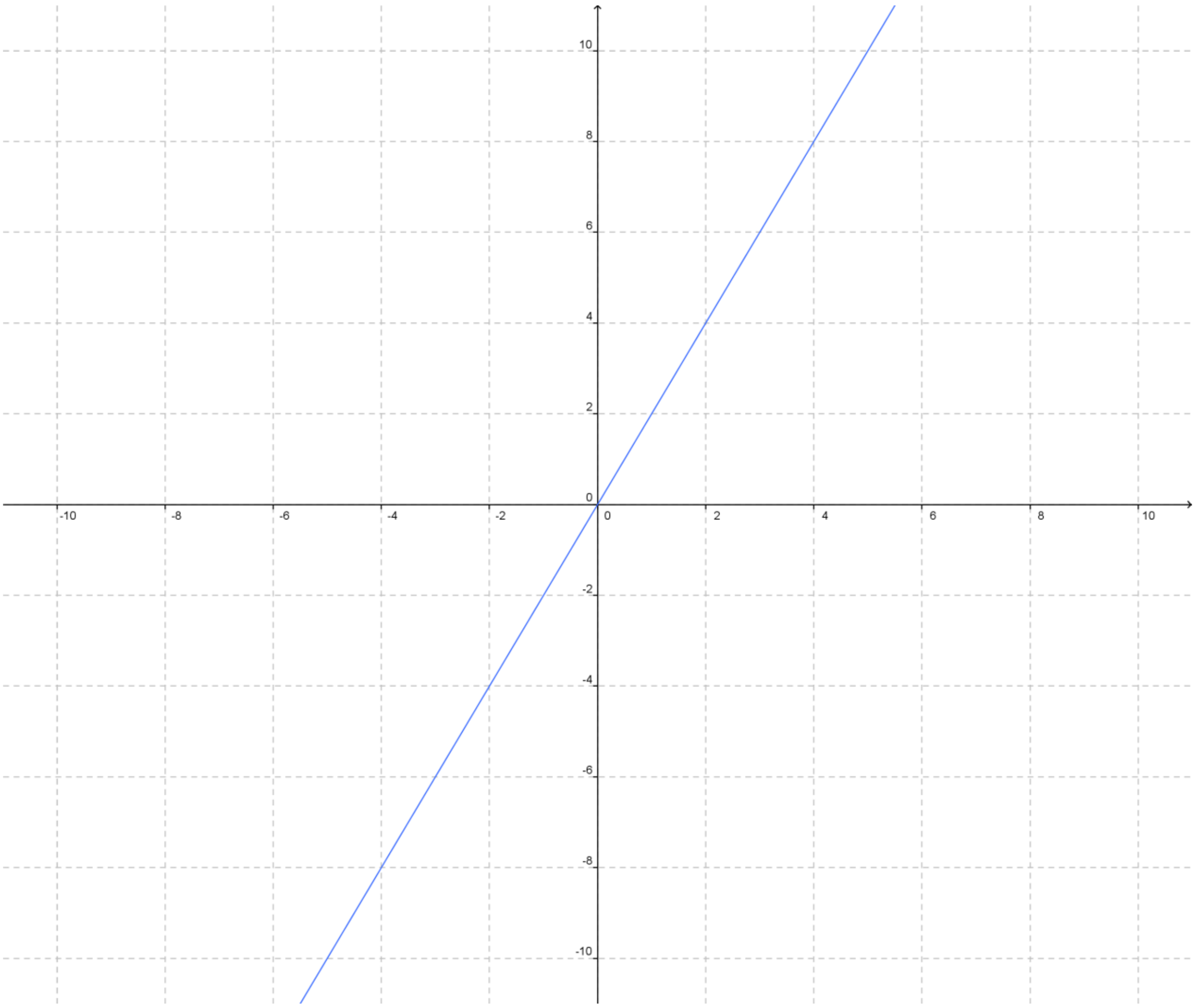
Définition : La fonction linéaire est la fonction qui à tout réel x associe le réel ax, où a est un coefficient réel.

Propriétés :

- La fonction linéaire est monotone (croissante si a est positif et décroissante si a est négatif)
- La fonction linéaire est impaire
- Si a $\neq$ 0, tout réel admet un unique antécédent par f

Dérivée : la fonction constante a. **Primitive :** $\frac{a}{2}\ x^2$

Graphe :



Fonctions polynômes et racines

Fonction affine

Définition : La fonction affine associe à tout réel x, le réel ax+b, où a est le coefficient directeur, et b l'ordonnée à l'origine.

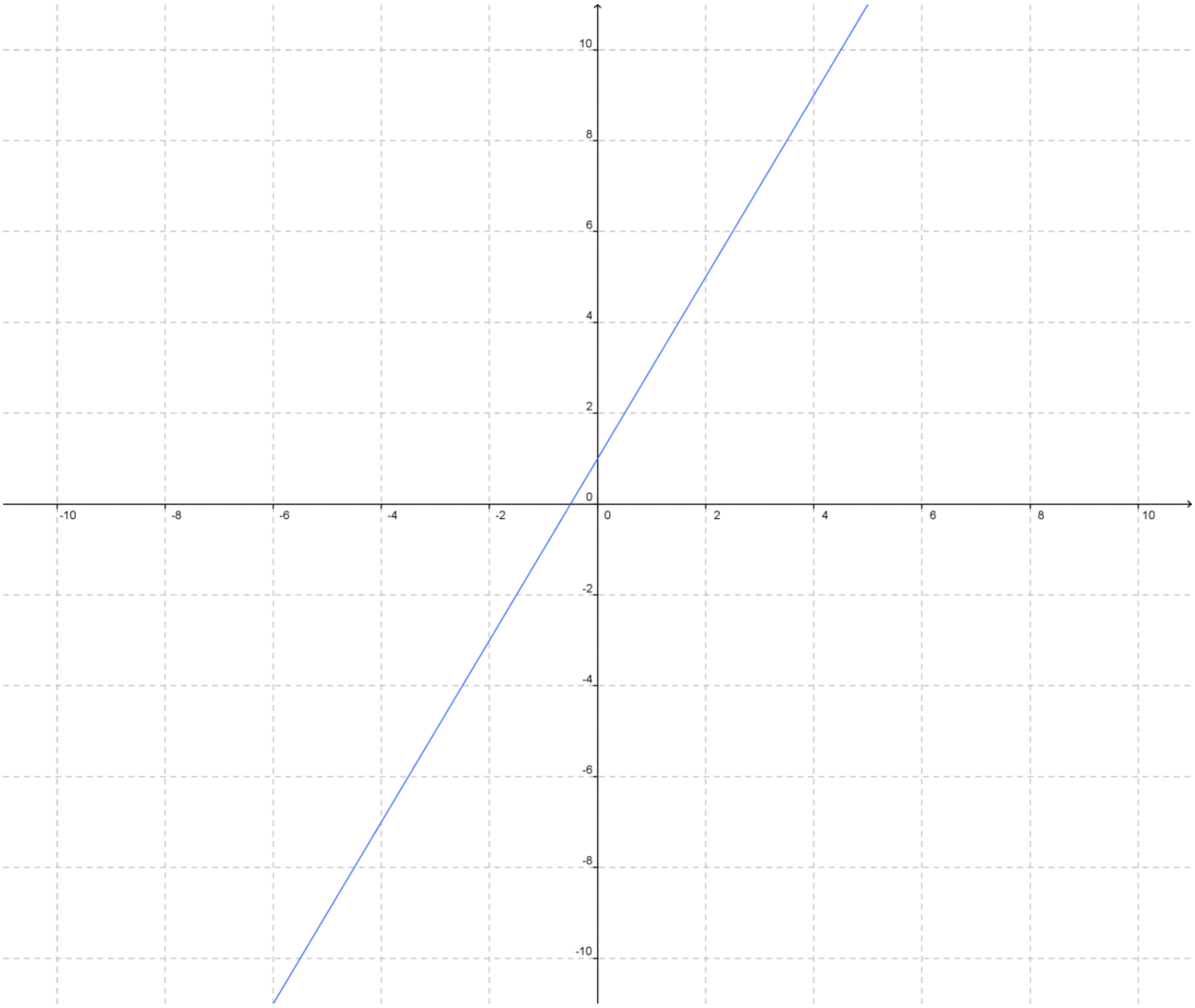
Propriétés :

- Si a est nul, alors f est constante
- Si b est nul, alors f est une fonction linéaire
- Le coefficient directeur est égal à la pente : $a = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1 - x_2}$ où $x_1 > x_2$

Dérivée : la fonction constante a.

Primitive : $\frac{a}{2}x^2 + bx$

Graphe :



Fonctions polynômes et racines

Fonction carrée

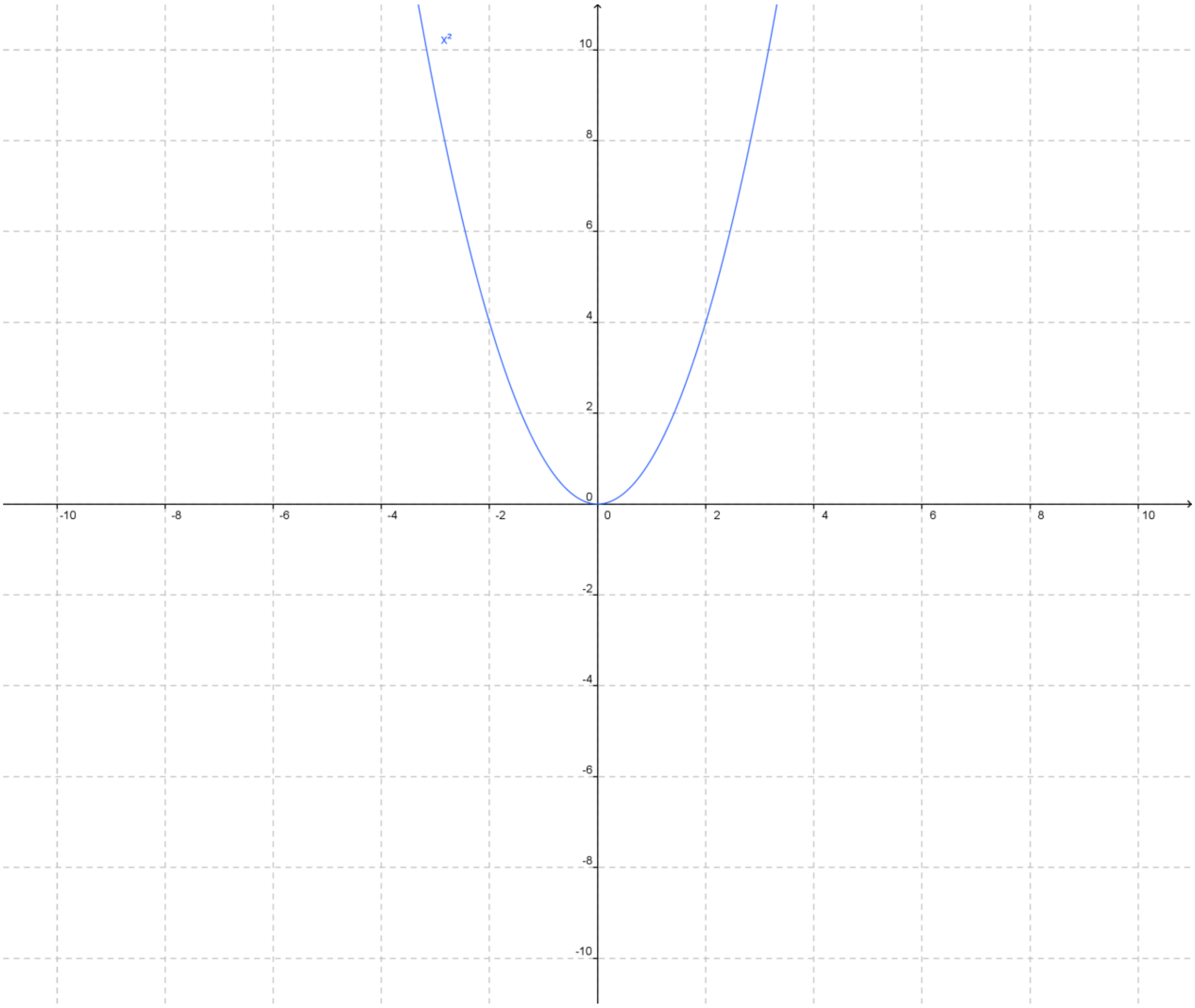
Définition : La fonction carrée est la fonction qui à tout réel x, associe le réel noté x^2, soit x multiplié par lui-même.

Propriétés :

- La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$
- x^2 est positive
- x^2 est paire
- Tout nombre réel strictement positif admet deux antécédents par cette fonction
- Un nombre strictement négatif n'admet pas d'antécédent par cette fonction

Dérivée : $f'(x) = 2x$ **Primitive :** $F(x) = \frac{1}{3}x^3$

Graphe :



Fonctions polynômes et racines

Fonction racine carrée

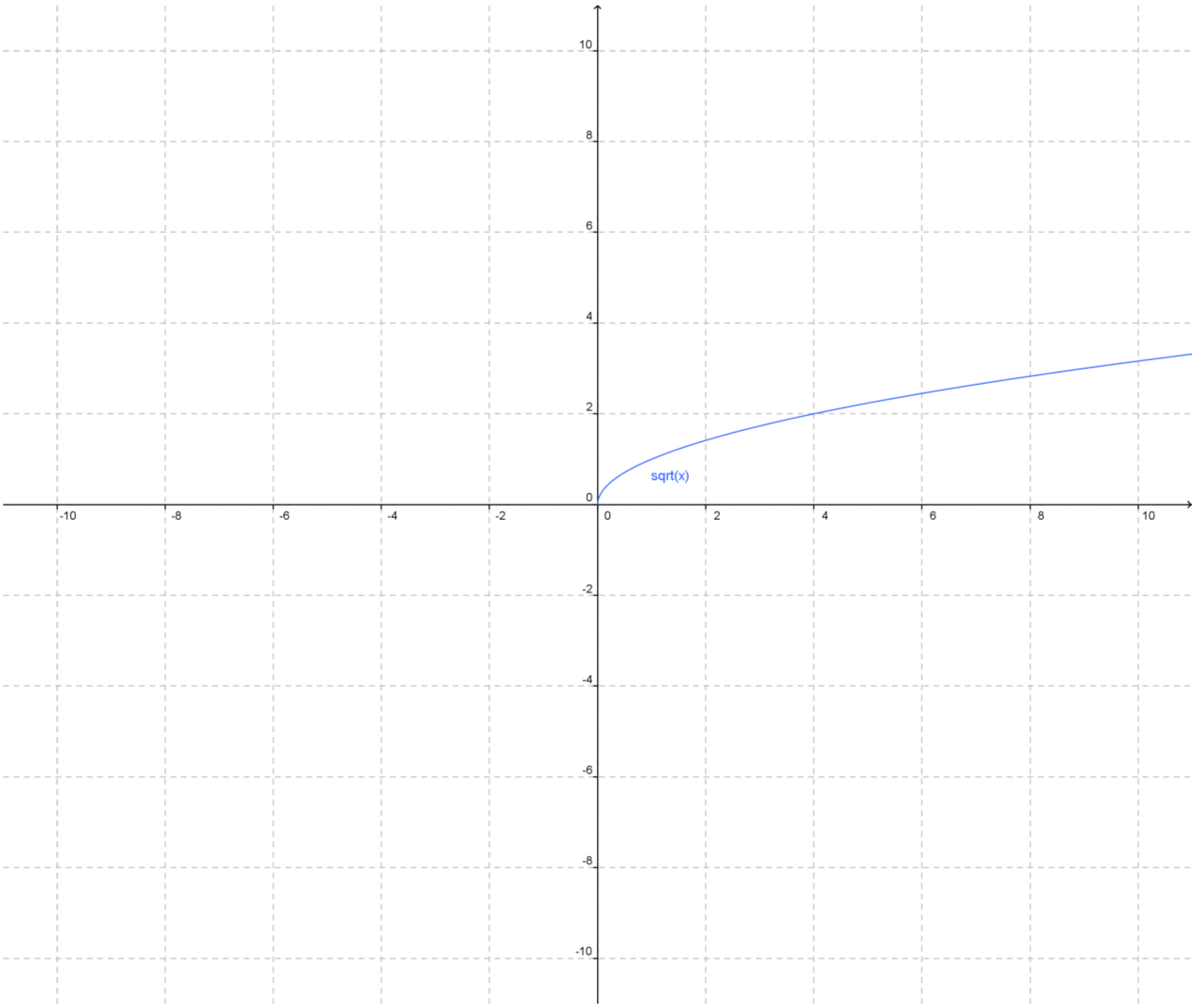
Définition : La fonction racine carrée, notée $\sqrt{x}$, associe à tout réel x positif, le nombre dont le carré vaut x. Son domaine de définition est : $[0; +\infty[$.

Propriétés :

- La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$
- La fonction racine carrée est positive
- La fonction racine carrée n'est ni paire, ni impaire
- Tout nombre réel strictement positif admet un unique antécédent par f : son carré

Dérivée : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **Primitive :** $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ f' est définie sur $]0; +\infty[$

Graphe :



Fonctions polynômes et racines

Fonction cube

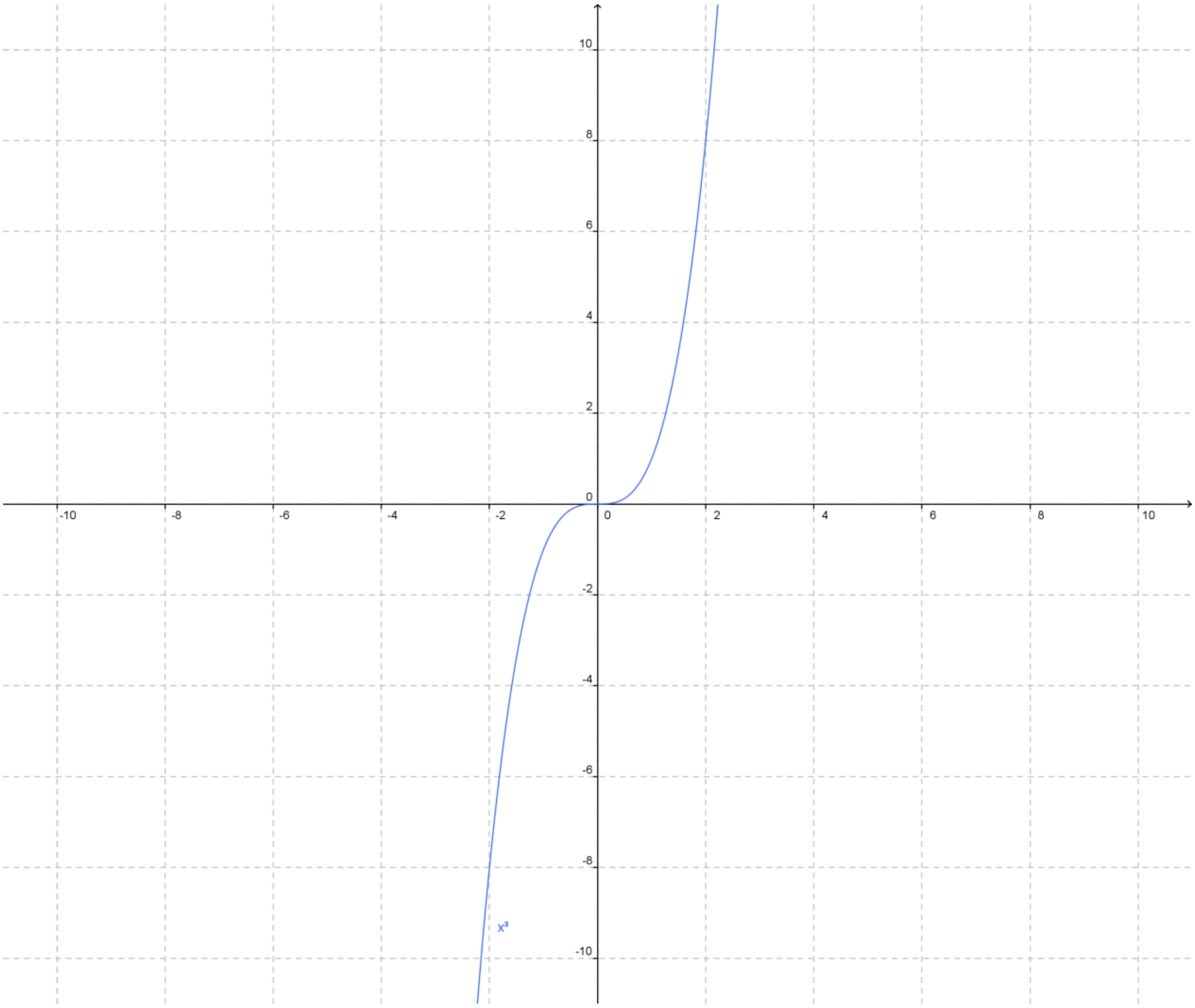
Définition : La fonction cube est la fonction définie par la relation : $f(x) = x^3$. Son domaine de définition est $\Re$.

Propriétés :

- La fonction x^3est strictement croissante sur $\Re$
- La fonction x^3est impaire
- La fonction x^3est bijective de $\Re \rightarrow \Re$

Dérivée : $3x^2$ **Primitive :** $\frac{1}{4}x^4$

Graphe :



Fonctions polynômes et racines

Fonction racine cubique

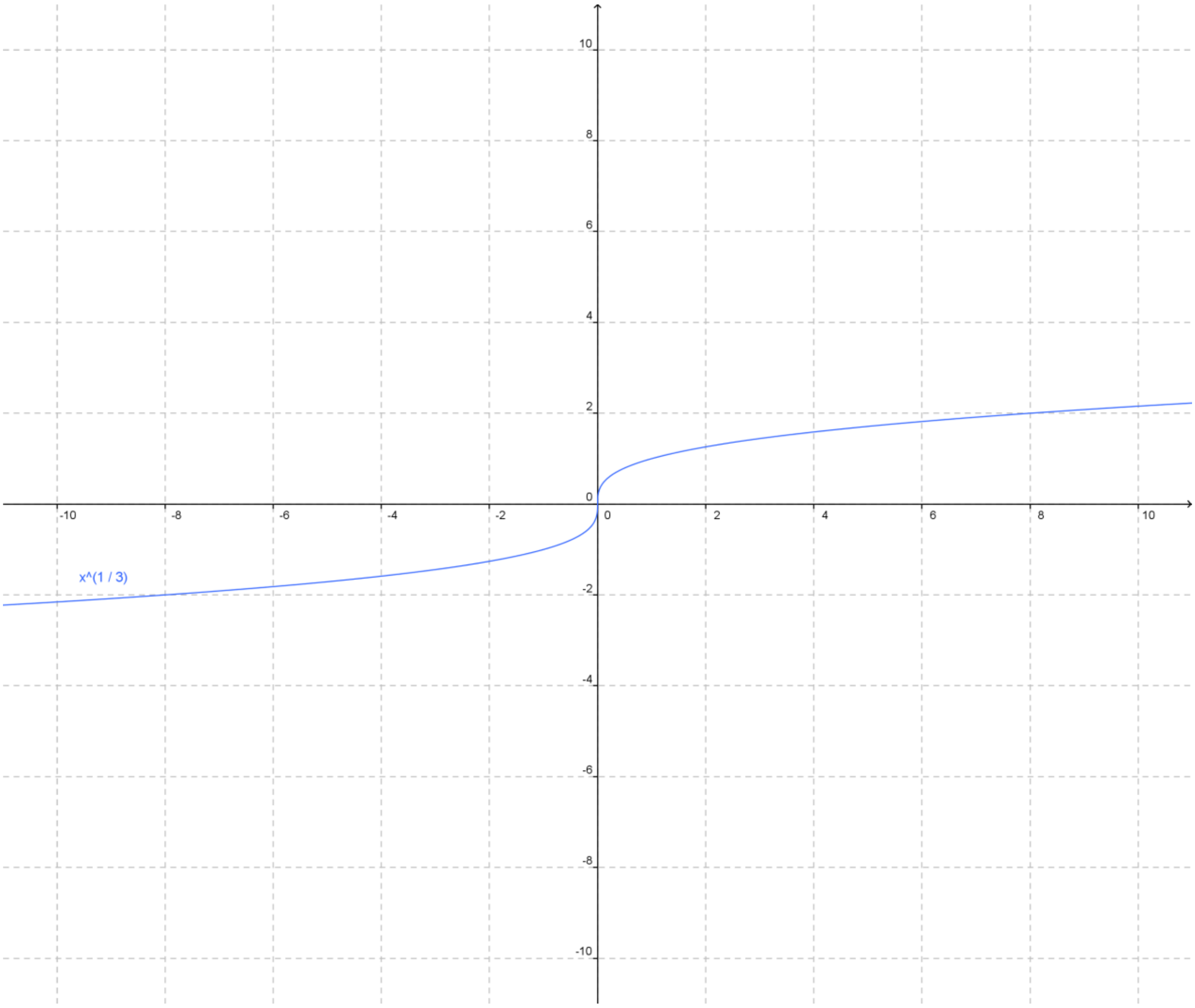
Définition : La fonction racine cubique, notée $\sqrt[3]{x}$, associe à tout réel x, le nombre dont le cube vaut x. Son domaine de définition est $\Re$.

Propriétés :

- La fonction racine cubique est strictement croissante sur $\Re$
- La fonction racine cubique est impaire
- La fonction racine cubique est bijective de $\Re \to \Re$

Dérivée : $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ **Primitive :** $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$

Graphe :



Fonctions polynômes et racines

Fonction polynôme du second degré

Définition : La fonction polynôme du second degré est définie par :
$f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des constantes réelles. (On suppose en général $a \neq 0$)

Propriétés :

- **Forme canonique :**
  - On appelle forme canonique de f, l'expression : $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$
- **Discriminant :**
  - Le discriminant de f est : $\Delta = b^2 - 4ac$
- **Racines :**
  - Si Δ est positif, alors f admet deux zéros donnés par : $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
  - Si Δ est négatif, alors f ne s'annule jamais sur $\mathfrak{R}$. f possède deux zéros complexes : $x = \frac{-b\pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$
  - Si Δ est nul, alors f possède un zéro double $x = \frac{-b}{2a}$

Signe :

Le signe du trinôme coïncide avec celui de a, sauf entre ses racines.

Sens de variation :

Si $a > 0$, alors f est décroissante sur $\left]-\infty; \frac{-b}{2a}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{-b}{2a}; +\infty\right[$.
Si $a < 0$, alors f est croissante sur $\left]-\infty; \frac{-b}{2a}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{-b}{2a}; +\infty\right[$.

Dérivée : $f'(x) = 2ax + b$

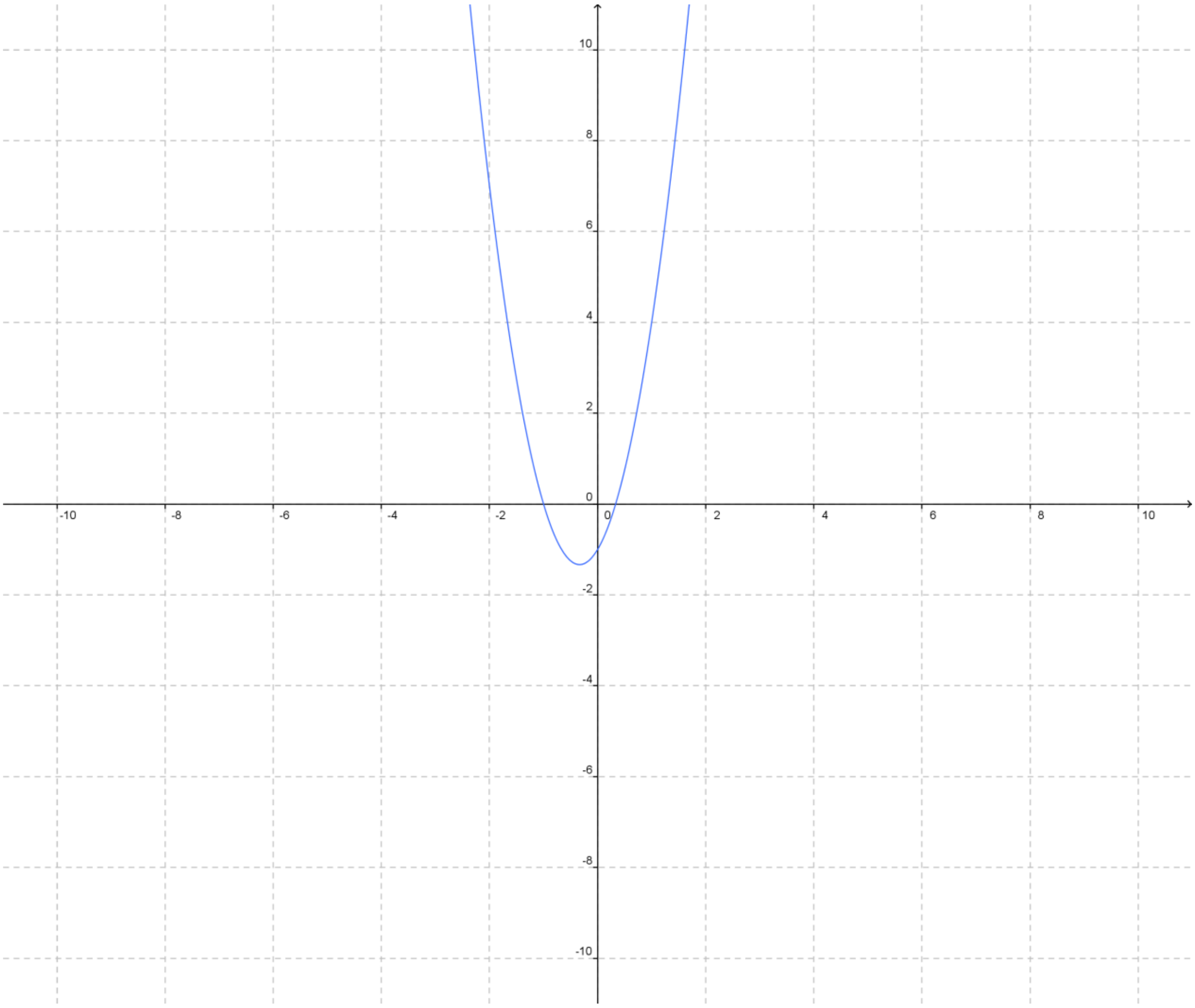
Primitive : $F(x) = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx$

Fonctions polynômes et racines

Fonction polynôme du second degré

Graphe :

La courbe représentative d'un polynôme du second degré est une parabole de sommet : $S\left(\frac{-b}{2a};\frac{-\Delta}{4a}\right)$ qui admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$.



Fonctions polynômes et racines

Fonction inverse

Définition : La fonction inverse est la fonction $f: x \to \frac{1}{x}$ pour tout réel $x \in \Re^*$.

Propriétés :

- f est une fonction strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$
- f est impaire
- La fonction inverse n'admet, ni zéro, ni maximum, ni minimum

Limites :

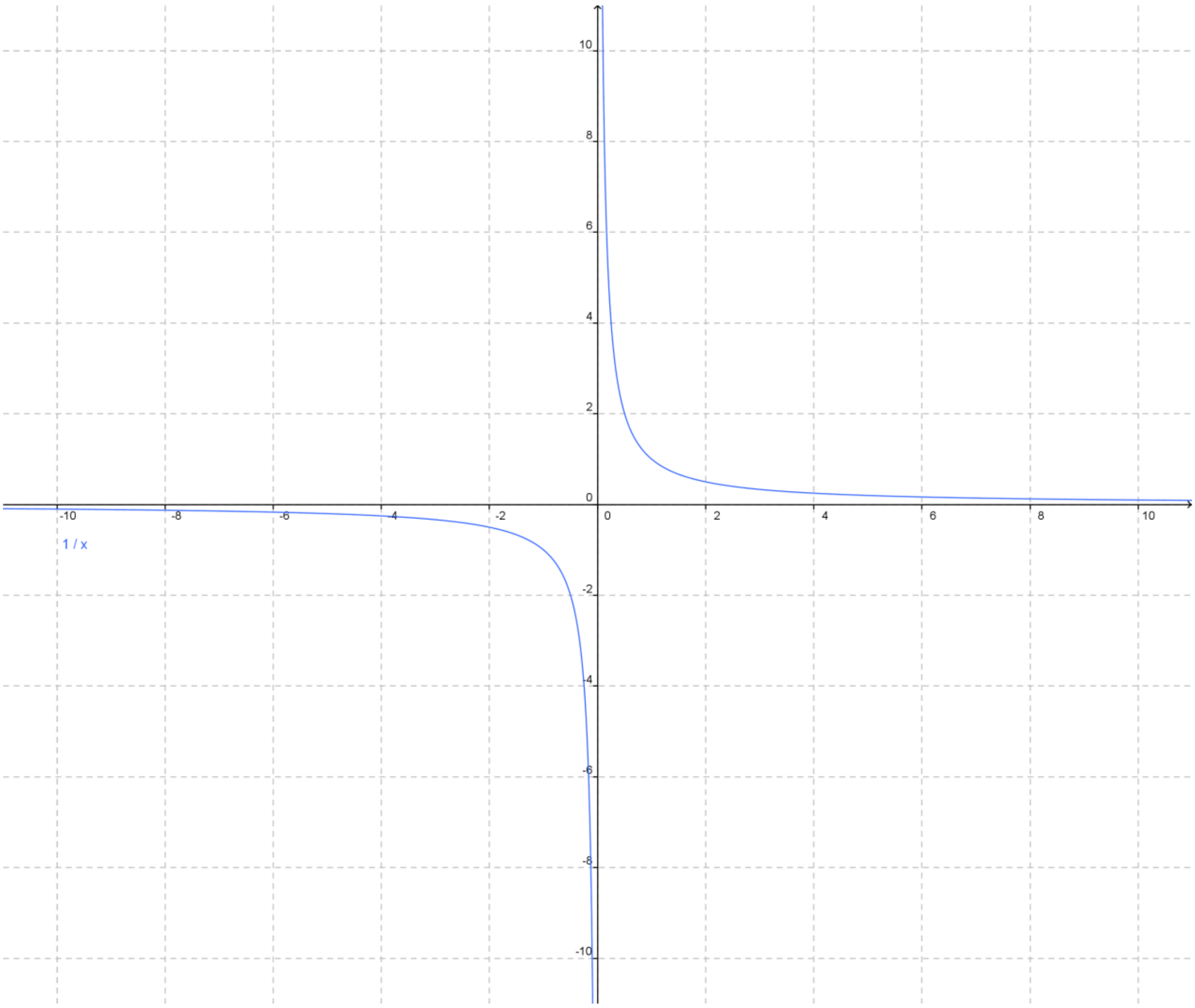
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$

Dérivée : $\frac{-1}{x^2}$

Primitive : $\ln x$

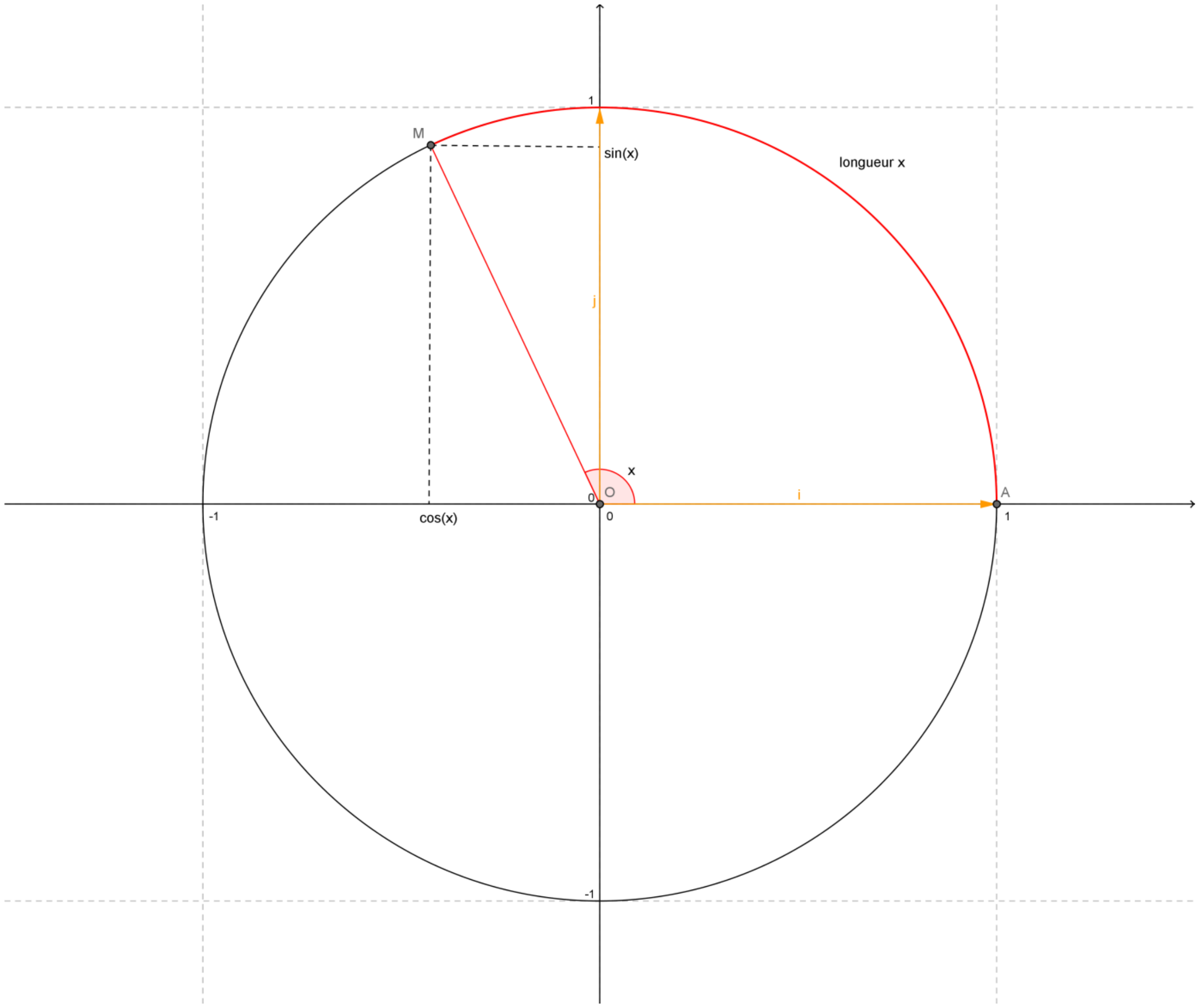
Graphe :



Fonctions trigonométriques

Quelques définitions

Mise-en-place : On se place dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $\mathfrak{C}$ le cercle trigonométrique de centre O, et de rayon 1. A tout réel x, on associe un unique point M de $\mathfrak{C}$ tel que la mesure de $(\vec{\imath},\ \overrightarrow{OM})$ soit égale à x.



Fonctions trigonométriques

Fonction cosinus

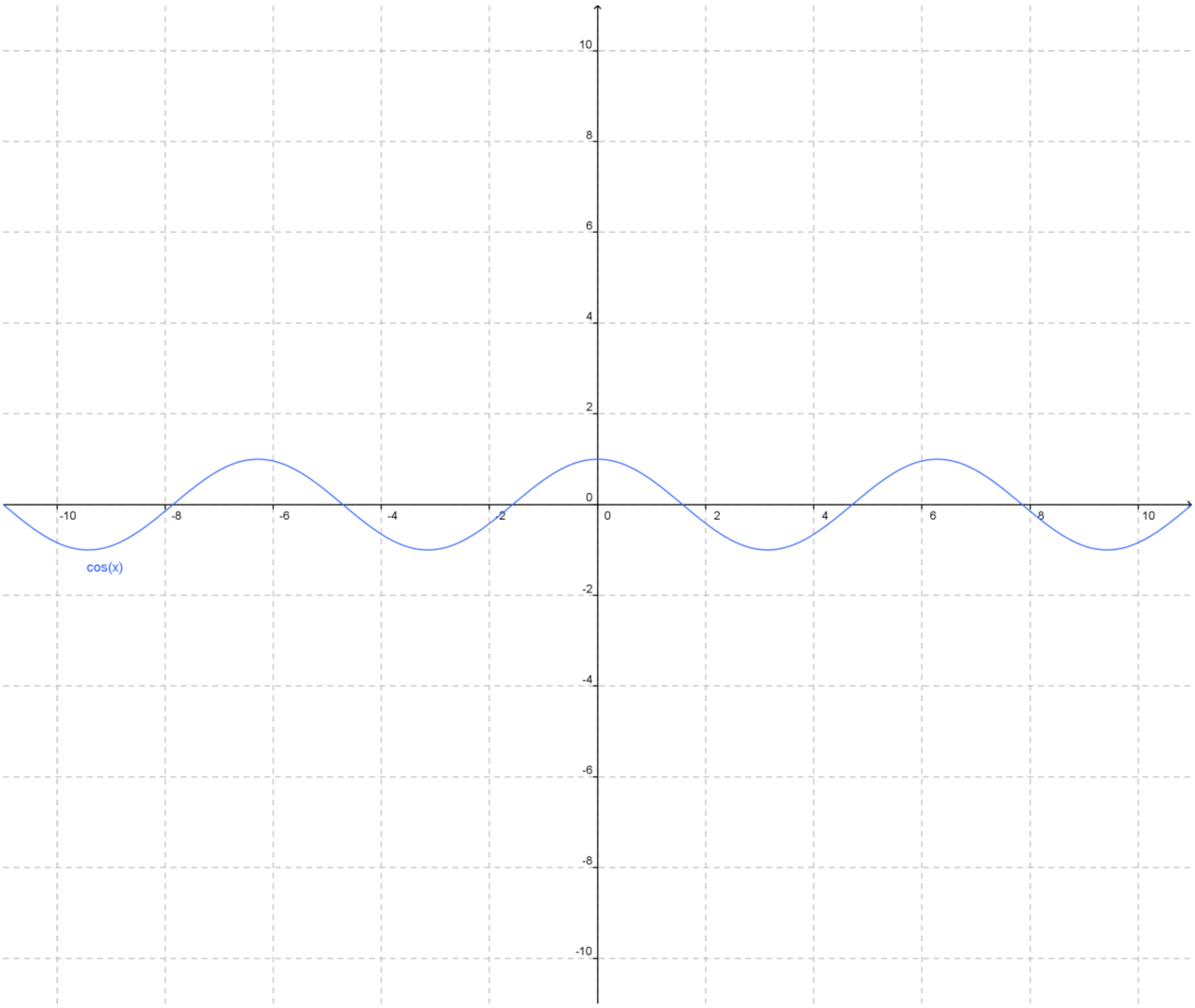
Définition : On appelle fonction cosinus, notée cos(x), la fonction qui à tout réel x associe l'abscisse du point M dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Son domaine de définition est $\mathfrak{R}$.

Propriétés :

- La fonction cosinus est 2π-Périodique
- La fonction cosinus est paire
- La fonction cosinus est croissante sur $\left[-\pi;0\right]$ et décroissante sur $[0;+\pi]$
- La fonction cosinus est positive sur $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et négative sur $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$
- La fonction cosinus est bijective de $[0;\pi] \to [-1;1]$

Dérivée : $-\sin(x)$ **Primitive :** $\sin(x)$

Graphe :



Fonctions trigonométriques

Fonction arc cosinus

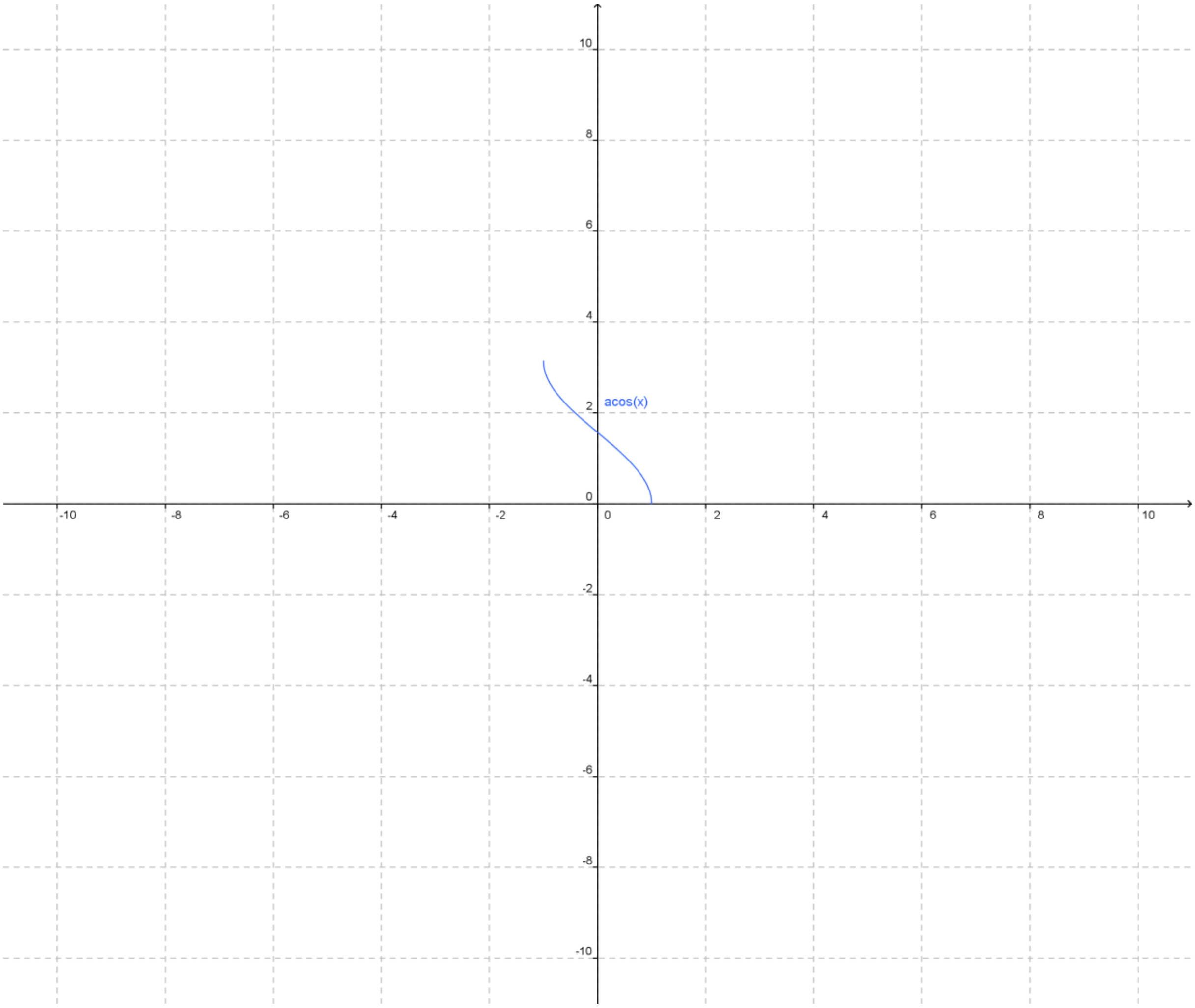
Définition : La fonction arc cosinus, notée arccos(y), est la fonction réciproque de la fonction cos : $[0;\pi] \rightarrow [-1;1]$
Si $x \in [0;\pi]$ et $y \in [-1;1]$, on a : $y = \cos(x) \Leftrightarrow x = \arccos\,(y)$.

Propriétés :

- La fonction arc cosinus est strictement décroissante sur $[-1;1]$
- La fonction arc cosinus est positive sur $[-1;1]$

Dérivée : $(f^{-1})'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$ pour tout $y \in]-1;1[$

Graphe :



Fonctions trigonométriques

Fonction sinus

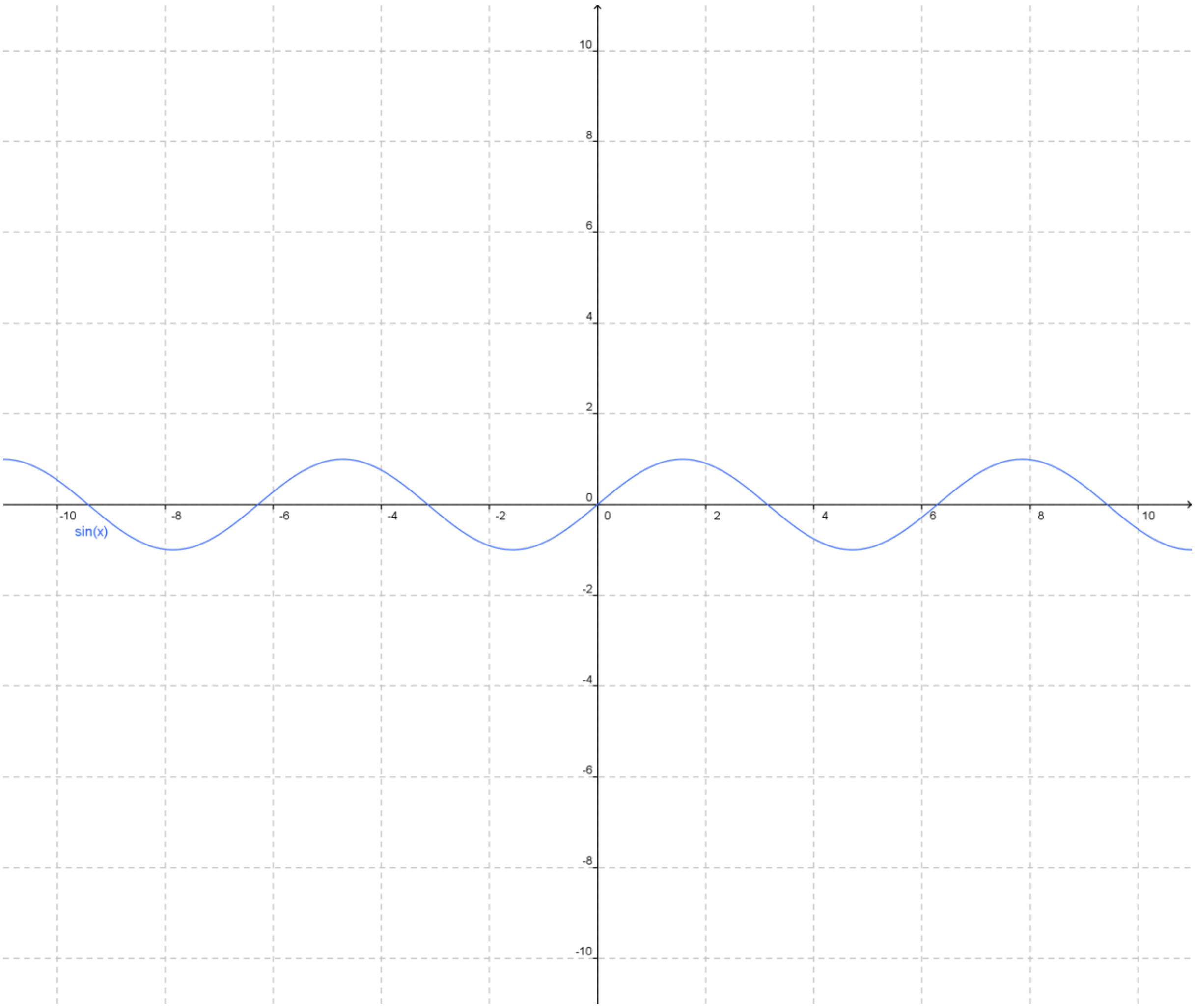
Définition : On appelle fonction sinus, notée sin(x), la fonction qui à tout réel x associe l'ordonnée du point M dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Son domaine de définition est $\mathfrak{R}$.

Propriétés :

- La fonction sinus est 2π-Périodique
- La fonction sinus est impaire
- La fonction sinus est croissante sur $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$
- La fonction sinus est négative sur $[-\pi;0]$ et positive sur $[0;\pi]$
- La fonction sinus est bijective de $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\rightarrow[-1;1]$

Dérivée : $\cos(x)$ **Primitive :** $-\cos(x)$

Graphe :



Fonctions trigonométriques

Fonction arc sinus

Définition : La fonction arc sinus, notée arcsin(y), est la fonction réciproque de la fonction sin : $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \to [-1;1]$

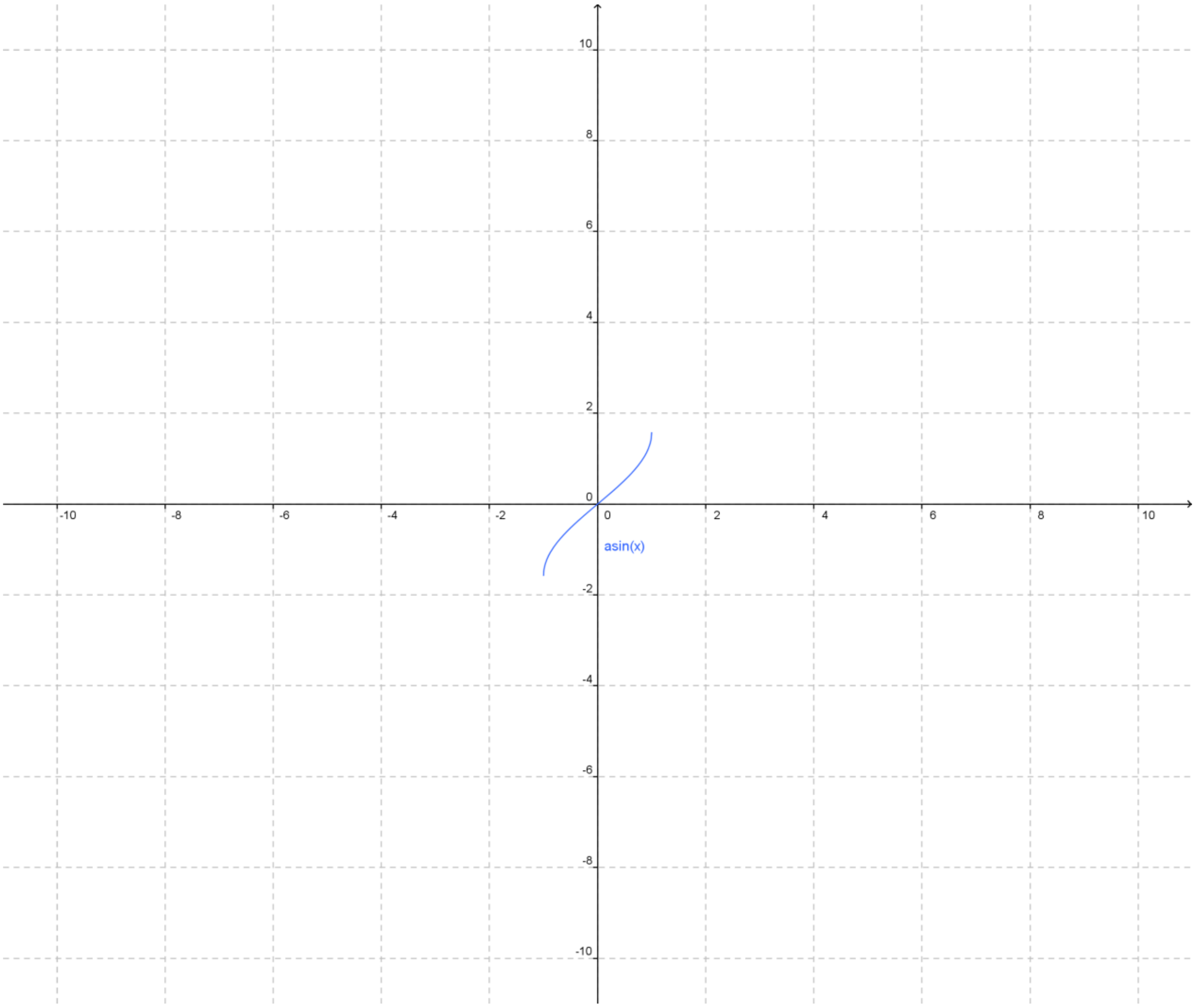
Si $x \in \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et $y \in [-1;1]$, on a : $y = \sin(x) \Leftrightarrow x = \arcsin(y)$.

Propriétés :

- La fonction arc sinus est strictement croissante sur $[-1;1]$
- La fonction arc sinus est négative sur $[-1;0]$ et positive sur $[0;1]$

Dérivée : $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ pour tout $y \in]-1;1[$

Graphe :



Fonctions trigonométriques

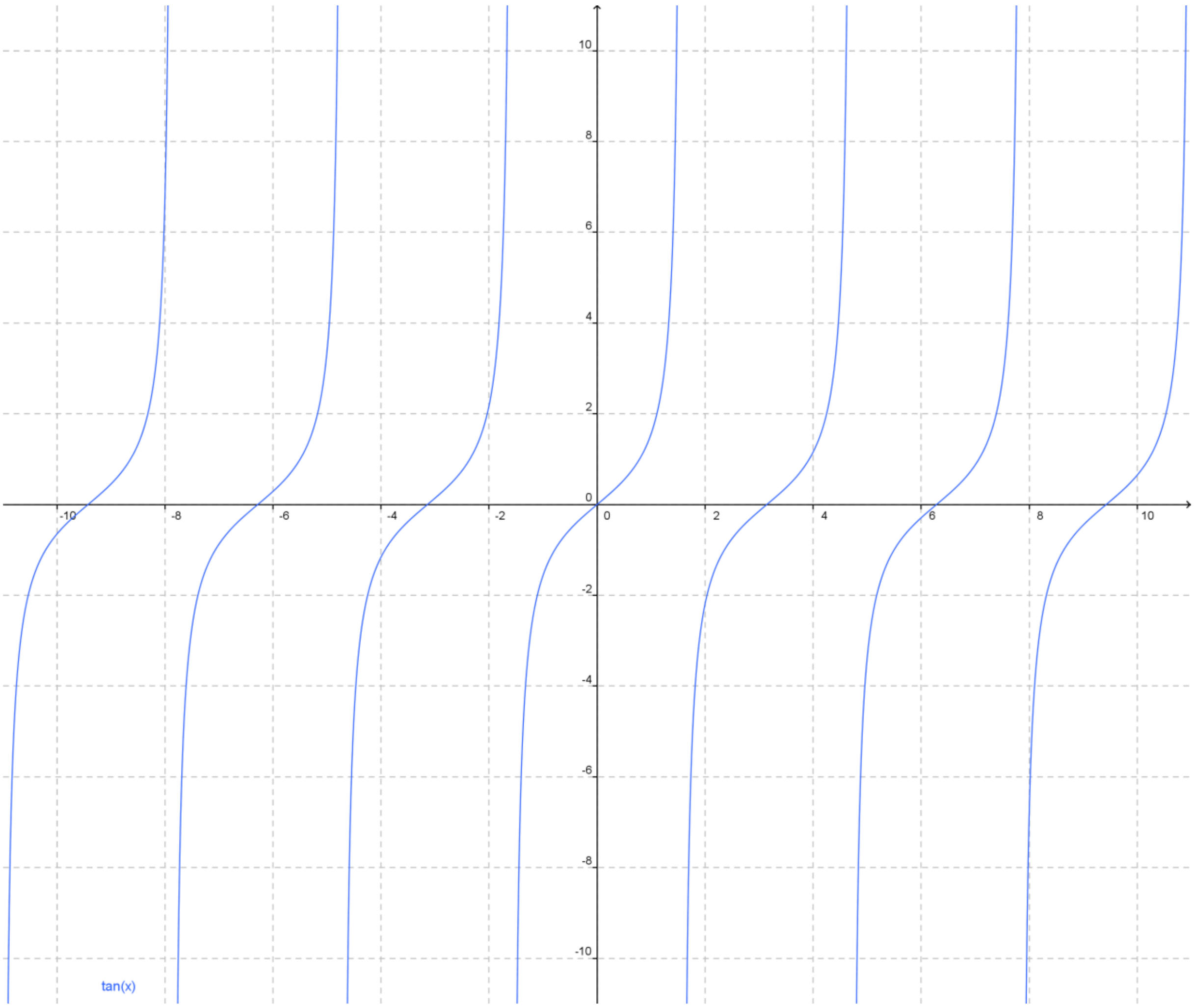
Fonction tangente

Définition : On appelle fonction tangente, notée tan(x), la fonction $f : x \to \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ définie sur $\Re \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Propriétés :

- La fonction tangente est π-Périodique
- La fonction tangente est impaire
- La fonction tangente est strictement croissante sur $\Re \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- La fonction tangente est négative sur $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ et positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$
- La fonction tangente est bijective de $\left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \Re$ **Dérivée :** $\frac{1}{cos^2(x)}$ ou $1 + tan^2(x)$

Graphe :



Fonctions trigonométriques

Fonction arc tangente

Définition : La fonction arc tangente, notée arctan(y), est la fonction réciproque de la fonction tan : $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \Re$

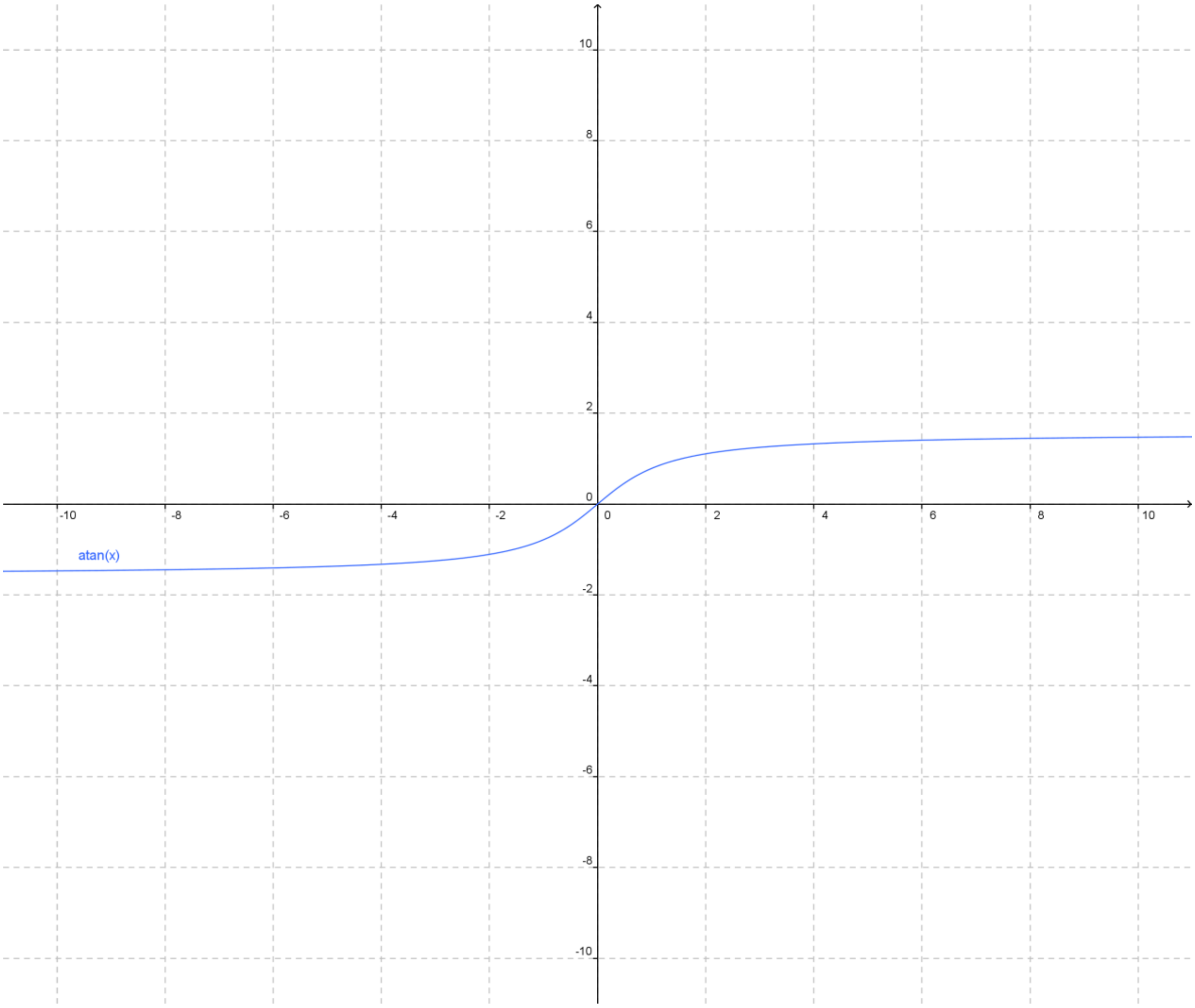
Si $x \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$et $y \in \Re$, on a : $y = \tan(x) \Leftrightarrow x = \arctan\,(y)$.

Propriétés :

- La fonction arc tangente est strictement croissante sur $\Re$
- La fonction arc tangente est négative sur $]-\infty; 0]$ et positive sur $[0; +\infty[$

Dérivée : $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{1+y^2}$ pour tout $y \in \Re$

Graphe :



Fonctions logarithmes et exponentielles

Fonction logarithme népérien

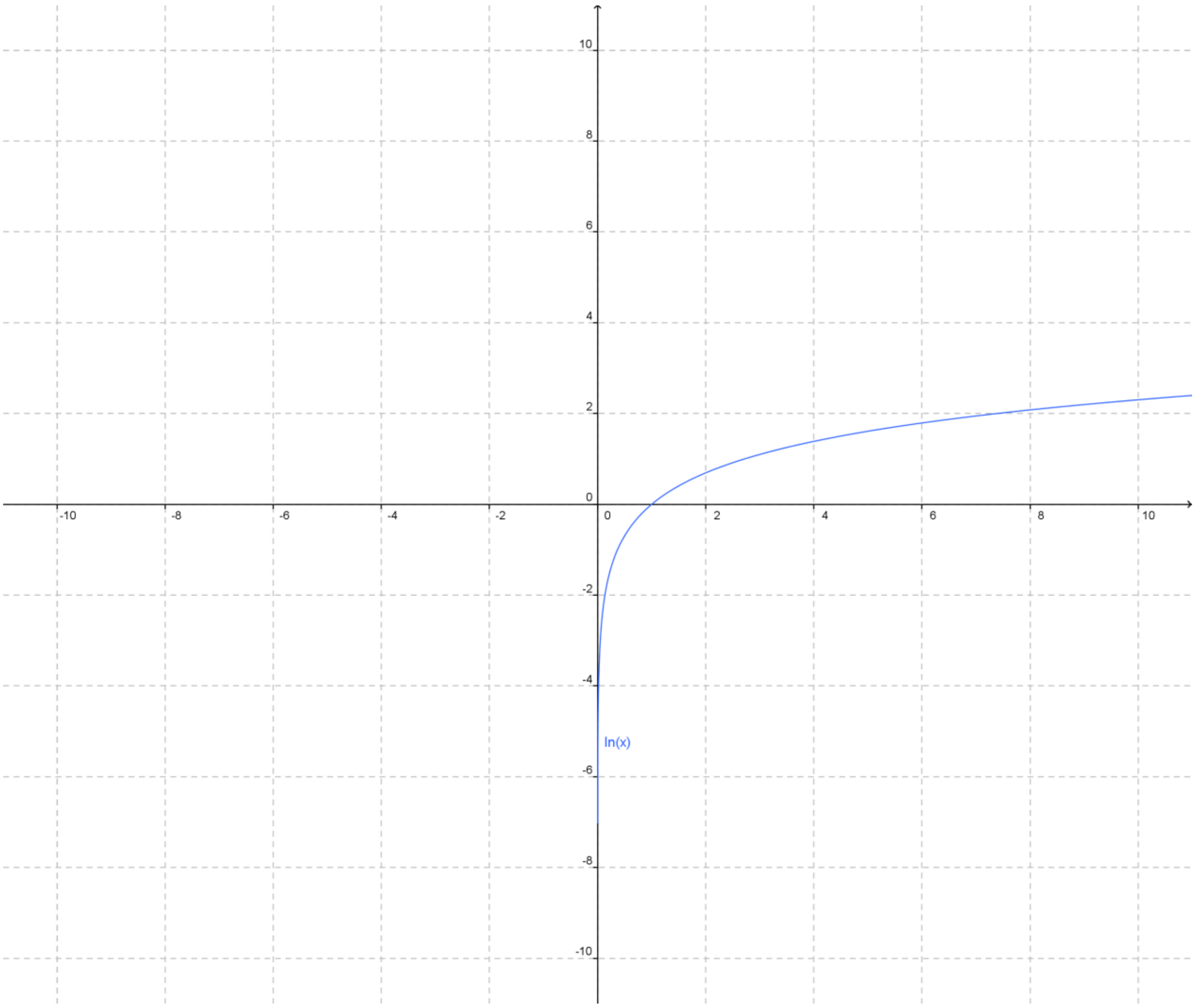
Définition : La fonction logarithme népérien, notée ln(x), est la fonction définie sur $]0;+\infty[$, dont la dérivée est égale à $\frac{1}{x}$.

Propriétés :

- La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
- On a : $\ln(1) = 0$
- ln(x) est négative sur $]0;1]$ et positive sur $[1;+\infty[$
- La fonction réciproque de ln est l'exponentielle, $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$ avec $x \in]0;+\infty[$ et $y \in \Re$

Limites : $\lim_{x\to-\infty} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ **Primitive :** $xln(x) - x$

Graphe :



Fonctions logarithmes et exponentielles

Fonction exponentielle de base e

Définition : Il existe une unique fonction f, dérivable sur $\Re$, telle que $f(0) = 1$ et $f' = f$. Cette fonction est appelée fonction exponentielle et est notée exp.

Propriétés :

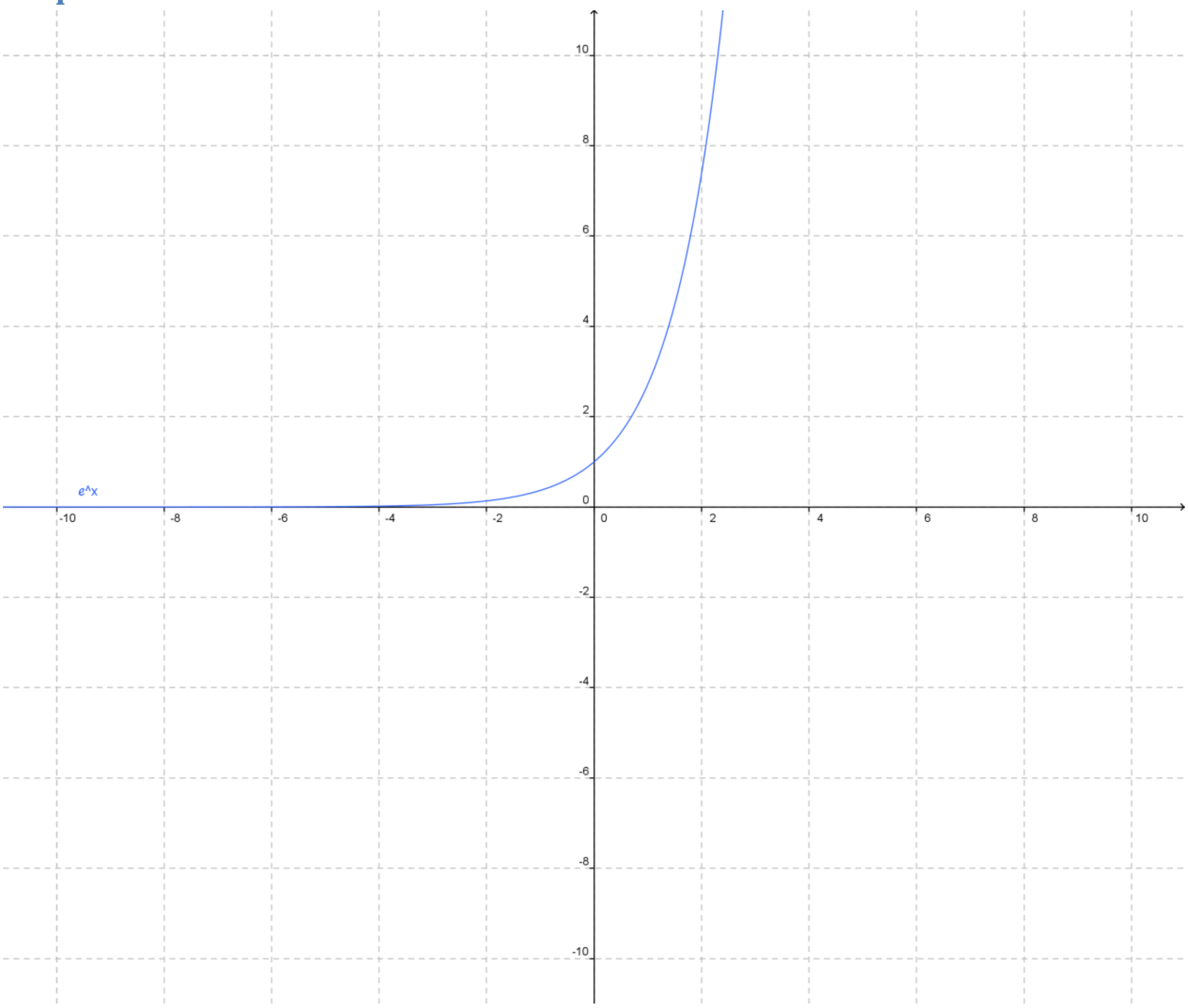
- exp(x) est strictement croissante sur $\Re$
- exp(x) est strictement positive sur $\Re$
- On a : $\exp(0) = 1$ et $exp'(x) = \exp(x)$

Limites : $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Dérivée : $\exp(x)$

Primitive : $\exp(x)$

Graphe :



Fonctions logarithmes et exponentielles

Fonction exponentielle de base a

Définition : La fonction exponentielle de base a, notée a^x, est la fonction définie sur $\Re$ par la relation $f(x) = e^{xln(a)}$, où $a \in \mathbb{N}^*$.

Propriétés :

- Si $0 < a < 1$, alors f est strictement décroissante sur $\Re$
- Si $a = 1$, alors f est constante
- Si $a > 1$, alors f est strictement croissante sur $\Re$
- f est positive sur $\Re$

Comportements asymptotiques :

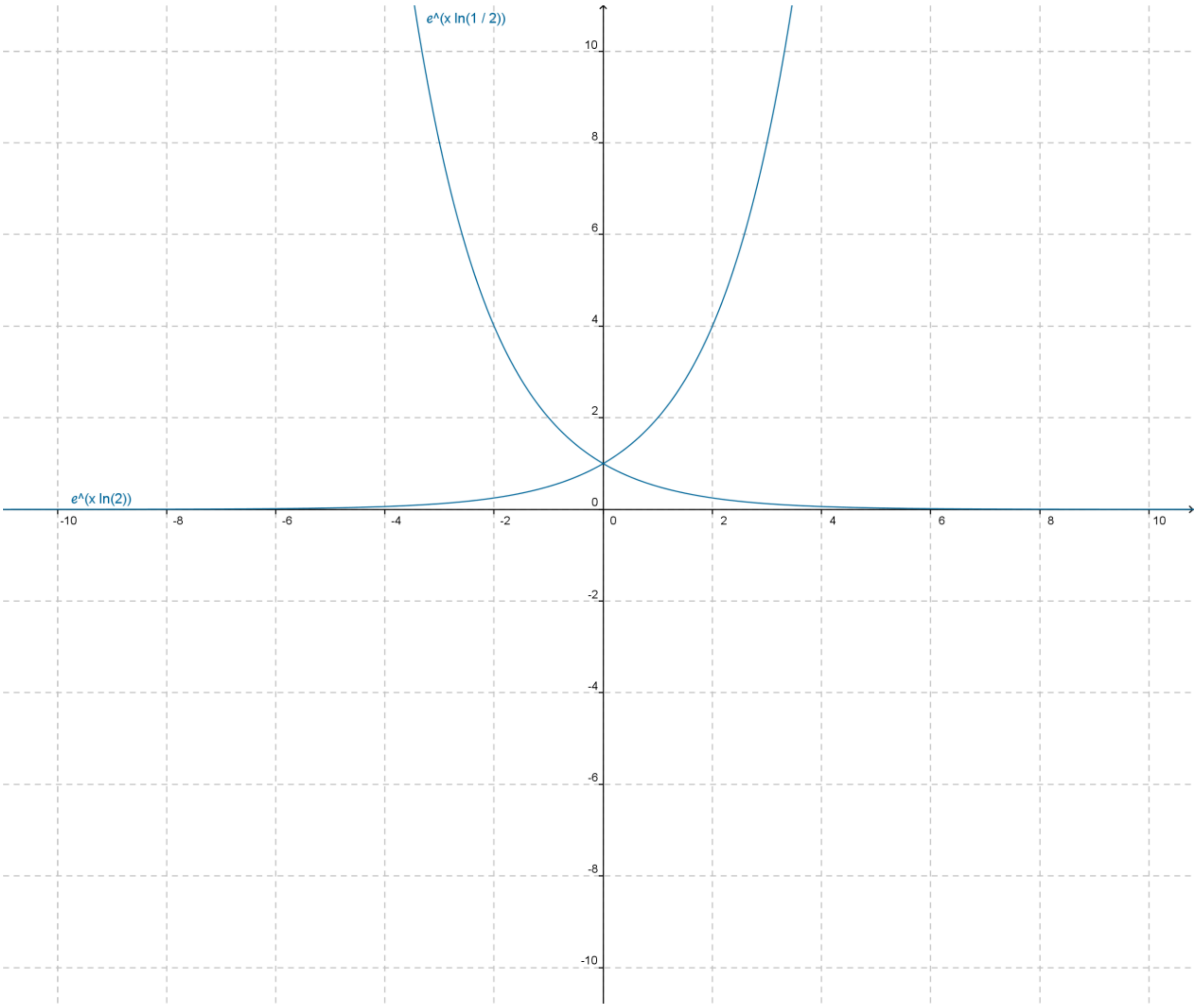
Si $0 < a < 1$, alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Si $a > 1$, alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Dérivée : $\ln(a)\, e^{xln(a)}$

Primitive : $\frac{1}{\ln(a)} e^{xln(a)}$

Graphes :



Fonctions logarithmes et exponentielles

Fonctions puissances

Définition : La fonction puissance, notée x^a, est la fonction définie par $f_a(x) = e^{a\ln(x)}$.
Si $a \in \mathbb{N}$, son domaine de définition est $\mathfrak{R}$. Si $a \in \mathbb{Z}^-$, son domaine de définition est $\mathfrak{R}^*$.

Propriétés :

- **Si $a \in \mathbb{N}$:**
  - Si a est pair, alors f_a est paire, strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$, strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et positive sur $\mathfrak{R}$
  - Si a est impair, alors f_a est impaire, strictement croissante sur $\mathfrak{R}$ et négative sur $]-\infty; 0]$, positive sur $[0; +\infty[$
- **Si $a \in \mathbb{Z}^-$:**
  - Si a est pair, alors f_a est paire, strictement croissante sur $]-\infty; 0[$, strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et positive sur $\mathfrak{R}^*$
  - Si a est impair, alors f_a est impaire, strictement décroissante sur $\mathfrak{R}^*$ et négative sur $]-\infty; 0[$, positive sur $]0; +\infty[$

Comportements asymptotiques :

- **Si $a \in \mathbb{N}$:**
  - Si a est pair, alors $\lim_{x\to-\infty} x^a = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$
  - Si a est impair, alors $\lim_{x\to-\infty} x^a = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$
- **Si $a \in \mathbb{Z}^-$:**
  - Si a est pair, alors $\lim_{x\to-\infty} x^a = 0^+$, $\lim_{x\to0^-} x^a = +\infty$, $\lim_{x\to0^+} x^a = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^a = 0^+$
  - Si a est impair, alors $\lim_{x\to-\infty} x^a = 0^-$, $\lim_{x\to0^-} x^a = -\infty$, $\lim_{x\to0^+} x^a = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^a = 0^+$

Si $a \in \mathbb{N}$:
Dérivée : ax^{a-1}
Primitive : $\frac{1}{a+1}x^{a+1}$

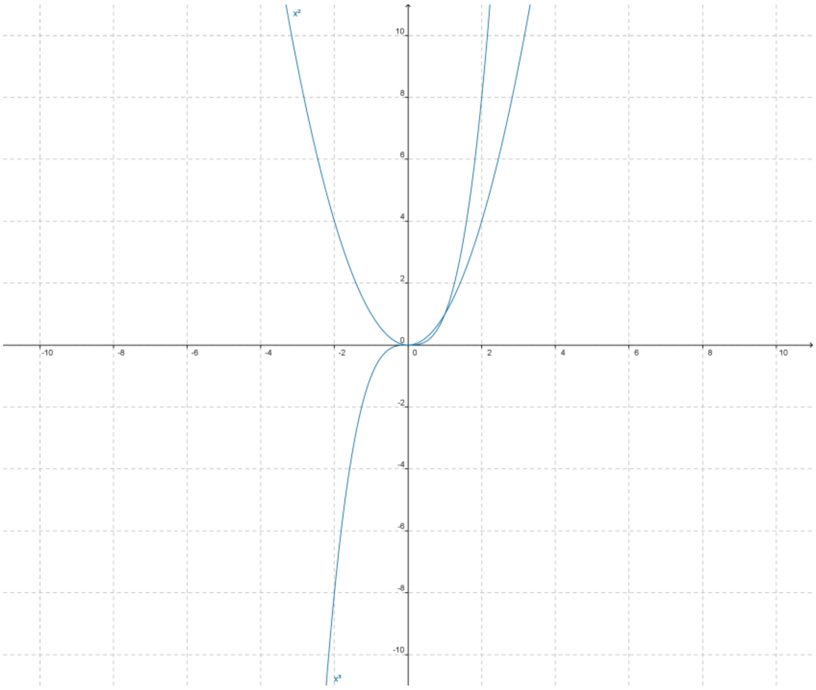
Si $a \in \mathbb{Z}^-$:
Dérivée : $-ax^{a-1}$
Primitive : $\frac{1}{1-a}x^{1-a}$

Fonctions logarithmes et exponentielles

Fonctions puissances

Graphes :

Si $a \in \mathbb{N}$:



Si $a \in \mathbb{Z}^-$: