计算机应用数学

Applied Mathematics for Computer Science

主讲教师：宋骐

https://songqi1990.github.io/

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

1

1.1 概率论基础

2

3

§1.1.1　基础概念

自然界存在两类现象

1. 确定性现象
   - 一个标准大气压下给水加热到100℃便会沸腾
   - 向上抛石子，由于地球引力，石子最终会下落
2. 随机现象
   - 掷一枚质地均匀硬币，正面朝上？反面朝上？
   - 一天内进入某超市的顾客数；

随机现象

随机现象：在一定条件下，**并不总**出现相同结果现象

特点：
1. 结果不止一个；
2. 事先明确所有可能的结果；
3. 事先不知道最终出现哪一个结果。

随机试验：对随机现象进行的实验与观察。

随机现象的统计规律性：随机现象的各种结果会表现出一定的规律性，这种规律性称之为统计规律性。

基本概念

记号	集合论	概率论
Ω	空间	样本空间
$\emptyset$	空集	不可能事件
ω	元素	样本点
$A\subset B$	A是B的子集	A发生必然导致B发生
$A\cap B=\emptyset$	A与B无相同元素	A与B互不相容
$A\cup B$	A与B的并集	A与B至少有一发生
$A\cap B$	A与B的交集	A与B同时发生
$A-B$	A与B的差集	A发生且B不发生
A	A的补集	A不发生、对立事件

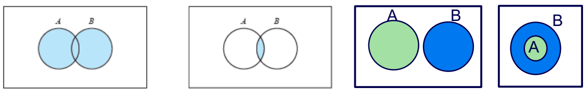
概率

随机试验样本空间为Ω，事件集为F，$\mathrm{P}: \mathrm{F} \rightarrow [0,1]$

1）$P(\Omega) = 1$;
2）可数集合$A \subseteq \Omega$: $P(A) + P(A) = 1$;
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$(样本空间有限)
3）可数可加性（Countable additivity）：对任何不相交集的可数集合A_i事件为F，$\{A_i\} \subseteq F$，$P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$

概率规则

Venn diagram



A∪B　　A∩B　　A∩B=∅　　A⊆ B

Difference Rule: $\mathrm{P}(A - B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$

Inclusion-Exclusion: $\mathrm{P}(A \cup B) = P(A) + P(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

Boole's Inequality: $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

If A⊆ B, then $P(A) \leq P(B)$

两个玩家轮流抛一枚均匀的硬币。谁先抛正面，谁就宣布获胜。第一个玩家赢的概率是多少?

第一个玩家赢：{第一轮赢，第二轮赢，第三轮赢....}

P(第一个玩家赢)=$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} * \frac{1}{2} + \frac{1}{4} * \frac{1}{4} * \frac{1}{2} + \frac{1}{4} * \frac{1}{4} * \frac{1}{4} * \frac{1}{2} + \cdots..$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}}\right) = \frac{2}{3}$$

随堂小测例子:
两个玩家轮流抛一枚质地不均匀的硬币。正面概率为p，谁先抛正面，谁就宣布获胜。第一个玩家赢的概率是多少?

§1.1.2 条件概率

问题的提出:

1) 10个人摸彩，有3张中彩.
问：第1个人中彩的概率为多少?
第2个人中彩的概率为多少?

2) 10个人摸彩，有3张中彩.
问：已知第1个人没摸中，
第2个人中彩的概率为多少?

条件概率的定义

定义

对于事件A、B，若 $P(B)>0$，则称

$$P(A|B) = P(AB) / P(B)$$

为在 B 出现的条件下，A 出现的条件概率.

条件概率 $P(A|B)$ 的计算

1) 缩减样本空间：将 Ω 缩减为 $\Omega_B = B$.

2) 用定义：　$P(A|B) = P(AB) / P(B)$.

13

例　10个产品中有7个正品、3个次品，从中不放回地抽取两个，已知第一个取到次品，求第二个又取到次品的概率.

解：设 A = {第一个取到次品}，

B = {第二个取到次品}，

$P(B|A) = P(AB) / P(A) = (3/10 * 2/9) / (3/10) = 2/9$

14

条件概率是概率

- 条件概率 $P(A|B)$满足概率的三条公理。
- 由此得：

  $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(AB|C)$；

  若 A 与 B 互不相容，则

  $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$；

  $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$.

15

注 意 点

- $P(\Omega|B)=1$； $P(B|\Omega)\neq 1$；
- $P(A|\Omega)=P(A)$； $P(A|A)=1$.

16

条件概率的三大公式

- 乘法公式;
- 全概率公式;
- 贝叶斯公式.

17

乘法公式

性质

(1) 若 $P(B)>0$，则 $P(AB)=P(B)P(A|B)$;
若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$.

(2) 若 $P(A_1A_2\cdots\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots\cdots A_n)$$
$$=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots\cdots A_{n-1})$$

18

乘法公式的应用

乘法公式主要用于求几个事件同时发生的概率.

例 一批零件共有100个，其中10个不合格品。从中一个一个不放回取出，求第三次才取出不合格品的概率.

解：记 A_i="第i次取出的是不合格品"

B_i="第i次取出的是合格品"，目的为求 $P(B_1B_2A_3)$

用乘法公式

$$P(B_1B_2A_3)=P(B_1)P(B_2|B_1)P(A_3|B_1B_2)=\frac{90}{100}\times\frac{89}{99}\times\frac{10}{98}$$

全概率公式

若事件$B_1, B_2, \cdots\cdots, B_n$是样本空间Ω的一组分割，且 $P(B_i)>0$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

注意点(1)

- 全概率公式用于求复杂事件的概率.
- 使用全概率公式关键在于寻找另一组事件来“分割”样本空间.
- 全概率公式最简单的形式：

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

注意点(2)

- 若事件$B_1, B_2, \cdots\cdots, B_n$是互不相容的，且 $P(B_i)>0$，

则由 $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ 可得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$$

22

例 设10 件产品中有 3 件不合格品，从中不放回地取两次，每次一件，求取出的第二件为不合格品的概率。

解： 设 A = "第一次取得不合格品"，

B = "第二次取得不合格品"．

由全概率公式得：

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

$$=(3/10)\times(2/9)+(7/10)\times(3/9)=3/10$$

23

摸 彩 模 型

n 张彩票中有一张中奖，从中不放回地摸取，记 A_i为 "第 i 次摸到中奖券"，则

(1) $P(A_1)=1/n$.

(2) 可用全概率公式计算得 $P(A_2)=1/n$.

(3) 可用归纳法计算得

$P(A_i)=1/n$,　$i=1, 2, \ldots\ldots, n.$

24

摸彩模型(续)

- n 张彩票中有 k 张中奖，从中不返回地摸取，记 A_i 为“第 i 次摸到奖券”，则

$$P(A_i) = k/n, \quad i=1, 2, \ldots\ldots, n$$

- 结论：不论先后，中彩机会是一样的。

25

例：甲口袋有a只白球、b只黑球；乙口袋有n只白球、m只黑球. 从甲口袋任取一球放入乙口袋，然后从乙口袋中任取一球，求从乙口袋中取出的是白球的概率。

概率为：

$$\frac{a}{a+b}\times\frac{n+1}{n+m+1}+\frac{b}{a+b}\times\frac{n}{n+m+1}$$

26

贝叶斯公式

- 乘法公式是求“几个事件同时发生”的概率；
- 全概率公式是求“最后结果”的概率；
- 贝叶斯公式是已知“最后结果”，求“原因”的概率.

27

已知“结果”，求“原因”

某人从甲地到乙地，乘火车、轮船和飞机来概率分别为0.4, 0.4, 0.2，乘火车来迟到的概率为0.5，乘轮船来迟到的概率为0.2，乘飞机来不会迟到。如果他来乙地迟到了，则他是乘轮船来的概率是多少?

贝叶斯（Bayes）公式

若事件$B_1, B_2, \cdots\cdots, B_n$是样本空间Ω的一组分割，且$P(A)>0$，$P(B_i)>0$，则

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

注 意 点

1) $B_1, B_2, \ldots, B_n$可以看作是导致A发生的原因;

2) $P(B_j|A)$是在事件A发生的条件下, 某个原因B_j发生的概率, 称为 “后验概率”；

3) Bayes公式又称为“后验概率公式”；

4) 称$P(B_j)$ 为 “先验概率”．

例 某商品由三个厂家供应，其供应量为：甲厂家是乙厂家的2倍；乙、丙两厂相等。各厂产品的次品率为2%, 2%, 4%. 若从市场上随机抽取一件此种商品，发现是次品，求它是甲厂生产的概率?

解： 用1、2、3分别记甲、乙、丙厂，设

A_i="取到第i个工厂的产品"，B="取到次品"，

由题意得：$P(A_1)=0.5$, $P(A_2)=P(A_3)=0.25$;

$P(B|A_1)=P(B|A_2)=0.02$, $P(B|A_3)=0.04$.

由Bayes公式得：$P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=0.4$

31

例 机器调整良好时，产品合格率为98%；机器发生故障时，其合格率为55%。每天早上启动机器时，机器调整良好率为95%。在已知早上第一件产品是合格品时，机器调整良好率的概率是多少?

解： 用A="产品合格"，B="机器调整良好"，

由题意可知：$P(A|B)=0.98$, $P(A|\overline{B})=0.55$

$P(B)=0.95$, $1-P(B)=0.05$. 现在是求P(B|A)

由Bayes公式得：

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}=0.97$$

32

§1.1.3 随机变量

- 分赌本问题(17世纪)

甲乙两赌徒赌技相同，各出赌注50元.
无平局，谁先赢3局，则获全部赌注.
当甲赢2局、乙赢1局时，中止了赌博.
问如何分赌本?

33

两种分法

1. 按已赌局数分:

则甲分总赌本的2/3、乙分总赌本的1/3

2. 按已赌局数和再赌下去的“期望” 分赌本:

因为再赌两局必分胜负，共四种情况:
甲甲、甲乙、乙甲、乙乙
所以甲分总赌本的3/4、乙分总赌本的1/4

数学期望的概念

若按已赌局数和再赌下去的“期望” 分， 则甲的所得 X 是一个可能取值为0 或100的随机变量，其分布律为:

X	0	100
P	1/4	3/4

甲的“期望” 所得是： $0\times1/4 + 100 \times 3/4 = 75.$

随机变量

概率空间上(Ω, P)**的一个随机变量**$X: \Omega \to \mathbb{R}$.

$$P(X = x) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) = x)$$

例子:

$\Omega = \{$甲甲、甲乙、乙甲、乙乙$\}$

事件X=0，两局情况为 “乙乙”， $P(X = 0) = \frac{1}{4}$

事件X=100，两局情况可为 “甲甲、甲乙、乙甲” $P(X = 100) = \frac{3}{4}$

当随机试验次数越来越多时，事件发生的频率将稳定于概率。如果把试验一直进行下去，我们期望能得到的理论上的平均值。数学上称之为*数学期望（expectation）*，记为E(X)。

$$E(X)=0\times 1/4 + 100 \times 3/4 = 75.$$

随机变量定义

- 定义：概率空间上的随机变量 R 是一个定义域为样本空间的实值函数
- 取多个值的随机变量将样本空间划分为几个事件
  - 例：扔硬币，正面朝上次数C，扔三次：
  - [C=2]=[THH;HTH;HHT];
  - 事件概率P([C=2]) =1/8+1/8+1/8

概率密度、累计分布函数

- 概率密度函数：$PDF_R(x) = P(R = x),$

  $if\ x \in Range(R).$
- 累计分布函数: $CDF_R(x) = P(R \le x),$

  $\sum_{x\in Range(R)} PDF_R(x) = 1$

常用分布

- 伯努利：{0,1}->[0,1], $f_p(0)=p; f_p(1)=1-p$
- 均匀分布：V->[0,1], $f_v=\frac{1}{n}$
- 二项式分布:$[0 \dots n] \rightarrow [0,1], f_{n,p}(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
- 泊松分布：$f_\lambda(k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$
- 正态分布：$f_{\mu,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

数学期望的定义

定义 设离散随机变量 X 的分布律为

$$P(X=x_n)=p_n, \qquad n=1,2,\ \dots$$

若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 绝对收敛，则称该级数为X 的**数学期望**，记为 $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

连续随机变量的数学期望

定义 设连续随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$,

若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ **绝对收敛**，则称该积分为X 的**数学期望**，又称为**均值**，记为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

例. 在一个人数很多的团体（人数记为N)普查某种疾病。如果检验阳性率p 较低，用下面这种方法进行验血是否可以减少化验试剂数：

按 k 个人一组进行分组, 把从k 个人抽来的血混合在一起进行检验。如果这混合血液呈阴性反应，就说明 k 个人的血都呈阴性反应。若呈阳性，则再对这 k 个人的血分别进行化验。

如果这种方法进行验血可以减少化验试剂数的话，那么 k 等于几时，可以使检验试剂数最少?

以X 表示某人平均消耗的化验试剂数。

若按常规方法验血，X=1为常数;

若进行分组，则 X 为随机变量:

当此人所在小组的混合血液呈阴性反应时

$X = 1/k$;

当此人所在小组的混合血液呈阳性反应时

$X = 1 + 1/k$ 。

$P\{X = 1/k\}$=P{该小组的混合血液呈阴性反应}

=P{小组的每一位成员的血液均呈阴性反应}

$= (1-p)^k$

$P\{X = 1 + 1/k\}$=P{该小组的混合血液呈阳性反应}

=P{小组中至少有一位成员的血液呈阳性反应}

$=1-(1-p)^k$

X的概率分布为：

X	$1/k$	$1+1/k$
p	$(1-p)^k$	$1-(1-p)^k$

平均消耗化验试剂数：

$E(X) = 1/k \times (1-p)^k + (1+1/k) \times (1-(1-p)^k)$

$= 1-(1-p)^k + 1/k$

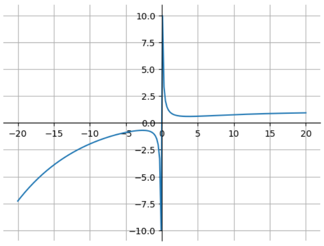
当 p 已知时，我们可以选取 k 使之最小。

例如 $p=0.1$**，当** $k = 4$ **时，** $E(X)=1-0.9^4+1/4=0.594$。

1000人所需的

平均试剂数为：

$n=1000\times0.594= 594$



当 p 已知时，我们可以选取 k 使之最小。

$E(X)=1-(1-p)^k+1/k$

例如 $p=0.01$

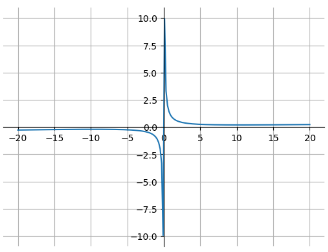
当 $k = 5$ 时，$E(X)=0.249$。

…

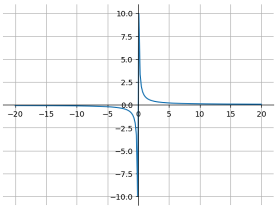
当 $k = 10$ 时, $E(X)=0.196$。

…

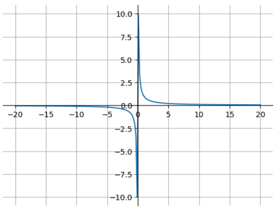
当 $k = 20$ 时，$E(X)=0.232$。



当 p 越小



$p = 0.001$



$p = 0.0001$

引申思考：已知有11瓶无色无味液体，其中1瓶有毒而其余10瓶无毒。老鼠喝了有毒液体会在23小时之后的一个小时内毒发身亡（死亡时间在1个小时内随机）。现有4只老鼠，仅给一天时间，设计多种方法找出哪瓶液体有毒?

考虑每种方法的性能差异，如该方法最多可以区分多少瓶液体、死亡老鼠数量期望

解法一： 把11瓶药水按照二进制的标号，第一只老鼠喝最高位为1的药水，第二只老鼠喝次高位为1的水，以此类推。

11只瓶子的序号如下所示：

0	0	0	1	第1个瓶子
0	0	1	0	第2个瓶子
0	0	1	1	第3个瓶子
0	1	0	0	第4个瓶子
0	1	0	1	第5个瓶子
0	1	1	0	第6个瓶子
0	1	1	1	第7个瓶子
1	0	0	0	第8个瓶子
1	0	0	1	第9个瓶子
1	0	1	0	第10个瓶子
1	0	1	1	第11个瓶子

因此，如果只有第一只老鼠死了，我们找出标号为1000的瓶子，也就是第8瓶有毒，如果第二只和第三只死了，我们找出标号为0110的瓶子，也就是第6瓶有毒。最多死3只老鼠。

期望：$3*\frac{2}{11}+2*\frac{5}{11}+1*\frac{4}{11}$

检测数量：2^n

n只老鼠各自的死活有两种状态
可以区分2^n种情况，
即老鼠的死亡数量从0只到n只的所有情况总和等于2^n，即组合求和公式：

$$\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n$$

解法二： 上述解法一的优化：考虑到只需要区分11个瓶子，因此为了节约实验用的老鼠数量，<u>最多死2只就可以完成任务，即不需要死3只</u>。优化方法为稍作修改的“二进制”编码。

11只瓶子的序号如下所示

0 0 0 0	第1个瓶子
0 0 0 1	第2个瓶子
0 0 1 0	第3个瓶子
0 1 0 0	第4个瓶子
1 0 0 0	第5个瓶子
0 0 1 1	第6个瓶子
0 1 0 1	第7个瓶子
1 0 0 1	第8个瓶子
0 1 1 0	第9个瓶子
1 0 1 0	第10个瓶子
1 1 0 0	第11个瓶子

最多死两只老鼠；

期望：$2*\frac{6}{11}+1*\frac{4}{11}+0*\frac{1}{11}$

n只老鼠可检测2^n瓶子

$n=4$: $2*\frac{c_n^2}{C_n^2+n+1}+1*\frac{c_n^1}{C_n^2+n+1}$

检测数量：$C_n^2+n+1=11, n=4$

更一般,当检测数量为

$C_n^k+C_n^{k-1}+\cdots+1$，最多死k只老鼠

解法三： 上三角矩阵法,ABCD分别代表4只老鼠，带圈的数字表示瓶子编号，总共10瓶（没有老鼠死亡时，代表第11瓶有毒）。

	A	B	C	D
A	①	②	③	④
B		⑤	⑥	⑦
C			⑧	⑨
D				⑩

喝药方法是，每个老鼠喝它所在的行和列的所有药瓶，例如老鼠A喝第一行和第一列的①②③④共4瓶药，老鼠B喝第二列和第二行的②⑤⑥⑦这4瓶药，类似地，老鼠C喝的是③⑥⑧⑨这4瓶药，老鼠D喝的是④⑦⑨⑩这4瓶药。

最多死两只老鼠； $2*\frac{6}{10}+1*\frac{4}{10}$

期望：$2*\frac{\frac{(n+1)n}{2}-n}{(n+1)n/2}+1*\frac{n}{(n+1)n/2}$， n=4

检测数量： C_n^2+n+1,最多死两只

变量函数的数学期望

定理 设 $g(X)$ 是随机变量X的函数，若 $E(g(X))$ 存在，则

$$E(g(X))=\begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)P(X=x_i)\\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx\end{cases}$$

多变量函数的数学期望

推论　设 $g(X,Y)$ 是随机变量X与Y的函数，若 $E(g(X,Y))$ 存在，则

$$E(g(X,Y))=\begin{cases}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)P(X=x_i,Y=y_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy\end{cases}$$

数学期望的性质

(1)　$E(c) = c$

(2)　$E(aX) = aE(X)$

(3)　$E(g_1(X)+g_2(X)) = E(g_1(X))+E(g_2(X))$

(4)　$E(X+Y) = E(X)+E(Y)$

(5)　$E(XY) = E(X)E(Y)$，如果X与Y是独立的；

有两个随机变量 X，Y，不论独立与否

X\Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	$P(X)$
x_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_1,y_2)$	$\cdots$	$p(x_n,y_n)$	$p(x_1)$
x_2	$p(x_2,y_1)$	$p(x_2,y_1)$	$\cdots$	$p(x_2,y_n)$	$p(x_2)$
$\cdots$					
x_n	$p(x_n,y_1)$	$p(x_n,y_2)$	$\cdots$	$p(x_n,y_n)$	$p(x_n)$
$P(Y)$	$p(y_1)$	$p(y_1)$	$\cdots$	$p(y_n)$	1

$$E(X)=x_1p(x_1)+x_2p(x_2)+\cdots x_np(x_n)$$
$$p(x_i)=p(x_i,y_1)+p(x_i,y_2)+\cdots+p(x_i,y_n)$$
$$E(X)=\sum_i\sum_j x_ip(x_i,y_j)$$

有两个随机变量 X，Y，不论独立与否

$$
\begin{aligned}
&E(X+Y)\\
&=(x_1+y_1)p(x_1,y_1)+(x_1+y_2)p(x_1,y_2)\\
&+\cdots(x_1+y_n)p(x_1,y_n)+\cdots(x_n+y_1)p(x_n,y_1)\\
&+(x_n+y_2)p(x_n,y_2)+\cdots(x_n+y_n)p(x_n,y_n)\\
&=\sum_i x_i\sum_j p(x_i,y_j)+\sum_j y_j\sum_i p(x_i,y_j)\\
&=\sum_i x_i p(x_i)+\sum_j y_j p(y_j)\\
&=E(X)+E(Y)
\end{aligned}
$$

有两个随机变量 X，Y独立

$$
\begin{aligned}
&E(XY)\\
&=(x_1y_1)p(x_1,y_1)+(x_1y_2)p(x_1,y_2)\\
&+\cdots(x_1y_n)p(x_1,y_n)+\cdots(x_ny_1)p(x_n,y_1)\\
&+(x_ny_2)p(x_n,y_2)+\cdots(x_ny_n)p(x_n,y_n)\\
&=\sum_i x_i p(x_i)\sum_j y_j p(y_j)\\
&=E(X)E(Y)
\end{aligned}
$$

方 差

- 数学期望反映了X取值的中心。
- 方差反映了X取值的离散程度。

方差与标准差的定义

定义 若 $E(X-E(X))^2$ 存在，则称 $E(X-E(X))^2$ 为 X 的方差，记为

$$\mathrm{Var}(X)=D(X)=E(X-E(X))^2$$

注 意 点

(1) 方差反映了随机变量相对其均值的偏离程度。方差越大, 则随机变量的取值越分散.

(2) 称 $\sigma_X=\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ 为X 的标准差。

方差的性质

(1) $\mathrm{Var}(c)=0$

(2) $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

(3) $\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\,\mathrm{Var}(X)$

(4) $\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$,
$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

特别地，若X，Y相互独立，则

$$\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$$

(2) $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

证： $Var(X) = E\,[\,X - E(X)\,]^2$

$= E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\}$

$= E(X^2) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2$

$= E(X^2) - [E(X)]^2$

随机变量的标准化

设 $\mathrm{Var}(X)>0$, **令** $Y = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$

则有 $E(Y)=0$, $\mathrm{Var}(Y)=1$.

称 Y **为** X **的标准化。**

例设 $X \sim f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 2-x & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，**求** $E(X)$, $\mathrm{Var}(X)$.

解: (1) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot x\mathrm{d}x + \int_1^2 x(2-x)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 + (x^2 - \frac{1}{3}x^3)\Big|_1^2 = 1$

(2) $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3\mathrm{d}x + \int_1^2 x^2(2-x)\mathrm{d}x$

$= 7/6$

所以， $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 7/6 - 1 = 1/6$

定理

$\mathrm{Var}(X)=0 \iff P(X=a)=1$

$E(X-E(X))^2=0$

$X=E(X)=a$, 对所有的X

常用连续分布的期望

- 几何分布：$\frac{1}{p}$; 泊松分布:λ
- 伯努利分布：p； 二项分布：np；
- 正态分布 $N(\mu, \sigma 2)$： $E(X) = \mu$
- 均匀分布 $U(a, b)$： $E(X) = (a+b)/2$
- 指数分布 $Exp(\lambda)$： $E(X) = 1/\lambda$
- 伽玛分布 $Ga(\alpha, \lambda)$： $E(X) = \alpha/\lambda$
- 贝塔分布 $Be(a, b)$： $E(X) = a/(a+b)$

常用分布的方差

- 0–1 分布的方差 $= p(1-p)$
- 二项分布 $b(n, p)$的方差 $= np(1-p)$
- 几何分布$Ge(p)$ 的方差 $= (1-p)/p^2$
- 泊松分布 $P(\lambda)$ 的方差$= \lambda$

常用分布的方差(续)

- 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的方差= σ^2
- 均匀分布 $U(a, b)$ 的方差 = $(b-a)^2/12$
- 指数分布 $Exp(\lambda)$ 的方差= $1/\lambda^2$

例 求二项分布 $b(n, p)$的期望及方差

设 X 表示 n 次独立重复射击中命中目标的次数，命中概率为p

$$E(X) = 0 * C_n^0 p^0 (1-p)^n + 1 * C_n^1 p (1-p)^{n-1} + 2 * C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2} + \cdots + n * C_n^n p^n (1-p)^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \boxed{k \cdot C_n^k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$$

$$= np \boxed{\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}}$$

二项式定理:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

$$= np(p+1-p)^{n-1}$$

$$= np$$

例 求二项分布 $b(n, p)$的期望及方差

设 X 表示 n 次独立重复射击中命中目标的次数，命中概率为p

$$E(x^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \boxed{\sum_{k=1}^{n} k(k-1) C_n^k p^k (1-p)^{n-k}} + \boxed{\sum_{k=1}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$\boxed{=np}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)![n-2-(k-2)]!} p^k (1-p)^{n-2-(k-2)}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)![n-2-(k-2)]!} p^{k-2} (1-p)^{n-2-(k-2)}$$

$$= n(n-1)p^2 (1-p+p)^{n-2} = n(n-1)p^2$$

$$E(x^2) = n^2p^2 - np^2 + np$$

二项式定理:

例 求二项分布 $b(n,p)$的期望及方差

设 X 表示 n 次独立重复射击中命中目标的次数，命中概率为p

$$E(x) = np$$

$$E(x^2) = n^2p^2 - np^2 + np$$

$$Var(x) = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$
$$= np(1-p)$$

例）已知随机变量 X 服从二项分布，且 $E(X)= 2.4$, $\mathrm{Var}(X)=1.44$，则参数 n, p 的值为多少？

解：从 $2.4= np$, $1.44 = np(1-p)$ 中解得 $n=6$，$p=0.4$

例）设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标 的次数，每 次射中目标的概率为0.4, 则 $E(X^2)$的值为多少？

解：因为 $E(X) = np = 4$, $\mathrm{Var}(X)= 2.4$，所以

$$E(X^2) = \mathrm{Var}(X)+(E(X))^2= 2.4+16=18.4$$