Universidad Autónoma Chapingo

Departamento de Mecánica Agrícola

Ingeniería Mecatrónica Agrícola

Informe 1

Asignatura:

Dinámica de robots

Nombre del profesor:

Luis Arturo Soriano Avendaño

Alumno:

Cocotle Lara Jym Emmanuel [1710451-3]

GRADO:	**GRUPO:**
7°	**7**

Chapingo, Texcoco Edo. México

Contenido

Introducción

La cinemática es una rama de la física que estudia el movimiento prescindiendo de las fuerzas que lo producen (RAE).

Un problema muy básico en el estudio de la manipulación mecánica se conoce como cinemática directa, que es el problema geométrico estático de calcular la posición y orientación del efector final del manipulador. Específicamente, dado un conjunto de ángulos articulares, el problema de la cinemática directa es calcular la posición y orientación de la trama de la herramienta relativa a la trama base (Craig John, 2006).

En otras palabras, es como cambiar la representación de la posición del manipulador: de una descripción en el espacio de la articulación a una descripción en el espacio cartesiano.

En el caso de la cinemática inversa podemos representarlo como una asignación de "ubicaciones" en el espacio cartesiano 3D, a "ubicaciones" en el espacio de articulaciones internas del robot. Esta necesidad surge naturalmente siempre que se especifica un objetivo en coordenadas de espacio 3D externas. Algunos de los primeros robots carecían de este algoritmo; simplemente se desplazaban (algunas veces manualmente) hacia las ubicaciones deseadas, que después se registraban como un conjunto de valores de articulación (es decir, como una ubicación en el espacio de la articulación) para su posterior reproducción. Debido a que las ecuaciones cinemáticas son no lineales, su solución no es siempre sencilla (o incluso posible) en una forma cerrada. Además, surgen preguntas sobre si existe una solución o existen múltiples soluciones.

A través de este informe se trata de resolver tanto la cinemática directa como la inversa y en base a los datos obtenidos poder simularlos de manera correcta con ayuda de un código en Python.

Desarrollo

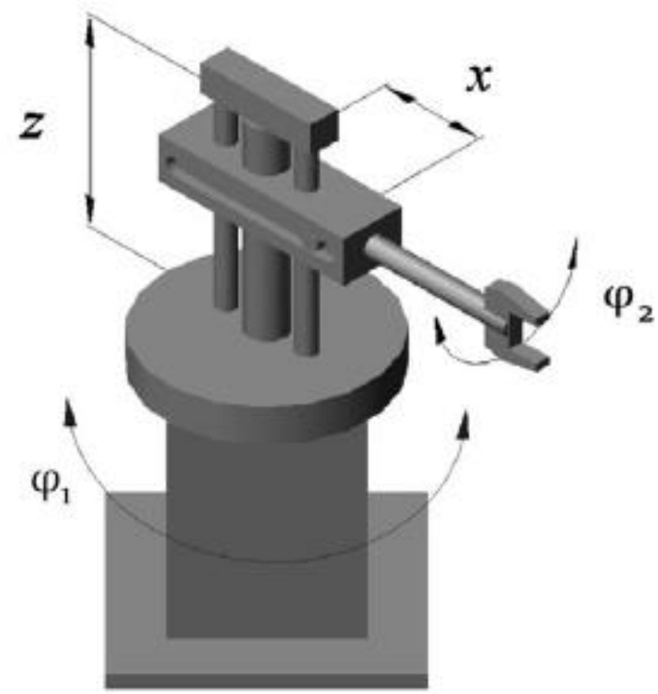
A lo largo de este informe se obtienen tanto la cinemática directa, como la cinemática inversa de 6 robots con diferentes características, y también se tienen los programas de la simulación de los robots correspondientes.

Procedimiento para la obtención de los parámetros de Denavit Hartenberg

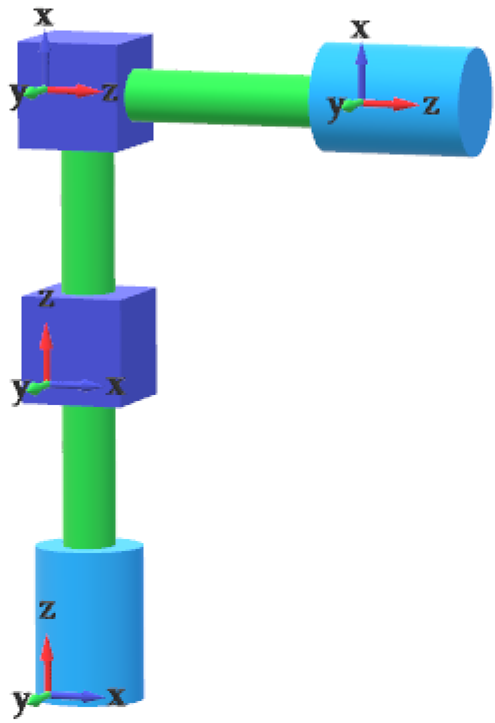
1. Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con n (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.
2. Numerar cada articulación comenzando por 1 (la correspondiente al primer grado de libertad) y acabando en n.
3. Localizar el eje de cada articulación. Si esta es rotativa, el eje será su propio eje de giro, si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.
4. Para i, de 0 a n-1 situar el eje z_i sobre el eje de la articulación i+1.
5. Situar el origen del sistema de la base $\{S_0\}$ en cualquier punto del eje z_0. Los ejes x_0 y y_0 se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con z_0.
6. Para i de 1 a n-1, situar el origen del sistema $\{S_i\}$ (solidario al eslabón i) en la intersección del eje z_i con la línea normal común a z_{i-1} y z_i. Si ambos ejes se cortasen, se situarían $\{S_i\}$ en el punto de corte. Si fuesen paralelos $\{S_i\}$ se situaría en la articulación i+1.
7. Situar x_i en la línea normal común a z_{i-1} y z_i.
8. Situar y_i de modo que forme un sistema dextrógiro con x_i y z_i.
9. Situar el sistema $\{S_n\}$ en el extremo del robot de modo que en z_n coincida con la dirección de z_{n-1} y x_n sea normal a z_{n-1} y z_n.
10. Obtener θ_i como el ángulo que hay que girar en torno a z_{i-1} para que x_{i-1} y x_i queden paralelos.

11. Obtener d_i como la distancia, medida a lo largo de z_{i-1}, que habría que desplazar $\{S_{i-1}\}$ para que x_i y x_{i-1} quedasen alineados.
12. Obtener a_i como la distancia medida a lo largo de x_i (que ahora coincidiría con x_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo $\{S_{i-1}\}$ para que su origen coincidiese con $\{S_i\}$.
13. Obtener α_i como el ángulo que habría que girar en torno a x_i, para que el nuevo $\{S_{i-1}\}$ coincidiese totalmente con $\{S_i\}$.
14. Obtener las matrices de transformación ${}^{i-1}A_i$.
15. Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot $\boldsymbol{T} = {}^{\boldsymbol{0}}\boldsymbol{A_1}\ {}^{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{A_2}\ {}^{\boldsymbol{n-1}}\boldsymbol{A_n}$.
16. La matriz $\boldsymbol{T}$ define la orientación (sub-matriz de rotación) y posición (sub-matriz de traslación) del extremo referido a la base, en función de las n coordenadas articulares.

Ejercicio 1: Robot cilíndrico con dos articulaciones primaticas y dos rotacionales



Establecemos los sistemas de referencia para cada articulación, quedando como:



Cinemática directa

A partir de los sistemas de referencia, obtenemos los parámetros de Denavit Hartenberg.

Parámetros D-H

i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	θ_1
2	0	0	d_2	0
3	0	0	d_3	0
4	0	0	d_4	θ_4

Conociendo que:

$$^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se pueden sustituir los valores y obtener que:

$$A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{1}A_{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{2}A_{3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{3}A_{4} = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & 0 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y al realizar la multiplicación de las matrices anteriores obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & -\cos(q_1)\sin(q_4) - \cos(q_4)\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \cos(q_1)\sin(q_4) + \cos(q_4)\sin(q_1) & \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\sigma_1 = \cos(q_1)\cos(q_4) - \sin(q_1)\sin(q_4)$$

Cinemática inversa

Para q_1 tenemos que:

$$\begin{bmatrix} \frac{Cos2\theta + 1}{2cos\theta} & -sen\theta & 0 & 0 \\ -sen\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 + q_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-sen(q_1)px + cosq_1py = 0$$

$$\frac{py}{px} = \frac{senq_1}{cosq_1}$$

$$\arctan\left(\frac{py}{px}\right) = q_1$$

Para q_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{Cos2\theta+1}{2cos\theta} & -sen\theta & 0 & 0 \\ -sen\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{Cos2\theta+1}{2cos\theta} & -sen\theta & 0 & 0 \\ -sen\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1-q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4+q_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p_z - d_1 - q_2 = 0$$

$$p_z - d_1 = q_2$$

Para q_3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -q_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{Cos2\theta+1}{2cos\theta} & -sen\theta & 0 & 0 \\ -sen\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

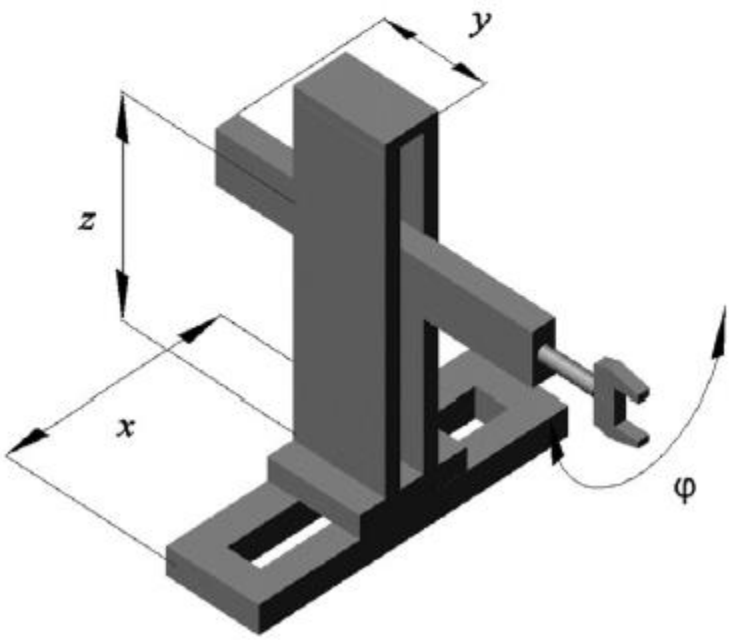
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

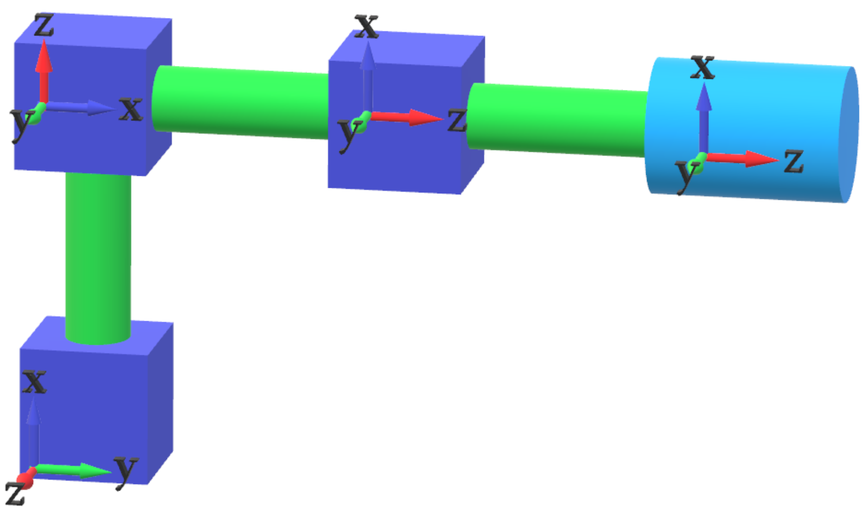
$$\begin{bmatrix} \frac{Cos2\theta+1}{2cos\theta} & -sen\theta & 0 & -q_3 \\ -sen\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1-2q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{Cos2\theta+1}{2cos\theta}P_x - sen\theta P_y - q_3 = a_4$$

$$q_3 = \frac{Cos2\theta + 1}{2cos\theta} P_x - sen\theta P_y - a_4$$

Ejercicio 2: Robot cartesiano con tres articulaciones prismáticas y una rotacional





Cinemática directa

A partir de los sistemas de referencia, obtenemos los parámetros de Denavit Hartenberg.

Parámetros D-H

i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	90
2	0	0	d_2	0
3	0	0	d_3	0
4	0	0	d_4	θ_4

Conociendo que:

$$^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se pueden sustituir los valores y obtener que:

$$^{0}A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{1}A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{2}A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{3}A_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & 0 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y al realizar la multiplicación de las matrices anteriores obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(q_4) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(q_4) & 0 & 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(q_4) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(q_4) & \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\sigma_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(q_4) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(q_4)$$

Cinemática inversa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sen\theta & 0 \\ sen\theta & 0 & -cos\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ cos\theta & 0 & sen\theta & a_3 \\ sen\theta & 1 & -cos\theta & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_x - a_1 = 0$$

$$a_1 = P_x$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta_4 & 0 & sen\theta_4 & 0 \\ sen\theta_4 & 0 & -cos\theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta_4 & 0 & sen\theta_4 & a_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ sen\theta_4 & 1 & -cos\theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_z - d_2 = 0$$

$$P_z = d_2$$

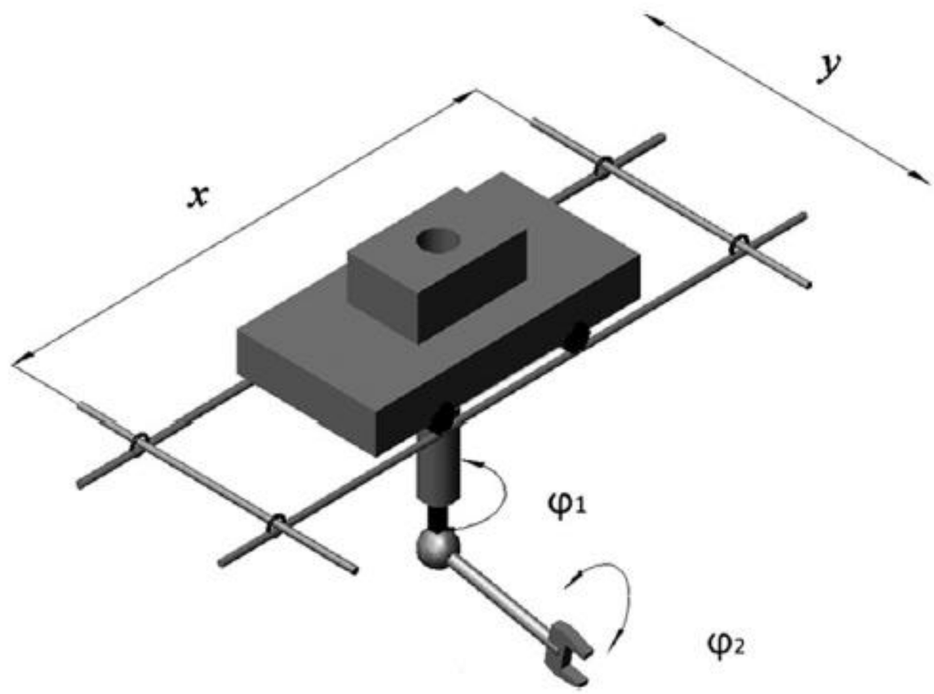
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta_4 & 0 & sen\theta_4 & 0 \\ sen\theta_4 & 0 & -cos\theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

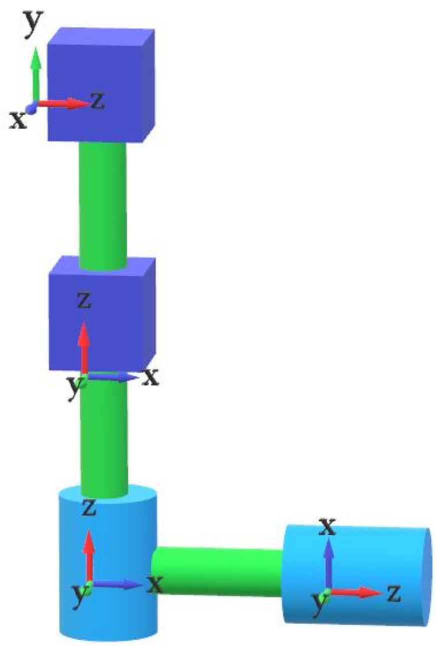
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & d_2 \\ -1 & 0 & 1 & a_1 - d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta_4 & 0 & sen\theta_4 & 0 \\ sen\theta_4 & 0 & -cos\theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$P_y = -a_3$$

Ejercicio 3: Robot con dos articulaciones primaticas y 2 rotacionales



Establecemos los sistemas de referencia para cada articulación, quedando como:



Cinemática directa

A partir de los sistemas de referencia, obtenemos los parámetros de Denavit Hartenberg.

Parámetros D-H

i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	90	0	0
2	0	0	d_2	0
3	0	0	d_3	θ_3
4	0	0	d_4	θ_4

Conociendo que:

$$^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se pueden sustituir los valores y obtener que:

$$^{0}A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
{}^{1}A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}A_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{3}A_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & 0 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Y al realizar la multiplicación de las matrices anteriores obtenemos:

$$
\begin{pmatrix} \cos(q_3)\cos(q_4) - \sin(q_3)\sin(q_4) & -\cos(q_3)\sin(q_4) - \cos(q_4)\sin(q_3) & 0 & a_1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(q_3)\sin(q_4) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(q_4)\sin(q_3) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(q_3)\cos(q_4) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(q_3)\sin(q_4) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & -d_2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - d_3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - d_4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(q_3)\sin(q_4) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(q_4)\sin(q_3) & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(q_3)\cos(q_4) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(q_3)\sin(q_4) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & d_2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + d_3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + d_4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Cinemática inversa

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -a_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta_3 & 0 & sen\theta_3 & 0 \\ sen\theta_3 & 0 & -cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta_4 & -sen\theta_4 & 0 & 0 \\ sen\theta_4 & cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -a_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} sin\theta_3 Cos\theta_4 & Sen\theta_3 Sen\theta_4 & -cos\theta_3 & -d_3 Cos\theta_3 \\ -cos\theta_3 Cos\theta_4 & sin\theta_4 Cos\theta_3 & -sen\theta_3 & -a_2 - d_3 * sen(\theta_{3)} \\ sen\theta_4 & cos\theta_4 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\theta_3, \theta_4, a_1, a_2
$$

$$P_y = a_1 - d_3 Cos\theta_3$$

$$a_1 = P_y + d_3 Cos\theta_3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -a_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta_3 & 0 & sen\theta_3 & 0 \\ sen\theta_3 & 0 & -cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cos\theta_4 & -sen\theta_4 & 0 & 0 \\ sen\theta_4 & cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-p_x = d_3 Sen\theta_3$$

$$-\frac{p_x}{d_3} = Sen\theta_3$$

$$\boldsymbol{arcsen\left(-\frac{P_x}{d_3}\right) = \theta_3}$$

$$\begin{bmatrix} Cos\theta_3 & sen\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ sen\theta_3 & -\cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -a_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta_4 & -sen\theta_4 & 0 & 0 \\ sen\theta_4 & cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -cos\theta_3 & -sen\theta_3 & 0 & a_1 * sen\theta_3 - a_2 sen\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ -sen\theta_3 & cos\theta_3 & 0 & -a_1 cos\theta_3 + a_2 cos\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta_4 & -sen\theta_4 & 0 & 0 \\ sen\theta_4 & cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-cos\theta_3 P_x - sen\theta_3 P_y + a_1 sen\theta_3 - a_2 sen\theta_3 = 0$$

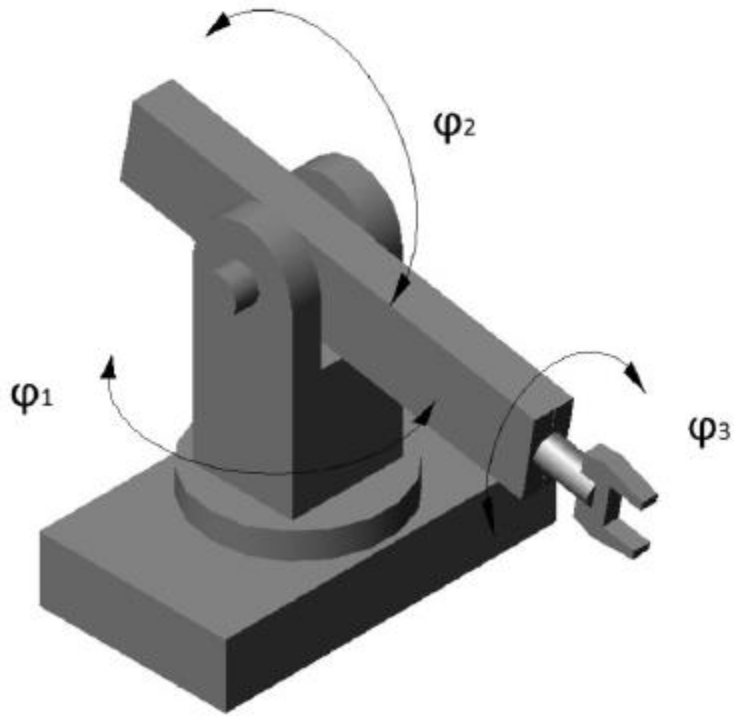
$$-cos\theta_3 P_x - sen\theta_3 P_y + a_1 sen\theta_3 = a_2 sen\theta_3$$

$$a_2 = \frac{cos\theta_3 P_x - Sen\theta_3 P_y + a_1 sen\theta_3}{sen\theta_3}$$

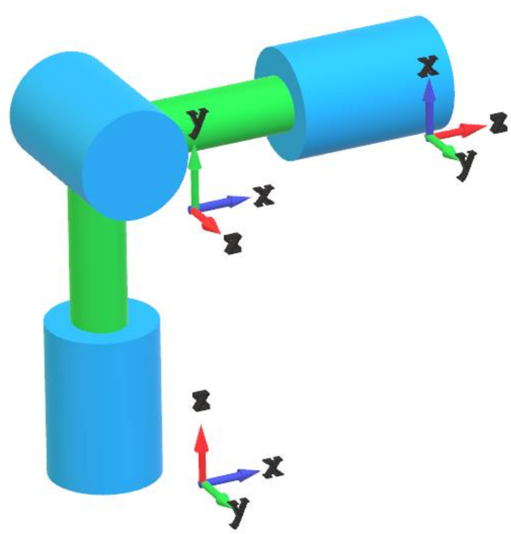
$$a_2 = \frac{Cos\theta_3}{sen\theta_3} P_x - P_y + a_1$$

$$a_2 = \tan^{-1}\theta_3\, P_x - P_y + a_1$$

Ejercicio 4: Robot esférico con tres articulaciones rotacionales



Establecemos los sistemas de referencia para cada articulación, quedando como:



Cinemática directa

A partir de los sistemas de referencia, obtenemos los parámetros de Denavit Hartenberg.

Parámetros D-H

i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	90	d_1	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	0	0	d_3	θ_3

Conociendo que:

$$^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se pueden sustituir los valores y obtener que:

$$^{0}A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{1}A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_2 c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{2}A_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y al realizar la multiplicación de las matrices anteriores obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \cos(q_3)\,\sigma_2 - \sin(q_3)\,\sigma_4 & -\sin(q_3)\,\sigma_2 - \cos(q_3)\,\sigma_4 & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(q_1) & a_2\cos(q_1)\cos(q_2) + d_3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(q_1) - a_2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(q_1)\sin(q_2) \\ \cos(q_3)\,\sigma_3 - \sin(q_3)\,\sigma_1 & -\sin(q_3)\,\sigma_3 - \cos(q_3)\,\sigma_1 & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(q_1) & a_2\cos(q_2)\sin(q_1) - d_3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(q_1) + a_2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(q_1)\sin(q_2) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(q_2)\sin(q_3) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(q_3)\sin(q_2) & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(q_2)\cos(q_3) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(q_2)\sin(q_3) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & d_1 + d_3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + a_2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(q_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\sigma_1 = \sin(q_1)\sin(q_2) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(q_1)\cos(q_2)$$

$$\sigma_2 = \cos(q_1)\cos(q_2) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(q_1)\sin(q_2)$$

$$\sigma_3 = \cos(q_2)\sin(q_1) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(q_1)\sin(q_2)$$

$$\sigma_4 = \cos(q_1)\sin(q_2) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(q_2)\sin(q_1)$$

Cinemática inversa

$$\begin{bmatrix} Cos\theta_1 & sen\theta_1 & 0 & 0 \\ -sen\theta_1 & Cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha_2 & -sin\alpha_2 & 0 \\ 0 & sen\alpha_2 & cos\alpha_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Cos\theta_3 & -sen\theta_3 & 0 & 0 \\ sen\theta_3 & Cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Cos\theta_1 & sen\theta_1 & 0 & 0 \\ -sen\theta_1 & Cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta_3 & -sen\theta_3 & 0 & 0 \\ sen\theta_3 Cos\alpha_2 & Cos\alpha_2 Cos\theta_3 & -sin\alpha_2 & -d_3 sen\alpha_2 \\ -sen\alpha_2 sen\theta_3 & Sen\alpha_2 Cos\theta_3 & cos\alpha_2 & d_2 + d_3 cos\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Cos\theta_1 P_x + sen\theta_1 P_y = 0$$

$$-\frac{sen\theta_1}{Cos\theta_1} = \frac{P_x}{P_y}$$

$$\theta_1 = \arctan\left(-\frac{P_x}{P_y}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha_2 & sin\alpha_2 & -d_2 sen\alpha_2 \\ 0 & -sen\alpha_2 & cos\alpha_2 & -d_2 cos\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Cos\theta_1 & sen\theta_1 & 0 & 0 \\ -sen\theta_1 & Cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Cos\theta_3 & -sen\theta_3 & 0 & 0 \\ sen\theta_3 & Cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Cos\theta_1 & sen\theta_1 & 0 & 0 \\ -sen\theta_1 Cos\alpha_2 & Cos\alpha_2 Cos\theta_1 & sen\alpha_2 & -d_1 sen\alpha_2 - d_2 sen\alpha_2 \\ -sen\alpha_2 sen\theta_1 & -sen\alpha_2 Cos\theta_1 & cos\alpha_2 & -d_1 cos\alpha_2 - d_2 cos\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Cos\theta_3 & -sen\theta_3 & 0 & 0 \\ sen\theta_3 & Cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-sen\alpha_2 sen\theta_1 Px - sen\alpha_2 Cos\theta_1 P_y + cos\alpha_2\, P_z - d_1 cos\alpha_2 - d_2 cos\alpha_2 = d_3$$

$$cos\alpha_2(-d_1 - d_2 + P_z) - sen\alpha_2\left(Sen\theta_1 P_x + Cos\theta_1 P_y\right) = d_3$$

$$cos\alpha_2(-d_1 - d_2 + P_z) - d_3 = sen\alpha_2\left(Sen\theta_1 P_x + Cos\theta_1 P_y\right)$$

$$\frac{cos\alpha_2(-d_1 - d_2 + P_z) - d_3}{\left(Sen\theta_1 P_x + Cos\theta_1 P_y\right)} = sen\alpha_2$$

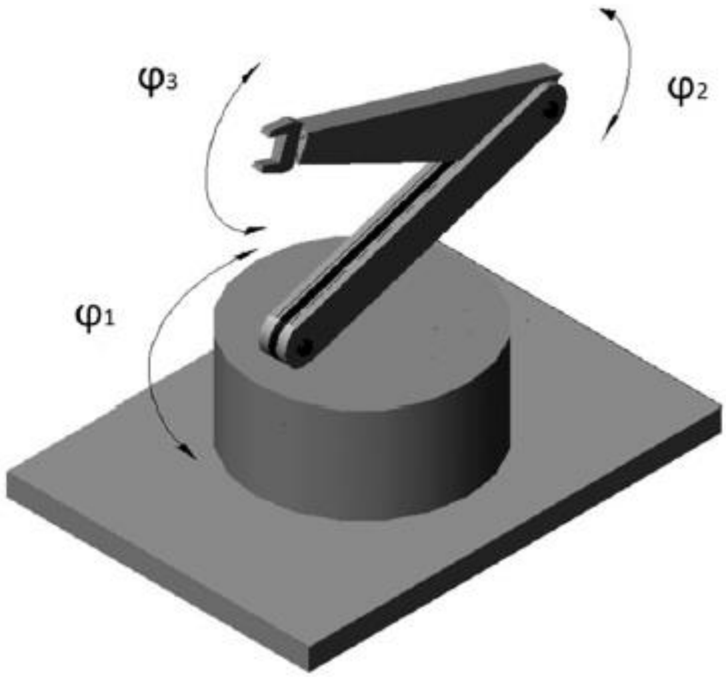
$$-\frac{\left(Cos\theta_1 P_y - Sen\theta_1 P_x\right)}{P_z - d_1 - d_2} = \frac{Sen\alpha_2}{cos\alpha_2}$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}\left(-\frac{\left(Cos\theta_1 P_y - Sen\theta_1 P_x\right)}{P_z - d_1 - d_2}\right)$$

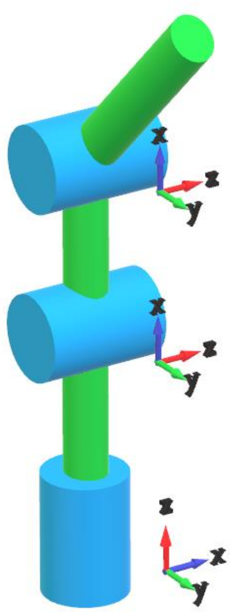
$$-sen\theta_1 Cos\alpha_2 P_x + Cos\alpha_2 Cos\theta_1 P_y + sen\alpha_2 P_z - d_1 sen\alpha_2 - d_2 sen\alpha_2 = 0$$

$$cos\alpha_2\left(Cos\theta P_y - Sen\theta_1 P_x\right) + sen\alpha_2(P_z - d_1 - d_2) = 0$$

Ejercicio 5: Robot articulado con tres juntas rotacionales



Establecemos los sistemas de referencia para cada articulación, quedando como:



Cinemática directa

A partir de los sistemas de referencia, obtenemos los parámetros de Denavit Hartenberg.

Parámetros D-H

i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	0	0	θ_3

Conociendo que:

$$^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se pueden sustituir los valores y obtener que:

$$^{0}A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{1}A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_2 c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{2}A_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_3 c\theta_3 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & a_3 s\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y al realizar la multiplicación de las matrices anteriores obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & -\cos(q_3)\,\sigma_3 - \sin(q_3)\,\sigma_2 & 0 & a_3\cos(q_3)\,\sigma_2 - a_3\sin(q_3)\,\sigma_3 + a_2\cos(q_1)\cos(q_2) - a_2\sin(q_1)\sin(q_2) \\ \cos(q_3)\,\sigma_3 + \sin(q_3)\,\sigma_2 & \sigma_1 & 0 & a_3\cos(q_3)\,\sigma_3 + a_3\sin(q_3)\,\sigma_2 + a_2\cos(q_1)\sin(q_2) + a_2\cos(q_2)\sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\sigma_1 = \cos(q_1)\cos(q_2) - \sin(q_1)\sin(q_2)$$

$$\sigma_2 = \cos(q_2)\sin(q_1)$$

$$\sigma_3 = \cos(q_1)\sin(q_2)$$

Cinemática inversa

$$\begin{bmatrix} C\theta_1 & s\theta_1 & 0 & -a_1 \\ -s\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_2C\theta_2 \\ s\theta_2 & C\theta_2 & 0 & a_2s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_3C\theta_3 \\ s\theta_3 & C\theta_3 & 0 & a_3s\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C\theta_1 & s\theta_1 & 0 & -a_1 \\ -s\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & a_2C\theta_2 + a_3\mathrm{c}\,(\theta_2+\theta_3) \\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & a_2s\theta_2 + a_3\mathrm{s}\,(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-s\theta_1P_x + C\theta_1P_y = a_2s\theta_2 + a_3\mathrm{s}\,(\theta_2+\theta_3)$$

$$-s\theta_1P_x + C\theta_1P_y = a_2s\theta_2 + a_3(\mathrm{s}\theta_2C\theta_3 + S\theta_3C\theta_2)$$

$$= S\theta_2(a_2 + C\theta_3) + a_3S\theta_3C\theta_2$$

$$\begin{bmatrix} C\theta_2 & s\theta_2 & 0 & -a_2 \\ -s\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta_1 & s\theta_1 & 0 & -a_1 \\ -s\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_3C\theta_3 \\ s\theta_3 & C\theta_3 & 0 & a_3s\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

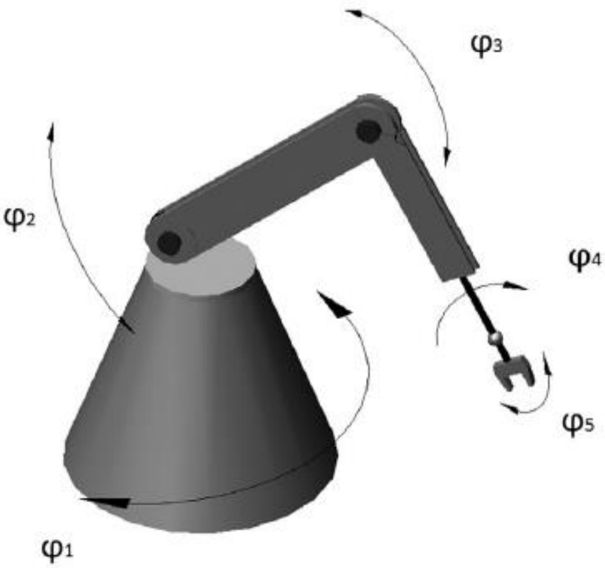
$$\begin{bmatrix} C(\theta_1+\theta_2) & s(\theta_1+\theta_2) & 0 & -a_2 - a_1c\theta_2 \\ -s(\theta_1+\theta_2) & C(\theta_1+\theta_2) & 0 & a_1s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_3C\theta_3 \\ s\theta_3 & C\theta_3 & 0 & a_3s\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

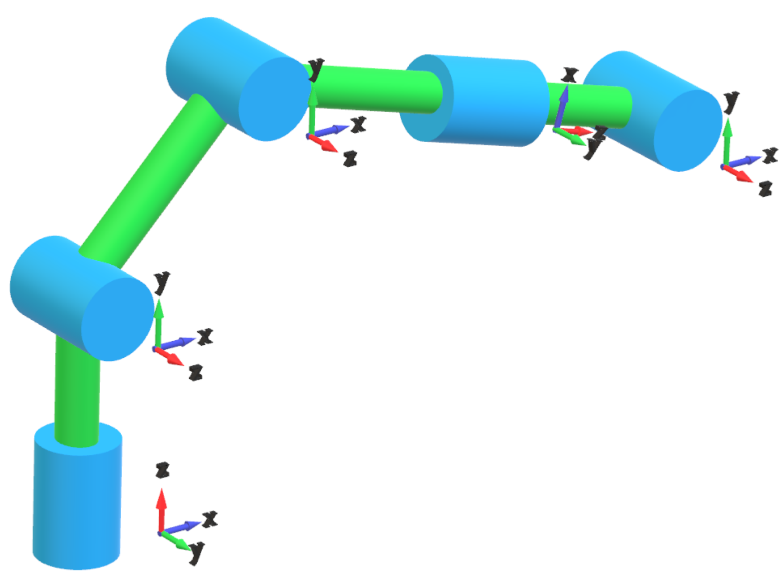
$$-s(\theta_1+\theta_2)P_x + C(\theta_1+\theta_2)P_y + a_1 s\theta_2 = a_3 s\theta_3$$

$$\theta_3 = sen^{-1}\left(\frac{(-sen(\theta_1+\theta_2)P_x + Cos(\theta_1+\theta_2)P_y + a_1 sen\theta_2)}{a_3}\right)$$

Ejercicio 6: Robot con cinco articulaciones rotacionales



Establecemos los sistemas de referencia para cada articulación, quedando como:



Cinemática directa

A partir de los sistemas de referencia, obtenemos los parámetros de Denavit Hartenberg.

Parámetros D-H

i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	0	0	d_3	θ_3
4	0	0	d_4	θ_4
5	a_5	0	0	θ_5

Conociendo que:

$$^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se pueden sustituir los valores y obtener que:

$$^{0}A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{1}A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_2 c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{2}A_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{3}A_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & 0 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{4}A_5 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & a_5 c\theta_5 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & a_5 s\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y al realizar la multiplicación de las matrices anteriores obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & -\sin(q_5)\,\sigma_2 - \cos(q_5)\,\sigma_3 & 0 & a_5\cos(q_5)\,\sigma_2 + a_2\cos(q_1)\cos(q_2) - a_5\sin(q_5)\,\sigma_3 - a_2\sin(q_1)\sin(q_2) \\ \sin(q_5)\,\sigma_2 + \cos(q_5)\,\sigma_3 & \sigma_1 & 0 & a_5\cos(q_5)\,\sigma_3 + a_5\sin(q_5)\,\sigma_2 + a_2\cos(q_1)\sin(q_2) + a_2\cos(q_2)\sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & d_1 + d_3 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\sigma_1 = \cos(q_5)\,\sigma_2 - \sin(q_5)\,\sigma_3$$

$$\sigma_2 = \cos(q_4)\,\sigma_4 - \sin(q_4)\,\sigma_5$$

$$\sigma_3 = \cos(q_4)\,\sigma_5 + \sin(q_4)\,\sigma_4$$

$$\sigma_4 = \cos(q_3)\,\sigma_6 - \sin(q_3)\,\sigma_7$$

$$\sigma_5 = \cos(q_3)\,\sigma_7 + \sin(q_3)\,\sigma_6$$

$$\sigma_6 = \cos(q_1)\cos(q_2) - \sin(q_1)\sin(q_2)$$

$$\sigma_7 = \cos(q_1)\sin(q_2) + \cos(q_2)\sin(q_1)$$

Conclusión

La cinemática directa nos sirve para conocer el volumen de trabajo ya que parte del hecho que se conoce el ángulo de rotación de las articulaciones, y dándole valores podemos conocer las limitaciones del robot, por otro lado, la cinemática inversa nos sirve para conocer el ángulo de las articulaciones a partir de las coordenadas del actuador final, las cuales están dadas de manera cartesiana.

Con respecto a los ejercicios, pude resolver las cinemáticas directas, sin embargo, las cinemáticas inversas se me complicaron y no pude realizar todos los programas en Python.

Bibliografía

1. RAE, Cinemática, 2021, https://dle.rae.es/cinemático
2. Craig, J. (2006). Robótica (pp. 62-120). México: Pearson Prentice Hall.