第5卷 第3期
1992年 7月

应用数学
MATHEMATICA APPLICATA

Vol. 5 No.3
July 1992

关于图论中棱形式的Menger定理的注记

徐俊明

（中国科学技术大学数学系，合肥230026）

提要 本注记给出图论中棱形式Menger定理的一个直接而又简单的证明。

关键词：图论；连通度；Menger定理

1 一个重要的定理

记有限(有向或无向)图G的顶点集合为$V(G)$，棱集合为$E(G)$。设s和t是G中相异两顶点，$l_G(s,t)$表示G中棱不交(s,t)路的最大数目，$\lambda_G(s,t)$表示G中(s,t)分离集$S\subseteq E(G)$中棱的最小数目。在研究图的连通性时，有一个重要的被称之为棱形式的Menger定理，即：

定理A 对G中任何相异两顶点s和t，有

$$l_G(s,t)=\lambda_G(s,t).$$

这个定理由Ford, L. R. Jr., Fulkerson, D. R.[1]和Elias, P., Feinstein, A., Shannon, C. E.[2]在1956年几乎同时发现的，但都不是直接用图论的语言来证明的。定理A与Menger定理[3]在图论中有相同的地位，两者是等价的。但一般著者在叙述定理A时，要么将它作为“最大流最小截定理”的推论，要么作为Menger定理的推论。因此用图论语言直接给出定理A的证明，尤其是给出一个简单证明，无疑将是有意义的。证明中采用以下记号：

$E_G(x,y)$：G中连接顶点x和y的棱集。

$G\cdot e$：从G中删去棱e，并把e的两端点并为一个顶点所得到的图。

G_p：$G-E(p)$，其中p为G中一条路。

$d_G(s,t)$：G中(s,t)路的最短长度。

$N_G(s)$：G中与顶点s相邻的顶点集。

引理 设G是一个图，s和t是G中任何两个相异顶点。若$\lambda_G(s,t)=\lambda\geqslant1$，则$G$中存在最短$(s,t)$路$p$使得$\lambda_{G_p}(s,t)\geqslant\lambda-1$。

证明 对$d_G(s,t)=n$用归纳法。当$d_G(s,t)=1$时，令$e\in E_G(s,t)$，则e必在G的任何一个(s,t)分离集$S\subseteq E(G)$中，所以令$p=(s,e,t)$，则$\lambda_{G_p}(s,t)=\lambda-1$。假设对任何图$H$和$H$中任何两个相异顶点$s,t$，只要$d_H(s,t)\leqslant n$，就有引理成立，并设$s$和$t$是$G$中两相异顶点且$d_G(s,t)=n+1\geqslant2$。令$P'$是$G$中长度为$(n+1)$的$(s,t)$路。取$x\in N_G(s)\cap V(P')$，$e\in E_G(s,x)$，令$H=G\cdot e$，则$d_H(s,t)=n$。由于$H$中任何$(s,t)$分离集都是

本文于1989年9月15日收到(修改稿于1990年4月20日收到)。

G中(s,t)分离集，所以$\lambda_H(s,t)\geqslant\lambda$。由归纳假设，$H$中存在最短$(s,t)$路$P''=(s,e_1,x_1,e_2,x_2,\cdots,e_n,t)$使得$\lambda_{H_{P''}}(s,t)\geqslant\lambda_H(s,t)-1\geqslant\lambda-1$。令$P=(s,e,x,e_1,x_1,e_2,x_2,\cdots,e_n,t)$，则$p$是$G$中长度为$(n+1)$的$(s,t)$路。令$\lambda_{G_p}(s,t)=m$，则必有$(s,t)$分离集$S\subseteq E(G_p)$使$|S|=m$。如果$S$也在$H_{P''}$中分离$s$和$t$，那么$m\geqslant\lambda_{H_{P''}}(s,t)\geqslant\lambda_H(s,t)-1\geqslant\lambda-1$。如果$S$在$H_{P''}$中不能分离$s$和$t$，那么$e$是$G-S$中桥。所以$S\cup\{e\}$在$G$中分离$s$和$t$。于是$|S\cup\{e\}|\geqslant\lambda_G(s,t)$，即$m\geqslant\lambda-1$。引理得证。

2　定理A的证明

设$\lambda_G(s,t)=\lambda$。若$l_G(s,t)>\lambda$，则在G中分离s和t至少需要$(\lambda+1)$棱，与$\lambda_G(s,t)=\lambda$相矛盾。所以$l_G(s,t)\leqslant\lambda$，故只须证明$l_G(s,t)\geqslant\lambda$。

若$\lambda=0$，则显然有$l_G(s,t)\geqslant0=\lambda$。下设$\lambda\geqslant1$。于是由引理知$G$中存在最短$(s,t)$路$P_1$使$\lambda_{G_{P_1}}(s,t)\geqslant\lambda-1$。同样地，若$\lambda-1\geqslant1$，则$G_{P_1}$中存在最短$(s,t)$路$P_2$使$\lambda_{G_{P_1P_2}}(s,t)\geqslant\lambda_{G_{P_1}}(s,t)-1\geqslant\lambda-2$。一般地若$\lambda\geqslant r$，则$G_{P_1P_2\cdots P_{r-1}}$中存在最短$(s,t)$路$P_r$使得$\lambda_{G_{P_1P_2\cdots P_r}}(s,t)\geqslant\lambda-r$。取$r=\lambda$，则$G$中必有$\lambda$条$(s,t)$路$P_1,P_2,\cdots,P_\lambda$。因为$P_i$是$G_{P_1P_2\cdots P_{i-1}}$中的$(s,t)$路，故$P_i$与$P_1,P_2,\cdots,P_{i-1}(i=2,3,\cdots,\lambda)$是$G$中棱不交的$(s,t)$路。从而$l_G(s,t)\geqslant\lambda$。定理A得证。

REFERENCES

1 Ford L R Jr and Fulkerson D R. Maximal flow through a network. Canad. J. Math. 1956, (8): 399～404

2 Elias P, Feinstein A and Shannon C E. A note on the maximum flow throngh a network. IRE Trans. 1956, IT-2: 117～19

3 Menger, K. Zur allgemeinen Kurventheorie. Fund. Math. 1927, (10): 96～115

Note on Menger's Theorem of the Edge Form in Graph Theory

Xu Junming(徐俊明)

(*Department of Mathematics, University of Science and Technology of China*)

Abstract

A direct proof of Menger's theorem of the edge form in graph theory is given in this paper.

Keywords: Graph theory; Connectivity; Menger's Theorem