第七周习题

3

$R_1 \circ R_2 = \{(c,d)\}$
$R_2 \circ R_1 = \{(a,d),(a,c)\}$
$R_1^2 = \{(a,a),(a,b),(a,d)\}$
$R_2^3 = \{(b,c),(b,d),(c,b)\}$

6

证明：(1) 自反性：$\forall (a,b) \in N \times N$, 有 $a+b=a+b, \Rightarrow (a,b) \sim (a,b)$
(2) 对称性：若对于 $(a,b),(c,d) \in N \times N$, 有 $(a,b) \sim (c,d)$, 即 $a+d=b+c$ 成立，则可以得到 $c+b=d+a$, 推出 $(c,d) \sim (a,b)$
(3) 传递性：若对于 $(a,b),(c,d),(e,f) \in N \times N$, 有 $(a,b) \sim (c,d),(c,d) \sim (e,f)$, 即 $a+d=b+c, c+f=d+e$, 推出 $a+d+c+f=b+c+d+e$, 得到 $a+f=b+e$, 即 $(a,b) \sim (e,f)$
从而 $\sim$ 为 $N \times N$ 上的等价关系，在 $x-y$ 平面上在第一象限内每一个斜率为 1，只包含整数点的射线上的整数点为一个等价类

11

证明：(1) 自反性：$\forall R \in B$, 都有如果 $x,y \in A$ 且 xRy, 则必有 xRy, 即 $R \leq R$
(2) 反对称性: 对于 $R_1, R_2 \in B$, 若 $R_1 \leq R_2, R_2 \leq R_1$, 则有 $xR_1y \Rightarrow xR_2y, xR_2y \Rightarrow xR_1y$, 即 $xR_1y \Leftrightarrow xR_2y$, 所以 $R_1 = R_2$
(3) 传递性: 对于 $R_1, R_2, R_3 \in B$, 若 $R_1 \leq R_2, R_2 \leq R_3$, 则有 $xR_1y \Rightarrow xR_2y, xR_2y \Rightarrow xR_3y$, 推出 $xR_1y \Rightarrow xR_3y$, 即 $R_1 \leq R_3$
得证 **13(3)**
线性序

15

证明：(1) 自反性: $\forall n \in Z^*$, 有 $n^2 > 0$, 且 $n|n$, 推出 $n \leq n$

(2) 反对称性: 对于 $m, n \in Z^*$, 有 $m \leq n, n \leq m$, 即 $m \cdot n \geq 0, m|n, n|m$, 推出 $m = n$

(3) 传递性: 对于 $m, n, l \in Z^*$, 有 $m \leq n, n \leq l$, 即 $m{\cdot}n > 0, m{\cdot}l > 0, m|n, n|l$, 推出 $m \cdot l > 0, m|l$, 即 $m \leq l$

部分序关系得证

显然最大元和极大元都是不存在的，考虑约束 $m * n > 0$，所以在正整数和负整数部分各有一个极小元，为 $1, -1$，由于存在俩个极小元，所以不存在最小元。