第三周习题

19(2)

直接应用中国剩余定理

$$
\begin{aligned}
&M = 1066 \\
&M_1 = 26, M_2 = 41 \\
\Rightarrow &26b_1 \equiv 1(mod\,41) \qquad 41b_2 \equiv 1(mod\,26) \\
\Rightarrow &b_1 = 30, b_2 = 7 \\
\Rightarrow &x \equiv 605(mod\,1066)
\end{aligned}
$$

19(4)

在使用中国剩余定理之前先转化成对应形式，一定要先转换成定理所使用的形式

$$
\begin{aligned}
x &\equiv 3(mod\,5) \\
x &\equiv 3(mod\,7) \\
x &\equiv 3(mod\,11)
\end{aligned}
$$

(这里似乎可以明显得 $x \equiv 3(mod\,385)$)

$M = 385, M_1 = 77, M_2 = 55, M_3 = 35$

$\Rightarrow 77b_1 \equiv 1(mod\,5), 55b_2 \equiv 1(mod\,7), 35b_3 \equiv 1(mod\,11)$

$\Rightarrow b_1 = 3, b_2 = 6, b_3 = 6$

$\Rightarrow x \equiv 3(mod\,385)$

22

由书上的性质可知 (P25)

若 n 的素因子分解式为 $n = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_k^{l_k}$,则 $\phi(n) = p_1^{l_1-1}(p_1-1) \cdots p_k^{l_k-1}(p_k-1) = n(1-\frac{1}{p_1}) \cdots (1-\frac{1}{p_k})$

$42 = 2*3*7 \Rightarrow \phi(42) = 42*(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{7}) = 12$

$420 = 2^2*3*5*7 \Rightarrow \phi(420) = 420*(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7}) = 96$

$4200 = 2^3*3*5^2*7 \Rightarrow \phi(4200) = 4200*(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7}) = 960$

24

有素因子分解定理和欧拉函数计算公式可得，$(1-\frac{1}{p})\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$

25(2)

先证 (1)，因为 $6|n$

由素因子分解定理和欧拉函数计算公式可知 $\phi(n)=n(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{p_k})=\frac{n}{3}(1-\frac{1}{p_3})\cdots(1-\frac{1}{p_k})$,$1-\frac{1}{p_i}<1(i=3,\cdots,k)$ 可得，$\phi(n)\leq\frac{n}{3}$

再证 (2),$n-1$ 与 $n+1$ 均为素数, 可知 n 为偶数，n 也为 3 的倍数 (反证法可知)，得到 2 和 3 均为 n 的素因子，由 (1) 可知，$\phi(n)\leq\frac{n}{3}$

33(此题也可以通过素因子分解来证出)

$d|n \Rightarrow \frac{n}{d}|n$

即在求和时 $d \Leftrightarrow \frac{n}{d}$

因此 $\sum\limits_{d|n}\frac{1}{d}=\sum\limits_{d|n}\frac{1}{n/d}=\sum\limits_{d|n}\frac{d}{n}=\frac{1}{n}\sum\limits_{d|n}d=\frac{1}{n}\sigma(n)$

35

当 n 为偶完全数且 $n\geq 6$ 时，$n=2^{p-1}(2^p-1)$，p 为素数

$$\begin{aligned}
n &= 2^{p-1}(2^p-1)\\
&= 2^{2p-1}-2^{p-1}\\
&= (3-1)^{2p-1}-(3-1)^{p-1}\\
&= \sum_{k=0}^{2p-1}C_k^{2p-1}(-1)^{2p-1-k}3^k+\sum_{k=0}^{p-1}C_k^{p}(-1)^{p-1-k}3^k\\
&= -1-1+3(2p-1)+3(p-1)+\sum_{k=2}^{2p-1}C_k^{2p-1}(-1)^{2p-1-k}3^k+\sum_{k=2}^{p-1}C_k^{p}(-1)^{p-1-k}3^k\\
&= 9(p-1)+1+\sum_{k=2}^{2p-1}C_k^{2p-1}(-1)^{2p-1-k}3^k+\sum_{k=2}^{p-1}C_k^{p}(-1)^{p-1-k}3^k
\end{aligned}$$

可知，$n\equiv 1(mod\,9)$

提醒：

当 p 为素数，设 g 为模 p 的原根, 则 $\{1,2,\cdots,p-1\},\{g^0,g^1,\cdots,g^{p-2}\}$ 均为模 p 的缩系。