第五周习题

2

(1) 值域 R_f 为 $\{-2,-1,0,1,2\}$

(2) 共有 5^9 个映射

5

(1) 设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, 则 $\frac{d}{dx}f(x)=\sum_{i=1}^{n}i\cdot a_ix^{i-1}\in R[x]$

故这是一个从 $R[x]$ 到 $R[x]$ 的映射，故值域是 $R[x]$。

由于对于值域中的每个元素都可以通过积分在 $R[x]$ 找到原像，易证明为满射。

由于任意常数项求导后为 0，所以可知不为双射。

(2) 由于 $I(f(x))=\int_0^x f(t)dt=\sum_{i=0}^{n}a_i\frac{x^{i+1}}{i+1}\in R[x]$

故这是一个从 $R[x]$ 到 $R[x]$ 的映射。值域为除了含有常数项的 $R[x]$。特别的，$I(0)=0$，可写成 $\{R[x]|a_0=0\}\cup\{0\}$

因此不是满射，也不是双射。

8 当 α 为单射时，由于 T 中每个元素若有对应，则唯一，所以 $\alpha(A)\cap\alpha(\tilde{A})=\varphi$，同时有 $\alpha(A)\cup\alpha(\tilde{A})\subseteq T=\widetilde{\alpha(A)}\cup\alpha(A)$，得到 $\alpha(\tilde{A})\subseteq\widetilde{\alpha(A)}$

当 α 为满射，由于 T 中每个元素在 S 中均有原像，所以 $\alpha(A)\cup\alpha(\tilde{A})=T$，并且俩者交集不一定为空，所以 $\alpha(\tilde{A})\supseteq\widetilde{\alpha(A)}$

12

$$\boldsymbol{\tau\sigma}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&6&5&4\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau^2\sigma}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&1&5&6&3\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma^2\tau}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&6&4&5&1&2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma^{-1}\tau\sigma}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&6&1&5&4&3\end{pmatrix}$$

15

注意此题并非全是不相交的轮换之积

(1) 转化为 (1 6 4 2 3 7 5) 所以阶为 7

(2) 转化为 (1 2 5)(3 4 7) 所以阶为 3