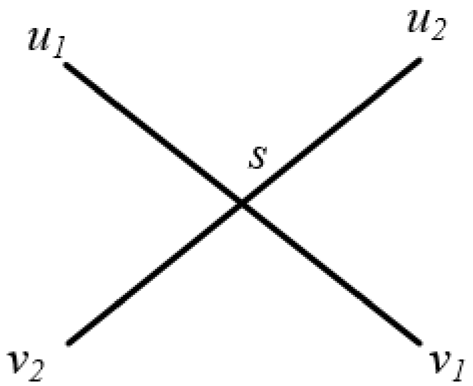
Ch4

20*

> 设$S=\{x_1,x_2,...,x_n\}$是平面上n个点的集合，$n\geq 3$，其中任何两点之间的距离至少是1. 证明：最多有$3n-6$个点对，其距离恰好是1.

证明：
不妨设S中顶点之间的距离恰好为1，只要证明G中最多有$3n-6$条边。
由推论4.2，只要证G是平面图即可。
（反证）：
假设有边u_1v_1,u_2v_2在除顶点外交叉，交叉点设为s。



$\because d(u_1,v_1)=d(u_2,v_2)=1$
$\therefore min\{d(u_1,s),d(s,v_1)\}\leq 1/2, min\{d(u_2,s),d(s,v_2)\}\leq 1/2$
不妨设$d(u_1,s)\leq 1/2,d(u_2,s)\leq 1/2,$
则有$d(u_1,u_2)<d(u_1,s)+d(s,u_2)\leq 1$
即u_1,u_2距离小于1，矛盾。
$\therefore$图G是平面图。得证。

Ch5

1*

> 分别求出K_{2n}和$K_{n,n}$中不同完美匹配的个数。

K_{2n}的完备匹配个数等于将$2n$个元素划分成n个大小为2的集合，个数为
$\frac{\prod_{i=0}^{n-1}\binom{2n-2i}{2}}{n!}=(2n-1)!!$
$K_{n,n}$的完备匹配可以对第一部分标号，第二部分与第一部分的匹配可以看成全排列，个数为$n!$.

2*

> 树至多有一个完备匹配

证明：
假设存在两个完备匹配M和M‘，设$S=\{e|e\in M,e\notin M\bigcap M'\}$，$T=\{e|e\in M',e\notin M\bigcap M'\}$，$S$与$T$的顶点集合相同，任取一个顶点$u$，在$S$与$T$中各有一个与其相连的边，设这两条边的另一个顶点为$u_1,v_1$. 在$T$中有一条与$u_1$相连的边，在$S$中有一条与$v_1$相连的边，若这两条边的另一个顶点相同，设这个顶点为v，则uu_1vv_1u为圈，与树中无圈矛盾。若这两条边的顶点不同，设为u_2,v_2，以此类推，必然会出现顶点相同的情况，$uu_1u_2...u_kvv_k...v_2v_1u$为圈，与树中无圈矛盾。
故树之多有一个完备匹配。

7*

> 证明：二分图有完备匹配的充要条件是，对任意$S\in V\{G\}$，都有$|N(S)\ |\geq|\ S|$。这个条件对一般图是否成立?

证明：
设$V(G)=X\bigcup Y,X\bigcap Y=\emptyset,S_X=S\bigcap X,S_Y=S\bigcap Y,$
则$|S|=|S_X|+|S_Y|,|N(S)|=|N(S_X)|+|N(S_Y)|.$
（必要性）：
因为二分图G有完备匹配，所以X中的顶点都被许配。
由$Hall$定理，有$|N(S_X)|\geq|S_X|$. 同理，$|N(S_Y)|\geq|S_Y|$.
$|N(S)|=|N(S_X)|+|N(S_Y)|\geq|S_X|+|S_Y|=|S|$
（充分性）：
不妨设$|X|\geq|Y|$，取$S\subset X$，由$Hall$定理，存在匹配M，使得X中的顶点都被匹配。
$\because|X|\geq|Y|$
$\therefore Y$中的顶点也相应地都被匹配。所以匹配M即为二分图G的完备匹配。
对一般图不成立，例如K_3满足$|N(S)|\geq S$，但是没有完备匹配。

13*

> 用$Tutte$定理来证明$Hall$定理。

$Tutte$定理：图G（G为一般图，不一定是二分图）由完备匹配$\Leftrightarrow \forall S\subseteq V(G)$，都有$o(G-S)\leq |S|$.
$Hall$定理：二分图$G,V(G)=X\bigcup Y$，且$X\bigcap Y=\emptyset$，存在将X中的顶点都许配的匹配$\Leftrightarrow \forall S\subseteq X$都有$|N(S)|\geq |S|$，其中$N(S)$为$S$的邻顶集合。
证明：
对二分图$G=(X,Y,E)$，当v为偶数时，加一些边使得Y为完全图；当v时奇数时，加一些边和顶点y_0使得$Y\bigcup y_0$是完全图。图G变成完全图H，G中存在将X中所有顶点都许配的匹配的充要条件是H有完备匹配。此时$Hall$定理等价于H有完备匹配的充要条件是$\forall S\subseteq X,|N_H(S)|\geq |S|$.
（必要性）：
$\forall S\subseteq X,$ 由$Tutte$定理，$o(H-N_H(S))\leq |N_H(S)|$
在$H-N_H(S)$中，S中点都是孤立点，所以$|S|\leq o(H-N_H(S))$
$\therefore |N_H(S)|\geq |S|$.
（充分性）：
对$\forall S\subseteq V(H)$，并设$S=S_1\bigcup S_2$，且$S_1\bigcup X,S_2\bigcup Y$.
因为Y是一个完全图，则在H中删去S_1不会增加连通片个数，且最多产生H一个奇片. 删去S_2可能会使得X中有孤立顶点，设此时X中的孤立顶点为S_3，则$|N(S_3)|\leq |S_2|$，则有$|S_3|\leq |N(S_3)|\leq |S_2|$
若$|S_3|=|S_2|$，则$o(H-S_2)=|S_3|=|S_2|$;
若$|S_3|\leq |S_2|-1$，则$o(H-S_2)\leq |S_3|+1\leq |S_2|$;
若$|S_1|$为偶数，则$o(H-S)=o(H-S_2)\leq |S_2|\leq |S|$;
若$|S_1|$为奇数，则$o(H-S)=o(H-S_2)+1\leq |S_2|+1\leq |S|$;
综上，对$\forall S\subseteq V(H)$，都有$o(H-S)\leq |S|$. 由$Tutte$定理，H为有完备匹配的图。

14

> 证明：树T有完备匹配，当且仅当对任意$v\in V(T)$，都有$o(T-v)=1$。

证明：
（必要性）：
$\because$树T有完备匹配，由$Tutte$定理，$\forall S\subseteq V(T),$ 都有$o(T-S)\leq |S|$.
令$S=\{v\}$，则$o(T-v)\leq 1$.
由于树T由完备匹配，即$|T|$为偶数，则$|T-v|$为奇数。
$\therefore o(T-v)\geq 1$.
综上，$o(T-v)=1$.
（充分性）：
$\forall v\subseteq V(T)$，都有$o(T-v)=1$，则$V(T)$为偶数。
删去v后，树T被划分成若干个连通片，且只有一个连通片为奇片，设奇片中与v相连的顶点为u，在树T中，确定一个v后，由于$o(T-v)=1$，所以u被唯一确定。
$\therefore e=uv$被唯一确定。
$\because v$是任意的
$\therefore$ 所有v相对应的e的集合就是T的完备匹配。
综上，树T具有完备匹配。

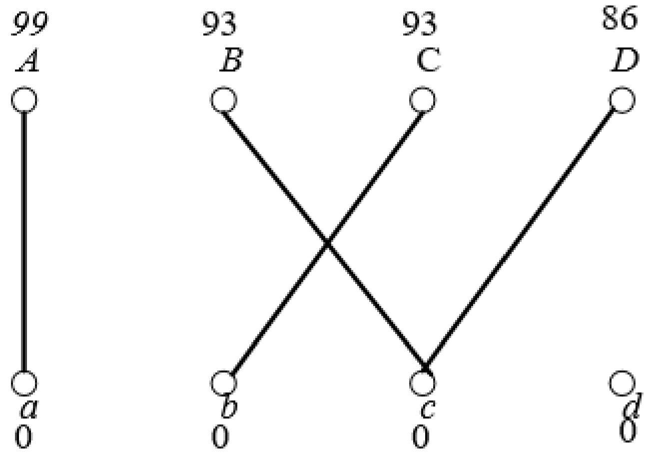
17

> 设有四个人A,B,C,D，有四分工作a,b,c,d，每个人做某份工作的效率如下面的矩阵所示，试求最佳的工作分配方案

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 99 & 6 & 59 & 73 \\ 79 & 15 & 93 & 87 \\ 67 & 93 & 13 & 81 \\ 16 & 79 & 86 & 26 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

按照$Kuhn-Munkreas$算法一步步计算即可。

构造相等子图G_l



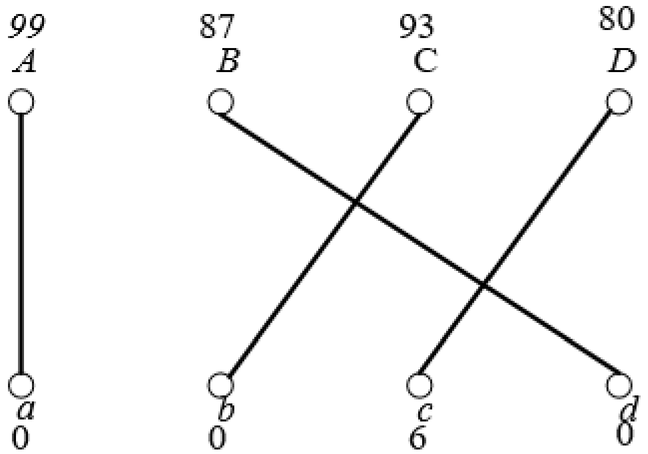
G_l无完备匹配，取D为未被许配的点，可得：

$Z=\{B,D,c\}$

$S=\{B,D\}$

$T=\{c\}$

$\alpha_l=6$，重新构造相等子图：



最佳分配方案为：$A-a,B-d,C-b,D-c,\omega=99+87+93+86=365.$

19

> 证明：$Kuhn-Munkreas$算法中修改顶标后，$\hat{l}$仍然是可行顶标。

证明：
修改的可行顶标

$$\hat{l}=\begin{cases} l(v)-\alpha_l & \text{v} \in \text{S} \\ l(v)+\alpha_l & \text{v} \in \text{T} \\ l(v) & \text{其他} \end{cases}$$

$\alpha_l=min_{x\in S,y\notin T}\{l(x)+l(y)-\omega(x,y)\}$

对$\forall v\in S,u\in Y$,
(1) 若$u\in T$，则$\hat{l}(v)+\hat{l}(u)=l(v)-\alpha_l+l(u)+\alpha_l=l(v)+l(u)\geq\omega(u,v)$.
(2) 若$u\in Y\bigcap u\notin T$,
$\because\alpha_l\leq l(v)+l(u)-\omega(u,v)$,
$\therefore\hat{l}(v)+\hat{l}(u)=l(v)-\alpha_l+l(u)\geq l(v)+l(u)-(l(v)+l(u)-\omega(u,v))\geq\omega(u,v)$.
对$\forall v\notin S,u\in Y$,
$\hat{l}(v)=l(v),\hat{l}(u)\geq l(u),\hat{l}(v)+\hat{l}(u)\geq\omega(u,v)$.
综上，$Kuhn-Munkreas$算法修改顶标后，$\hat{l}$仍然是可行顶标。

Ch6

3

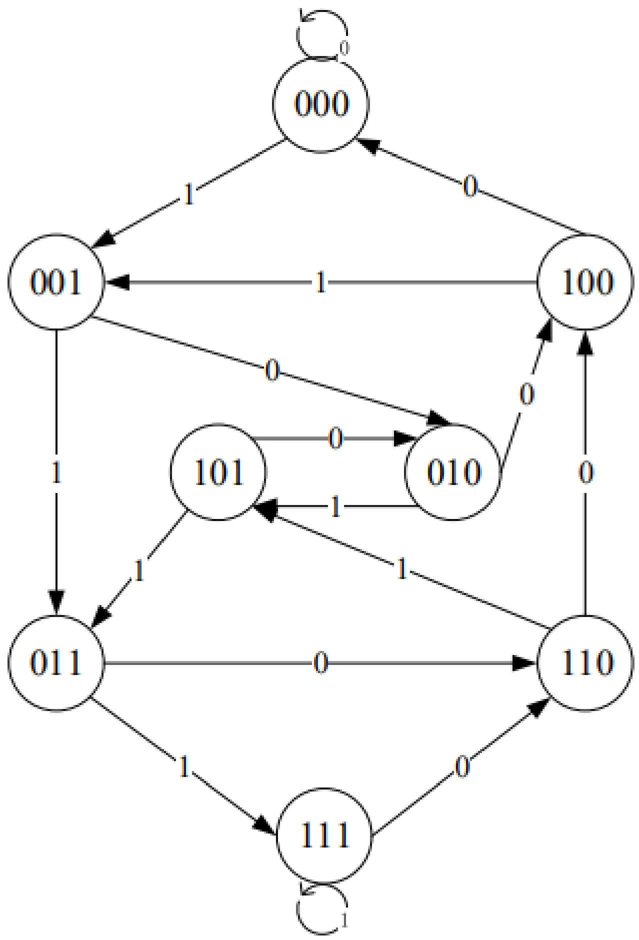
> 设G是恰有$2k$个奇度顶点的连通图，证明：G中存在k条边不重的行迹$P_1,P_2,...,P_k$，使得$E(G)=\bigcup_{i=1}^{k}E(P_i)$。

将图G的$2k$个奇度顶点分成k组，再将图G分割成k个子图，且每个子图恰好包含两个奇数顶点。
对每个子图来说，根据推论6.1，子图均存在2个奇度顶点，所以子图均有$Euler$行迹，每个子图的$Euler$行迹都恰好遍历了这个子图里的所有边。
$\therefore$把这k个$Euler$行迹取并，就可以遍历G中所有边。

4

> 如何将16个二进制数字（8个0，8个1）拍成一个圆形，使得16个长为4的二进制数在其中都出现且只出现一次。

转化成图论问题。
定义顶点$V(G)=\{所有3位二进制数\}$，定义$E(G)=\{u_iv_j\mid u_i可以通过左移位得到v_j,i,j=1,...,8\}$构造图$G$.



每个3位二进制数向左移位，可在其最右补0或1，则每个顶点v有$deg^+(v)=deg^-(v)=2$.
由$Thm6.2$可知图G为$Euler$图。

根据其中一条$Euler$回路可构造出排列。

$000 \xrightarrow{0} 000 \xrightarrow{1} 001 \xrightarrow{0} 010 \xrightarrow{1} 101 \xrightarrow{0} 010 \xrightarrow{0} 100 \xrightarrow{1} 001 \xrightarrow{1} 011$

$\xrightarrow{0} 110 \xrightarrow{1} 101 \xrightarrow{1} 011 \xrightarrow{1} 111 \xrightarrow{1} 111 \xrightarrow{0} 110 \xrightarrow{0} 100 \xrightarrow{0} 000$

8

> 求图6.28的一条最优投递路线。

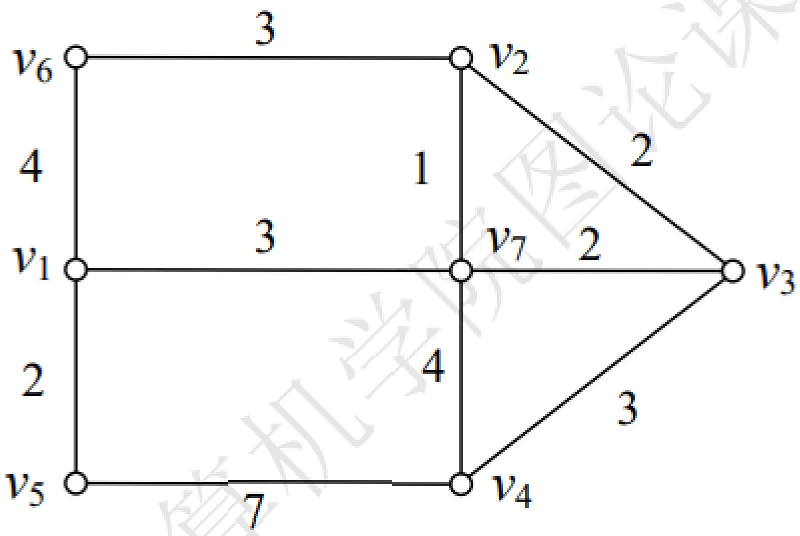


图 6.28: G

使用EJ算法。

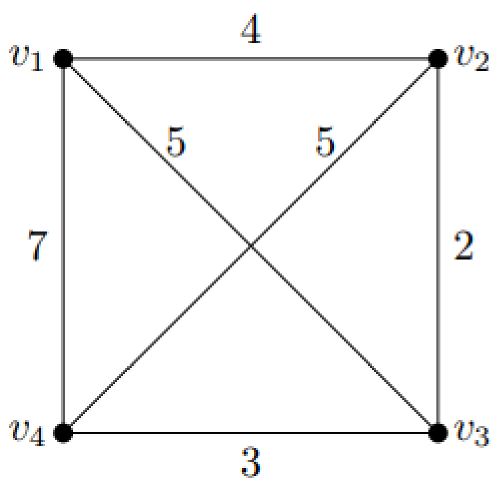
（1）图G的奇度顶集$V_0 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，$|V_0| = 4$.

（2）由$Dijkstra$算法：

$d(v_1, v_2) = 4, d(v_1, v_3) = 5, d(v_1, v_4) = 7$

$d(v_2, v_3) = 2, d(v_2, v_4) = 5, d(v_3, v_4) = 3$

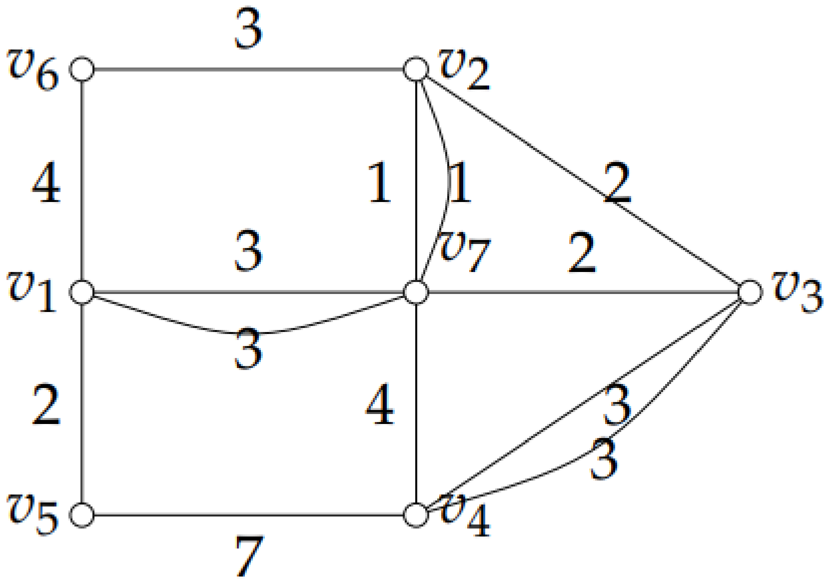
（3）构成带权完成图K_4：



（4）上图K_4的最佳匹配$M = \{v_1 v_2, v_3 v_4\}$.

在G中v_1, v_2间最短轨为$P(v_1, v_2) = v_1 v_7 v_2, P(v_3, v_4) = v_3 v_4$.

（5）$Euler$图G^*如右图：

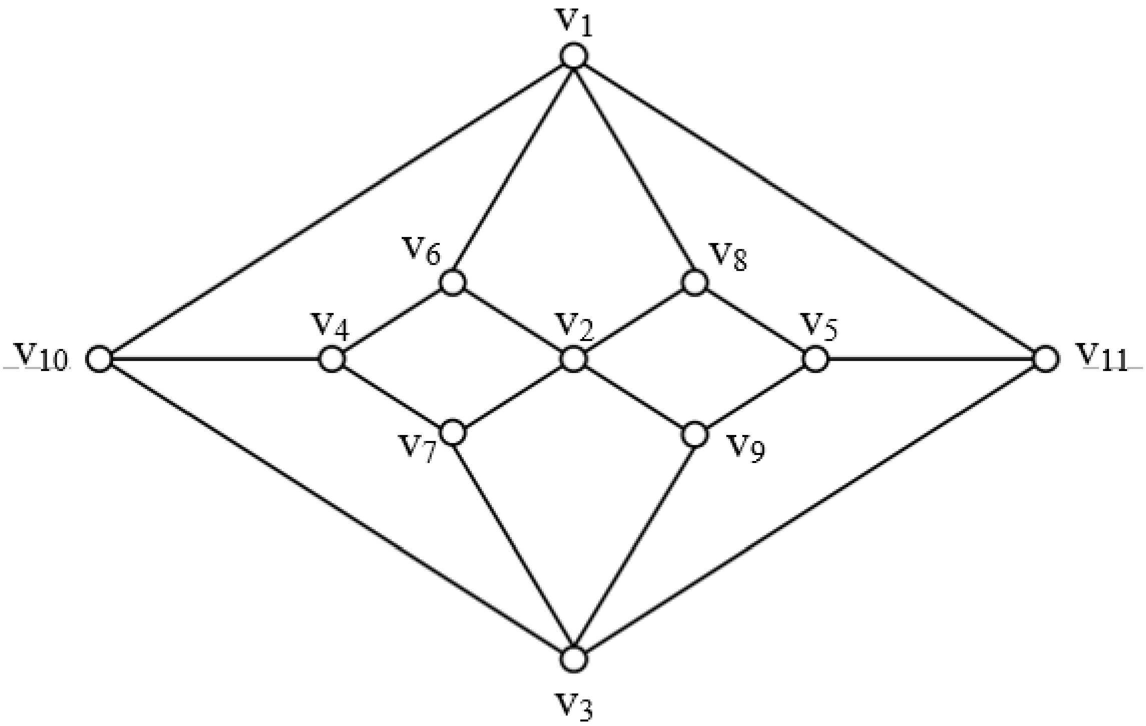


（6）在图G^*找到$Euler$回路即为最优投递路线。
不妨设出发点（邮局）为v_6，则其中一条$Euler$回路为：
$v_6 v_2 v_3 v_4 v_3 v_7 v_2 v_7 v_1 v_7 v_4 v_5 v_1 v_6$

9

> 设G是二分图，证明：若G是$Hamilton$，则G必有偶数个顶点。习题1中的图6.27是$Hamilton$图吗？为什么？

证明：设二分图$G = X \bigcup Y, X \bigcap Y = \emptyset$, 若$G$是$Hamilton$，则$\omega(G - X) \leq | X|$.
$\therefore | Y | \leq | X|$.
同理$|X | \leq | Y|$.
$\therefore | X | = | Y|$.
$\therefore G$有偶数个顶点。
在图6.27中，$\because G = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \bigcup \{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\} = X \bigcup Y$, 且$X \bigcap Y$没有边



$\therefore$ $Herschel$图为二分图，且有11个顶点

$\therefore$不是$Hamilton$图