通信网理论基础

第三章　通信网的结构

第四节　　流量分配

北京邮电大学　信息与通信工程学院
授课教师：武穆清
电子信箱：wumuqing@bupt.edu.cn

课程内容介绍

第一章　引论

通信系统和通信网的种类和基本要求

第二章　通信网的组成要素

通信系统和网络的构成部件、功能、特性

第三章　通信网的结构

图论基础，最短径、最大流、最佳流算法

第四章　网内业务分析

排队论基础，业务模型与分析，网络效率

第五章　通信网的可靠性

可靠性理论，系统可靠性，网络可靠性

第三章 通信网的结构

3.1 图论基础

3.2 最短径问题

3.3 站址问题

3.4 流量分配

第四节 流量分配

3.4.1 流量优化的一般性问题

3.4.2 最大流问题

3.4.3 最佳流问题

3.4 流量分配

- 网的作用：将业务流从源端输送到宿端
  - 商品在运输网中的传递
  - 邮件在邮政网中的分发
  - 信息在通信网中的输送
  - 营养通过血管网输送到全身
  - 自来水通过上水管网从自来水厂输送到千家万户
  - 废水通过下水道网从千家万户汇聚到污水处理厂
  - 电力通过输电网从发电厂输送到工厂、机关、千家万户
- 我们的目标
  - 充分利用网络资源（包括线路和转接设备）
  - 合理分配流量
  - 使从源到宿的流量尽可能大
  - 使传输代价尽可能小

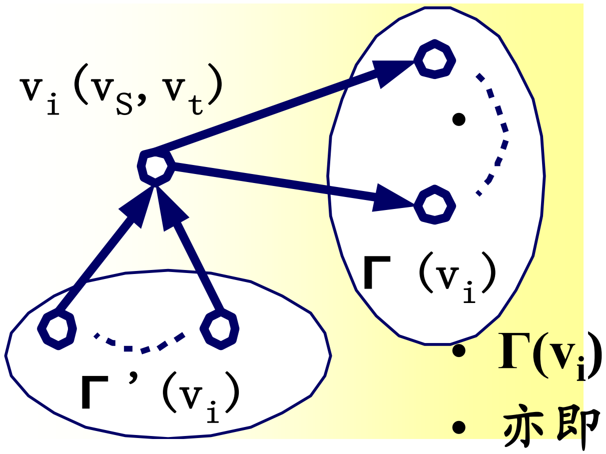
- 网内流量分配
  - 网内流量分配并不是任意的
  - 它受限于网的结构，受限于边和端的容量
  - 所以，流量分配实际上是在某些限制条件下的优化问题
  - 流量分配的优劣直接影响到网的使用效率和经济效益
    - 是网络运行的重要指标之一
- 流量
  - 单位时间内，在网络的管线中输送的货物量、电量、信息量等
  - 在通信网中，流量即为传信率
    - 单位是：比特/秒
    - 广义地说，是与边有关的某种权值
  - 通信流量具有随机性
    - 本节中，只使用平均流量或峰值流量的概念，认为是常量
    - 其随机性将在下一章讨论

3.4.1 流量优化的一般性问题

- 用有向图G＝｛V，E｝来表示一个通信网
  - 端集V＝｛$v_1, v_2 \cdots v_n$｝
  - 边是有向的
    - 用e_{ij}表示从v_i到v_j的边
  - 边集E是所有边e_{ij}的集合

- 边的容量
  - 每条边能通过的最大流量称为边的容量
    - 用c_{ij}来表示
  - 每条边上的实际流量用f_{ij}来表示
  - 若$e_{ij} \notin E$，则$c_{ij} = 0$，且$f_{ij} = 0$

- 单源单宿问题
  - 网内只有一个源端和一个宿端
  - 一组流量的安排 $\{f_{ij}\}$ 称为网内的一个流
  - 若网内的一个流，从源端到宿端有总流量F
    - 则这些f_{ij}必须满足两个限制条件：
      - △ 非负性和有限性： $0 \le f_{ij} \le c_{ij}$
      - △ 连续性：



$$\sum_{v_j \in \Gamma(v_i)} f_{ij} - \sum_{v_j \in \Gamma'(v_i)} f_{ji} = \begin{cases} F & \text{若}v_i\text{为源端}v_s \\ -F & \text{若}v_i\text{为宿端}v_t \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

- $\Gamma(v_i)$：是v_i的出向邻端集，即：$\Gamma(v_i)=\{ v_j : e_{ij} \in E\}$
- 亦即：v_i至v_j间有一条有向边，所有这样的v_j组成的集合
- $\Gamma'(v_i)$：是v_i的入向邻端集，即：$\Gamma'(v_i)=\{ v_j : e_{ji} \in E\}$
- 亦即：v_j至v_i间有一条有向边，所有这样的v_j组成的集合

- 可行流
  - 满足非负性、有限性、连续性条件的流称为可行流
  - 不同的流量分配，可以得到不同的可行流
- 两种可行流的优化问题
  - 最大流问题
    - Δ 变更可行流中各f_{ij}值，使总流量F最大
    - Δ 其实质就是，除v_s和v_t两个端外，在剩余$2m+n-2$个条件下
      - 使目标函数F取得最大的线性规划问题
  - 最佳流问题（最小费用流问题）
    - Δ 若每条边除了有容量c_{ij}的限定外，还存在费用α_{ij}的问题
      - 即单位流量所需的费用为α_{ij}
    - Δ 若给定了F，则选择路由，分配这个流量
      - 即调整f_{ij}, 使总费用φ取得最小。这就是最佳流问题
    - Δ 显然，这也是一个线性规划问题

$$\phi = \sum_{e_{ij} \in E} \alpha_{ij} f_{ij}$$

      - 目标函数就是φ
      - 若α_{ij}是f_{ij}的函数，则变成了非线性规划，求解会困难一些

– 割量

= 考虑有向图G＝{V，E}

≡ X是端集V的真子集：$X \subset V$

≡ 源端$v_s \in X$

≡ 宿端$v_t \in \overline{X} = G - X$

≡ 用$(X, \overline{X})$表示X和$\overline{X}$的界上的边集

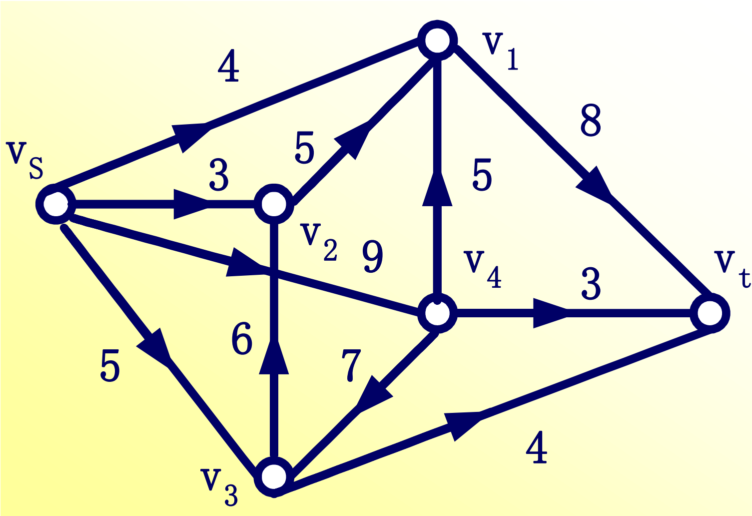
Δ 即：它是把v_s和v_t分开的一个割集

Δ 此割集的方向为从v_s到v_t

Δ 属于此割集的边可分为两类

- 前向边：与割集方向一致的边
- 后向边：与割集方向相反的边

Δ 显然，$(X, \overline{X})$中的前向边集合就能割断v_s至v_t的通路

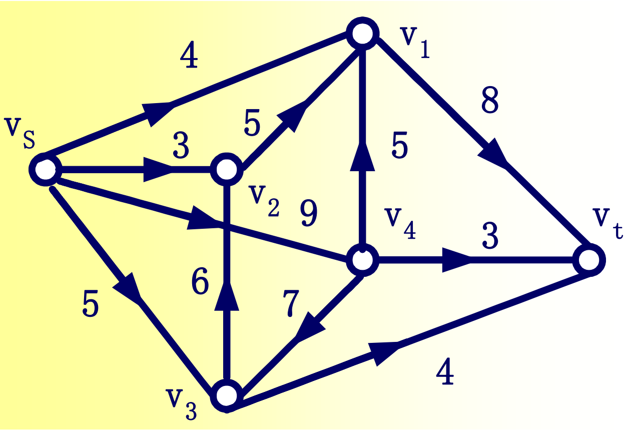


割量的定义

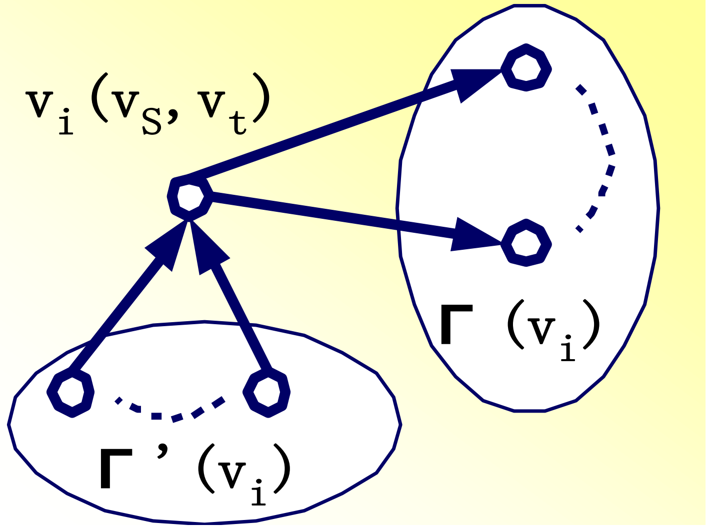
- 定义割集 $(X,\overline{X})$ 中的前向边的容量之和为它的割容量
  - 简称：割量
  - 记为：$C(X,\overline{X}) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{\substack{v_i \in X \\ v_j \in \overline{X} \\ e_{ij} \in (X,\overline{X})}} c_{ij}$
- 当给定任一可行流 $\{f_{ij}\}$ 时
  - 割集 $(X,\overline{X})$ 中的前向边上的流量之和记为 $f_+(X,\overline{X})$ 或 $f(X,\overline{X})$
  - 割集 $(X,\overline{X})$ 中的后向边上的流量之和记为 $f_-(X,\overline{X})$ 或 $f(\overline{X},X)$
    - $f_+(X,\overline{X}) = f(X,\overline{X}) = \sum_{\substack{v_i \in X \\ v_j \in \overline{X}}} f_{ij}$
    - $f_-(X,\overline{X}) = f(\overline{X},X) = \sum_{\substack{v_i \in X \\ v_j \in \overline{X}}} f_{ji}$

割量的性质

- F为源宿端间的总流量
- 性质1: $$F = f_+(X,\overline{X}) - f_-(X,\overline{X})$$
  - 或 $$F = f(X,\overline{X}) - f(\overline{X},X)$$



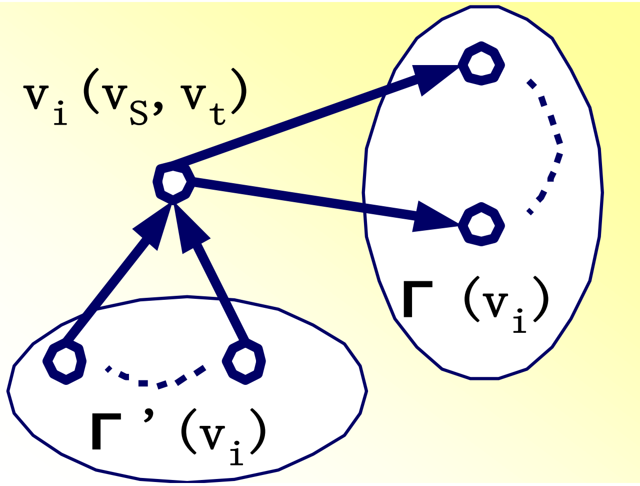
- 性质2: $$F \le C(X,\overline{X}) \quad (3\text{-}55)$$
  - 【证明】
  - 由连续性公式（3-51），对于$v_i \in X$，有:



$$\sum_{v_j \in \Gamma(v_i)} f_{ij} - \sum_{v_j \in \Gamma'(v_i)} f_{ji} = \begin{cases} F, & v_i = v_s \\ 0, & v_i \ne v_s \end{cases}$$

△下面把（3-51）中的$\Gamma(v_i)$和$\Gamma'(v_i)$改写成全部端集V

△其中，当$e_{ij} \notin E$时，我们认为$f_{ij}=0$



$$\sum_{v_j \in \Gamma(v_i)} f_{ij} - \sum_{v_j \in \Gamma'(v_i)} f_{ji} = \begin{cases} F & v_i = v_s \\ 0 & v_i \neq v_s \end{cases}$$

$$\sum_{v_j \in V} f_{ij} - \sum_{v_j \in V} f_{ji} = \begin{cases} F & v_i = v_s \\ 0 & v_i \neq v_s \end{cases}$$

△对所有X中的v_i求和，可得:

$$\sum_{v_i \in X} \left(\sum_{v_j \in V} f_{ij} - \sum_{v_j \in V} f_{ji} \right) = F$$

$$\sum_{v_i \in X} \sum_{v_j \in V} f_{ij} - \sum_{v_i \in X} \sum_{v_j \in V} f_{ji} = F$$

△ 实际上：V= $X+\overline{X}$ ，可得：

$$\sum_{v_i \in X} \sum_{v_j \in X+\overline{X}} f_{ij} - \sum_{v_i \in X} \sum_{v_j \in X+\overline{X}} f_{ji} = F$$

△ 注意到对$v_j \in X$，求和时，一项为正，一项为负，抵消为零

△ 所以可得：

$$\sum_{v_i \in X} \sum_{v_j \in \overline{X}} f_{ij} - \sum_{v_i \in X} \sum_{v_j \in \overline{X}} f_{ji} = F$$

△ 从 $f_+(X,\overline{X})$ 和 $f_-(X,\overline{X})$ 的定义可知：

- 性质一得证 $$f_+(X,\overline{X}) - f_-(X,\overline{X}) = F$$

△ 由流量的有限性公式(3-50)，可得： $f_+(X,\overline{X}) \le C(X,\overline{X})$

△ 再由流量的非负性及性质一，可得： $F \le C(X,\overline{X})$

- 性质二得证

△ （证毕）

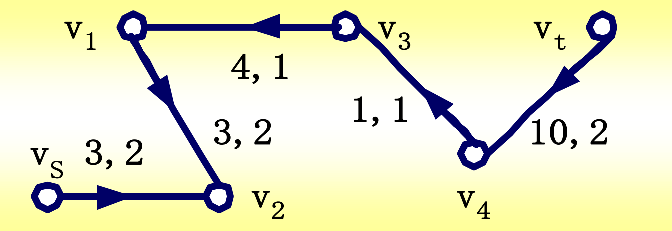
– 路

= 回顾：两端间的径

≡ 是无重复边、无重复端的边序列

≡ 对于有向图，径也是有向的

Δ 从v_s到v_t的径上，所有边都是前向的



图b

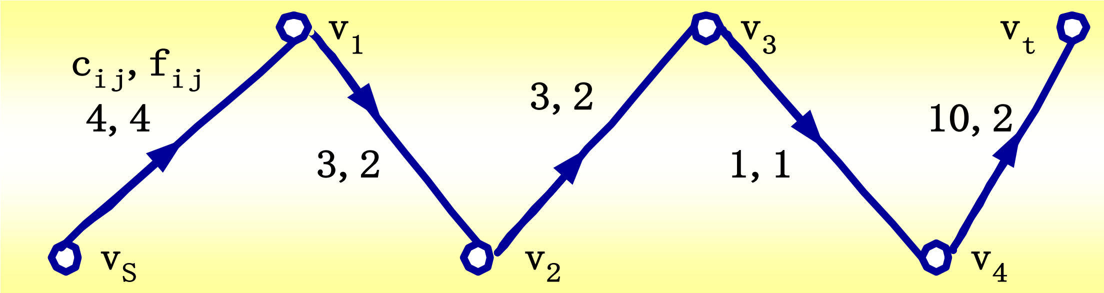
= 路的定义：与径的定义相似

≡ 只是路中的边，可以是前向的，也可以是后向的

= 路的例

≡ 如图：

≡ 图a是一条有向径



≡ 图b并不能形成从v_s至v_t的有向径

≡ 但在分析可行流的性质时，可以把图a和图b统称为路

Δ 可见，路中的边，可以是前向的，也可以是后向的

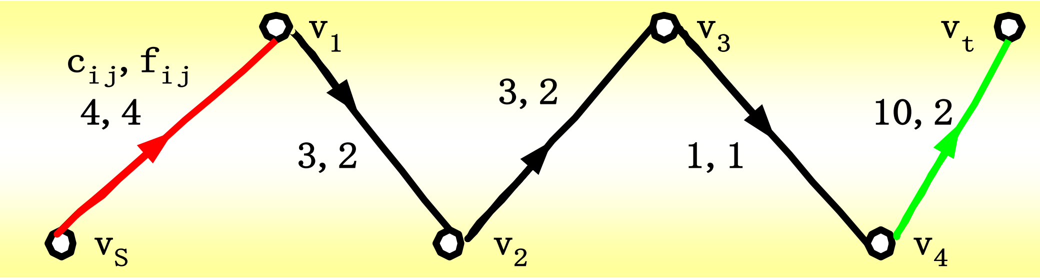
图a

图中边上的数字：

前一个是容量c_{ij}

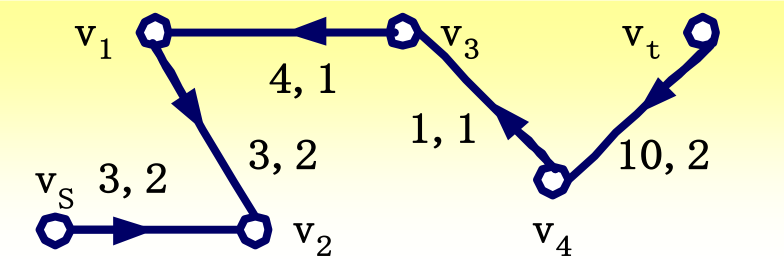
后一个是流量f_{ij}

- 饱和边与非饱和边
  - 对前向边而言
  - $f_{ij} = c_{ij}$的前向边称为<u>饱和边</u>
  - $f_{ij} < c_{ij}$的前向边称为<u>非饱和边</u>
  - 如前例图a:
    - Δ 从v_s到v_1的边e_{s1}是饱和的前向边
    - Δ 从v_4到v_t的边e_{4t}是非饱和的前向边



图a

- 零流量与非零流量
  - 这是对后向边而言的
  - 如前例图b
    - Δ 从v_1到v_2的边e_{12}为非零流量的后向边



图b

– 可增流量的路

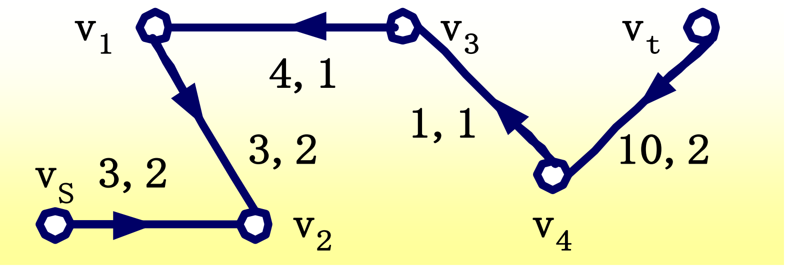
= 定义

≡ 若从v_s至v_t的一条路P中

≡ 所有前向边都未饱和

≡ 所有后向边都是非零流量的

≡ 则这条路称为可增流路



可增流路例

= 性质:

≡ 在可增流路上，所有前向边上的流量均可增加

∆ 但不破坏流量的有限性

≡ 在可增流路上，所有后向边上的流量均可减少

∆ 但不破坏流量的非负性

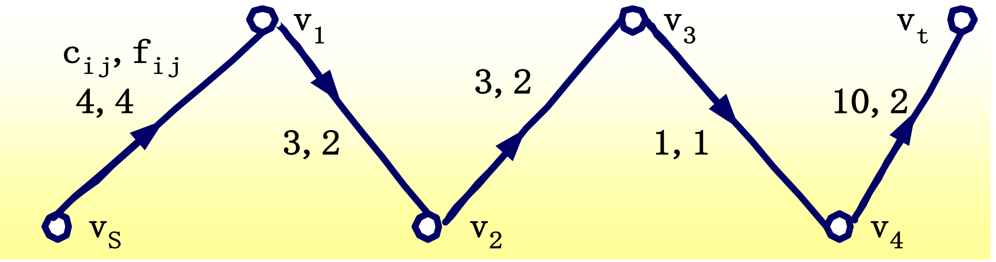
≡ 增流值: 为路中所有边上能增流（后向边上能减流）的最小值，即:

$$\delta = \min\left\{\min_{e_{ij}\in P}(c_{ij}-f_{ij}), \min_{e_{ji}\in P} f_{ji}\right\} \quad (3\text{-}56)$$

∆ 其中: e_{ij}代表前向边

• e_{ji}代表后向边

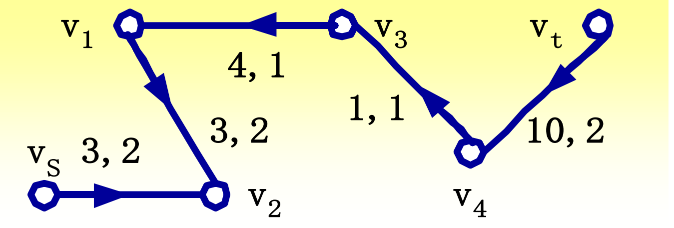
- 若在一条路P中，各边上均可增流δ
  - 但不破坏流量的非负性、有限性和连续性
  - 则可得到一个新的可行流
  - 它使源宿间的流量增大
  - 如前例:
    - 图b为可增流路
    - 图a已不能增流



图a

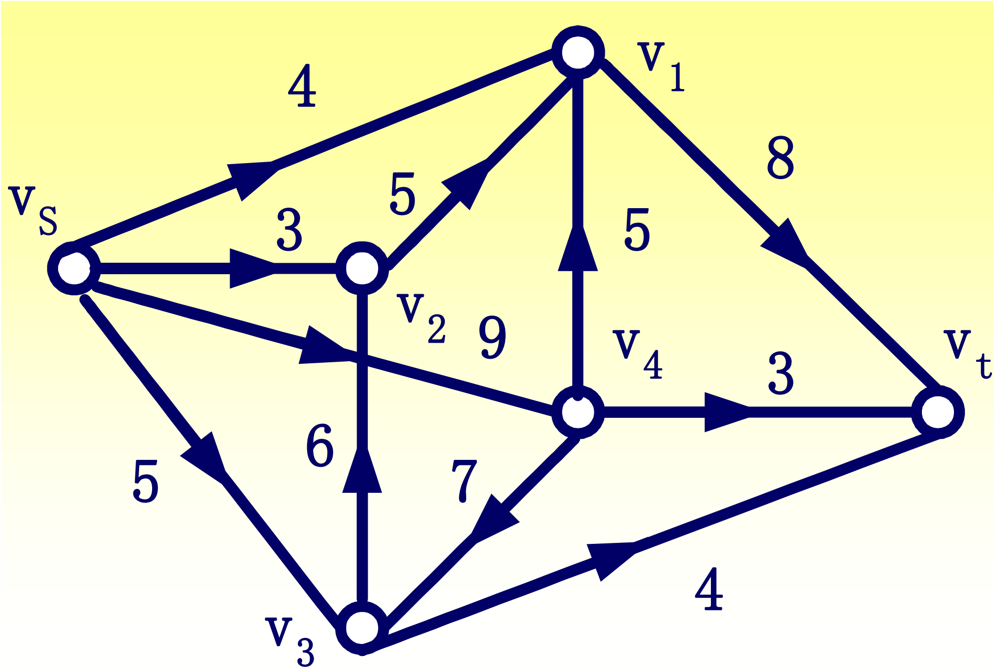
- 源宿间最大流量的充分必要条件
  - 条件1: 可行流 $\{f_{ij}\}$ 已使源宿间的流量达到最大值
  - 条件2:
    - 从v_s到v_t的每一条路上
    - 都至少有一个饱和的前向边或一个零流的后向边
    - 即v_s至v_t间不存在一条可增流的路
  - 二者互为充分必要条件

图b



– 最大流量－最小割量定理

- ≡ 当源宿端的流量达到最大时
- ≡ 每个割集 $(X,\overline{X})$ 的前向流量 $f_+(X,\overline{X})$ 减去后向流量 $f_-(X,\overline{X})$ 都等于最大流量F_{max}
- ≡ 并且总存在这样一个割集，其每条前向边都是饱和的、后向边都是零流量
- ≡ 其割量在各个割集中达到最小值，且也等于F_{max}
- ≡ 简言之，最大流量等于最小割容量



– 最大流量－最小割量定理(2)

= 证明：

≡令F_{max}是源宿端间所容许的最大流量

Δ（X_0，$\overline{X_0}$）表示v_s与v_t间具有最小割量的割集

≡由割量的性质2，即（3-55）式知，必有：

$$F_{max} \leqslant C（X_0，\overline{X_0}） \tag{3-57}$$

≡设可行流｛f_{ij}｝已使源宿间的流量达到最大值

≡从源端开始，做割集X，令X={ v_s }单端集，按下述条件逐步扩大X

Δ若$v_a \in X$，$v_b \in \overline{X}$，v_a和v_b间有边

Δ当满足$f_{ab} < c_{ab}$ 或 $f_{ba} > 0$时

Δ则把v_b并入X

- 证明：(2)
  - 这样扩大，一直到X为X '，此时已无端可并入
    - 则v_t必不在X '中，而是在$\overline{X'}$中
    - 否则，v_s至v_t间必有可增流路
      - 这与 {f_{ij}} 已使源宿间的流量达到最大值相矛盾
  - 据X的扩大条件可知，若$v_i \in X'$，$v_j \in \overline{X'}$，
    - 则$(X', \overline{X'})$中的前向边上必有$f_{ij} = c_{ij}$
    - 后向边上必有$f_{ji} = 0$
  - 由割量的性质1，即(3-54)式，可得:

$$F_{\max} = f_+(X', \overline{X'}) - f_-(X', \overline{X'}) = \sum_{\substack{v_i \in X' \\ v_j \in \overline{X'}}} f_{ij} - \sum_{\substack{v_i \in \overline{X'} \\ v_j \in X'}} f_{ji} = \sum_{\substack{v_i \in X' \\ v_j \in \overline{X'}}} c_{ij} \tag{3-58}$$

$$= C(X', \overline{X'}) \geq C(X_0, \overline{X_0})$$

  - 由(3-57)式和(3-58)式，可得：$F_{max} = C(X_0, \overline{X_0})$
  - 定理得证

– 标志算法（M算法）

- 算法目的：求最大流量
- 算法思路：从一个可行流出发
  - 搜索每一条从源到宿的路，是否可增流
  - 每找到一条可增流的路，就进行增流，总流量得以扩大
  - 直至不存在可增流路
  - 即得到了源宿端间的最大流量值和相应的流量分配
  - 起始：当所有边上的流量都是零时，这个流必为可行流
    - 所以，通常就用全零流作为算法的起始
  - 可采用标志各个端的办法来寻找可增流路
    - 从源端v_s开始，逐个端作标志
    - 有可能增流时，就在该端作一个增流量及路的走向的标志
    - 不能增流时，就不标
    - 当v_t可标时，就找到一条可增流路
    - 当v_t不可标时，就已无可增流的路，算法终止

= 算法步骤

- ≡ M_0：初始化，令 $f_{ij} = 0$，对所有 i, j
- ≡ M_1：标源端为(+ ，s，∞)，作为已标未查端
- ≡ M_2：
  - Δ 查已标未查端 v_i
    - 首先：标出 v_i 的所有邻端 v_j
    - 若 $e_{ij} \in E$，$c_{ij} > f_{ij}$，则标 v_j (+ ，i，ε_j)
    - + ：表示可增流；i：表示与i端间可增流，
    - ε_j 是可增流量：$\varepsilon_j = \min（c_{ij} - f_{ij}，\varepsilon_i）$
    - ε_i 是 v_i 中的已标值
    - 若 $e_{ji} \in E$，$f_{ji} > 0$，则标 v_j (– ，i，ε_j)
    - – ：表示可减流；i：表示与i端间可减流，
    - ε_j 是可增流量：$\varepsilon_j = \min（f_{ji}，\varepsilon_i）$
    - 完成以上标示，则 v_j 为已标未查
    - 若不满足以上条件，则 v_j 不标，表示已无可增流路通过 v_j
  - Δ 若 v_i 的所有邻端都已查完，有的标了值，有的则不标
    - 则称 v_i 为已查

≡ M_3:

△ 若v_t已标，则沿可增流路增流ε_t

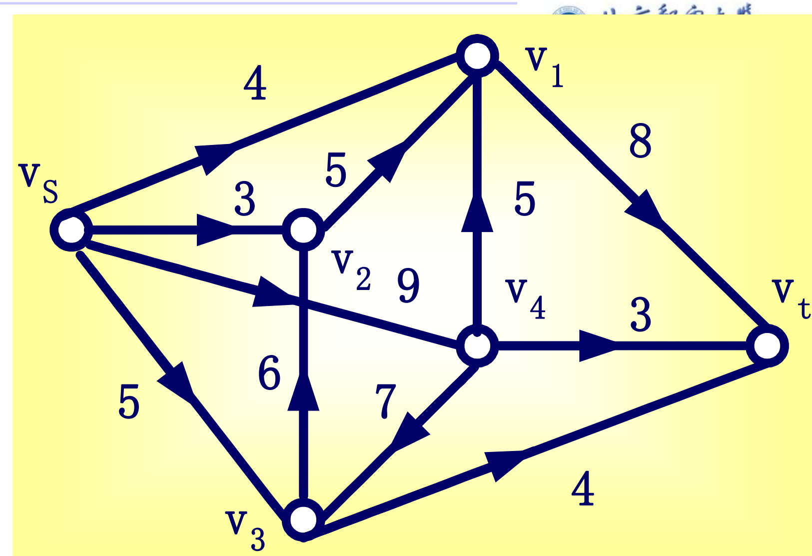
- 返回M_1

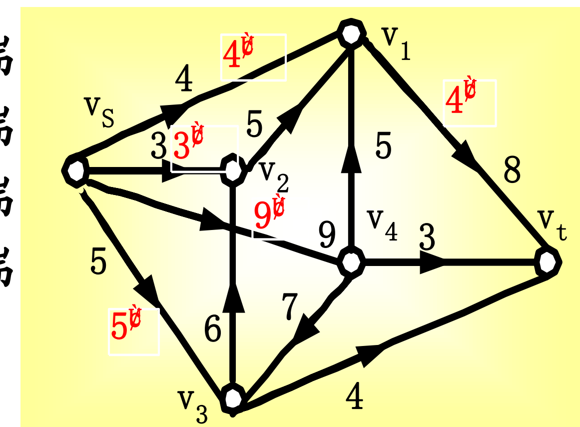
△ 若v_t不标

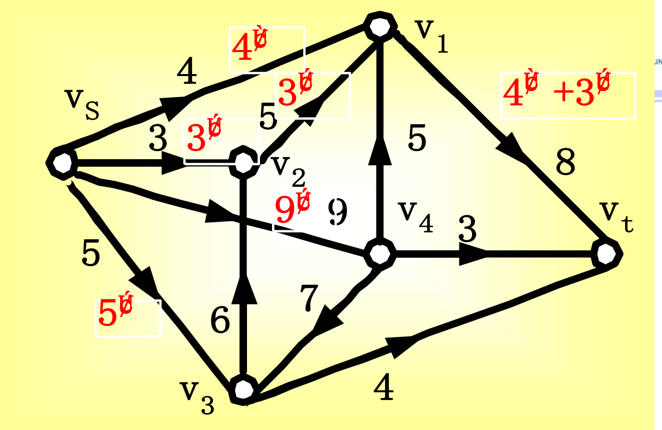
- 则算法终止

M算法举例

- 如图：
- M_0：初始化，令$f_{ij} = 0$
- （第1循环）
- M_1：标源端为$v_s(+，s，\infty)$
- M_2：
  - △ 查v_s：　　　　　ε_1
    - 标$v_1(+，s，4)$ 此时v_1为已标未查端
    - 标$v_2(+，s，3)$ 此时v_2为已标未查端
    - 标$v_3(+，s，5)$ 此时v_3为已标未查端
    - 标$v_4(+，s，9)$ 此时v_4为已标未查端
    - v_s已无其它邻端，∴v_s已查
  - △ 查v_1：　　　　　ε_t
    - 标$v_t(+，1，4)$　∵$\varepsilon_1 = 4 < c_{1t} - f_{1t} = 8 - 0 = 8$　∴$\varepsilon_t = 4$
    - 出现已标v_t，说明已有一条路径抵达终点v_t，即 $v_s - v_1 - v_t$
    - 它是可增流路，增流量$\Delta f_1 = \varepsilon_t = 4$
    - 返回M_1







≡ （第2循环）

≡ M_1: 重标源端 $v_s(+, s, \infty)$

≡ M_2:

△ 查 v_s:

- 对于 v_1 端，$\because f_{s1} = 4,\ c_{s1} = 4,\ c_{s1} - f_{s1} = 0$
- $\therefore$ 已无富裕容量，则不再标 v_1
- 标 $v_2(+, s, 3)$: $\because \varepsilon_s = \infty$，$c_{s2} - f_{s2} = 3 - 0 = 3$，$\therefore$ 取 $\varepsilon_2 = 3$
- 标 $v_3(+, s, 5)$: $\because \varepsilon_s = \infty$，$c_{s3} - f_{s3} = 5 - 0 = 5$，$\therefore$ 取 $\varepsilon_3 = 5$
- 标 $v_4(+, s, 9)$: $\because \varepsilon_s = \infty$，$c_{s4} - f_{s4} = 9 - 0 = 9$，$\therefore$ 取 $\varepsilon_4 = 9$
- v_s 已查

△ 查 v_2: ε_1

- 标 $v_1(+, 2, 3)$: $\because \varepsilon_2 = 3$，$c_{21} - f_{21} = 5 - 0 = 5$，$\therefore$ 取 $\varepsilon_1 = 3$
- 已无其它正向邻端 $\therefore v_2$ 已查

△ 查 v_1: ε_t

- 标 $v_t(+, 1, 3)$: $\because \varepsilon_1 = 3$，$c_{1t} - f_{1t} = 8 - 4 = 4$，$\therefore$ 取 $\varepsilon_t = 3$
- 增流：$f_{s2} = 3$，$f_{21} = 3$，$f_{1t} = 4 + 3 = 7$
- 返回 M_1

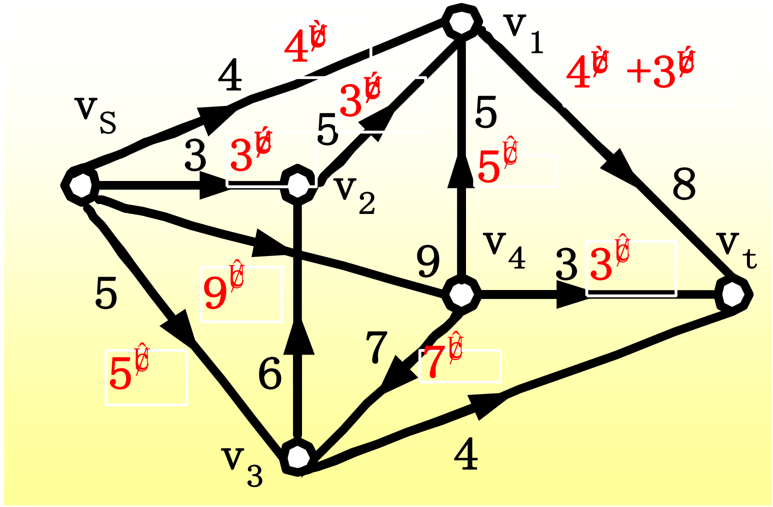
≡（第3循环）

≡ M_1：重标源端 $v_s\,(+，s，\infty)$

≡ M_2：

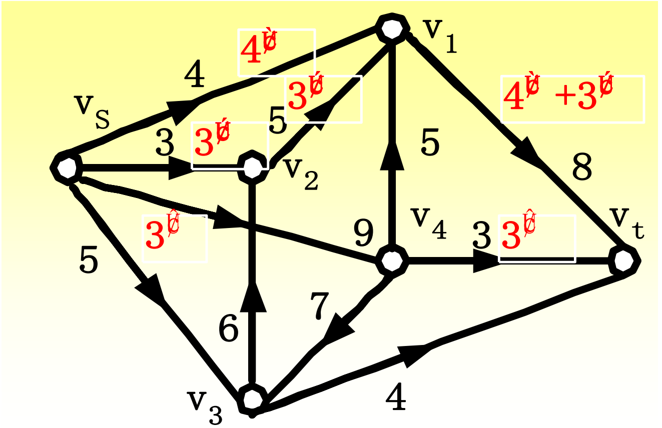
△ 查 v_s：

- 标 $v_3\,(+，s，5)$
- 标 $v_4\,(+，s，9)$
- v_s已查



△ 查 v_4：　　　　ε_1

- 标 $v_1\,(+,4,5)$：$\because \varepsilon_4=9$，$c_{41}-f_{41}=5-0=5$，$\therefore$取$\varepsilon_1=5$
- 标 $v_3\,(+,4,7)$：$\because \varepsilon_4=9$，$c_{43}-f_{43}=7-0=7$，$\therefore$取$\varepsilon_3=7$
- 标 $v_t\,(+,4,3)$：$\because \varepsilon_4=9$，$c_{4t}-f_{4t}=3-0=3$，$\therefore$取$\varepsilon_t=3$
- 增流：$f_{s4}=3$，$f_{4t}=3$
- 返回 M_1



≡ （第4循环）

≡ M_1： 重标源端v_s (+， s， ∞)

≡ M_2:

△ 查v_s：

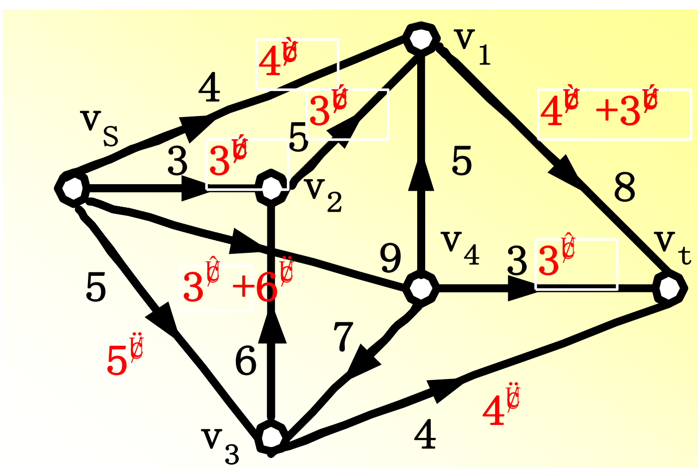
- 标v_3 (+ , s, 5): ∵$\varepsilon_s = \infty$，$c_{s3} - f_{s3} = 5 - 0 = 5$，∴取$\varepsilon_3 = 5$
- 标v_4 (+ , s, 6): ∵$\varepsilon_s = \infty$，$c_{s4} - f_{s4} = 9 - 3 = 6$，∴取$\varepsilon_4 = 6$
- v_s已查

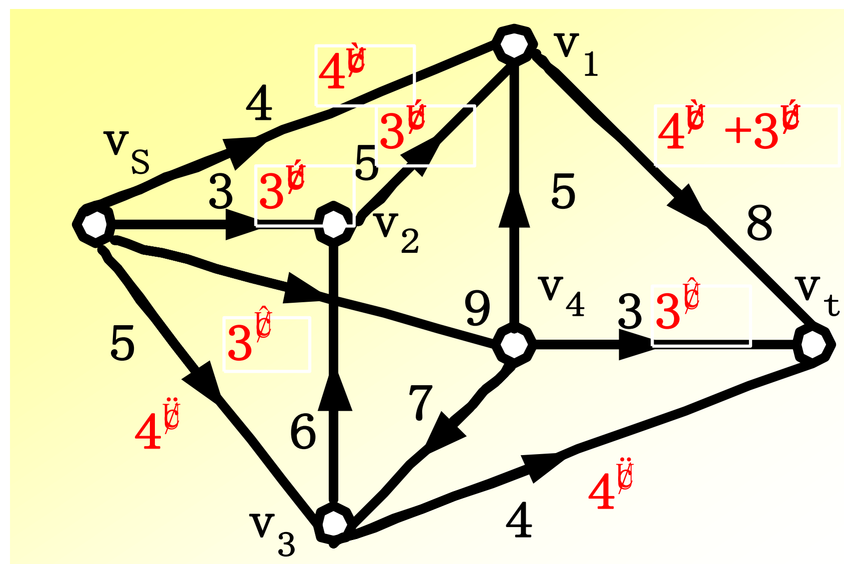
△ 查v_3：

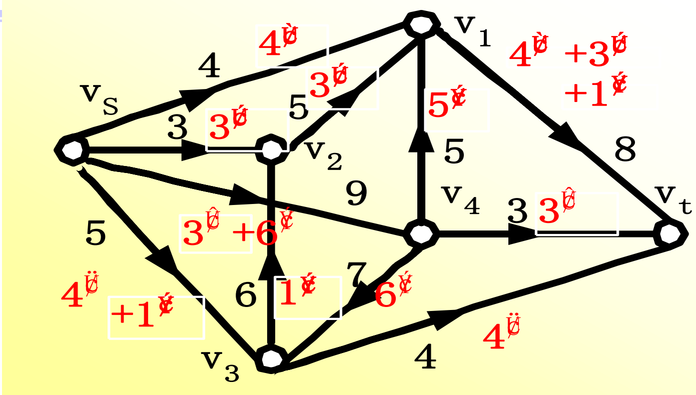
- 标v_t (+ , 3, 4): ∵$\varepsilon_3 = 5$，$c_{3t} - f_{3t} = 4 - 0 = 4$，∴取$\varepsilon_t = 4$

△ 增流： $f_{s3} = 4$ $f_{3t} = 4$

△ 返回M_1







≡（第5循环）

≡M_1：重标源端$v_s(+, s, \infty)$

≡M_2：

Δ 查v_s：

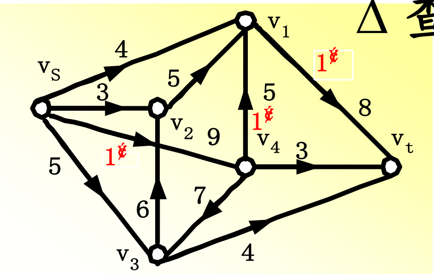
- 标$v_3(+, s, 1)$：∵$\varepsilon_s=\infty$，$c_{s3}-f_{s3}=5-4=1$，∴取$\varepsilon_3=1$
- 标$v_4(+, s, 6)$：∵$\varepsilon_s=\infty$，$c_{s4}-f_{s4}=9-3=6$，∴取$\varepsilon_4=6$
- v_s已查

Δ 查v_3：

- 标$v_2(+, 3, 1)$：∵$\varepsilon_3=1$，$c_{32}-f_{32}=6-0=6$，∴取$\varepsilon_2=1$
- v_3已查

Δ 查v_4：

- 标$v_1(+, 4, 5)$：∵$\varepsilon_4=6$，$c_{41}-f_{41}=5-0=5$，∴取$\varepsilon_1=5$
- 标$v_3(+, 4, 6)$：∵$\varepsilon_4=6$，$c_{43}-f_{43}=7-0=7$，∴取$\varepsilon_3=6$
- v_4已查



Δ 查v_1：

- 标$v_t(+, 1, 1)$：∵$\varepsilon_1=5$，$c_{1t}-f_{1t}=8-7=1$，∴取$\varepsilon_t=1$
- 增流：$f_{s4}=3+1=4$，$f_{41}=1$，$f_{1t}=4+3+1=8$
- 返回M_1

≡（第6循环）

≡ M_1：重标源端 v_s (+， s， ∞)

≡ M_2：

△ 查 v_s：

- 标 v_3 (+, s, 1)： ∵ $\varepsilon_s = \infty$， $c_{s3} - f_{s3} = 5 - 4 = 1$， ∴取 $\varepsilon_3 = 1$
- 标 v_4 (+, s, 5)： ∵ $\varepsilon_s = \infty$， $c_{s4} - f_{s4} = 9 - 4 = 5$， ∴取 $\varepsilon_4 = 5$
- v_s 已查

△ 查 v_3：

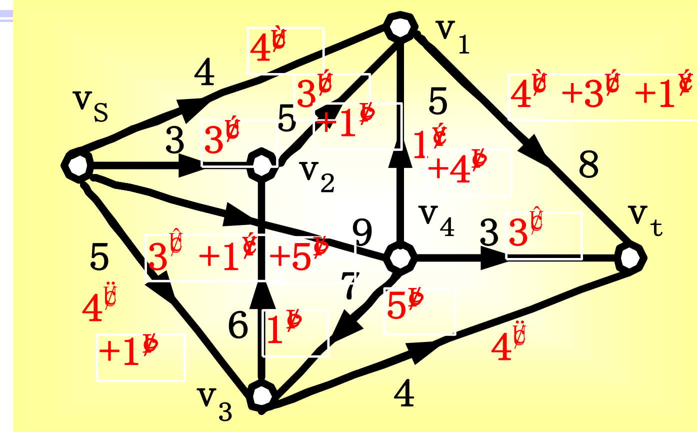
- 标 v_2 (+, 3, 1)： ∵ $\varepsilon_3 = 1$， $c_{32} - f_{32} = 6 - 0 = 6$， ∴取 $\varepsilon_2 = 1$
- v_3 已查

△ 查 v_4：

- 标 v_1 (+, 4, 4)： ∵ $\varepsilon_4 = 5$， $c_{41} - f_{41} = 5 - 1 = 4$， ∴取 $\varepsilon_1 = 4$
- 标 v_3 (+, 4, 5)： ∵ $\varepsilon_4 = 5$， $c_{43} - f_{43} = 7 - 0 = 7$， ∴取 $\varepsilon_3 = 5$
- v_4 已查

△ 查 v_2：

- 标 v_1 (+, 2, 1)： ∵ $\varepsilon_2 = 1$， $c_{21} - f_{21} = 5 - 3 = 2$， ∴取 $\varepsilon_1 = 1$
- v_2 已查



≡（第6循环）（2）

≡ M_2： （续）

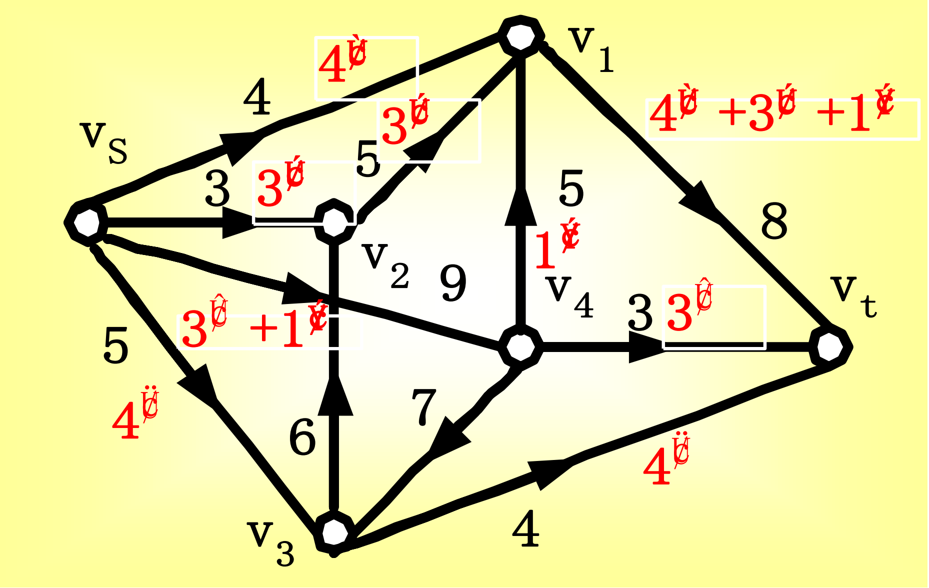
△ 查v_1：

- 无端可标

△ 查v_3：

- v_3已被查，经v_2至v_1后，v_1无端可标

△ 至此，终止。



≡ 最大可行流为：

△ $f_{s1} = 4$，$f_{s2} = 3$，$f_{s3} = 4$，$f_{s4} = 4$

△ $f_{21} = 3$，$f_{41} = 1$

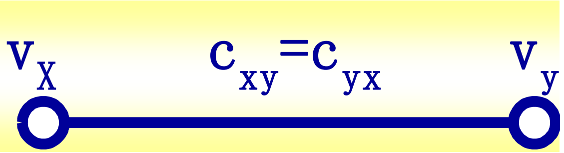
△ $f_{1t} = 8$，$f_{3t} = 4$，$f_{4t} = 3$

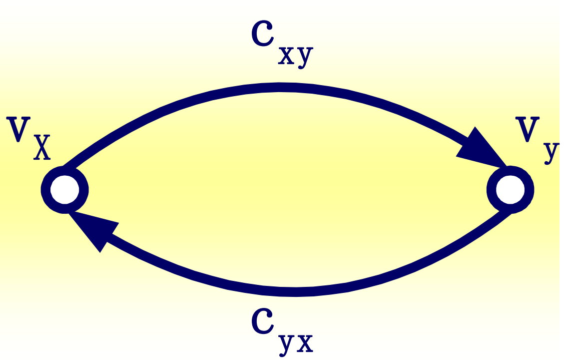
≡ 最大总流量：

△ $F_{tmax} = f_{1t} + f_{3t} + f_{4t} = 15$

$= f_{s1} + f_{s2} + f_{s3} + f_{s4} = 15$

- M算法的结果必为最佳解
  - 但由前面例题中的算法过程可知
  - 选择已标未查端的次序是任意的
  - 不同的次序可能得到不同的可行流
  - 所以，结果并不是唯一的
  - 但最大流的值则肯定是一样的





- M算法的用途推广
  - 无向图情况
    - 无向图通常是指双工通路
      - 即：边容量既是正向容量，也是反向容量
    - 这时，可以把一条无向边换成两条有向边（如图）
      - 一条是正向的有向边
      - 另一条是反向的有向边
    - 然后就可以按有向图计算了

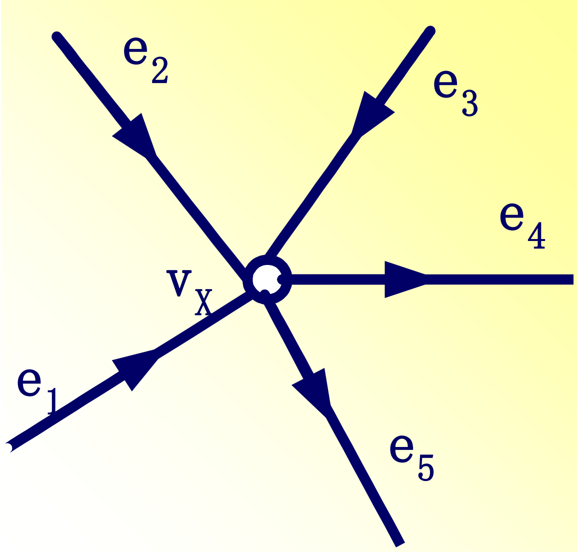
≡ 端容量问题

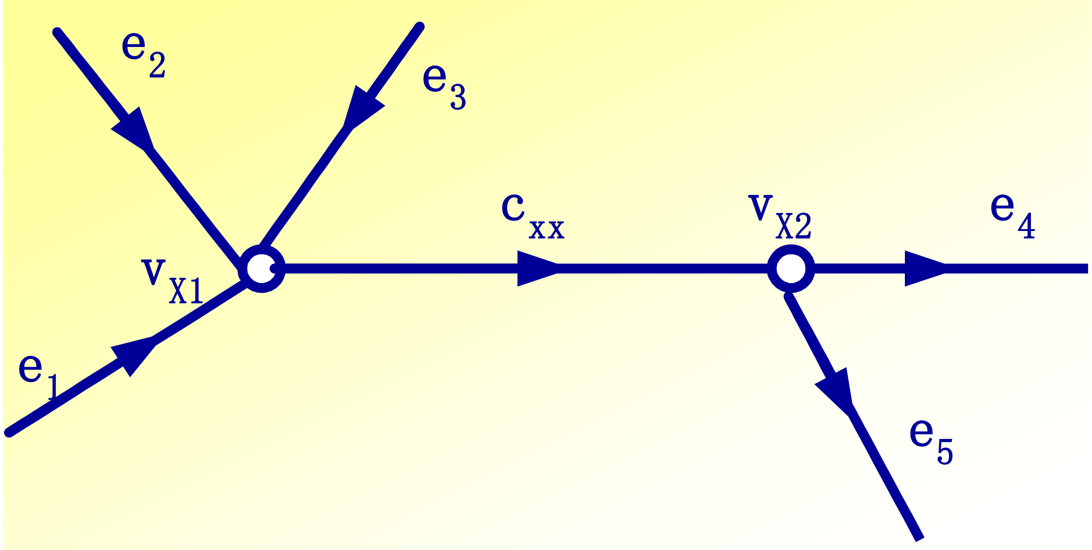
△ 当端的转接能力有限制时

- 可把该端分成两个端
- 一个端与所有射入边相联结
- 另一个与所有射出边相联结
- 这两个端之间加一条有向边，边的容量即为端的转接容量

△ 如图：

- 其中： Cxx 就是该端的最大转接容量





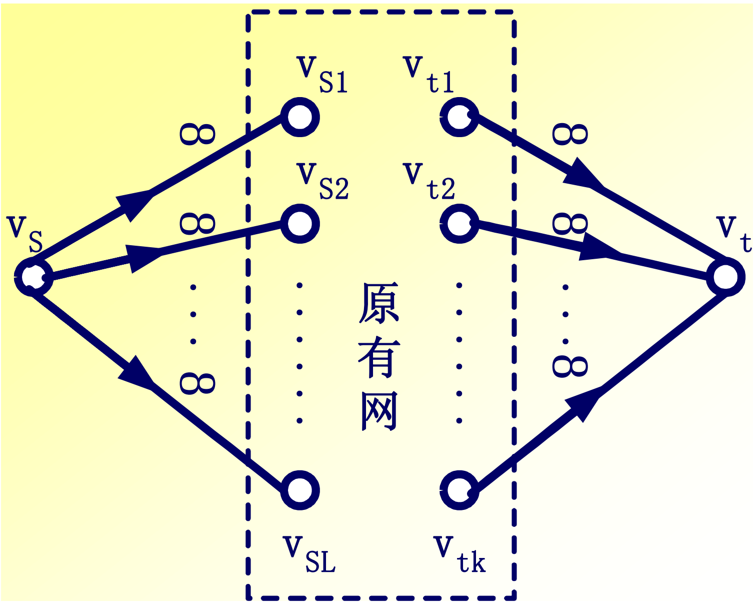
≡ 多源多宿情况

Δ 目标:

- 使多源至多宿的流量总和取得最大
- 而不计较各源宿间流量性质的差别

Δ 则可采用下述办法

- 虚设总源端v_s和总宿端v_t
- 如图：作转换
- 将v_s与网内所有源端用容量为∞的有向边相联
- 将v_t与网内所有宿端用容量为∞的有向边相联
- 于是，将多源多宿问题转变成了单源单宿问题
- 则可以使用前面介绍的M算法，使从v_s至v_t的流量最大
- 也就得到了多源多宿总流量最大的可行流



≡求结合度

Δ在M算法中，如置$c_{ij}=1$（即将所有边容量置1）

- 这样，当一个流占用了一条边后，
- 就不会有其它边再占用此边

Δ于是，求出的总流量就是 源宿间

- 不共边的有向径的数目
- 或 边分离的有向径的数目

Δ即（图的）网的结合度

Δ亦即：去掉多少条边可使网络分开，使源宿间断开。

3.4.3 最佳流问题

- 问题的提出
  - 如果每条边e_{ij}都有各自的费用系数α_{ij}
    - 也称费率：在e_{ij}边上传送单位流量需付出的费用
    - 那么当总流量F_{st}相同时
    - 各种可行流的费用可以不同
    - 此时如何寻找满足流量要求的、最小费用的可行流
    - 例如:
      - Δ 传送某一信息流时，寻找最小费用路由
  - 目的：达到最佳的流量分配

– 负价环算法（N算法）

= 已知条件:

≡给定网络结构G（V，E）

≡给定边容量c_{ij}

≡给定边费率α_{ij}（费用/单位流量）

≡给定总流量需求F_{st}

= 待求

≡如何分配流量，可使费用 $\phi=\sum_{i,j}\alpha_{ij}\cdot f_{ij}$ 最小

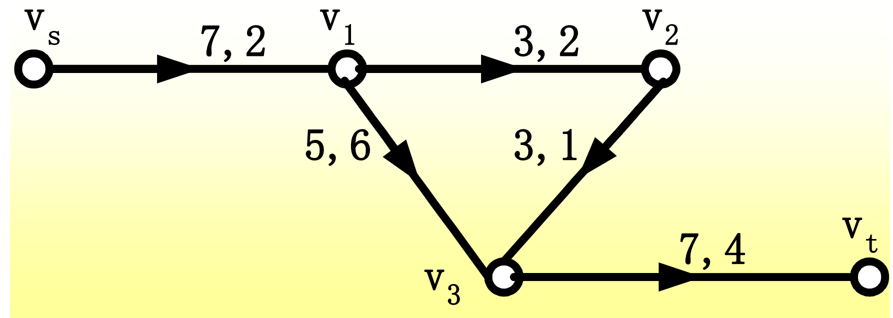
Δ若α_{ij}为常数，则此问题为线性问题

Δ若α_{ij}为变量，则此问题为复杂问题

- 可行流
  - 在总流量不变的情况下
  - 图中通常会有一组可行流
  - 只要源宿间有两条以上的径
  - 于是就有改变流量分配的可能性
  - 这种改变通常会使总费用发生变化
  - 我们的目的：如何找出总费用最小的那条径
  - 方法：负价环算法（N算法）

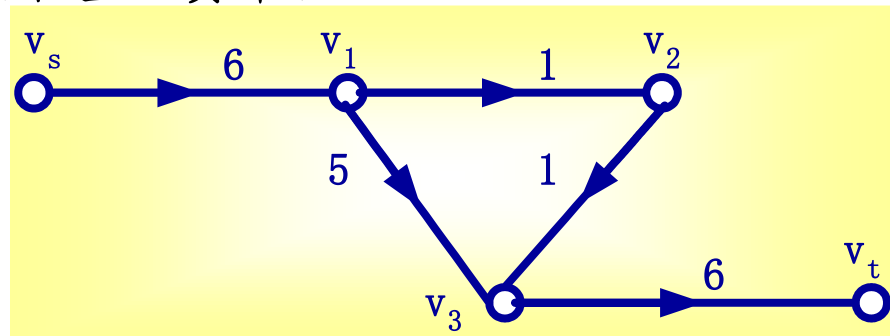
负价环算法（N算法）中的基本概念

图a:



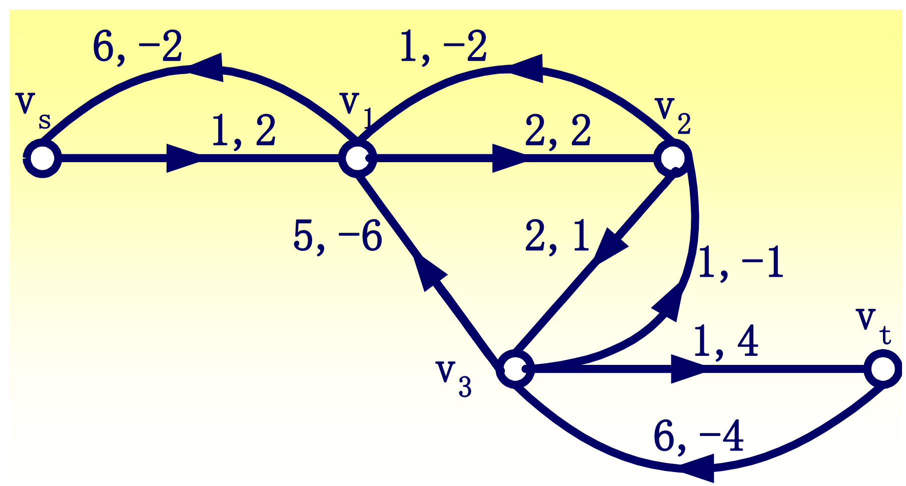
- v_s到v_t间有两条径
  - $v_s - v_1 - v_2 - v_3 - v_t$
  - $v_s - v_1 - v_3 - v_t$
- 边上的数字为：c_{ij}，α_{ij}（容量，费率）

图b:



- 是图a的一组可行流
- 总流量$F_{st} = 6$
- 总费用$c_{ost} = 69 = 6 \times 2 + 1 \times 2 + 1 \times 1 + 5 \times 6 + 6 \times 4$

图c:

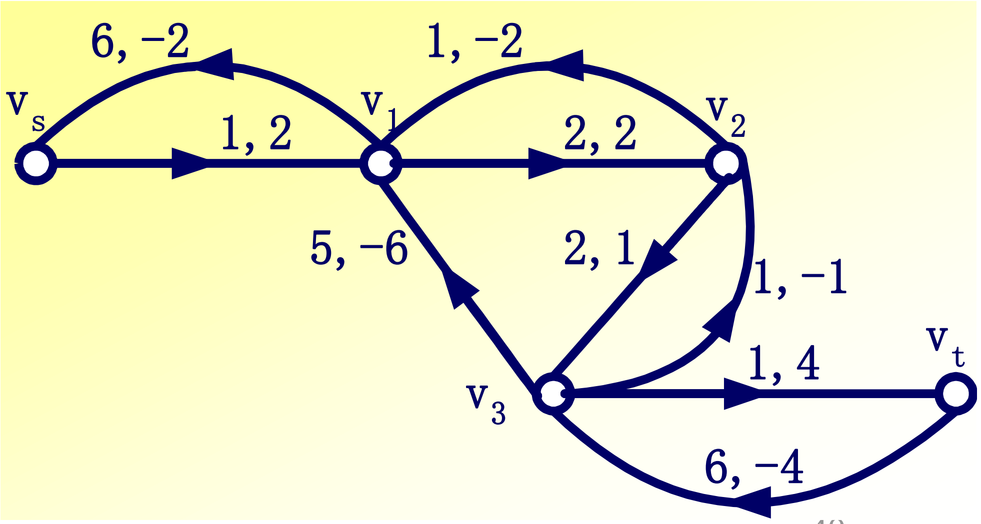


- 给出了各边上流量改变的可能性
- 以及改变单位流量所需的费用
- 图c称为对于图b中可行流而得到的补图
- 以e_{12}为例

≡ 图c:

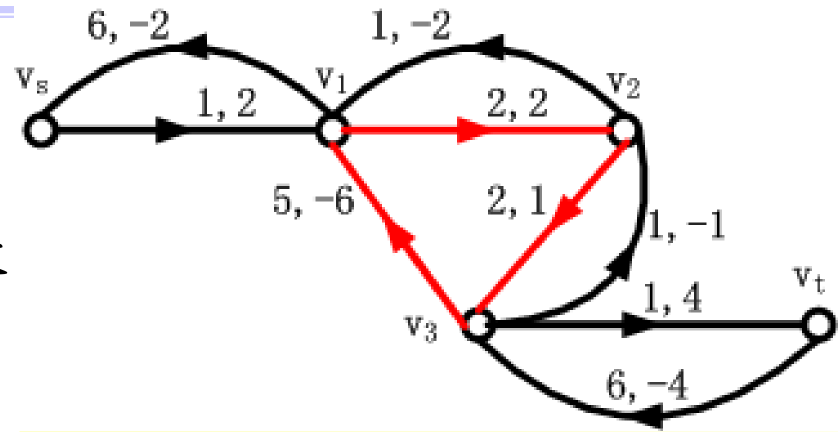
Δ 以e_{12}为例

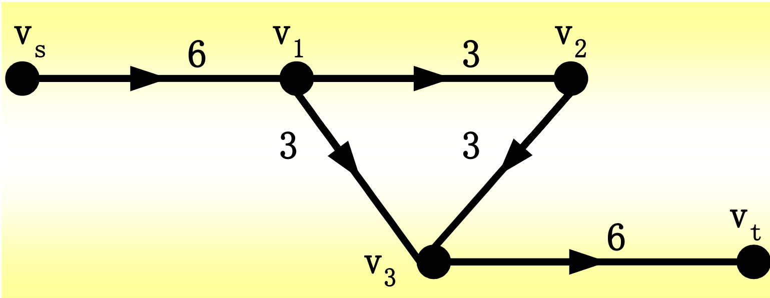
- 它是非饱和边，∵其容量c_{12}＝3，而流量f_{12}＝1
- 流量尚可增加：$\Delta f_{12} = c_{12} - f_{12} = 3 - 1 = 2$
- 增加单位流量所需费用依然是：+2
- 另一方面，流量也可减小$f_{12} = 1$，不致破坏非负性
- 减少单位流量而减少的费用为： -2
- 这两种可能改变的流量用补图中的有向边来表示
- 有向边上前面一个数字代表可增流量
- 有向边上后面一个数字代表单位流量所需的费用



≡ 负价环

- Δ 若补图上，存在一个有向环
  - 环上各边的α_{ij}之和是负数
  - 则称此环为负价环
- Δ 沿负价环方向增流
  - 不会破坏环上各端流量的连续性
  - 也不破坏各边的非负性和有限性
  - 结果会得到一个总流量F_{st}不变的可行流
  - 其总费用会有所下降
- Δ 前例图c中
  - （$v_1 - v_2 - v_3 - v_1$）环是一个负价环
  - 此负价环的单位流量费用是：$2 + 1 - 6 = -3$
  - 取环中容量最小值作为可增流的量，即2
  - 若增流2，则可节省费用：$-3 \times 2 = -6$
  - 把总费用F_{st}从69可降至63
  - 新的可行流如图d所示：





≡结论

Δ降低任一可行流的总费用，可归结为

- 在该流的补图上找负价环

Δ当一个可行流的补图上不存在负价环时

- 此流就是最佳流，或最小费用流

Δ若在补图上存在零价环

- 则在这环上增流，可得到总费用相同的另一组可行流
- 亦即：最佳流可以有几种，但总费用是一样的

负价环算法（N算法）步骤

- **N_0：在图上找任一满足总流量F_{st}的可行流**
  - Δ 最好是，尽可能安排出最佳流量
  - Δ 这样可以省略几步作补图的过程
- **N_1：作补图**
  - Δ 对所有边e_{ij}
    - 若 $c_{ij} > f_{ij}$，即未达最大容量
    - 则作边e_{ij}，标容量$c_{ij}' = c_{ij} - f_{ij}$，费用为$\alpha_{ij}$
    - 若 $f_{ij} > 0$，则作边e_{ji}'，标容量$c_{ji}' = f_{ij}$，费用为$-\alpha_{ij}$
- **N_2：在补图上找负价环**
  - Δ 若无负价环，则算法终止
  - Δ 若有负价环，则沿负价环C方向增流
    - 增流的量：$\delta = \min[c_{ij}' : e_{ij} \in C\text{环}]$
    - 修改原图的边流量，得到新的可行流
    - 返回N_1

= 负价环算法（N算法）举例

≡ 如图a

∆ 要求$F_{st} = 9$

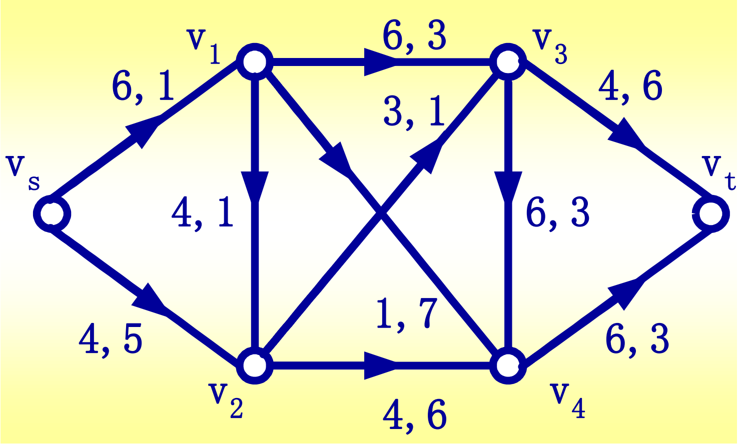
∆ 求：最佳流

≡ N_0：在图上找任一总流量$F_{st} = 9$的可行流

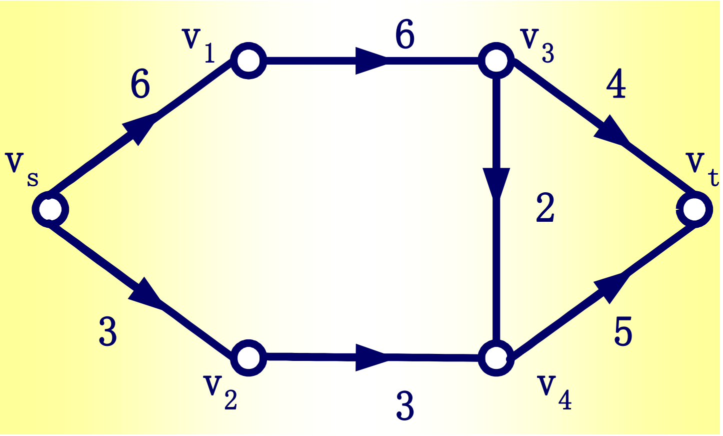
∆ 如图b

- 在费率小的链路上放尽量大的流量

∆ 总费用 $= 6 \times 1 + 6 \times 3 + 4 \times 6 + 3 \times 5 + 3 \times 6 + 5 \times 3 + 2 \times 3 = 102$



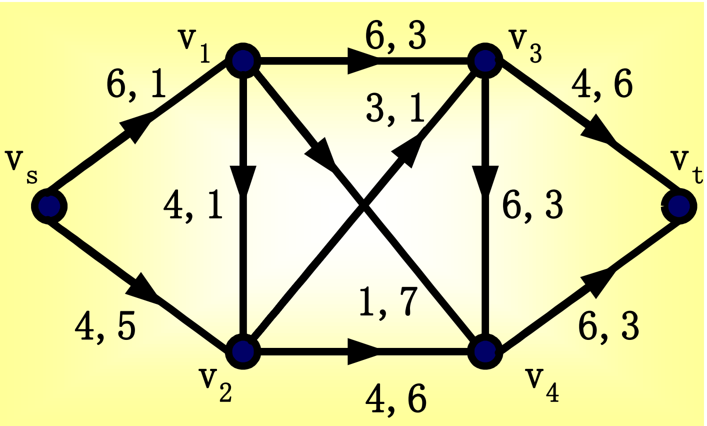
图a

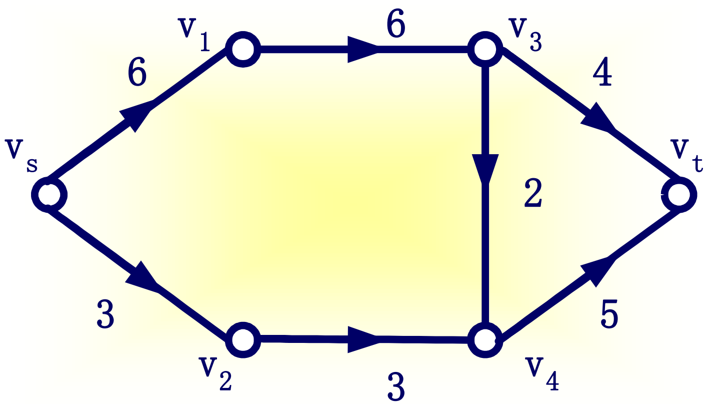


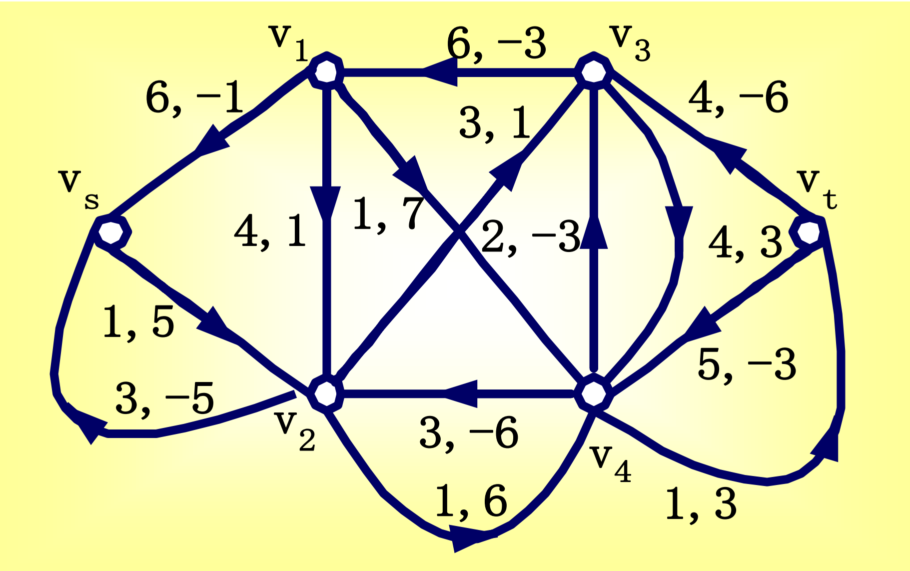
图b

$\equiv N_1$：作补图

- Δ 若 $c_{ij} > f_{ij}$，即未达最大容量
  - 则作边 e_{ij}，
  - 标容量 $c_{ij}' = c_{ij} - f_{ij}$，
  - 标费用 α_{ij}
- Δ 若 $f_{ij} > 0$，即只要边上有流量
  - 则作边 e_{ji}' ，
  - 标容量 $c_{ji}' = f_{ij}$，
  - 标费用 $-\alpha_{ij}$

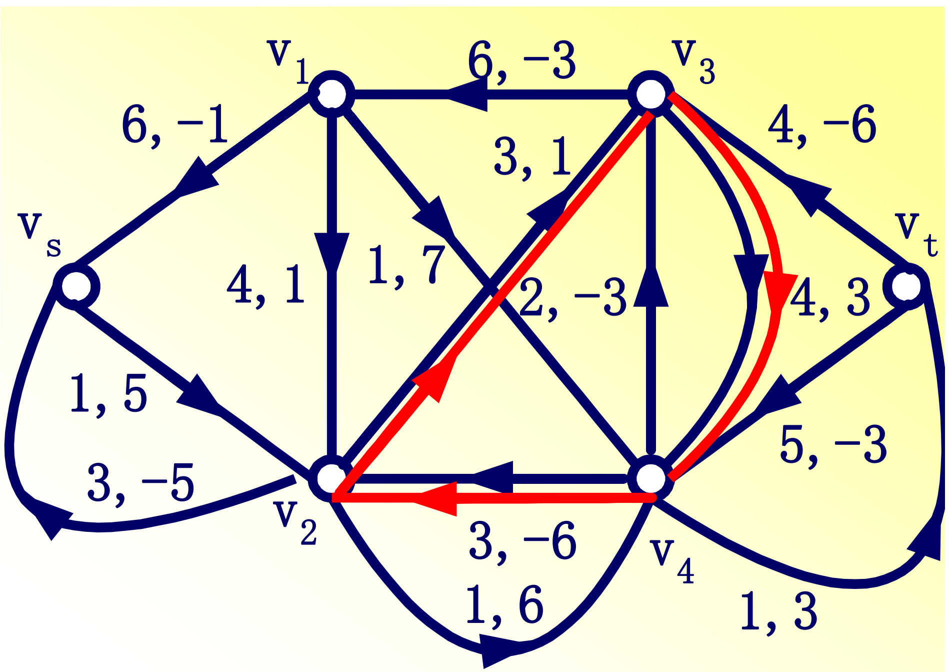




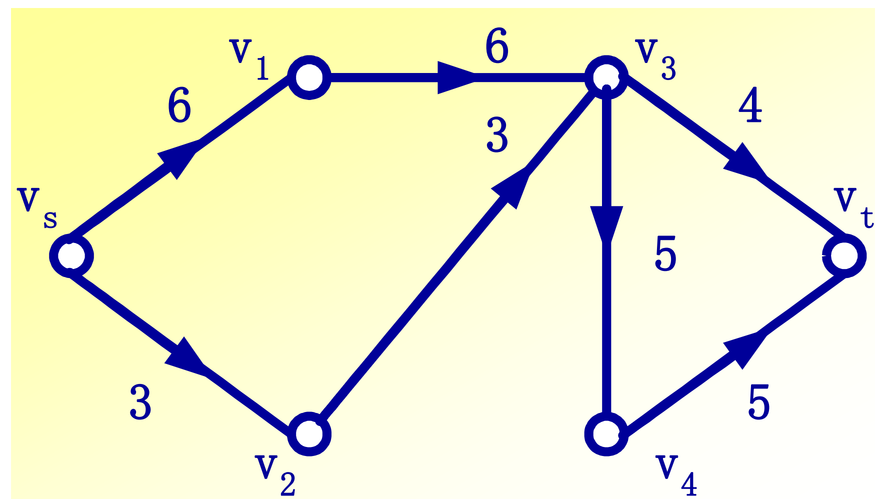


≡ N_2：在补图上找负价环

- △ 得到负价环C：$v_2 - v_3 - v_4 - v_2$，如左图：
- △ 沿负价环C方向增流：δ=min[3, 4, 3]=3
- △ 如右图：
- △ 总费用 $= 6 \times 1 + 6 \times 3 + 4 \times 6 + 3 \times 5 + 3 \times 1 + 5 \times 3 + 5 \times 3 = 96$
- △ 返回N_1



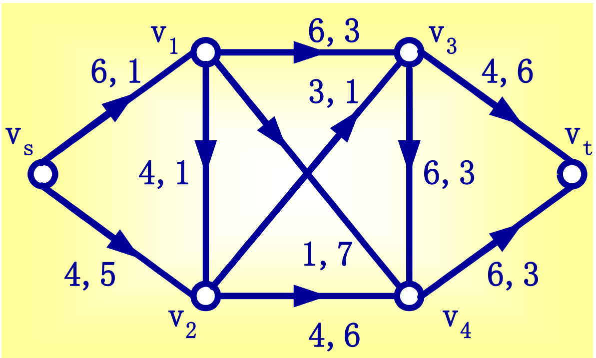
图c

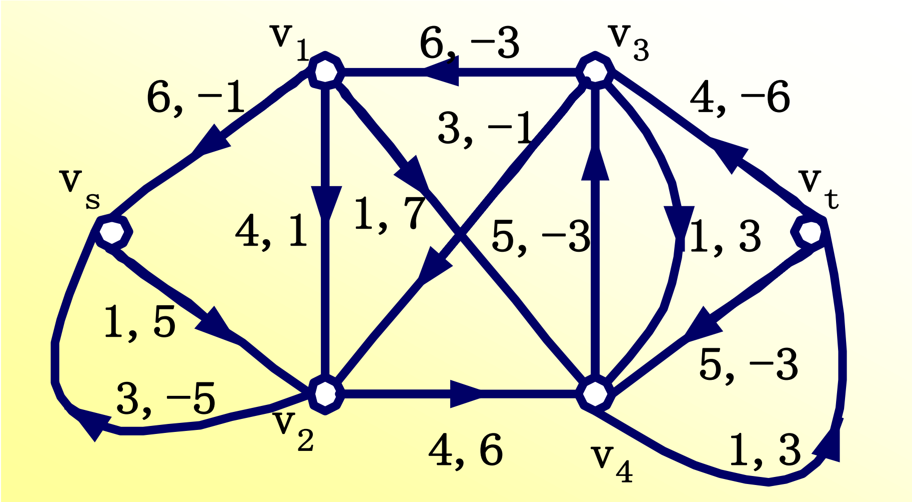


图d

≡ N_1：作补图

△ 如图e





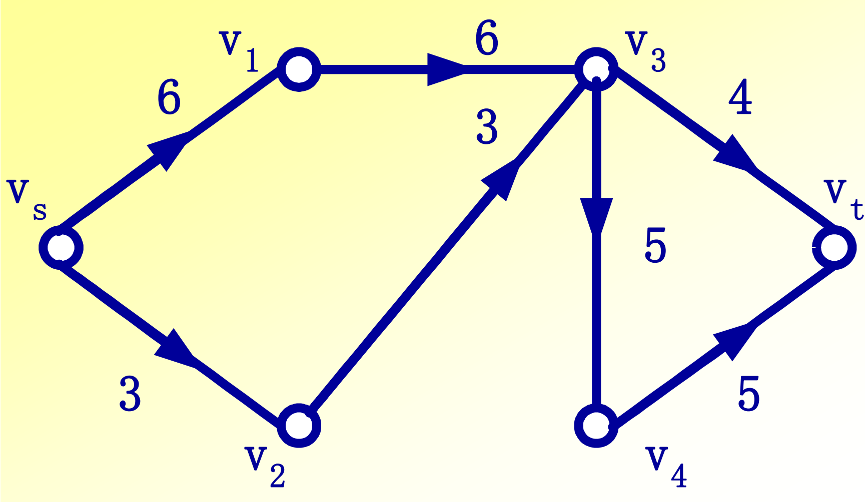
图e

≡ N_2：在补图上找负价环

△ 已找不出负价环，算法终止

△ 结论为：

- 流量分配如图d
- 最小费用为96



图d

＝负价环算法（N算法）的辅助手段和推广

≡关于寻找初始可行流

Δ可以从图上直接试找，如前例

Δ也可以用标记算法（M算法）来找

- 即从全零流开始
- 逐步增流
- 直至达到所要求的F_{st}为止
- 这个可行流可作为N算法的起始可行流
- 若F_{st} 大于用M算法得到的最大流，则本题无解

≡关于寻找负价环

Δ可以在补图上直接观察，试找，如前例

Δ也可以用弗洛埃德算法（F算法）来找

- 在径长矩阵W中
- 其元素w_{ij}改用补图上的费率作为起始元素
- 即$w_{ij}^{(0)} = \alpha_{ij}$
- 在计算过程中，当对角线上出现负值时，表示有负价环出现
- 从R阵可以找出负价环的路由
- 然后回到负价环算法（N算法）增流

- 负价环法也可推广到无向图和端有容量的情况
- 负价环法也适用于多源多宿的问题
  - 只要能找到起始的可行流
  - 负价环法都是适用的
  - 因为环内增流不会影响源宿间的流量
    - 只是路由有所改变

- 作业
  - P156.　3.11,　3.13

(本节结束)

– 作业

=（周先生著）P156.　3.11,　3.13

=（张琳著）P164.　5.1,　5.3

(本节结束)