、

Ch1

1

> G是简单图，则有$\varepsilon\left(G\right)\leq\binom{v(G)}{2}$

方法1（Euler定理）：

因为G是简单图 所以∀v∈V(G),有deg(v)≤v-1

则$\sum_{v\in V(G)}\deg(V)\leq v(v-1)$

由Euler定理，$\varepsilon\left(G\right)=\frac{\sum_{v\in V(G)}\deg(V)}{2}\leq\frac{v(v-1)}{2}$，得证

方法2（组合）：

在简单图中，任意两顶点之间最多存在一条边

即$\varepsilon\left(G\right)\leq\binom{v(G)}{2}$

3

> 画出所有四个顶点不同够的简单图

一共11个（图略）。

4*

> 任何至少由两个人构成的群体中，其中有两个人，他们的朋友数一样多。

证：将每个人看作顶点，两个人是朋友则在这两人所代表的顶点之间加一条边，因此问题等价于：在对任意满足$V(G)\geq 2$的图G中，存在$V_i,V_j\in V(G),i\neq j$，使得$deg(v_i)=deg(v_j)$.

反证法：假设对任意$V_i,V_j\in V(G),i\neq j$，都有$deg(v_i)\neq deg(v_j)$

deg(v)在G中共有|V(G)|个不同的取值

而deg(v)取值范围为0至|V(G)|-1，恰好有|V(G)|个可能的取值，故每种取值恰好出现一次，分别为0,1,..., |V(G)|-1

所以存在$V_i,V_j\in V(G),i\neq j$，使得$deg(v_i)=0$，$deg(v_j)=\|V(G)\|-1$

即v_i与所有点都不相连，v_j与所有点都相连，矛盾，假设不成立。

得证。

5

> $2n(n \geq 2)$人中，每个人至少与其中的n个人认识，则其中至少有4个人，使得这四个人围桌而坐时，每个人旁边都是他认识的人。

该问题等价于证明图中存在长度为4的圈，等价与存在2个人，他们共同认识的人有两个即以上。

用反证法容易证明。

7*

> 证明下面的结论：
>
> (1) $\epsilon(K_{m,n}) = mn$
>
> (2)设G是二分图，$\epsilon(G) \leq v^2(G)/4$

(1)证：不妨设 $K_{m,n} = K \cup Y, X \cap Y = \emptyset$，其中|X|=m，|Y|=n

由$K_{m,n}$定义，$\forall u \in X, deg(u) = n$

$\forall v \in Y, deg(u) = m$

则$\sum_{v \in V(Km,n)} \deg(v) = \sum_{u \in X} \deg(\mathrm{u}) + \sum_{v \in Y} \deg(v) = 2mn$

由Euler定理，$\epsilon(K_{m,n}) = mn$

(2) $\epsilon(G) \leq \epsilon(K_{m,n}), V(G) = m + n$

由(1)可得 $\epsilon(K_{m,n}) = mn$

所以 $\epsilon(G) \leq mn \leq (m+n)^2/4$

即$\epsilon(G) \leq v^2(G)/4$

8

> 设G是图，给定$V(G)$的非空真子集V'。记k为一个端点在V'中，另一个端点在$V(G) - V'$中的变数。若V'中度数为奇数的顶点数为偶数，则k为偶数；否则，k为奇数

设ϵ是V'的顶点导出子图的边的个数，则k有：

$$k=\sum_{v\in V_o'}deg(v)+\sum_{v\in V_e'}deg(v)-2\epsilon$$

因为 2ϵ和 $\sum_{v\in V_e'}deg(v)$一定是偶数，所以k的奇偶只和$\sum_{v\in V_o'}deg(v)$有关：若V'中度数为奇数的顶点数为偶数，则k为偶数；否则，k为奇数。

9

> 每个顶点的度数都是2的连通图是一个圈。

用最长轨法来证明，设为$P(v_0,v_n)$，显然有v_0可得该图中必有圈，并且连接的必然是v_n ，否则某个顶点的度数会是3。

10

> 证明活说明下面的结论：
>
> (1) 若$G^c=G$，则称G是自补图。证明：若G是自补图，则$\nu(G)\equiv 0或1(mod4)$。
>
> (2)有多少个$\nu(G)=5$的自补图。

由于同构可以得到如下的结果：

$$\epsilon(G)=\epsilon(G^c)=\frac{1}{2}\epsilon(K_\nu)=\frac{1}{4}\nu(\nu-1)$$

则必有：

$$nu(G)\equiv 0或1(mod4)$$

自补图有2个。

11

> 构造以一个二分图G，使得G不与任何K维立方体的子图同构。其中，k为任意正整数。

$K_{1,k+1}$

12

13

> 任给图G，都满足$\delta(G) \leq 2\epsilon(G)/\nu(G) \leq \Delta(G)$

由定理得：

$$\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2\epsilon(G)$$

又因为：

$$\nu\delta \leq \sum_{v \in V(G)} deg(v) \leq \nu\Delta$$

可得上述证明式子。

14*

> 我们将图G中所有定点的度数按照从大到小的顺序排列，称为图G的度数序列。证明：
>
> (1) 7,6,5,4,3,3,2 和 6,6,5,4,3,3,1都不是简单图的度数序列。
>
> (2) 设$d_1, d_2, ..., d_n$是简单图的度数序列，则$\sum_{i=1}^{n} d_i$是偶数，且对于任意$1 \leq k \leq n$，都有
>
> $$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} min\{k, d_i\}$$

(1) 证明：从序列可以看出两个图顶点个数均为7

- 若是简单图，则必有$\Delta \leq 6$，但是存在度数为7的点，则`7,6,5,4,3,3,2`不是简单图。
- 若是简单图，则因为只有7个顶点，序列中的两个度数为6的顶点与图中每个点都相邻，则必有$\delta \geq 2$，但存在度数为1的 点，则不是简单图。

(2) 证明：由书上定理1.1可得

$$\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2\epsilon(G)$$

显然$\sum_{i=1}^{n} d_i$是偶数。

对于第二个证明式，设顶点依次是$v_1, v2, ..., v_n$。

然后我们进行拆分，设$\sum_{i=1}^{k} d_i = D_1 + D2$，其中：

- D_1是$v1, ..., v_k$的顶导出子图 的度数之和。易得 $D_1 \leq k(k-1)$；
- D_2是$v1, ..., v_k$之间$v_{k+1}, ..., v_n$连线数。并且$v_{k+1}, ..., v_n$ 可以给予的$v1, ..., v_k$的最大的度数之和是：$\sum_{i=k+1}^{n} min\{k, d_i\}$，所以有：

$$D_2 \leq \sum_{i=k+1}^{n} min\{k, d_i\}$$

综上可得：

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = D_1 + D2 \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} min\{k, d_i\}$$

15

> 任给无环图G，G有一个生成子图H，满足：(1) H是二分图；(2)任给$u \in V(G) = V(H)$，都有$d_H(u) \geq d_G(u)/2$

采用类似“最长轨”的思想，这里假设H_K是**边数最多**的二分生成子图H_k，并架设命题不成立。

根据假设，H_K里存在点$v_o \in V(G)$使得$d_H(v') < \frac{1}{2} d_G(v_0)$，并假设此二分图划分为X和Y，且$v_0 \in X$

16*

> 假设G是简单图， 且$\delta(G) \geq k$，则 G中有长为k的轨道。

证明：此题用最长轨法证明，设$P(v_0, v_m)$是该图的最长轨。假设它的长度小于k，即$m < k$。

对于v_0，因为$\delta(G) \geq k$，除去与轨道$P(v_0, v_m)$上的顶点有连线外，v_0 至少与轨道外的一个顶点的相邻，与最长轨的假设矛盾！

则 G的最长轨长度至少为k，所以存在长为k的 轨道。

19*

> (1)证明：任给$\epsilon \in E(G)$，都满足$\omega(G) \leq \omega(G-e) \leq \omega(G) + 1$
>
> (2)说明：对于图G的任意顶点v，用$G - v$ 替代$G - e$，(1)中的公示未必成立。

(1)证明：假设e在连通片G_1中，若去掉后仍连通，则有：

$$\omega(G) = \omega(G-e) < \omega(G) + 1$$

若使G1分成了两个连通片，则有：

$$\omega(G) < \omega(G-e) = \omega(G) + 1$$

综上有：

$$\omega(G) \leq \omega(G-e) \leq \omega(G)+1$$

(2)举反例即可：

- 星
- 含有度数为0的顶点的图

26*

> 一个公司在六个城市$c_1, c2, \ldots, c_6$有分公司，下面的恶矩阵(i,j)号元素是c_i到c_j的机票价格，试为该公司制作一张c_1 到每个城市的路线图，使得每个城市的机票价格都最便宜。
>
> $$\begin{pmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{pmatrix}$$

下面用表格来表示迭代

迭代次数i	$l(v_2)$	$l(v_3)$	$l(v_4)$	$l(v_5)$	$l(v_6)$	S
0	50	∞	40	25	10	v_1
1	50	∞	50	25	10	v_1, v_6
2	35	45	35	25	10	v_1, v_5, v_6
3	35	45	35	25	10	v_1, v_2, v_5, v_6
4	35	45	35	25	10	v_1, v_2, v_4, v_5, v_6
5	35	45	35	25	10	$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$

路径的答案不止一种：

- v_2 :$v_1 \to v_6 \to v_2$
- v_3:
  - $v_1 \to v_5 \to v_3$
  - $v_1 \to v_5 \to v_4 \to v_3$

  - $v_1 \to v_6 \to v_4 \to v_3$
- v_4：
  - $v_1 \to v_5 \to v_4$
  - $v_1 \to v_6 \to v_4$
- v_5：$v_1 \to v_5$
- v_6：$v_1 \to v_6$

Ch2

、

2*

> 一棵树T有 n_i 个 度数为 i 的顶点， $i=2,3,...,k$, 其余顶点都是树叶，则T有几片树叶？

由图的性质有：

$$2\epsilon(T)=\sum_{i=1}^{k} in_i$$

由树的性质有：

$$\epsilon(T)=v(T)-1=\sum_{i=1}^{k} n_i-1$$

上面两个式子联立可得：

$$n_1=\sum_{i=2}^{k}(i-2)n_i+2$$

4*

> 证明：如果T是树，且 $\Delta(T)\geq n$，则T至少有n片树叶

由2.2题的结论我可以可以得到：

$$n_1=\sum_{i=2}^{k}(i-2)n_i+2\geq(\Delta(T)-2)*1+2=\Delta(T)\geq n$$

得证

6*

> 证明：树有一个中心或两个中心，且有两个中心时，这两个中心相邻

方法一

可以使用删除叶子节点的方法，即证明删除T中所有叶子结点后，新树T'的中心不变。

对于 $\forall v \in V(T)$，如果要使$d(u,v)$最大，v显然是叶子。那么删除所有 T中叶子结点后，必然有：

$$max_{\forall v \in V(T')} d(u,v) = max_{\forall v \in V(G)} d(u,v) - 1$$

所以u仍为T'的中心。

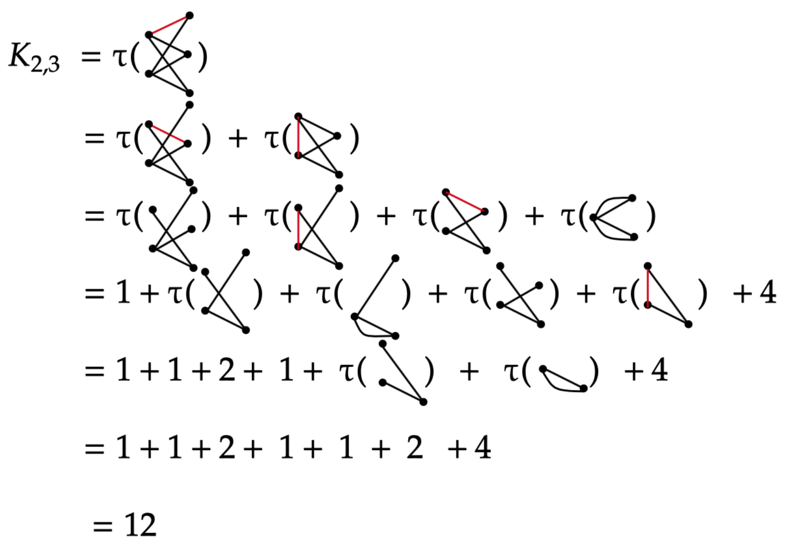
重复执行上述操作，最后只能得到K_1，K_2这两种情况，即一个顶点或者两个相邻顶点，得证。

方法二

可以用最长轨法证明最长轨的中点为树的中心。

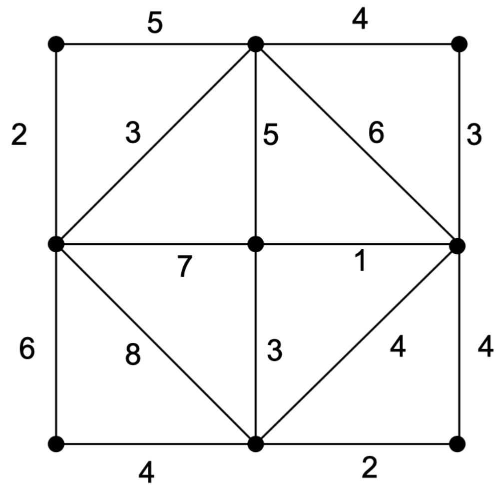
11*

> 求 $K_{2,3}$生成树的个数

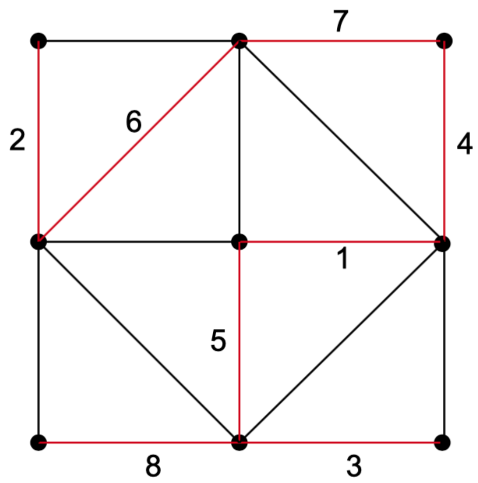


14*

> 用Kruskal算法求图中边权图最小的生成树



Kruskal的算法是有限选择边权较小的边，选择的顺序是和Prim算法不一样的是，如下图所示，红色标记的是最小生成树，序号则是顺序。



15*

> 边权图里的最小生成森林是权最小的生成森林，并且在生成森林中 保持原图中任意两个顶点的连通性。如何修改 Kruskal 算法来构造最小 生成森林，并指出时间复杂度。

Kruskal算法：

- 输入：加权图$G = (V(G), E(G), \omega), v = |V(G)|$
- 输出：G的一棵生成树的边子集$e1, e2, ..., e_{v-1}$

过程如下：

1. 从E(G)中选权最小的边e_1;
2. 若已经选定边$e_1, e_2, ..., e_i$，则从$E(G) - e_1, e_2, ..., e_i$中选取边$e_{i+1}$，使得
    - (i)边导出子图$G[\{e_1, e_2, ..., e_i\}]$不含圈；

   - (ii)在满足(i)的前提下，$\omega(e_{i+1})$的权最小，即$\omega(e_{i+1}) = min_{e\in E(G)-\{e_1,e_2,...,e_i\}}\omega(e)$
3. 反复执行第(2)步，直到选出e_{v-1}为止

下面分类讨论：

1. 如果知道G的连通片数，设为k

   则在各连通片上分别执行原Kruskal算法，时间复杂度为：$O(\sum_{i=1}^k \epsilon_i log\epsilon_i) = O(\epsilon log\epsilon)$
2. 如果不知道G的连通片数， 则需修改循环中止条件：

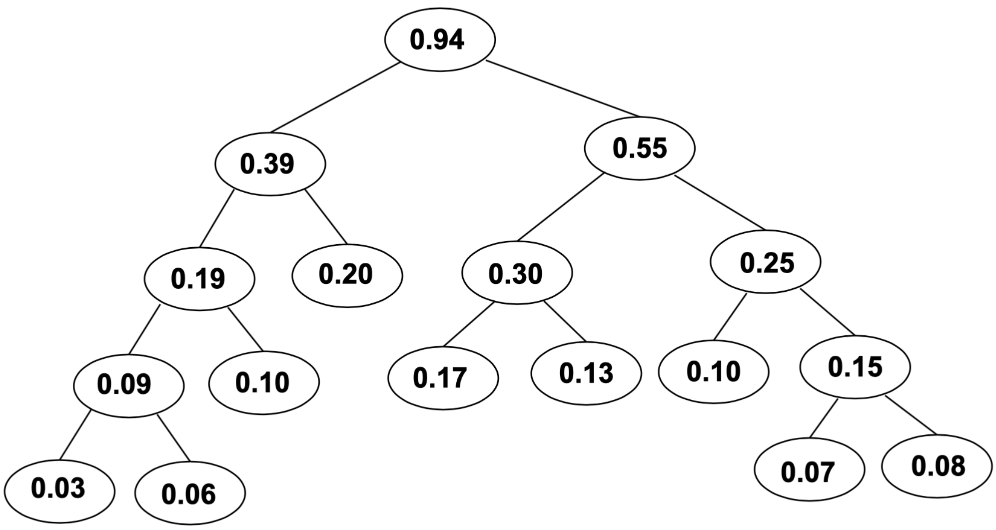
   改为反复执行第(2)步，直到从剩余边集中选出任意一条边都会使边导出子图$G[\{e_1, e_2, ..., e_i\}]$含圈

   时间复杂度为$O(\epsilon log\epsilon)$

20*

> 画出带权 0.2,0.17,0.13,0.1,0.1,0.08,0.06,0.07,0.03 的 Huffman 树

需要注意的是此题的权重之和并不是1，许多人误以为权重之和必须是1。



22*

> 证明引理2.1
>
> 给定$\omega_1 \le \omega_2 \le \cdots \le \omega_t$，则存在一课Huffman树，使得$\omega 1, \omega 2$对应的顶点时兄弟，且这两个顶点在二叉树中的深度都等于树高

不妨设w_i对应的顶点为$v_i, i = 1, 2, ..., t$，假设任意Huffman树中v_1中的深度不等于树高，即存在$v_k, 2 \le k \le t$，使得v_k的深度大于树高 ，显然有$L(v_k) \ge L(v_1)$。

因为

$$WPL(T) = w_1 L(v_1) + w_2 L(v_2) + \cdots + w_t L(v_t)$$

且

$$w_1 \le w_2 \le \cdots \le w_t$$

交换v_1, v_k的位置，得到T'，则有

$$\begin{aligned} WPL(T') &= w_1 L(v_k) + w_2 L(v_2) + \cdots + w_t L(v_1) \\ &= WPL(T \ + (w_1 - w_k)[L(v_k) - L(v_1)] \end{aligned}$$

1. 当$w_1 = w_k$时，$WPL(T) = WPL(T')$，与树T'同为Huffman树；
2. 当$w_1 < w_k$时，$WPL(T') \le WPL(T')$，与树T为Huffman矛盾；

则v_1的深度等于树高，且同理可证得

$$L(v_1) \ge L(v_2) \ge \cdots \ge L(v_t)$$

若v_1无兄弟，则由Huffman树WPL最小规则，v_1得深度还可以再缩短直至v_1有兄弟。

由$L(v_1) \ge L(v_2) \ge \cdots \ge L(v_t)$可得$v_2$为$v_1$的兄弟，则有$\omega 1, \omega 2$对应的顶点为兄弟，且这两个顶点在二叉树中的深度都等于树高。

25

> 证明： 在$v \ge 3$阶的连通图G中 ，存在至少两个顶点，从G中删除这两个顶点后所得图仍为连通。

由推论2.2可知连通图G有生成树，记为T。

由定理2.2可知树T至少有两片叶，记为v_1, v_2。

从T中删去v_1, v_2得树T'显然T'仍然连通

从G中删去v_1, v_2得到图中G'，易知$\forall u_1, u_2 \in V(G'), u_1, u_2 \in V(T')$且存在轨道$p(u_1, u_2) \in E(T') \subseteq E(G')$， 则$G'$ 仍然连通。

Ch3

1*

> G是k-边连通图，E'是G的 k条边的集合，则 $\omega(G-E') \le 2$。

根据$k-$边割集的性质，去掉$k-1$条边后仍然是连通图G'，即$\omega(G')=1$

此时在删去一条边后连通分支的数量最多加一，即$\omega(G-E') \le 2$

2

> 给出一个$k-$连通图G以及k个顶点的集合V'，使得$\omega(G-E')>2$。

星图$K_{1,n}$

3*

> G 是简单图， $\delta(G) \ge v(G)-2$， 则有 $\kappa(G)=\delta(G)$。

$\delta(G)$只有两种情况：

1. $\delta(G)=v(G)-1$

   此时G是完全图，显然有$\kappa(G)=\delta(G)=v(G)-1$

2. $\delta(G)=v(G)-2$

   假设$\kappa(G)=v(G)-3$，则假设删去$v(G)-3$个顶点后图失去连通性，因为$\delta(G) \ge v(G)-2$，所以对于剩下 的三个顶点都至少与一个顶点相邻，即是连通的，矛盾！同理可证明$\kappa(G)$更小 的时候也无法分割。

   若移出某个度数为$v(G)-2$的顶点的所有相邻顶点，则可以导致其不连通，所以$\delta(G)=v(G)-2=\kappa(G)$

7*

> 任给三个非负整数$l \le m \le n$，都存在简单图G ，满足$\kappa(G)=l, \kappa'(G)=m, \delta(G)=n$。

该题证明存在行即可。

- $l=n$时，完全图K_{n+1}满足条件
- $l<n$时，取两个完全图K_{n+1}，并分别记做K_1，K_2，取 K_1中 l个顶点(记为X),K_2中 m个顶点(记为Y)

Y中每个顶点向X中的顶点连接一条边，使得一共有m条边，且X中每个顶点都有边被连接。此时图满足条件

13*

> 证明定理3.4
>
> ($Menger$定理边版本)给定图G中的两个顶点u, v,G中两两无公共边的 $uv-$轨道的最大 数量等于最小 $uv-$边割集的边数，即：
>
> $$p'(u,v) = c'(u,v)$$

这里仿照$Menger$ 点版本的证明，使用归纳假设法，对边的条数作归纳。

令$H = G - e$，因为H是G的子图有：

$$p_G(u,v) \geq p_H(u,v)$$

由归纳假设得：

$$p_H(u,v) = c_H(u,v)$$

因为H得边割集加上e必为G的边割集：

$$c_H(u,v) \geq c_G(u,v) - 1 = k - 1$$

如果上述的两个不等式都成立，则命题对多一条边的图也成立

此时假设两个等式都成立，注意第二个不等式的取等条件，$\{e_i\}_{i=1}^{k-1}$ 是 H的边割集，但不是G

的边割集，$\{e_i\}_{i=1}^{k-1} \cup e$是 G 的边割集，这说明 $G - \{e_i\}_{i=1}^{k-1}$必有一条过 e 的路。

移出所有 e 后，整个图被分成 U 和V两部分$(u \in U, v \in V)$然后对 U 和V 分别进行收缩操作(这里以收缩 V

为例，在边 e_i 上的点不会被收缩)。

对于收缩以后图的边连通度(因为是收缩图，所以最小边割集数不会减小;由$\{e_i\}_{i=1}^{k-1} \cup e$的最小性知不会增加)，

再利用归纳假设(注意这里收缩图可以通过细分顶点和加边操作得到原图)，可以得出收缩图的边连通度不变。