计算机科学导论

计算模型与逻辑思维

逻辑思维

- 逻辑——①思维的规律、规则：这个想法似乎不合逻辑。②研究思维规律的科学，即逻辑学。③客观事物的规律：历史的逻辑。④观点，主张。多用于贬义：霸权主义的逻辑。（新华字典）
- 广义：泛指规律、道理
- 狭义：逻辑学
  - 哲学（古希腊）、数学（19世纪）
  - 计算机科学、语言学、心理学……

逻辑思维主要内容

- 逻辑学基础
  - 布尔逻辑、真值表
  - 合取范式、析取范式
  - 谓词逻辑
  - 公理系统
- 图灵机模型
- 后续课程
  - 离散数学、数理逻辑、理论计算机基础……

逻辑学基础

布尔逻辑

- 真 T (true)，假 F (false)
  - 今天下雨。
  - $a^2 \geq 0$。
- 合取，与 $\wedge$ (conjunction, and)
  - $x \wedge y = 1$ (T) *iff* $x = y = 1$ (T)
- 析取，或 $\vee$ (disjunction, or)
  - $x \vee y = 0$ (F) *iff* $x = y = 0$ (F)

- 非 $\neg$ (negation, not)
  - $\neg x = 1$ (T) *iff* $x = 0$ (F)
- 蕴含 $\rightarrow$ (material implication)
  - $(x \rightarrow y) = 1$ (T) *iff* $x = 0$ (F) or $y = 1$ (T)
- 异或 $\oplus$ (exclusive or)
  - $x \oplus y = 1$ (T) *iff* $x \neq y$
  - $x + y \bmod 2$

真值表

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

布尔函数

- 布尔函数$f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$
- 举例
  - $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\vee_{i=1}^{n-1} x_i) \oplus x_n$
- 两个布尔函数相同：有相同的真值表
  - 类似：$f(x,y) = x^2 - y^2$和$g(x,y) = (x+y)(x-y)$是相同的多项式

思考题

- n个变量的布尔函数有多少个？
  - n=0, 2个（0和1）
  - n=1, 4个（1，0，x和$\neg x$）
  - n=2, **?**
  - $\mathbf{2^{2^n}}$

- 性质：
  - $x \lor 0 = x, x \lor 1 = 1, x \land 0 = 0, x \land 1 = x$
  - $x \lor \neg x = 1, x \land \neg x = 0$
  - $x \land y = y \land x, x \lor y = y \lor x, x \oplus y = y \oplus x$ (**交换律**)
  - $(x \land y) \land z = x \land (y \land z)$
  - $(x \lor y) \lor z = x \lor (y \lor z)$ (**结合律**)
  - $(x \land y) \lor z = (x \lor z) \land (y \lor z)$
  - $(x \lor y) \land z = (x \land z) \lor (y \land z)$ (**分配律**)
  - more ??

- 性质：
  - $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ $\quad x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$
  - $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$ （**De Morgan律**）
  - $x \rightarrow y = \neg x \vee y$
  - $x \rightarrow y = \neg y \rightarrow \neg x$ （**逆否命题**）
  - $x \oplus y = (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$
  - $x \oplus y = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$

- 合取范式(conjunctive normal form, CNF)
  - $f(x_1,\ldots,x_n) = Q_1 \wedge Q_2 \wedge Q_3 \ldots \wedge Q_m$
  - 其中: $Q_i = l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_n$, $l_j = x_j$ 或 $\neg x_j$

- 析取范式(disjunctive normal form, DNF)
  - $f(x_1,\ldots,x_n) = Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3 \ldots \vee Q_m$
  - 其中: $Q_i = l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_n$, $l_j = x_j$ 或 $\neg x_j$

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

- 例：$x \rightarrow (y \rightarrow z) = ?$
- 合取范式：$(\neg x \vee \neg y \vee z)$
- $(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$

思考题

- 根据De Morgan律和合取范式（或析取范式），使用 $\neg$和$\wedge$(或$\vee$)可以表示出所有的布尔函数（？）。
- 问题：能否只用$\wedge$, $\vee$表示出所有的布尔函数？
  - **不能！**

思考题

- 问题：能否只用 $\oplus$？（允许使用0,1）
- 问题：如果只用→呢？（允许使用0,1）

思考题

- 问题：能否只用 $\oplus$？（允许使用0，1）
  - **不能！**
  - **只能写出** $x_{i1} \oplus \ldots \oplus x_{ik} \oplus c$
- 如果只用→呢？
  - **可以！**
  - $x \rightarrow 0 = \neg x$
  - $(x \rightarrow 0) \rightarrow y = x \vee y$

谓词逻辑

- **全称量词∀** 和**存在量词∃**
  - “都不是”和“不都是”
  - $\forall x\,(\neg P(x))$， $\exists x(\neg P(x))$
  - $\exists x\left(\neg P(x)\right) = \neg(\forall x\left(P(x)\right))$

谓词逻辑

- 量词的范围
  - 任何一个自然数，要么它本身为偶数，要么加1后为偶数。
  - $\forall n\ [\text{Even}(n) \vee \text{Even}(n+1)]$，其中断言 $\text{Even}(n)$表示 n是偶数
  - $\forall n \in \mathbb{N}\ [\text{Even}(n) \vee \text{Even}(n+1)]$
- 量词的顺序
  - $\forall\, x, \exists\, y\ (y = x + 1)$
  - $\exists\, y, \forall\, x\ (y = x + 1)$

逻辑思维

- 存在无穷多个素数。
- 如何用数学语言描述？

Euclid of Alexandria

Elements

逻辑思维

- 存在无穷多个素数。
- 如何用数学语言描述？

Euclid of Alexandria

Elements

$$\forall n, \exists m, [(m > n) \wedge (\text{Prime}(m))]$$

$$\forall n, \exists m, \forall p, q[(m > n) \wedge (p, q > 1 \rightarrow pq \neq m)]$$

- 对$n>2$，丢潘图方程 $x^n+y^n=z^n$ 不存在非平凡解。

$$\forall a,b,c,n[(abc\neq 0)\wedge(n>2)\rightarrow a^n+b^n\neq c^n]$$

- 四色定理：任何平面图都可以被四着色，使得任何两个相邻的顶点不同色。

$$\forall \text{平面图} G=(V,E), \exists c:V \to \{1,2,3,4\}\ \forall (u,v)\in E, [c(u)\neq c(v)]$$

- 可满足性问题(SAT)：给定CNF公式φ，是否存在一种赋值，使得这个CNF为真

$$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4 \vee \neg x_6) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee \neg x_8) \wedge \ldots$$

$$\exists A:\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \to \{0,1\}, [\varphi(x_1, \ldots, x_n)=1]$$

练习：皮埃诺公理之一

- 每个自然数有后继数，且这个后继数也是自然数

思考题

- 一位探险者在奥斯仙境旅行，他想要去翡翠城，但路上必须经过说谎国。说谎国的人永远说谎话，而诚实国的人永远讲真话。他走到了一个岔路口，两条路分别通向诚实国和说谎国。他不知道哪一条路是去说谎国的路。正在他犹豫不决的时候，路上来了两个人，已知其中一个是诚实国的，另一个是说谎国的。探险者需要问这两个人哪一条是去往说谎国的路，请问他应该怎么问？
- 要求：他只能问一次，而且答案只能是“是”或者“否”。

解答

- 两个人分别记做A和B，两条路分别记做S和T。
- 用0，1表示来自诚实国和说谎国，因此A=1，B=0；或者A=0, B=1
- 你对于“你来自诚实国”和“路S通往说谎国”这两个问题的回答是一样的吗？ 路S 。
- 注意到：无论问A还是问B“你来自诚实国吗？”回答总是Yes.
- 问A：$A \oplus S=?$
- 如果=0, 则走路S，否则走路P。