

20

四元置换一共 $4!$ 共24个，从中挑出12个偶置换即可

22

存在映射 $f: f(x) = 2x$

任意 $a, b \in \langle \mathbb{Z}, + \rangle, f(a+b) = 2(a+b) = f(a) + f(b)$

显然该映射是双射

所以整数加群和偶数加群同构

25

不妨记循环群的生成元为 $p$

若子群存在有限循环群，则存在 $m, p^m = e$

与无限循环群矛盾

26

显然 $\langle G, \bullet \rangle$ 是群

记 $f: \langle G, * \rangle \rightarrow \langle G, \bullet \rangle$

$f(a) = a'$

则 $f(b * a) = (b * a)' = a' * b' = b' \bullet a' = f(b) \bullet f(a)$

由于逆元的唯一性， $f$ 是双射

得证