中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

数据结构

线性表（5 学时）

September 27, 2020

目录

认识线性表

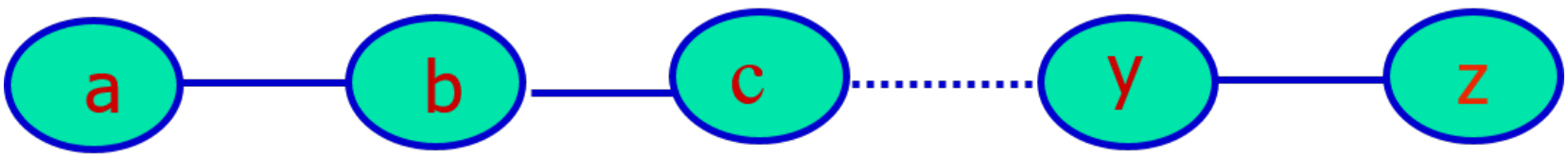
定义

- 线性表 (Linear list) 是 $n(\geq 0)$ 个数据元素的有限序列，记作 $(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_i, 1 \leq i \leq n$ 是线性表中的数据元素，n 是表长
- i 称为 a_i 在线性表中的位序; $n = 0$ 是空表。

特点

- 同一线性表中的元素具有相同特性
- 复杂的数据元素可由若干个数据项组成
- 相邻数据元素之间存在序偶关系

例子



认识线性表

例子：学生健康情况登记表，每一行是一个数据元素

姓 名	学 号	性 别	年 龄	班 级	健康状况
王小林	790631	男	18	计 91	健康
陈红	790632	女	20	计 91	一般
刘建平	790633	男	21	计 91	健康
张立立	790634	男	17	计 91	神经衰弱
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

特点

- 存在唯一的一个被称作“第一个”的数据元素；存在唯一的一个被称做“最后一个”的数据元素；
- 除第一个元素外，其他每一个元素有一个且仅有一个直接前驱；除最后一个元素外，其他每一个元素有一个且仅有一个直接后继。

认识线性表

错误的例子

- (a,b,c,d)，其中 a=3,b=5,c= ‘a’ ,d=(1,2)
- 自然数

线性表的抽象数据类型

线性表的 ADT

ADT List{

数据对象：$D=\{a_i \mid a_i \in ElemSet, i=1,2,\ldots,n, n \geq 0\}$

数据关系：$R1=\{< a_{i-1}, a_i > \mid a_{i-1}, a_i \in D, i=2,\ldots n\}$

基本操作：

InitList(&L)

DestroyList(&L)

ClearList(&L)

ListEmpty(L)

ListLength(L)

GetElem(L,i,&e)

LocateElem(L,e,compare( ))

PriorElem(L,cur_e,&pre_e)

NextElem(L,cur_e,&next_e)

ListInsert(&L,i,e)

ListDelete(&L,i,&e)

ListTraverse(L,visit( ))

} ADT List

在此ADT基础上还可定义更复杂的一些操作

利用 ADT 定义更复杂的操作

复杂操作：集合的并

```
void union(List &La,List Lb){
   La_len=ListLength(La);
   Lb_len=ListLength(Lb);
   for (i=1;i<=Lb_len;i++){
      GetElem(Lb,i,e);
       if (! LocateElem(La,e,equal))
            ListInsert(La,++La_len,e);
    }
} //union
```

解释说明

- 上述算法的时间复杂度依赖 ADT List 定义中基本操作的执行时间
- 不同的数据结构影响基本操作的实现方式，导致基本操作的执行时间可能相差很大，从而导致上述算法的时间代价相差很大

利用 ADT 定义更复杂的操作

复杂操作：两个有序表的归并

两个有序表的归并(merge)操作

```
void MergeList(List La,List Lb,List & Lc){
    //非递减表La,Lb归并为非递减表Lc
    InitList(Lc);
    i=j=1;k=0;
    La_len=ListLength(La);
    Lb_len=ListLength(Lb);
    //指针平行移动，一次扫描完成
    while((i<=La_len) && (j <= Lb_len)){
        GetElem(La,i,ai);GetElem(Lb,j,bj);
        if (ai <= bj){
            ListInsert(Lc,++k,ai);++i;}
        else {ListInsert(Lc,++k,bj);++j;}
    }
    //若La或Lb还有剩余部分，则直接把这些元素
    //依次加到Lc表尾
    while (i<=La_len){ //La有剩余
        GetElem(La,i++,ai);
        Listinsert(Lc,++k,ai);
    }
    while (j<=Lb_len){//Lb有剩余
        GetElem(Lb,j++,bj);
        Listinsert(Lc,++k,bj);
    }
} //union
```

算法思想:

- 用两个下标 i, j 分别指向有序表 La, Lb 的起始位置，将较小的表元素复制到 Lc 中，同时对应有序表的下标加 1；
- 若其中任何一个有序表访问完毕，则将另一个有序表剩下的元素直接复制到 Lc 的末尾（用下标 k 指示该位置).

从逻辑结构到存储结构

给出 ADT，就给出了线性表的逻辑结构，意味着：

- 人脑中对数据的概念和基本操作都已经明确了，可以接用这些概念和基本操作，去编写功能更强大的操作
- 但是，基本操作和强大的复杂操作的性能如何？（需要明了逻辑结构如何物理实现的）

这种逻辑结构如何在计算机/内存中进行物理实现？

- 了解物理实现的目的：理解和掌握原理，为将来高效利用内存空间，编写与物理实现密切相关的高效算法奠定基础
- 内存是线性的结构：将一排或明或灭的小灯想象成一串 0-1
- 顺序表：数据元素存储在内存的不同位置，位置关系对应逻辑关系（即 ADT 中定义的关系），通常呈序偶关系的数据元素其内存中的存储位置也相邻
- 链式表：数据元素存储在内存的不同位置，位置关系无法体现序偶关系，需要额外的存储空间或信息来标记序偶关系

顺序表：在内存中顺序表示线性表

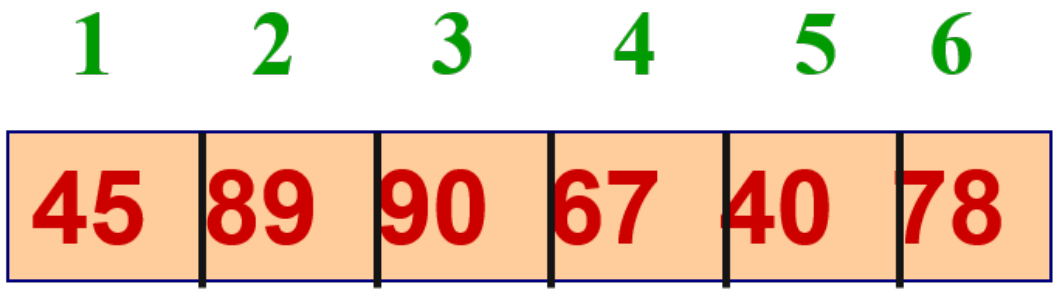
定义

- 将线性表中的元素相继存放在一个连续的存储空间中

特点

- 存储结构：类似一维数组
- 存取方式：顺序访问，可以随机存取（指定访问第 i 个元素时，一步即可访问到）

例子，如图



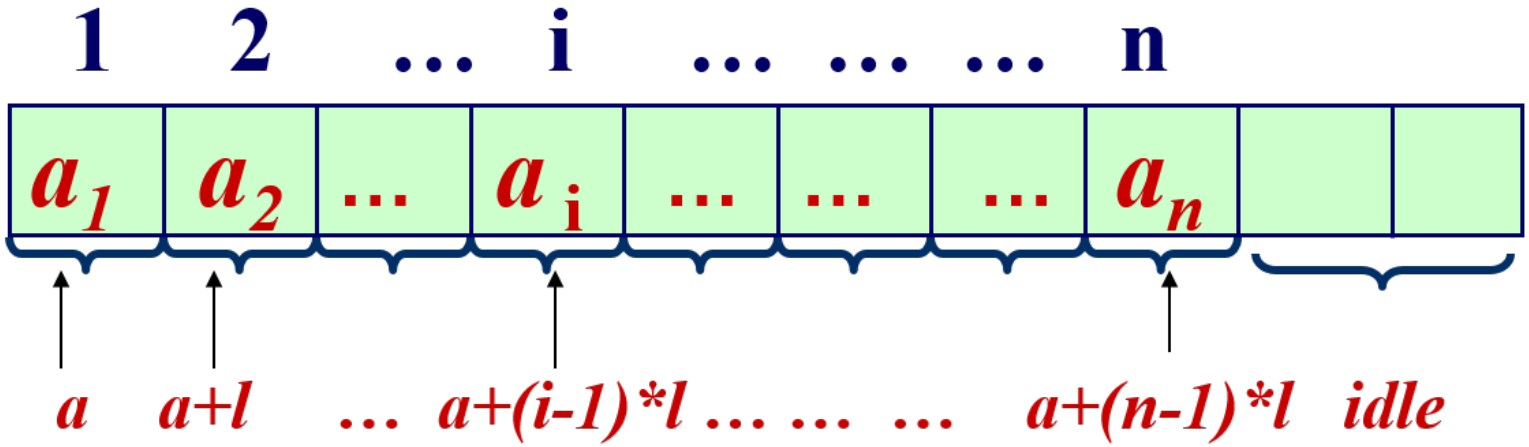
顺序表的存储方式

详细说明

假设每个元素占用 l 个存储地址，则

$$LOC(a_{i+1}) = LOC(a_i) + l$$

$$LOC(a_i) = LOC(a_1) + (i-1)*l$$



C 语言中的顺序表

C 语言的顺序表：一维数组

- 一般常用的程序设计语言都有一种数据类型：“数组”
- C 语言中的一维数组，就是顺序表的一种具体实现

接下来的目标

- 用程序设计语言 C 来实现线性表的 ADT，在内存的堆中“模拟”数组（这种数据类型）
  - 实现数据对象的存储
  - 实现数据关系的描述
  - 实现基本操作

顺序表的实现：静态部分

数据对象和数据关系的实现

```
1    #define LIST_INIT_SIZE 100 //线性表存储空间初始分配量
2    #define LISTINCREMENT 10 //存储空间分配增量
3
4    typedef struct {
5       ElemType *elem;  //存储空间基址
6       int length;      //当前元素个数(表长)
7       int listsize;    //当前分配存储容量
8                        //以sizeof(ElemType)为单位
9    } SqList
```

顺序表的实现：动态部分

初始化线性表：从无到有，在内存中创造一个线性表

```
1  void InitList_sq(SqList &L){
2      L.elem =(ElemType *) malloc(LIST_INIT_SIZE*
           sizeof(ElemType));//在堆中分配空间，字节数
3      if (!L.elem) exit(OVERFLOW); //分配失败就退出程序
4      L.length = 0;     //分配成功，设置顺序表中元素个数为0
5      L.listsize = LIST_INIT_SIZE ;//设置表的最大存储容量
6  }
```

按值查找: 在顺序表中从头查找结点值等于给定值 x 的结点

```
1  int LocateElem(SqList L,ElemType x,equal){
2    //顺序表遍历结束或找到x就退出 for 循环
3    int i;
4    for(i=0;i<L.length && L.elem[i]!=x;i++) ;//循环体为空语句
5
6    //for 循环的不同退出原因，对应不同查找结果
7    return i<L.length ? ++i:0;
8  }
```

顺序表的实现：动态部分

顺序表的实现：动态部分

求表的长度

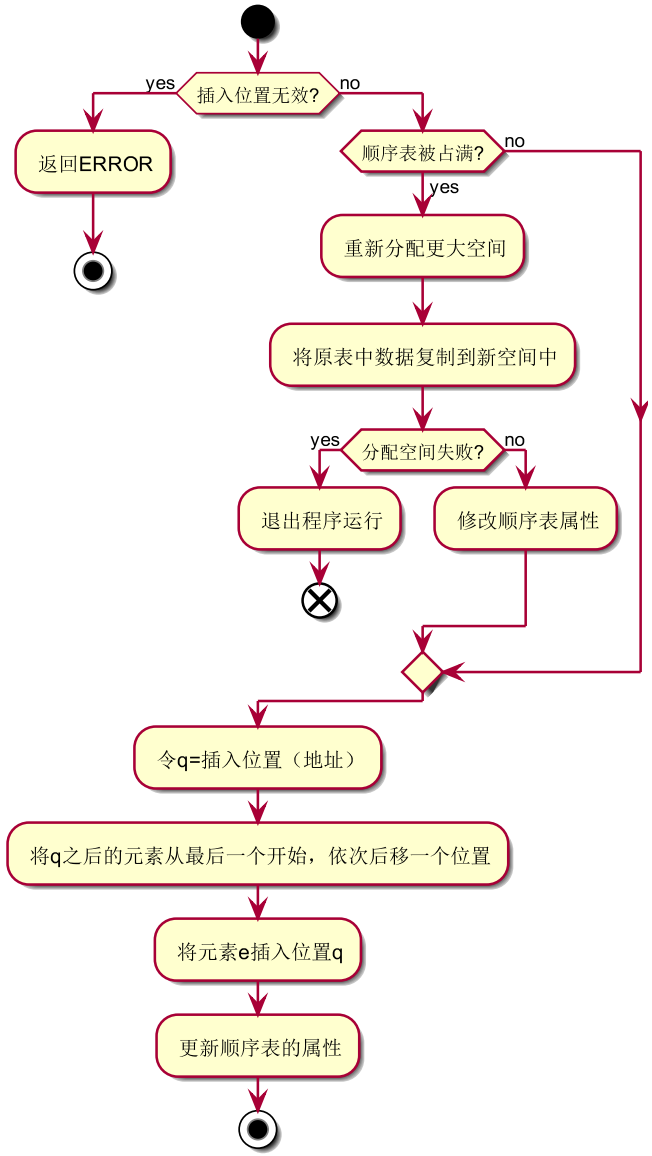
```
1  int ListLength(SqList L){
2      return L.length;
3   }
```

提取函数: 在表中提取第 i 个元素的值

```
1  Status GetElem(SqList L, int i, ElemType &e){
2         if ( i >= 1 && i <= L.length ){//输入位置是否有效的判定
3           e= L.elem[i];
4           return(OK); //范围内有效位置，返回e
5         }
6         else{
7           printf(``参数 i 不合理! \n'' );
8           return ERROR;}
9  }
```

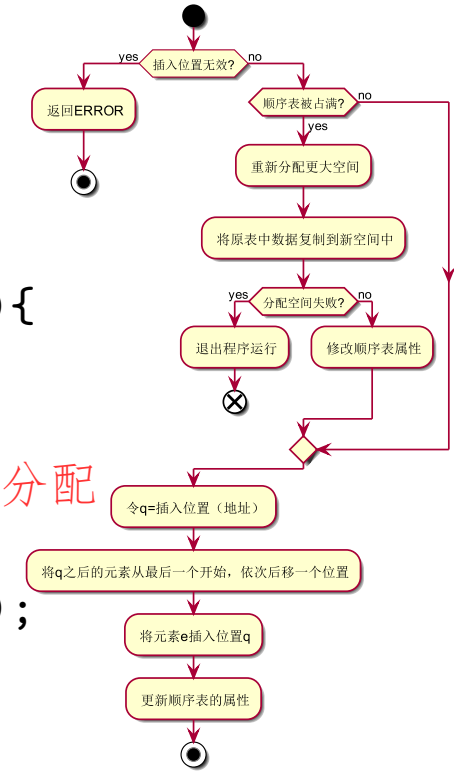
顺序表的实现：动态部分

插入元素



顺序表的实现：动态部分

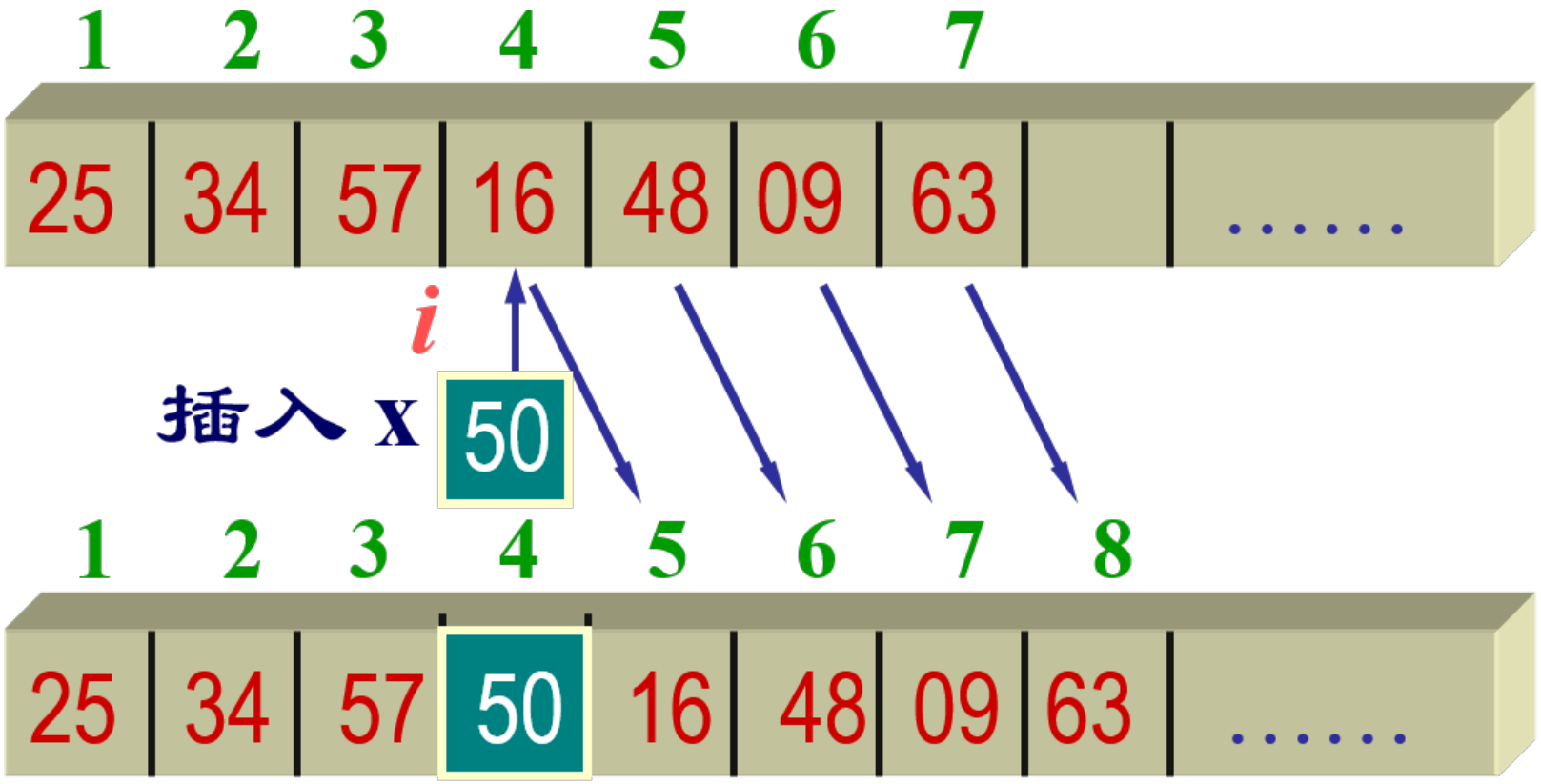
插入元素




```
1     Status ListInsert_Sq(SqList &L, int i, ElemType e){
2       //在表L中第i个位置前插入新元素e
3        if (i<1 || i>L.length+1) return ERROR;
4        if (L.length>=L.listsize){//当前存储空间满，增加分配
5            newbase=(ElemType *) realloc(L.elem,
6            (L.listsize+LISTINCREMENT)*sizeof(ElemType));
7
8            if (!newbase) exit(OVERFLOW);//存储分配失败
9            L.elem=newbase;L.listsize+=LISTINCREMENT;
10       }
11      q=&(L.elem[i-1]); //q为插入位置 L.elem+i-1
12      for (p=&(L.elem[L.length-1]);p>=q;--p)
13         *(p+1)=*p;     //插入位置及之后的元素右移
14      }
15      L.elem[i-1]=e;
16      L.length++;
17  } //课后感兴趣的同学可以调查一下realloc的详细功能
```

顺序表的实现：动态部分

插入元素：例子



顺序表的实现：动态部分

插入元素：性能分析

- 基本操作为“移动”(实质为赋值）操作；
- 在第 i 个位置前插入需移动 $n-i+1$ 个元素
- 假设在任何位置插入元素都是等概率的，则移动次数的期望值（平均次数）为：

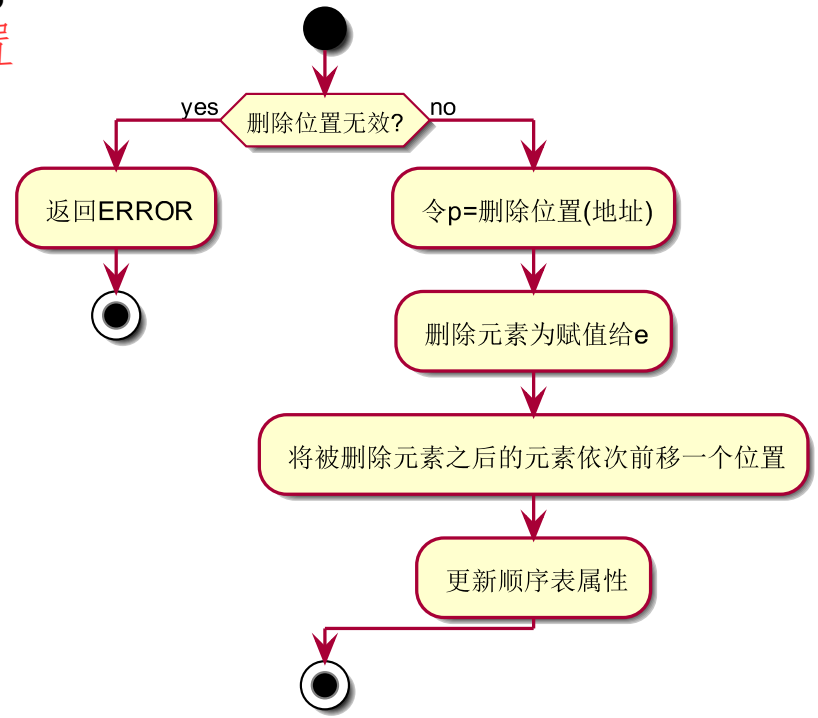
$$\begin{aligned} \text{Eis} &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}(n-i+1) = \frac{1}{n+1}(n+\cdots+1+0) \\ &= \frac{1}{(n+1)}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2} \end{aligned}$$

- 故，此假设条件下，插入算法的平均时间复杂度为 $O(n)$

顺序表的实现：动态部分

删除元素

```
1   Status ListDelete_Sq(SqList &L, int i, ElemType &e){
2       //在表L中删除第i个元素,并用e返回其值
3       if ((i<1) ||(i>L.length)) return ERROR;
4       p=&(L.elem[i-1]); //p 为被删除元素的位置
5       e=*p;
6       q=L.elem+L.length-1;//表尾元素位置
7       for (++p;p<=q;++p) *(p-1)=*p;//元素左移
8       --L.length; //表长减一
9       return OK;
10    }
```



顺序表的实现：动态部分

删除元素：例子

顺序表的实现：动态部分

插入元素：性能分析

- 删除第 i 个位置的元素需（向左）移动 $n-i$ 个元素
- 假设在任何位置删除元素都是等概率的，则移动次数的期望值（平均次数）为：

$$E_{dl} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(n-i) = \frac{1}{n}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2}$$

- 故，在此假设条件下，删除算法的平均时间复杂度为 $O(n)$

顺序表的应用 1

定义更复杂的操作：集合的并

```
1  void Union(SqList &La, SqList Lb){
2    int n = ListLength(La);
3    int m = ListLength(Lb);
4    for (int i=1; i<=m; i++){
5       GetElem(Lb,i,e);                  //在Lb中取一元素
6       if (!LocateElem(La,e,equal)) // La中若没有
7       ListInsert_Sq(La,++n,e);   //则向La表尾插入该元素
8    }
9  }
```

时空复杂度分析

- 时间复杂度：$O(La.length * Lb.length)$
- 空间复杂度：$O(1)$

顺序表的应用 2

定义更复杂的操作：集合相减

```
1  void Intersection(SqList &La, SqList Lb){
2       int n = ListLength(La);
3       int m = ListLength(Lb);
4       for (int i=1; i<=m; i++){
5           GetElem(Lb,i,e);                    //在Lb中取一元素
6           if (k=LocateElem(La,e,equal)) // La中若有
7               ListDelete_Sq(La,k,e);      //则从La中删除该元素
8       }
9   }
```

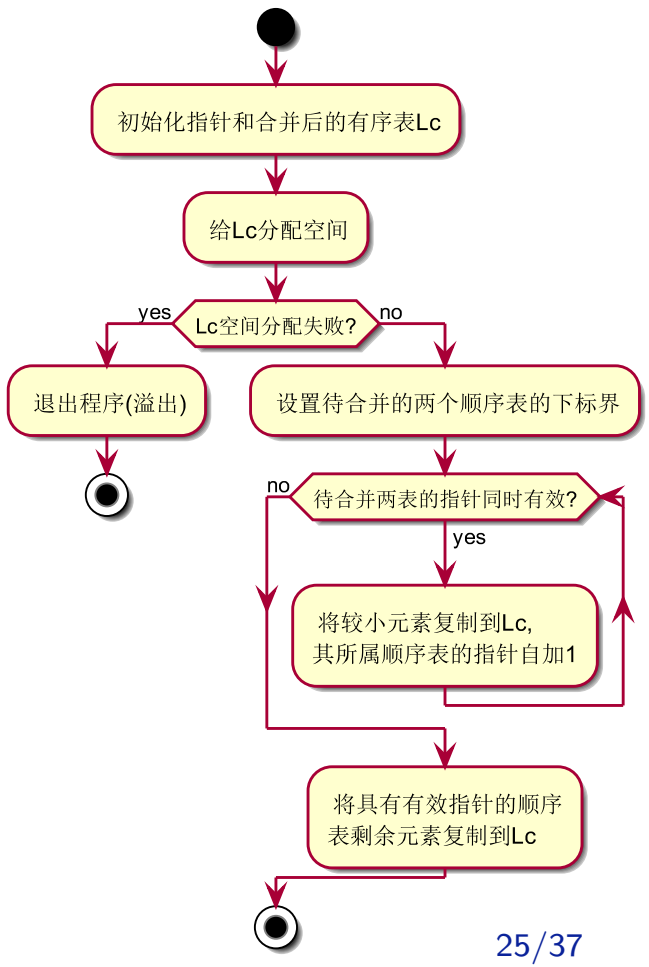
时空复杂度分析

- 时间复杂度：$O(La.length * Lb.length)$
- 空间复杂度：$O(1)$

顺序表的应用 3

定义更复杂的操作：集合的归并（两个有序表拼成更大的有序表）

```
1     void MergeList_Sq(SqList La,SqList Lb,SqList &Lc){
2       pa=La.elem;pb=Lb.elem;
3       Lc.listsize=Lc.length=La.length+Lb.length;
4       pc=Lc.elem=(ElemType *)malloc(Lc.listsize * sizeof(ElemType));
5       if (!Lc.elem) exit(OVERFLOW);
6       pa_last =La.elem+La.length-1;
7       pb_last =Lb.elem+Lb.length-1;
8       while (pa <=pa_last &&pb<=pb_last){
9          if (*pa<=*pb) *pc++=*pa++;
10         else *pc++=*pb++;   }
11      while (pa<=pa_last) * pc++=*pa++;
12      while (pb<=pb_last) * pc++=*pb++;
13  }//MergeList_Sq
```



时空复杂度分析

- 时间复杂度：$O(La.length + Lb.length)$
- 空间复杂度：$O(La.length + Lb.length)$

顺序表的总结与思考

线性结构：定义与例子

- 线性结构的顺序表示方法
- 线性结构的顺序表示方法的实现
- 线性结构的顺序表示的应用与例子

顺序表的优缺点

- 优点：逻辑上相邻，物理上也相邻，可随机存取其中任一元素，存储位置可用公式计算
- 缺点：插入删除的附加操作过多，移动大量的元素

思考

- 分析顺序表的插入与删除操作的最坏时间复杂度

链表：在内存中链式表示线性表

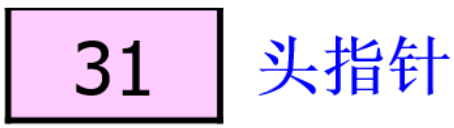
单链表

- 用一组任意的存储单元存放线性表中的数据元素
- 用额外的方式（指针/地址/位置等）存储数据元素间的关系

特点

- 链式存储结构
- 存储单元可以不连续
- 顺序存取

例子，如图



存储地址	数据域	指针域
1	LI	43
7	QIAN	13
...	...	...
19	WANG	NULL

链表的实现：静态部分

单链表的数据对象和数据关系的实现

```
1       typedef struct Lnode {  //链表结点
2           ElemType data;          //结点数据域
3           struct Lnode * next;   //结点链域
4       } ListNode, * LinkList;
```

单链表基本操作的实现及应用

基本操作的实现（略，课后阅读教材）

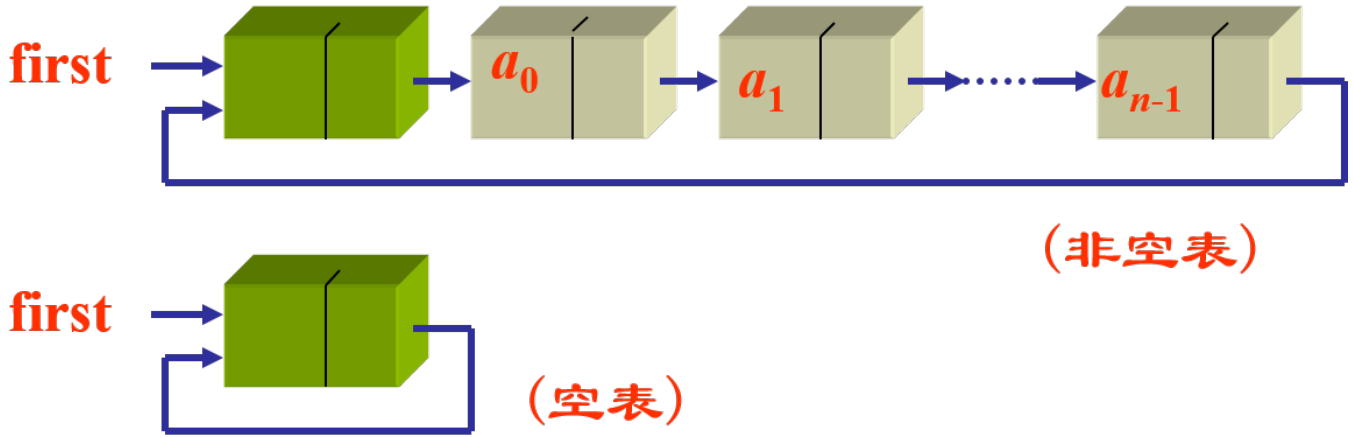
- 插入
- 删除
- 构建链表
- 清空链表
- 求链表长度
- 按值查找
- 按序号查找

应用

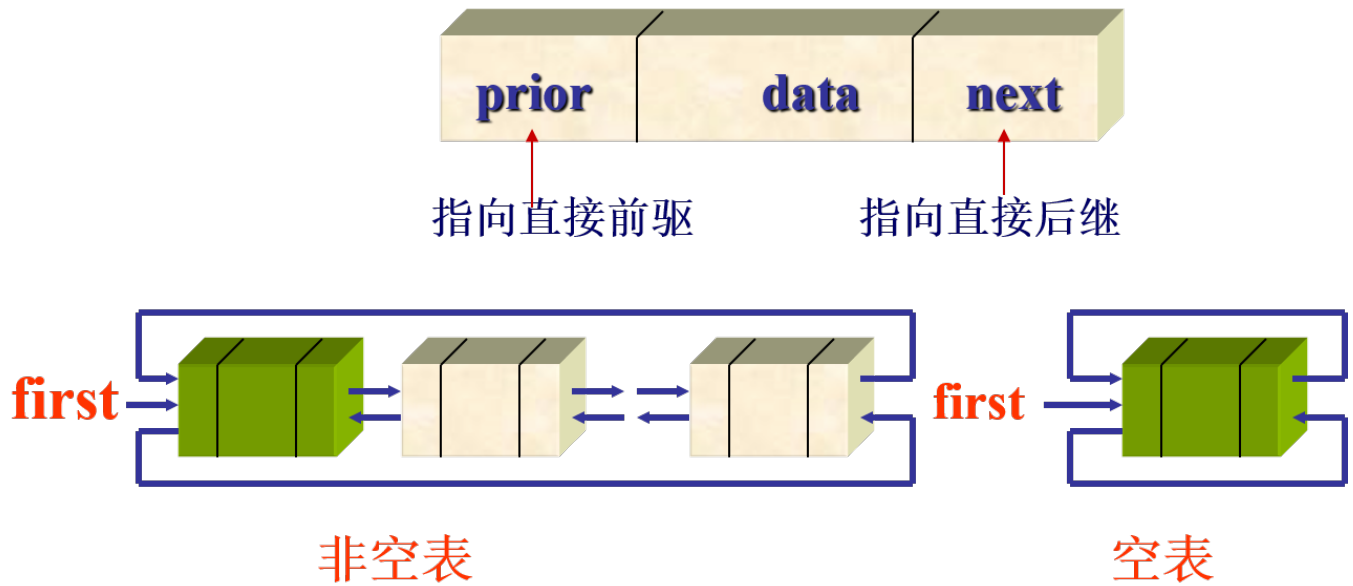
- 链表的归并

不同类型的链表

循环链表（带头节点）



双向链表



双向循环链表的实现

实现数据对象和数据关系

```
1  typedef int ListData;
2  typedef struct dnode {
3      ListNode data;
4      struct dnode * prior, * next;
5  } DblNode;
6  typedef DblNode * DblList;
```

实现基本操作

- 课后阅读教材相关章节

顺序表和链表的比较

基于空间的比较：存储密度

- 存储密度 = 结点数据本身所占的存储量/结点结构所占的存储总量
- 顺序表的存储密度 ≈ 1 （当数据存满时约等于 1）
- 链表的存储密度 < 1

基于时间的比较：插入/删除时移动元素个数

- 顺序表平均需要移动近一半元素
- 链表不需要移动元素，只需要修改指针

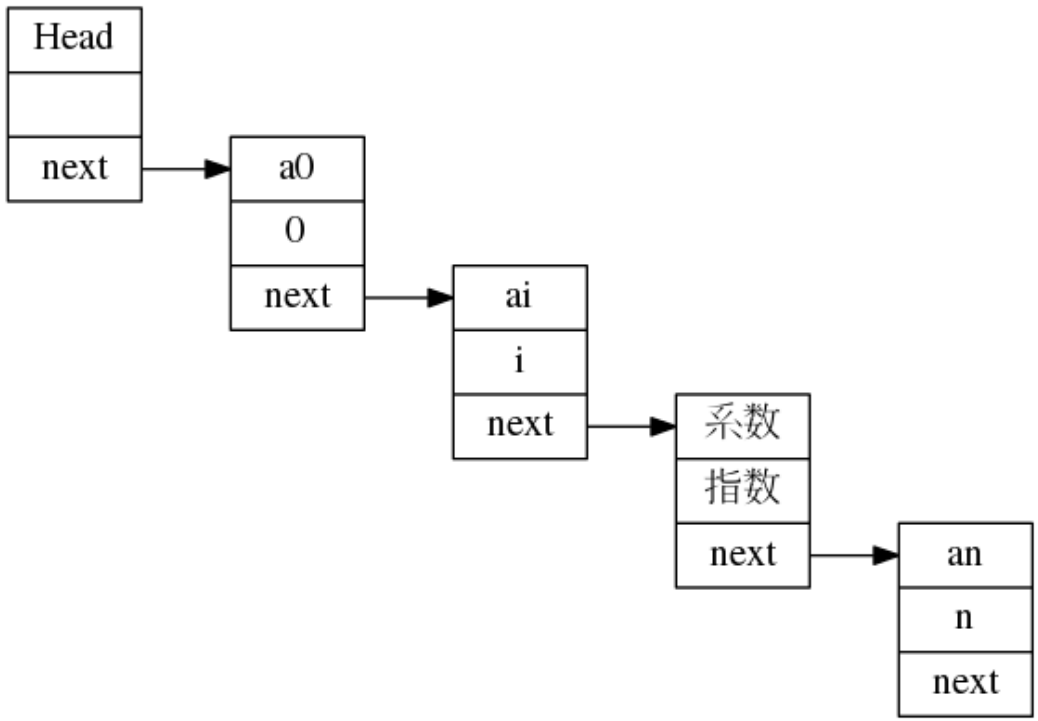
存取方式

- 顺序表可以随机存取，也可以顺序存取
- 链表是顺序存取的

练习题

单变量多项式 $a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n$ 的表示和运算

- 表示方法一：顺序表 $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$
- 表示方法二：单链表，如下图所示，要保存系数和指数，系数为 0 的项不需要出现在链表里

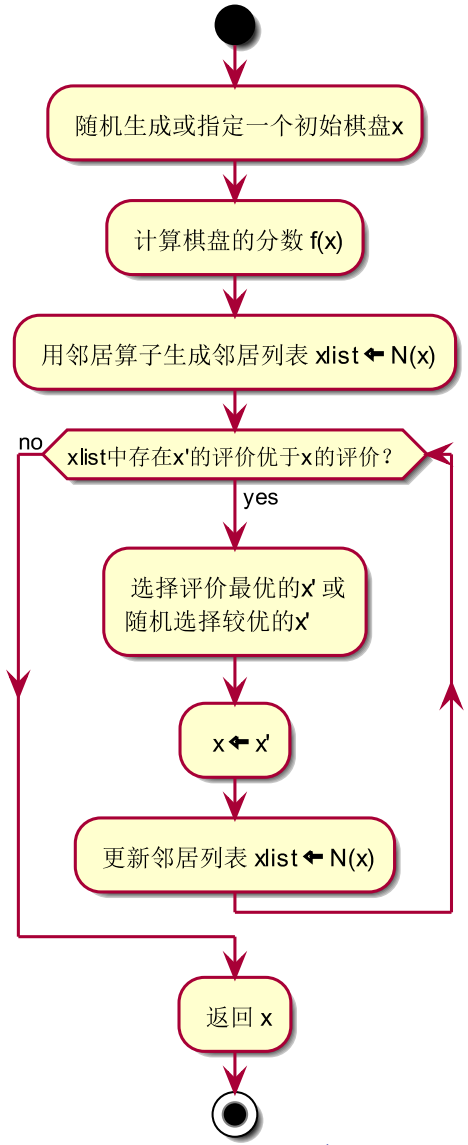


练习题

n 皇后问题（爬山法）

- 用线性表的知识，设计 ADT 和算法，给出一种在 $n \times n$ 的国际象棋棋盘上放置 n 个彼此攻击不到的皇后的放置方法
- 提示 1：输入 n，用线性表来设计棋盘或棋局的逻辑结构；例如：线性表 $\mathbf{x} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 记录第 i 列皇后的行号；或者 $n \times n$ 的 $0-1$ 矩阵表示棋盘
- 提示 2：采用随机搜索思想（爬山法），即
  - 设计棋盘的打分机制/评价函数 $f(\mathbf{x})$，对放置了 n 个皇后的棋盘进行评价；例子：相互能攻击到的皇后对越多，分数越低
  - 设计邻居算子 $N(\mathbf{x})$：即从棋盘 $\mathbf{x}$ 到其他棋盘的函数；例：改变当前棋盘 $\mathbf{x}$ 中某个皇后位置，得到一系列棋盘
- 提示 3：归纳总结算法过程中需要用到的基本操作
- 思考：在 1 分钟内能求解的 n 皇后问题，最大 n 是多少？写代码找到自己上述代码能实现的最大 n。

爬山法思想



练习题：遗传算法

问题描述

- 要求：实现遗传算法 ADT，测试多项式函数在给定区间上的优化问题
- 应用：遗传算法是人工智能/数学优化领域内，模拟生物进化过程，用于实现求任意函数 (连续性要求) 的最小值或最大值
- 基本概念：一组解构成一个集合，称之为群体/种群，每个解称为个体 (或染色体)；一个解 $(\boldsymbol{x}, y)$ 包括自变量 $\boldsymbol{x}$ 和被称之为“适应度”的实数目标值 $y = f(\boldsymbol{x})$
- 比如求一元 k 次函数的最值，随机选择 20 个解（包括 $\boldsymbol{x}, y$）/个体，构成一个种群 $\boldsymbol{P}$；机器学习中参数的优化问题

关键的第一步：数据对象及关系

- 单个解和群体的逻辑结构和存储结构是什么？单个解/个体可以视为一个数据元素；群体可以视为线性表；存储结构呢？
- 群体内解之间关系：同属一个集合或按适应度值大小排序；存储结构呢？
- 逻辑结构依问题相应设计；存储结构设计需要考虑“操作”及其“性能”

练习题: 遗传算法

从具体的数值优化问题（求数值函数的最值），感性认识问题

- 例如：求 $y = x^7 + 4x^4 - 6x^2 + 4$ 在区间 [-10,10] 上的最小值。
- 动手编程之前，先思考：有哪些对象/数据？这些数据对象如何用逻辑结构描述？逻辑结构采用怎样的存储结构在内存中实现？

一种数据对象及关系的实现

- 解：每个解的自变量 x 编码为长度为 n 的二进制串/染色体，二进制串解码为 x；存储结构设计
  - n 是调节算法性能的参数，决定解的精度
  - 如何确保每个长度为 n 的 0-1 串和定义域内的 x 一一对应？如果不能一一对应，有没有其它解决策略？
- 数据对象：群体，k 个解构成的线性表 (单链表或顺序表)，k 是超参
- 数据关系：同属一个集合，或序偶（适应度值大小排序）

练习题: 遗传算法

遗传算法的主要操作及流程

- 算法初始化，随机生成 k 个解，形成群体 $\boldsymbol{P}$
- 有性繁殖操作/交叉算子：从种群 $\boldsymbol{P}$ 中随机选择两个个体/染色体，交换两个染色体的尾部（尾部的起点位置，随机决定），得到两个新的染色体；重复多次得到 $\boldsymbol{P}'$
- 无性繁殖/变异算子：对 $\boldsymbol{P}'$ 中的每个染色体，以给定的变异概率 $p = 1/n$，翻转染色体的每个位置上的 0 或 1，得到中间群体 $\boldsymbol{P}''$
- 计算 $\boldsymbol{P}''$ 中每个染色体的适应度值 $y = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}''$
- 适者生存/选择算子：将中间群体 $\boldsymbol{P}''$ 和种群 $\boldsymbol{P}$ 合并，从并集中选择 k 个解，构成新的种群 $\boldsymbol{P}$，选择的方法：按 y 的大小排序，选择适应度更优的部分。（求最小值，适应度 y 值小的更优）
- 上述三个算子依次不断迭代，直到群体 $\boldsymbol{P}$ 不再变化或满足其它停止条件为止。