代数结构习题课

徐亮亮

5.24

习题1 7(3)

- 不以0打头的二进制偶整数,它应该包括0, 110, 1010等

证：设该集合为E

1. 基础语句：$0 \in E$
2. 归纳语句：如果$\mathrm{x} \in E$,则$\mathrm{x}+10 \in E$
3. 终结语句：除了有限次使用1,2产生的元素外，再也没有其他元素属于E.

习题2 1(2)

- $((a, b),b)=(a,b)$

证：设$m=((a, b),b)$, $n=(a,b)$.下证$m|n$&$n|m$

1. $m|n$:

   ∵$m=((a, b),b)$

   ∴$m|(a,b)$,$m|b$

   ∴$m|n$

2. $n|m$:

   ∵$n=(a,b)$

   ∴$n|a$&$n|b$, $n|(a,b)$

   ∴$n|((a, b),b)$即$n|m$

∴$m=n$

习题2 4

- 证明：对于所有的n>0,有6|(n^3-n).

证:

对任意的$n \in Z^+$, 令$m = n^3 - n = n(n-1)(n+1)$. 知m是连续的三数相乘,

∴ 必有2|m, 3|m

∴6|m

习题2 9(3)

- 求所有整数解15x+16y=17

解： ∵15x+16y=17,由(15,16)=1|17,有

$$\begin{cases} x_0 = -17 \\ y_0 = 17 \end{cases}$$

是方程的一组解.

∴通解为

$$\begin{cases} x_0 = -17 + 16t \\ y_0 = 17 - 15t \end{cases}$$

习题2 13

- 若$k \equiv 1(mod\ 4)$, 问6k+5模4同余几？

解：

$\because\ k \equiv 1(mod\ 4)$

$\because 6k \equiv 6(mod\ 4)$

$\because 6k+5 \equiv 11(mod\ 4)$

$\therefore 6k+5 \equiv 3(mod\ 4)$

习题2 18(2)

- $3x \equiv 6(mod\ 18)$

解：由定理2.6:

$x \equiv 2 + 6t(mod\ 18), 0 \leq t \leq 2$

$x \equiv 2, 8, 14(mod\ 18)$

习题2 19(3)

- $\begin{cases} x \equiv 1(mod\ 2) \\ x \equiv 1(mod\ 3) \\ x \equiv 6(mod\ 7) \end{cases}$

解：由中国剩余定理：

$$x \equiv 13(mod\ 42)$$

习题2 22

- 计算$\Phi(42), \Phi(420), \Phi(4200)$

解：$\Phi(42)$=12,

$\Phi(420)$ ＝96,

$\Phi(4200)$ ＝960.

习题3 15

- 求下列置换的阶：
  1. (47)(261)(567)(1234)
  2. (163)(1357)(67)(12345)

解：

1. (47)(261)(567)(1234)=$\begin{pmatrix}1234567\\6372145\end{pmatrix}$=(16423751)

∴阶为7

2. (163)(1357)(67)(12345)=$\begin{pmatrix}1234567\\2547163\end{pmatrix}$=(125)(347)(6)

∴[3,3,1]=3,即阶为3

习题3 19

- 写出下列2元开关函数的小项表达式：
  1. 恒为1的函数
  2. 当且仅当两个变量的取值相同时函数值为1

解：由真值表得：

1.$f(x_1, x_2) = \overline{x_1 x_2} + x_1\overline{x_2} + x_2\overline{x_1} + x_1 x_2$

2.$f(x_1, x_2) = \overline{x_1 x_2} + x_1 x_2$

习题4 19

- 证明N×N是可数集合,这里N是自然数集合

证：

方法1：由定义4.19, 构造双射:

N×N→N,取任意的$x, y \in$ N×N

$$f(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$$

证明是双射即可.

习题4 19

方法2：找到枚举方法:

(0,0) (0,1) (0,2) (0,3) ...

(1,0) (1,1) (1,2) (1,3) ...

(2,0) (2,1) (2,2) (2,3) ...

(3,0) (3,1) (3,2) (3,3) ...

... ...

该排列方法不重复且无遗漏！

习题5 24

- 找出所有与K_4群同构的S_n子群.
- 解：

S_n中的二阶元有：1° C_n^2个对换 (ij)

2° 任两个不相交对换之积 $(i_1i_2)(i_3i_4)$，例如 $(12)(34)$

3° 任三个 ……

⋮

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$° 任$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$个不相交对换之积

K_4群（4阶Klein群）由一个单位元和3个二阶元组成，但只有不相交的两个二阶元之积是二阶元，两个2×2对换当它们涉及的是相同的4个元素时它们之积也是二阶元，如 $(12)(34)\cdot(13)(24)=(14)(23)$

∴与K_4群同构的S_n子群有以下几种形式：

① $\{\sigma_I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2\}$ σ_1与σ_2是任意不相交二阶元

② $\{\sigma_I, (i_1i_2)(i_3i_4), (i_1i_3)(i_2i_4), (i_1i_4)(i_2i_3)\}$，$\forall i_1, i_2, i_3, i_4 \in [n]$

③ $\{\sigma_I, \sigma_1\cdot\sigma, \sigma_2\cdot\sigma, \sigma_1\sigma_2\}$ 其中$\sigma, \sigma_1, \sigma_2$是不相交的二阶元

④ $\{\sigma_I, (i_1i_2)(i_3i_4)\sigma, (i_1i_3)(i_2i_4)\sigma, (i_1i_4)(i_2i_3)\}$，其中$\sigma$是不含$i_1\cdots i_4$的二阶元

习题5 26

- 在群<G,*>中定义新的二元运算·,

$$a\cdot b=b*a$$

证明： <G, · >是群,并且<G,*>与<G, · >同构.

证: 首先证明<G, · >是群:

① 封闭性

② 结合律

③ 单位元

④ 逆元

习题5 26

接下来证明<G,*>与<G, · >同构:

构造映射:

$$\varphi: G \to G$$
$$x \to x^{-1}$$

由<G,*>是群,保证了φ是双射.

又因为对任意$x, y \in G$,$\varphi(\mathrm{x} * \mathrm{y}) = (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1} = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$,保持运算.

∴ <G,*>与<G, · >同构.

习题6 3

- 写出A4关于H={e,(12)(34),(13)(24),(14)(23)}的左陪集分解与右陪集分解.

解：

A4={e,(12)(34),(14)(23),(13)(24),(123),(132),(234),(243),(134),(124),(143),(142)}

右陪集：

He={e,(12)(34),(13)(24),(14)(23)}

H(123)=H(243)=H(134)=H(142)={(123),(243),(142),(134)}

H(132)=H(234)=H(143)=H(124)={(132),(143),(234),(124)}

左陪集与右陪集对应相同.

习题6 4

- H是群G的指数为2的子群.证明：对于G的任意元素a必有$a^2 \in H$,若H的指数为3,是否对于G的任意元素a有$a^3 \in H$？证明你的断言.

证：1.若a $\in H$, 则$a^2 \in H$(封闭性)

2.若a $\notin H$, 则$a^2 = \mathrm{a} * \mathrm{a} \notin aH$

由于H是群G的指数为2的子群

∴G=H ∪aH

∴$a^2 \in H$

综上对于G的任意元素a必有$a^2 \in H$

习题6 4

若[G:H]=3,举一反例：

考虑S3,

令H={e,(12)},

(13)∉H,而$(13)^3=(13)\notin$H

习题7 3

- 在环<R,+,·,>中,如果<R,+>是循环群,则<R,+,·,>是交换环.

证：∵ <R,+>是循环群,设<R,+> = <r>.

取任意的$a, b \in R$, 设a, b关于<R,+> 的阶是m, n.

记a=mr, b=nr

由加法与乘法间满足左右分配律,有

$\mathrm{a} \cdot b = m \cdot nr^2 = \mathrm{b} \cdot a$

所以<R,+,·,>是交换环.

习题7 4

- 在环R中,如果对于任意的a ∈R,均有$a^2 = a$,则称该环为布尔环.证明：
  1. 任意$a \in \mathrm{R}, 2a = 0$;
  2. R是交换环

证：由定理7.1知,在环R中,对于任意的a,b,有(-a)b=-(ab)=a(-b);(-a)(-b)=ab

1.由$a^2 = a$,现我们有：

$$a^2 = a = (-a)^2 = -a.$$

由于<R,+>为群,

$$\therefore a+(-a)=a+a=2a=0$$

习题7 4

2.由于<R,+>为群,取任意的$a, b \in R$

$\because (a+b)^2 = a+b$

$= a^2 + ab + ba + b^2$

$= a + b + ab + ba$.

$\therefore ab + ba = 0$.

由1中任意$a \in \mathrm{R}, 2a = 0$.

$\therefore ab = ba$.即R是交换环.

习题7 6

- 若a是环R的可逆元,则
  1. -a也是可逆元
  2. a不是零因子

证：1.设a的逆元为a’,由<R,+>是群,由定理 7.1知：

$a \cdot a' = 1 = (-a) \cdot (-a')$

$a' \cdot a = 1 = (-a') \cdot (-a)$

由上得到-a的左右逆元,

∴ -a也是可逆元

习题7 6

2.反证：设a是零因子,由定义：

存在非0元素$b \in R$, 使得a·b=0;

又因为a存在逆元,设为a’,有

a’·a·b=0

∴b=0

矛盾！

∴a不是零因子

习题7 7

- 在交换环中,若a*b是零因子,则a是零因子或b是零因子.

证：交换环保证了这种情况不存在：a仅是左零因子,b仅是右零因子,而a*b是零因子！

由a*b是零因子,得到a*b$\neq 0$, 即a, b都不为0.

由零因子定义,设存在非0元素$c \in R$,有

1.(a*b)*c=a*(b*c)=0

若a不是零因子, 因为a*(b*c)=0,则b*c=0,即b为零因子.

同理b不是零因子时,a必为零因子.

所以a,b至少有一个是零因子.

习题7 7

2.$c*(a*b)=(c*a)*b=0$

同1中证明.

综1,2,若$a*b$是零因子,则a是零因子或b是零因子

谢谢！