第一次作业

1. 从日常生活中举出五个实例，它们的数学模型是图。

七桥问题，排课问题，中国快递员问题等等，描述合理均可

1. G是简单图，则有$\varepsilon(G) \le \binom{\nu(G)}{2}$。

方法1（Euler定理）：

因为G是简单图 所以∀v∈V(G),有deg(v)≤v-1

则$\sum_{\mathrm{v}\in \mathrm{V(G)}} \deg(V) \le v(v-1)$

由Euler定理，$\varepsilon(\mathrm{G}) = \frac{\sum_{\mathrm{v}\in \mathrm{V(G)}} \deg(V)}{2} \le \frac{v(v-1)}{2}$，得证

方法2（组合）：

在简单图中，任意两顶点之间最多存在一条边

即$\varepsilon(\mathrm{G}) \le \binom{v(G)}{2}$

4. 任何至少由两个人构成的群体中，其中有两个人，他们的朋友数一样多。

证：将每个人看作顶点，两个人是朋友则在这两人所代表的顶点之间加一条边，因此问题等价于：在对任意满足V(G)≥2的图G中，存在$V_i, V_j \in V(G), i \neq j$，使得$deg(v_i)=deg(v_j)$.

反证法：假设对任意$V_i, V_j \in V(G), i \neq j$，都有$deg(v_i) \neq deg(v_j)$

deg(v)在G中共有|V(G)|个不同的取值

而deg(v)取值范围为0至|V(G)|-1，恰好有|V(G)|个可能的取值，故每种取值恰好出现一次，分别为0,1,…, |V(G)|-1

所以存在$V_i, V_j \in V(G), i \neq j$，使得$deg(v_i)=0$，$deg(v_j)= |V(G)|-1$

即v_i与所有点都不相连，v_j与所有点都相连，矛盾，假设不成立。

得证。

7. 证明下面的结论：

（1）$\varepsilon(K_{m,n}) = mn$。

（2）设G是二分图，$\varepsilon(G) \le \nu^2(G)/4$。

（1）证：不妨设$K_{m,\,n}=X\cup Y$，$X\cap Y=\emptyset$，其中$|X|=m$，$|Y|=n$

由$K_{m,\,n}$定义，$\forall u\in X$，$deg(u)=n$

$\forall v\in Y$，$deg(v)=m$

则$\sum_{v\in V(Km,n)} \deg(v) = \sum_{u\in X} \deg(u) + \sum_{v\in Y} \deg(v) = 2mn$

由Euler定理，$\varepsilon(K_{m,\,n})=mn$

（2）$\varepsilon(G) \le \varepsilon(K_{m,\,n})$，$V(G)=m+n$

由(1)可得$\varepsilon(K_{m,\,n})=mn$，所以$\varepsilon(G) \le mn \le (m+n)^2/4$

即$\varepsilon(G) \le v^2(G)/4$

第十一次作业

3. 设G的任意两个奇圈都有公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。

反证法，假设X(G)≥6

设$V(G)=V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k (k \geq 6)$，$V_i \cap V_j = \emptyset$，$1 \leq i \neq j \leq k$

可以找出两个导出子图G_1和G_2，$G_1 = V_1 \cup V_2 \cup V_3$，$G_2 = V_4 \cup \ldots \cup V_k$

则$X(G_1)=3, X(G_2) \geq 6-3=3$

所以G_1和G_2都存在奇圈

又因为$V_i \cap V_j = \emptyset$，即$G_1 \cap G_2 = \emptyset$，与任意两个奇圈都有公共顶点矛盾

故X(G)≤5

7. 如果图G的任一真子图H皆有$\chi(H) < \chi(G)$，则称G是色临界图；若$\chi(G) = k$，则称色临界图G是k色临界图。

(1) 证明：1色临界图只有K_1，2色临界图只有K_2，3色临界图只有k阶奇圈，$k \geq 3$。

对于1色临界图，X(G)=1，则G为零图，V(G)=1，否则删除一个顶点得到的真子图的色数仍为1，矛盾

对于2色临界图， X(G)=2，则G是有边二分图。若E(G)>1,设e∈E(G)，则对于真子图H=G-e，X(H)=2，矛盾，所以E(G)=1

若V(G)>2,设G中唯一的边为e，e的两个端点为a和b，V(G)={a,b,c,…},

则对于真子图H=G-c，X(H)=2，矛盾，所以V(G)=2

综上，2色临界图只有K_2

色数为3的图恒含奇圈，若3色临界图不是k阶奇圈，则3色临界图必有一个真子图为奇圈，其色数为3，矛盾。所以3色临界图必为奇圈。

(2) 试给出一些4色临界图的例子。

K_4

(3) 若G是k色临界图，证明：$\forall v \in V(G)$，均有$deg(v) \geq k-1$。

假设存在V_0使得$deg(v_0)<k-1$，则$G-v_0$是可$k-1$顶点着色的，设着色为$(V_1,V_2,\ldots,V_{k-1})$，因为$deg(v_0)<k-1$，所以v_0必与某个V_i的所有顶点不相邻，将v_0着V_i的颜色，即为G的一个$k-1$顶点正常着色，矛盾。

9. 给出求二分图正常Δ边着色的算法。

解:

设$G(X,Y,E)$为二分图，且$|X| \geq |Y|$，该二分图正常Δ边着色算法如下:

（1）加顶点扩充Y，使得$|X| = |Y|$，添加边使G变成Δ次正则二分图，记为 *。

（2）利用匈牙利算法逐次求其完备匹配，直至求出 *的Δ个边不重的完备匹配，每一个完备匹配着一种颜色即可。

（3）去掉扩充的顶点及边即可。

10. 证明：若二分图的顶点的最小次数为$\delta > 0$，则对边进行δ着色时，能使每个顶点所关联的边中皆出现δ种颜色。

解： （反证法）
证明如下：
假设不存在题中所述的着色方式，下面考虑图K的最佳δ着色，由假设，存在一个顶点，且该顶点所关联的边的颜色数小于δ，即小于该顶点的次数。所以存在颜色x, y，使得x不出现在顶点v的着色着色中， y出现了至少2次，则着色x和y的边$\mathrm{E}_x \cup E_y$所组成的子图在顶点v处的连通片为奇圈，这与二分图中没有奇圈矛盾，所以假设不成立。
综上所述，若二分图的顶点的最小次数$\delta > 0$，则对边进行δ着色时，能使每个顶点所关联的边中皆出现δ种颜色。

第十三次作业

9. 若竞赛图不是强连通图，最少改变几条边的方向，可以使它变成有向Hamilton图?

竞赛图必有有向hamilton轨道，记$v_0e_0v_1e_1\ldots e_{n-1}v_n$

改变v_0与v_n之间连边的方向即可

10. 在不少于三名运动员的个人循环赛中，无平局，无人全胜，则必出现甲胜丙，乙胜丙，丙又胜乙的现象。

将选手作为顶点，若选手A赢了选手B，则增加一条A指向B的有向边，得到竞赛图。

该竞赛图必有王，设为甲。由于无人全胜，必有一人赢了甲，设为丙。又因为甲为王，至多两步就能到丙，即必有情况甲赢了乙，乙赢了丙，又丙赢了甲，得证。

1. 假设f是网络$N=(D,s,t,c)$上的流函数。证明:

$$\sum_{e\in\alpha(t)} f(e)-\sum_{e\in\beta(t)} f(e)=\sum_{e\in\beta(s)} f(e)-\sum_{e\in\alpha(s)} f(e).$$

$$\sum_{v\in V(D)}\sum_{e\in\alpha(v)} f(e)=\sum_{v\in V(D)}\sum_{e\in\beta(v)} f(e)$$

$$\sum_{v\in V(D)}\sum_{e\in\alpha(v)} f(e)=\sum_{e\in\alpha(s)} f(e)+\sum_{e\in\alpha(t)} f(e)+\sum_{v\in V(D)-s-t}\sum_{e\in\alpha(v)} f(e)$$

$$\sum_{v\in V(D)}\sum_{e\in\beta(v)} f(e)=\sum_{e\in\beta(s)} f(e)+\sum_{e\in\beta(t)} f(e)+\sum_{v\in V(D)-s-t}\sum_{e\in\beta(v)} f(e)$$

由定义，得 $\forall v\in V(D)-s-t,\quad \sum_{e\in\alpha(v)} f(e)=\sum_{e\in\beta(v)} f(e)$

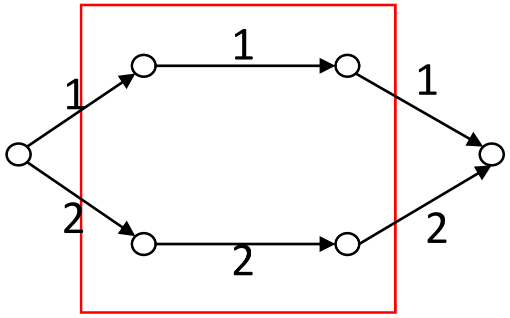
联立得 $$\sum_{e\in\alpha(s)} f(e)+\sum_{e\in\alpha(t)} f(e)=\sum_{e\in\beta(s)} f(e)+\sum_{e\in\beta(t)} f(e)$$

2. （1）假设f是网络$N=(D,s,t,c)$上的流函数，$X\in V(D)$，证明：

$$\sum_{v\in X}\left(\sum_{e\in\beta(v)} f(e)-\sum_{e\in\alpha(v)} f(e)\right)=f^{+}(X)-f^{-}(X),$$

其中，$f^{+}(X)=\sum_{e\in(X,V(D)-X)} f(e)$表示的是尾在$X$中、头不在$X$中的边上的流函数之和，而$f^{-}(X)=\sum_{e\in(V(D)-X,X)} f(e)$表示的是头在$X$中、尾不在$X$中的边上的流函数之和。

（2）举例说明：存在网络流f，使得$\sum_{v\in X}\sum_{e\in\beta(v)} f(e)\neq f^{+}(X)$，$\sum_{v\in X}\sum_{e\in\alpha(v)} f(e)\neq f^{-}(X)$。



$$\sum_{v\in X}\sum_{e\in\beta(v)} f(e)=6 \qquad f^{+}(x)=3$$

$$\sum_{v\in X}\sum_{e\in\alpha(v)} f(e)=6 \qquad f^{-}(x)=3$$

$$\sum_{v\in X}\sum_{e\in\beta(v)} f(e)=\sum_{e\in(X,X)} f(e)+\sum_{e\in(X,V(D)-X)} f(e)$$

$$\sum_{v\in X}\sum_{e\in\alpha(v)} f(e)=\sum_{e\in(X,X)} f(e)+\sum_{e\in(V(D)-X,X)} f(e)$$

$$\sum_{v\in X}\left(\sum_{e\in\beta(v)} f(e)-\sum_{e\in\alpha(v)} f(e)\right)=\sum_{e\in(X,X)} f(e)+\sum_{e\in(X,V(D)-X)} f(e)-\left(\sum_{e\in(X,X)} f(e)+\sum_{e\in(V(D)-X,X)} f(e)\right)$$

$$=\sum_{e\in(X,V(D)-X)} f(e)-\sum_{e\in(V(D)-X,X)} f(e)=f^{+}(x)-f^{-}(x)$$

第十三次作业

3. 证明：若网络中不存在从源s到汇t的有向轨道，则此网络的最大流量与最小截量都是0。

令S={v|v∈V(D),存在从s到v的有向轨道}

由题t∉S，则t∈$\bar{S}$，(S, $\bar{S}$)是网络的一个截

若(S, $\bar{S}$)≠ ∅，则∃e=uv∈E(D)，u∈S，v∈ $\bar{S}$

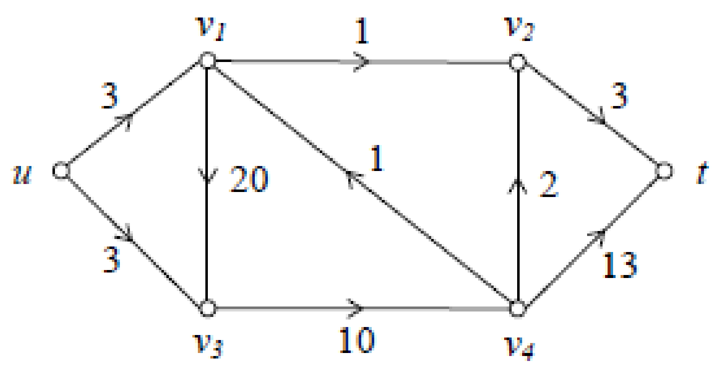
而由S的定义，v∈S，矛盾

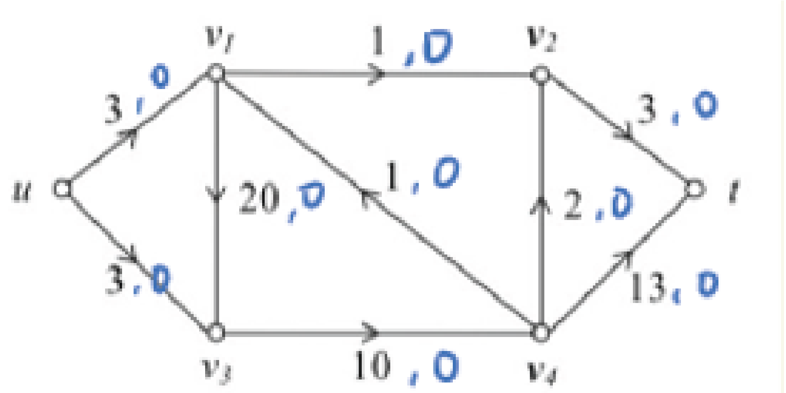
所以(S, $\bar{S}$)= ∅

则C (S, $\bar{S}$)=0，最小截为0

由最大流最小截定理，最大流也为0

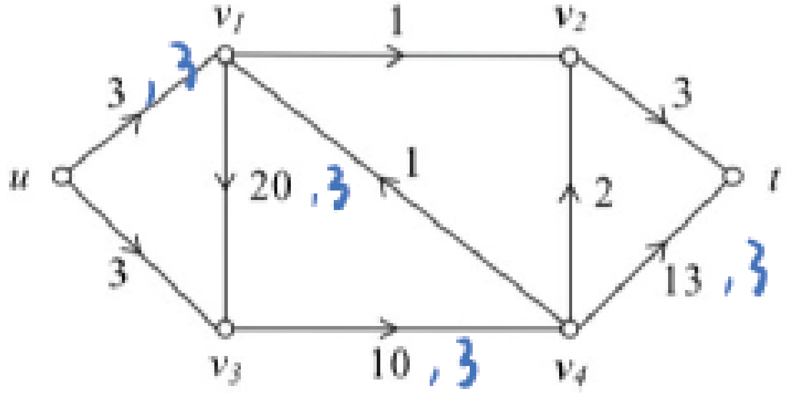
4. 求图9.14中网络的最大流

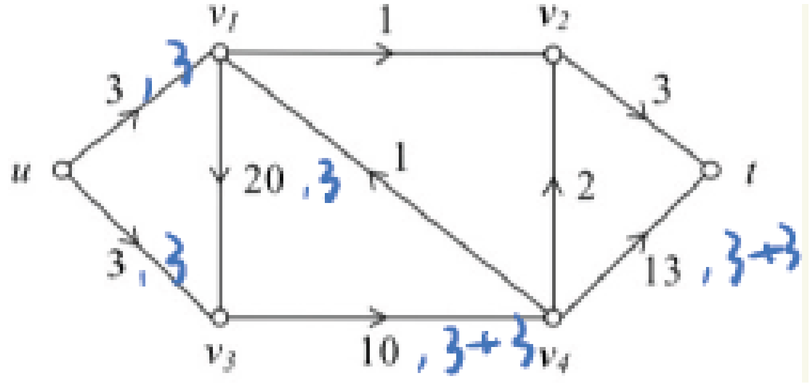




可增载轨道u-v_1-v_3-v_4-t

可增载轨道u-v_3-v_4-t





5. 证明：若网络中每条边的容量均为整数，则最大流的流量也一定是整数。

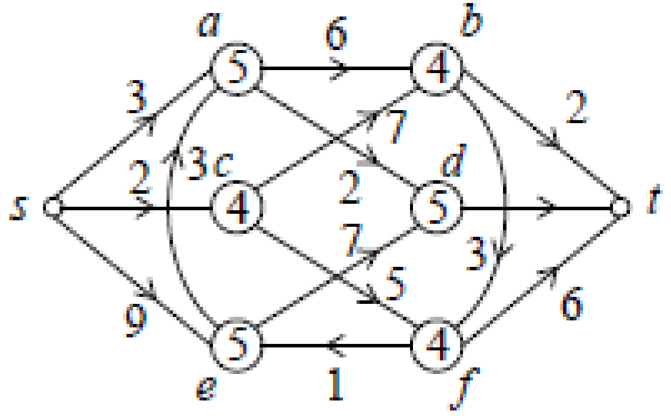
对于任意截，$C(S, \bar{S})=\sum_{e\in(S,\bar{s})} c(e)$

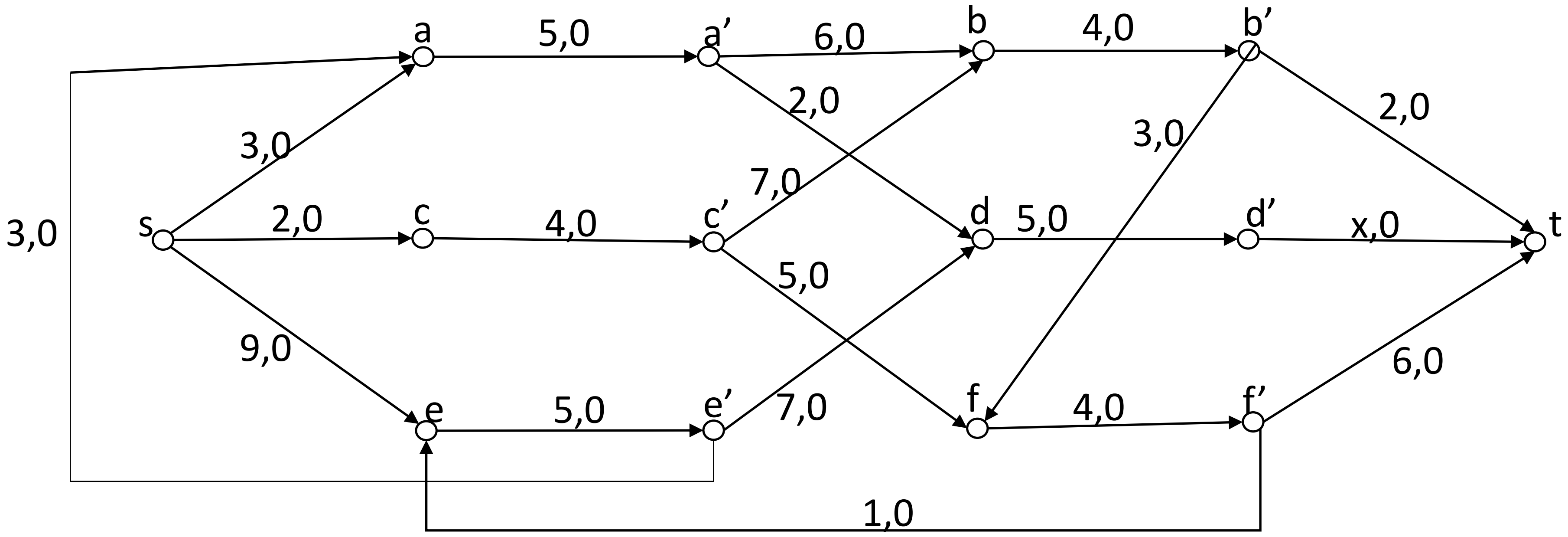
因为容量均为整数，所以$C(S, \bar{S})$为整数

因此最小截为整数

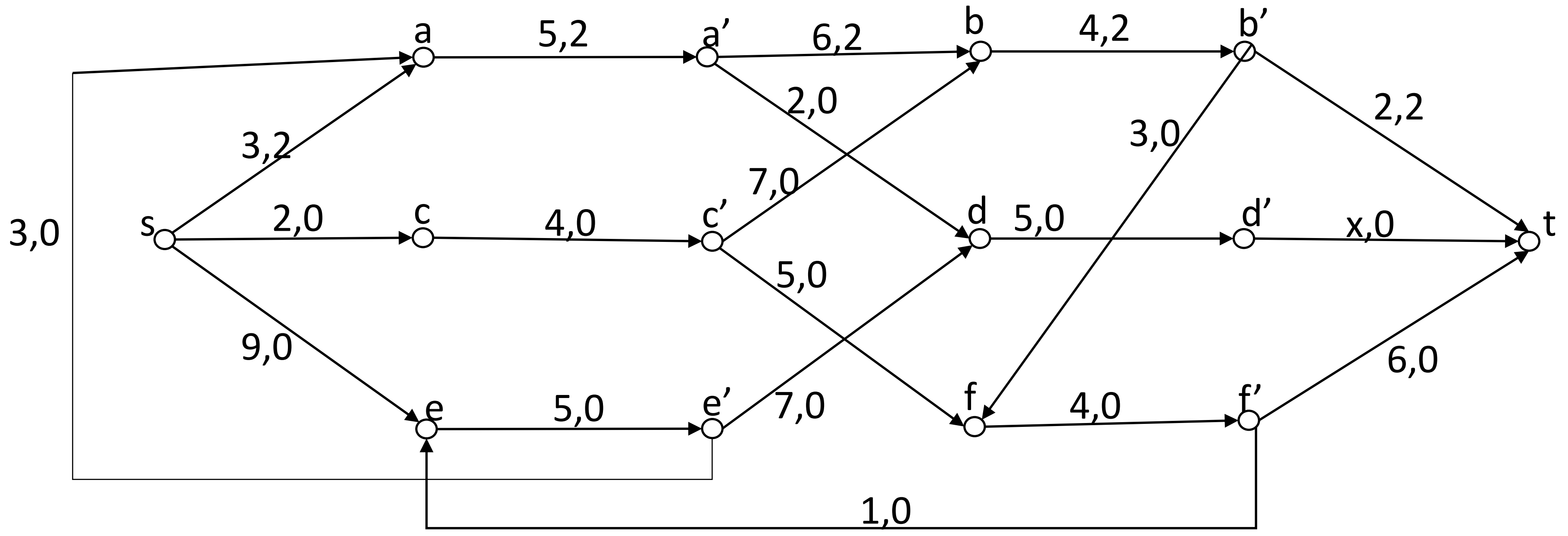
又由最大流最小截定理，最大流=最小截，所以最大流的流量一定是整数

7. 在图9.16所示的网络中，除了边有容量外，源s与坑t没有容量，而其余的顶点都有容量。求此网络的最大流。

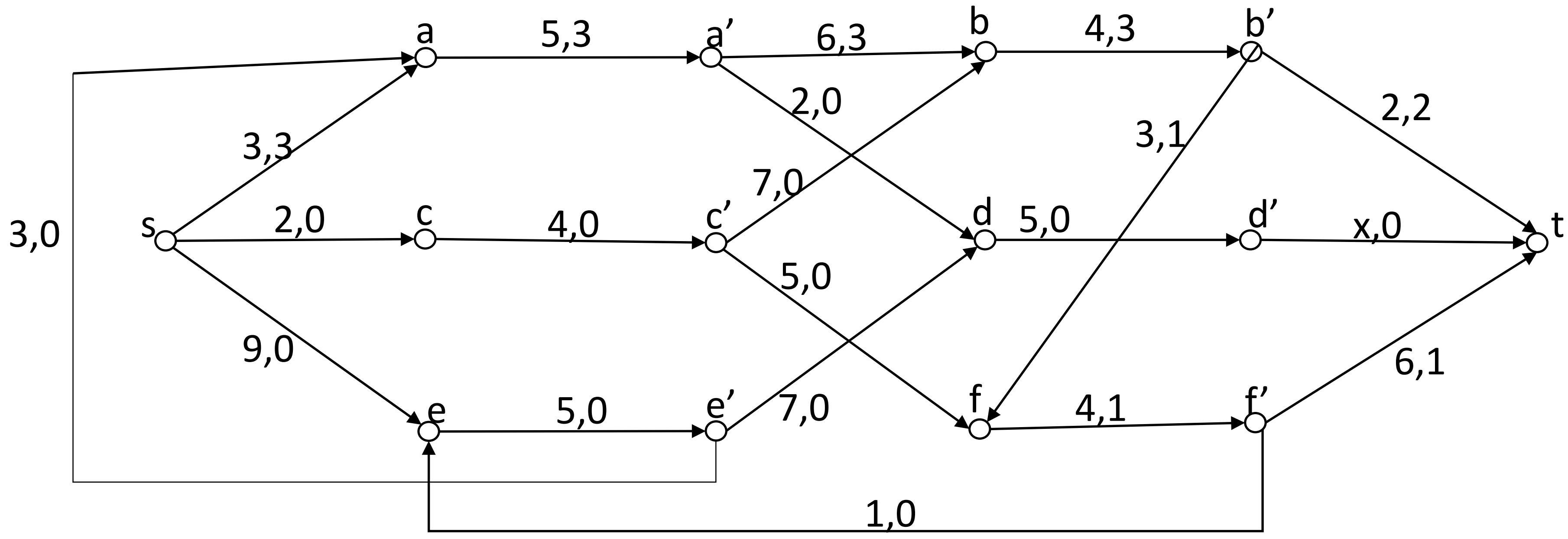




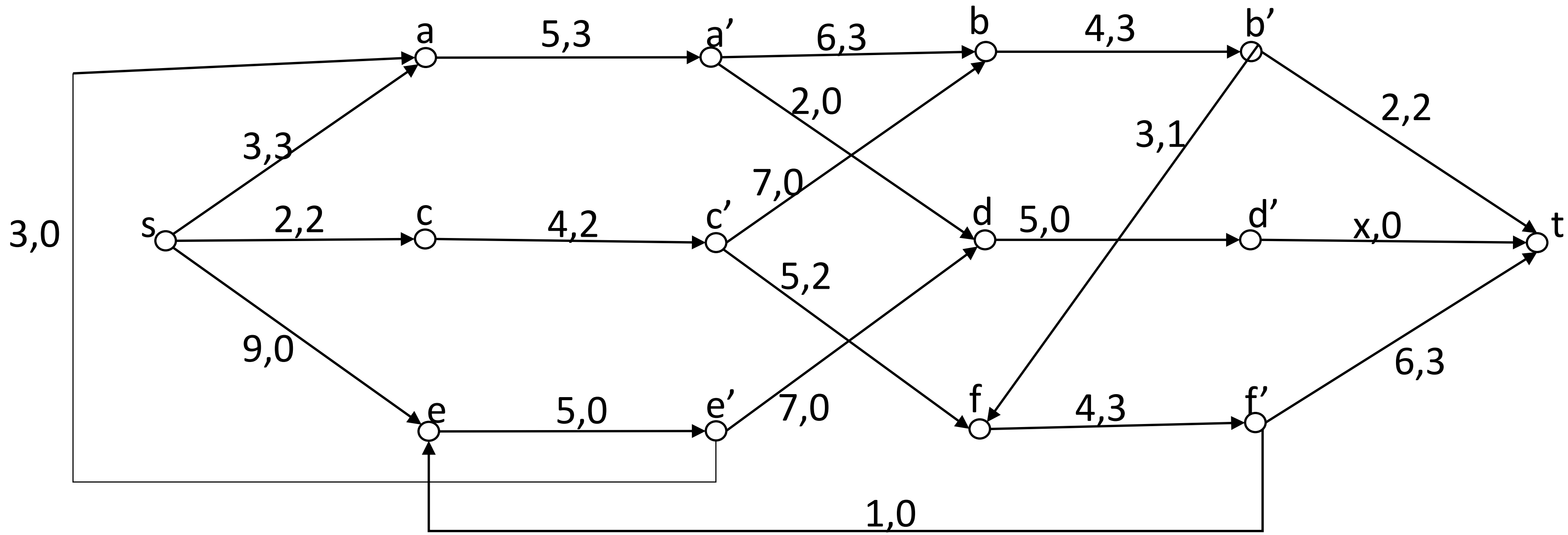
可增载轨道s-a-a’-b-b’-t，l(p)=2



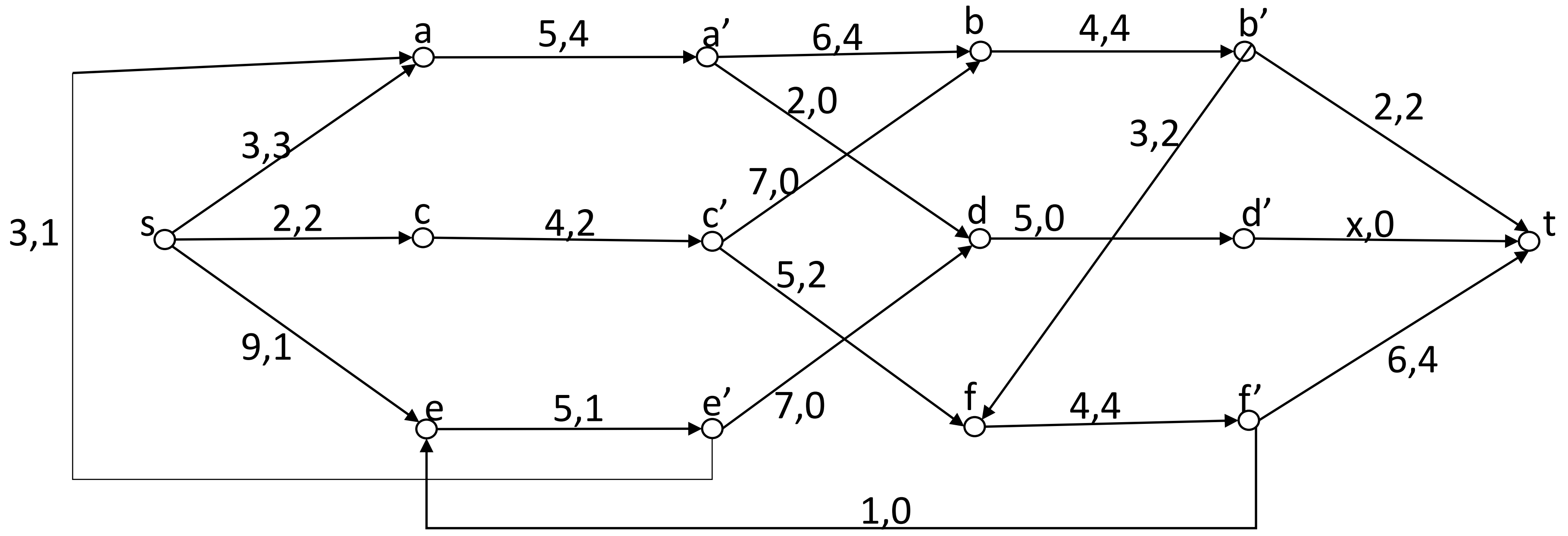
可增载轨道s-a-a’-b-b’-f=f’-t，l(p)=1



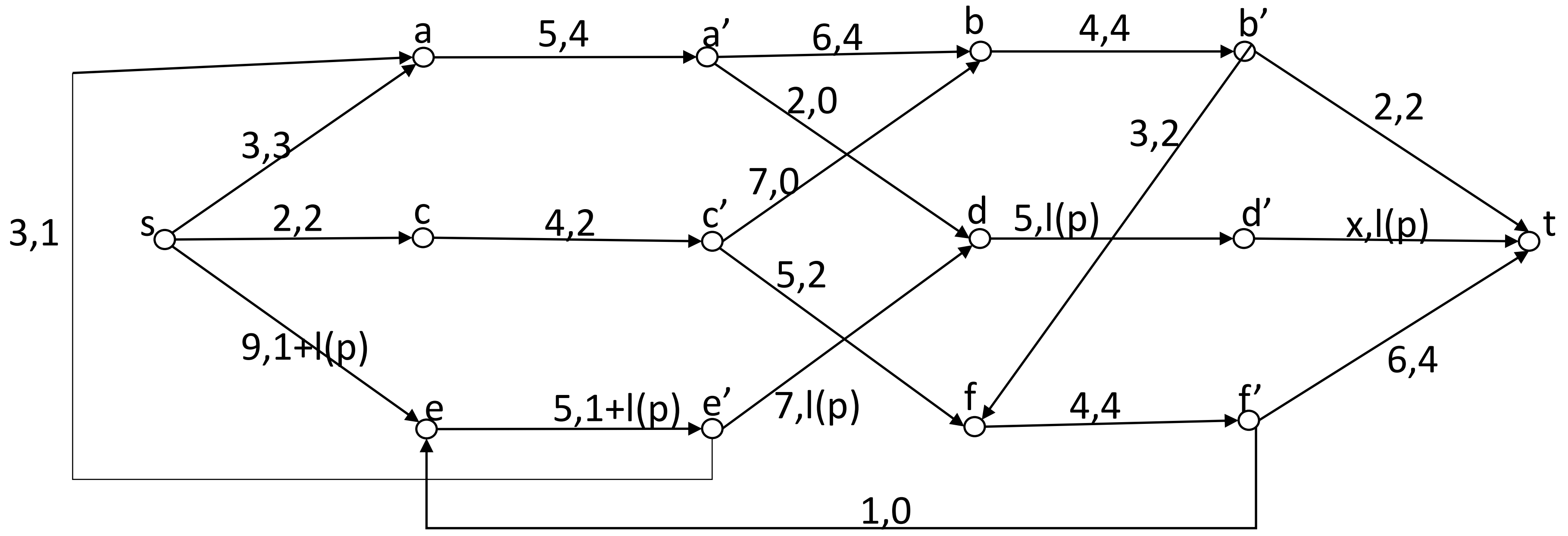
可增载轨道s-c-c’-f-f’-t，l(p)=2



可增载轨道s-e-e’-a-a’-b-b’-f-f’-t，l(p)=1



可增载轨道s-e-e’-d-d’-t，l(p)=min{4,x}



最大流=6+min{4,x}