

问题描述：n个100元，兑换成50元、20元、10元。求总的方案个数。

一般方法的伪代码：

$count = 0$

$from\ i = 0\ to\ \frac{100n}{50}$

$from\ j = 0\ to\ \lfloor \frac{100n-50i}{20} \rfloor$

$if((100n - 50i - 20j) \geq 0)$

$count++$

公式：

设 $g(i)$ 为刚好使用 $i$ 张50元的时候的方案数， $g(i) = \lfloor (100 * n - 50 * i) / 20 \rfloor + 1$ , 对应上面伪代码第四行，

$\lfloor (100 * n - 50 * i) / 20 \rfloor + 1$ 即为能够通过 $if((100n - 50i - 20j) \geq 0)$ 条件判断的 $j$ 的个数。

举例：当 $n = 1, i = 0$ ，也就钱总数为100元，0张50元的时候，可以取5, 4, 3, 2, 1, 0张20元，共10种  
 $g(1) = 6$

总的方案数量为：

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{2n} g(i) \\ &= \sum_{i=0}^{2n} (\lfloor (100 * n - 50 * i) / 20 \rfloor + 1) \\ &= \sum_{i=0}^{2n} (\lfloor 5n - 2.5i \rfloor + 1) \\ &= \sum_{k=0}^n (5n - 5k + 1) + \sum_{k=1}^n (\lfloor 5n - 5k + 2.5 \rfloor + 1) \\ &= (n+1)(5n+1) - 5 * \frac{n(n+1)}{2} + n(5n+3) - 5 * \frac{n(n+1)}{2} \\ &= (n+1)(5n+1) - 5n(n+1) + n(5n+3) \\ &= n+1 + n(5n+3) \\ &= 5n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

注：第三步计算中，因为 $\lfloor 5n - 2.5i \rfloor$ 在 $i$ 为奇数的时候需要下取整， $i$ 为偶数的时候是整数，做变量代换，将奇数和偶数部分分开计算。

第四行变量代换：前半部分  $i = 2k$  后半部分  $i = 2k - 1$