通信网理论基础

第三章　通信网的结构

第三节　　　站址问题

北京邮电大学　　信息与通信工程学院

授课教师：武穆清

电子信箱：wumuqing@bupt.edu.cn

课程内容介绍

第一章　引论

通信系统和通信网的种类和基本要求

第二章　通信网的组成要素

通信系统和网络的构成部件、功能、特性

第三章　通信网的结构

图论基础，最短径、最大流、最佳流算法

第四章　网内业务分析

排队论基础，业务模型与分析，网络效率

第五章　通信网的可靠性

可靠性理论，系统可靠性，网络可靠性

第三章 通信网的结构

3.1 图论基础

3.2 最短径问题

3.3 站址问题

3.4 流量分配

第三节 站址问题

3.3.1 单中点问题

3.3.2 k中点问题

3.3.3 设站问题

3.3 站址问题

- 在前节中，我们假定网内所有端都是预先设定好了的
  - 不能另设新端
  - 在这样条件下讨论了最短主树，最短径和网中心等
- 而在实际的通信网中，并不排除新设一些端
  - 交换站是可以选择设置的
  - 各交换点之间的汇接点或更高一层的交换点也可选择设置
  - 这样一来，最短主树可以更短
    - 网中心所对应的平均最短径长也可最短
- 如果只允许另设一个端，则称为**单中点问题**
  - 如果允许设k个端，则称为**k中心问题**

3.3.1 单中点问题

- 假设
  - 有n个用户点，它们的平面坐标分别为（x_i，y_i）
    - $i=1，2，\cdots，n$
  - 各点的加权系数为w_i
    - 代表该用户所需的联线数或其它需求的量
- 求
  - 设置单中点
    - 就是要找出一个中点的坐标（x_q，y_q）
  - 使代价:
    - 取得最小

$$L=\sum_i w_i d_{qi}$$

    - 其中：d_{qi}是中点与用户点（x_i，y_i）之间的距离测度

- 关于距离测度
  - 根据问题的性质，这种测度可以有不同的形式
  - 欧式距离：
    - 即：$$d_{qi} = \sqrt{(x_i - x_q)^2 + (y_i - y_q)^2}$$
  - 平方距离
    - 即：$$d_{qi} = (x_i - x_q)^2 + (y_i - y_q)^2$$
    - 这适用于广播系统的发射点位置的选择问题
    - 因为接收功率与欧式距离的平方成反比
    - 为使接收功率一致，就要求发射点的输出功率依上述平方距离$\mathbf{d_{qi}}$成正比地增加
    - 此时，代价L最小，就是发射总功率最小
    - 蜂窝状小区的移动通信中也有类似的情况

矩形线距离

- 即： $d_{qi} = \left| x_q - x_i \right| + \left| y_q - y_i \right|$
- 这适用于城市中铺设通信线路的问题
- 铺设工作是沿街道进行的
- 若街道是方格形的，则从中点到用户点的线路长度就按上式计算

– 关于用户分布

- 用户数目随地理区域连续分布的情况
  - 当用户点数目很大时，用有限数n来计算很困难
  - 可假设用户数是按ρ（x, y）连续分布的
  - 则在（x, y）点附近的用户数是$\rho(x, y)\cdot \Delta x \cdot\Delta y$
    - $\rho(x, y)$：称为（x, y）点上用户的密度
  - 此时，代价可表示为：

$$L=\iint \rho(x,y)\cdot d_q(x,y)dxdy$$

- 其中：$d_q(x, y)$是中点q与（x, y）点之间的距离测度
  - 它仍可有前述的三种形式或其它形式
- 加权系数可包括在ρ（x, y）中，所以式中已省去

– 求解上述各种情况下中点坐标的方法

= 欧式距离的情况

≡ $$L=\sum_i w_i d_{qi}=\sum_i w_i\cdot\sqrt{(x_i-x_q)^2+(y_i-y_q)^2}$$

≡ 因为需要使代价最小，所以：

$$\frac{\partial L}{\partial x_q}=\sum_i w_i\cdot\frac{x_q-x_i}{d_{qi}}\qquad\frac{\partial L}{\partial y_q}=\sum_i w_i\cdot\frac{y_q-y_i}{d_{qi}}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial {x_q}^2}=\sum_i w_i\cdot\frac{(y_q-y_i)^2}{{d_{qi}}^3}\qquad\frac{\partial^2 L}{\partial {y_q}^2}=\sum_i w_i\cdot\frac{(x_q-x_i)^2}{{d_{qi}}^3}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_q\partial y_q}=-\sum_i w_i\cdot\frac{(x_q-x_i)(y_q-y_i)}{{d_{qi}}^3}$$

≡用二元泰勒级数展开，其二阶增量为：

$$\frac{\partial^2 L}{\partial {x_q}^2}(\Delta x_q)^2 + 2\cdot\Delta x_q\cdot\Delta y_q\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial x_q\cdot\partial y_q} + \frac{\partial^2 L}{\partial {y_q}^2}(\Delta y_q)^2$$

$$= \sum_i w_i\cdot\frac{\left[\left(y_q - y_i\right)\cdot\Delta x_q - \left(x_q - x_i\right)\cdot\Delta y_q\right]^2}{{d_{qi}}^3} \geq 0$$

≡所以，**L**函数是下凸的，**L**有极小值

Δ令一阶偏导数为零可求得极小值点的坐标

$$x_q = \frac{\sum_i w_i x_i \Big/ d_{qi}}{\sum_i w_i \Big/ d_{qi}} \qquad y_q = \frac{\sum_i w_i y_i \Big/ d_{qi}}{\sum_i w_i \Big/ d_{qi}}$$

Δ即：在（$\mathbf{x_q}$，$\mathbf{y_q}$）点，**L**取得极小值

- 但此式为一个隐函数，d_{qi}中含有x_q和y_q
  - 我们可以用它采用迭代法来求解
  - 先令$x_q = y_q = 0$，计算各d_{qi}
    - 代入上式，得到第一次迭代值$x_q^{(1)}$和$y_q^{(1)}$
  - 再利用它们来计算$d_{qi}^{(1)}$，代入上式，得到第二次迭代值$x_q^{(2)}$和$y_q^{(2)}$
  - 如此下去，直到后一次迭代值与前一次迭代值之差可容许为止
  - 一般情况下，这种迭代算法是收敛的

$$x_q = \frac{\sum_i w_i x_i \Big/ d_{qi}}{\sum_i w_i \Big/ d_{qi}} \qquad y_q = \frac{\sum_i w_i y_i \Big/ d_{qi}}{\sum_i w_i \Big/ d_{qi}}$$

- 平方距离的情况
  - 当采用欧式距离的平方作为距离测度时

$$d_{qi}=(x_i-x_q)^2+(y_i-y_q)^2$$

    - 代入 $L=\sum_i w_i d_{qi}$，并取偏导，得：

$$\frac{\partial L}{\partial x_q}=2\sum_i w_i(x_q-x_i)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_q}=2\sum_i w_i(y_q-y_i)$$

  - 置偏导为零，得：
    - $$x_q=\frac{\sum_i w_i x_i}{\sum_i w_i}$$

$$y_q=\frac{\sum_i w_i y_i}{\sum_i w_i}$$

    - 这个解是显式的
    - 可用来直接算出中点的位置
    - 这样得到的中点必使**L**值最小
      - 可用二次取导得到证明
    - 实际上，这个中点就是以$\mathbf{w_i}$为权的各$\mathbf{v_i}$的重心

= 矩形线距离的情况

≡ 在矩形线距离的情况，导数将出现不连续点，即：

$$\frac{\partial\left|x_q - x_i\right|}{\partial x_q} = \begin{cases} 1 & x_q > x_i \\ -1 & x_q < x_i \\ \text{不定} & x_q = x_i \end{cases}$$

Δ 由于当 $\mathbf{x_q = x_i}$ 时，$\mathbf{|x_q - x_i| = 0}$，这已不影响L值

- 所以，可以不考虑这种情况

≡ 把距离表达式代入L算式，并求偏导，得：

$$\frac{\partial L}{\partial x_q} = \sum_{i:x_q > x_i} w_i - \sum_{i:x_q < x_i} w_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_q} = \sum_{i:y_q > y_i} w_i - \sum_{i:y_q < y_i} w_i$$

≡L的极值应出现在:

$$\Delta \quad x_q: \sum_{i:x_q>x_i} w_i = \sum_{i:x_q<x_i} w_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i \qquad (3-36)$$

$$y_q: \sum_{i:y_q>y_i} w_i = \sum_{i:y_q<y_i} w_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i$$

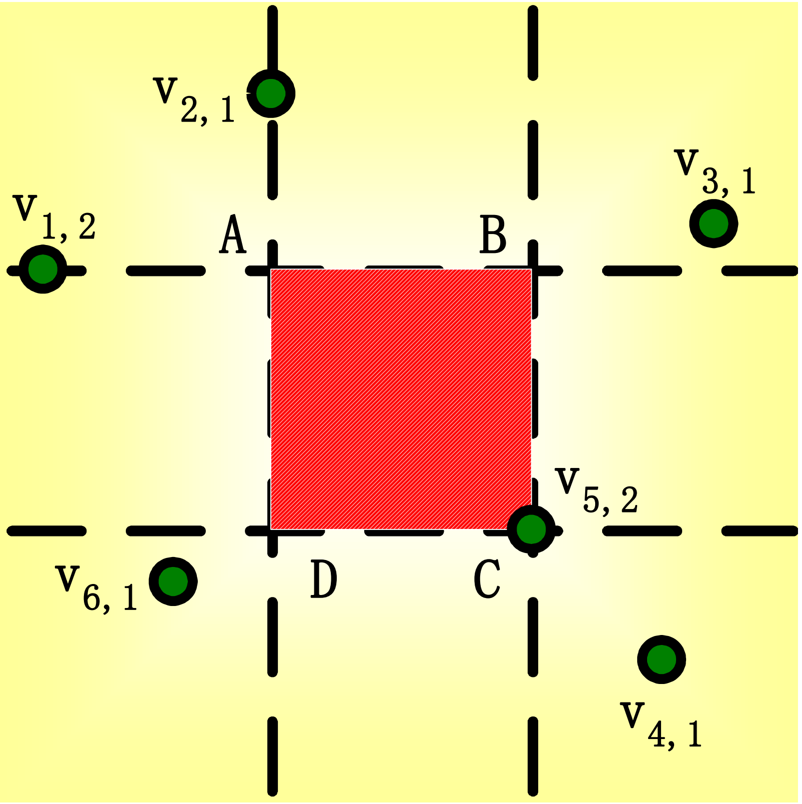
Δ其含义是:

- x_q的选择应能使x_q右边所有点的权之和等于其左边所有点的权之和
- 或等于所有点（除与x_q有同样横座标值的点外）的权之和的一半
- y_q的选择应按它上面和下面所有点的权之和相等来确定

≡当Σw_i是偶数，并且在上下和左右均可分割成相等的两部分时，可用（3－36）式来求中点

Δ这时的解并不唯一

Δ如图：



- v_i为端点的名称
- 其后面的数字为其权值
- （x_q，y_q）可位于长方形ABCD内，都能使L极小
- 且这些极小值是相等的

≡当Σw_i是奇数，或虽为偶数，但不能均分时

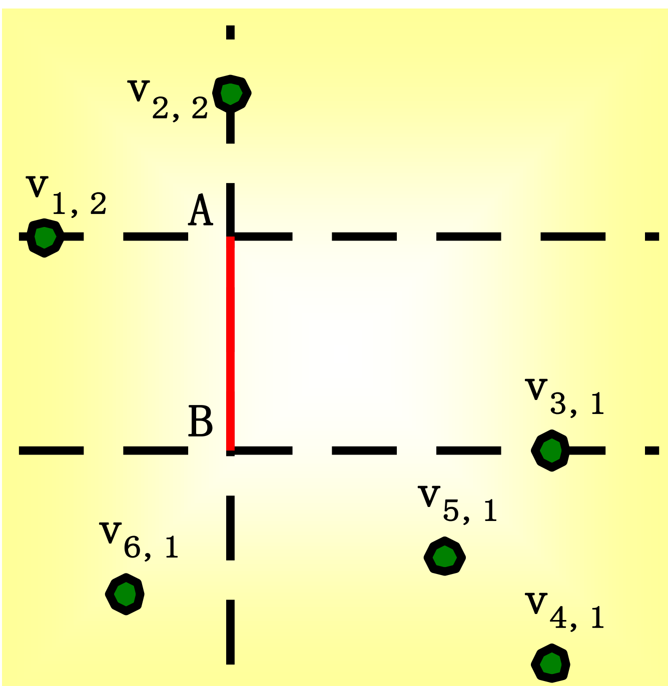
Δ则 x_q 必与某些 x_i 相同， y_q 也是这样

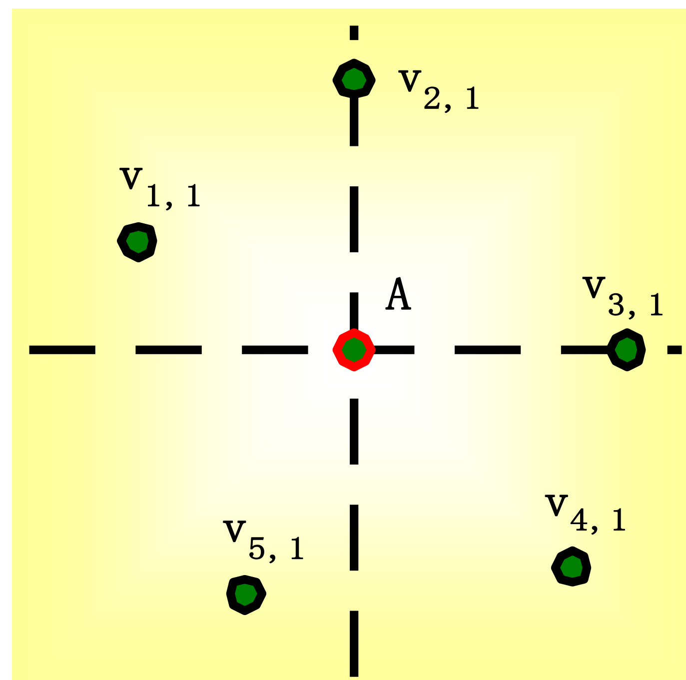
Δ有时，中点可在一条线上的任一点

- 如下面左图：中点可为线段AB上的任一点

Δ有时，也可能只有一个点，可作为中心

- 如下面右图：只有A点是中点





- 这样选定的中点可使代价L取得极值
  - 而且这极值必为极小
  - 因为当x_q增加Δx_q时
    - 左边的权值之和必大于右边的极值之和
    - 则L将增加
  - 而当x_q减小Δx_q时
    - 左边的权值之和必小于右边的极值之和
    - 也使L增加

- 由此可以想到，当有某x_i值恰为x_q时
  - 左边的权值之和不一定恰等于右边的权值之和
    - 只要这x_i的权值计入左边时，则其权值之和大于右边
    - 反之，计入右边时，其权值之和应大于左边
  - 亦即，与x_q相等的x_i，其权值可以一部分放在左边
    - 一部分放在右边
    - 以使两边平衡，从而使L极小

= 用户点连续分布的情况

≡ 把不同距离测度的公式代入代价算式，即：

$$L=\iint \rho(x,y)\cdot d_q(x,y)dxdy$$

Δ 再求使L最小的中点坐标（x_q，y_q）

Δ 求解方法基本与前面相同

- 即对L取x_q和y_q的偏导数，并置零
- 解出x_q和y_q

≡ 对于欧式距离，有：

$$x_q=\frac{\iint \frac{x\cdot\rho(x,y)}{\sqrt{(x_q-x)^2+(y_q-y)^2}}dxdy}{\iint \frac{\rho(x,y)}{\sqrt{(x_q-x)^2+(y_q-y)^2}}dxdy}$$

Δ

$$y_q=\frac{\iint \frac{y\cdot\rho(x,y)}{\sqrt{(x_q-x)^2+(y_q-y)^2}}dxdy}{\iint \frac{\rho(x,y)}{\sqrt{(x_q-x)^2+(y_q-y)^2}}dxdy}$$

Δ 这是迭代公式，是隐函数

≡对于平方距离，有重心公式:

$$\Delta \quad x_q = \frac{\iint x \cdot \rho(x,y)dxdy}{\iint \rho(x,y)dxdy} \qquad y_q = \frac{\iint y \cdot \rho(x,y)dxdy}{\iint \rho(x,y)dxdy} \qquad (3-38)$$

≡对于矩形线距离，有求解等式:

$$\Delta \quad x_q: \int_{-\infty}^{x_q} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)dy = \int_{x_q}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)dy \qquad y_q: \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{y_q} \rho(x,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{y_q}^{+\infty} \rho(x,y)dy \qquad (3-39)$$

3.3.2 *k*中点问题

- ≡ 单中点只解决
  - Δ 用户点数目不大
  - Δ 且分布范围不太广　　情况下的选址问题
- ≡ 当用户点数增多，或地理位置分散时
  - Δ 往往要求分成几个群体，每个群体有一个中点
  - Δ 这在实际中经常遇到
    - 且情况各异
    - 还可以有各种不同的限制

– K中点问题的预设条件

- = K为预先给定的值
- = 不计各中点之间中继线的代价
- = 求这些中点的位置，以使总代价最小

= 设有n个用户点

≡ 它们的坐标是（x_j，y_j），$j = 1, 2, \cdots, n$

≡ 要求找出k个交换点的位置（x_{qi}，y_{qi}）

Δ $i = 1, 2, \cdots, k$

≡ 使代价L最小：

$$L = \sum_{i,j} C_{ij} w_j d_{ij} \qquad (3-48)$$

Δ 其中：

- $$C_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若第i个中点与j端有联线} \\ 0 & \text{若第i个中点与j端无联线} \end{cases}$$

  $$d_{ij} = \text{第i个中点与j端间的距离测度}$$

- 距离测度可以是欧式距离，也可以是其它意义的距离
- w_j：是j端的权重

– 一般求解方法

≡可按下述两步逐次递推

= 步骤1 任取k个点作为中点（x_{qi}，y_{qi}）

≡把所有端按最近距离的原则分配给这些中点

Δ即: $C_{ij} = 1$ ，当 $d_{ij} = \min_{i} d_{q_i j}$

Δ $d_{q_i j}$ ：是第i个中点与j端之间的距离

≡并计算总代价L: $$L = \sum_{i,j} C_{ij} w_j d_{ij}$$

- 步骤2 把归到每个中点的端作为一群
  - 按单中点的方法求这群端的中点（x_{qi}'，y_{qi}'）
    - 这个中点可能与原定的（x_{qi}，y_{qi}）不同
    - 而且会破坏步骤1中的最近距离的原则
  - 计算总代价L′
  - 判断是否已满足要求
    - 若总代价L′与L已相差不多
    - 即在容许的误差范围之内
    - 则认为已得到最后解，停止运算
    - 否则，返回步骤1

- 说明
  - 这种解法与起始选择的k个中点的位置关系很大
    - 不能保证得到最优解
  - 可以多换几种起始位置，分别求得最后解
    - 比较后可确定出在已有解中的最佳解
    - 此最佳解为准最优解

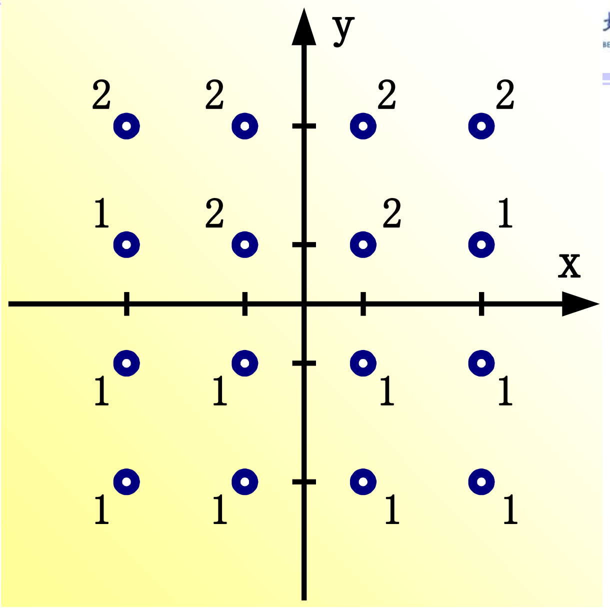
– k中点问题解法举例

= 已知条件

≡ 设有16个端

Δ 均匀地处于一正方形内

Δ 如图，各点坐标为（x_i，y_i）



- （1，1），（－1，1），（－1，－1），（1，－1）
- （3，1），（－3，1），（－3，－1），（3，－1）
- （1，3），（－1，3），（－1，－3），（1，－3）
- （3，3），（－3，3），（－3，－3），（3，－3）

Δ 各点相应的权值为:

- 2，2，1，1
- 1，1，1，1
- 2，2，1，1
- 2，2，1，1

≡ 要在这些端中设三个中点，即k = 3

Δ 所用距离测度为矩形线距离

= 试解一

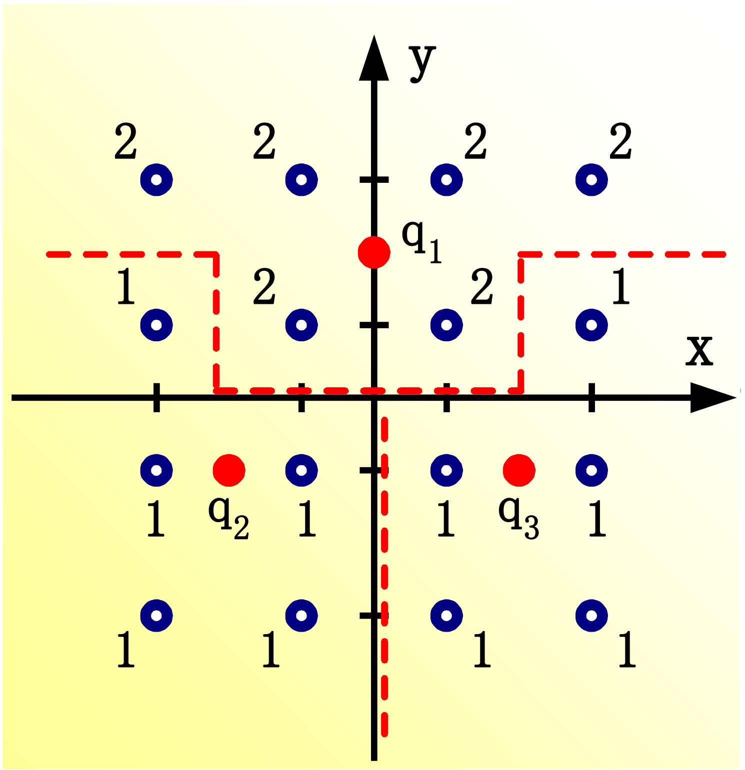
≡ 步骤1：取初始的三个中点

Δ 如图中红色点：

- $q_1 = (0, 2)$
- $q_2 = (-2, -1)$
- $q_3 = (2, -1)$

Δ 按矩形线距离最短来分群：

- 上面六个$w_i = 2$的端属于 $q_1 =（0，2）$的范围
- 左边五个$w_i = 1$的端属于 $q_2 =（-2，-1）$的范围
- 右边五个$w_i = 1$的端属于 $q_3 =（2，-1）$的范围



Δ 计算总代价：

$$L_0 = 2 \times (4 \times 2 + 2 \times 4) + 2 \times [1 \times (1 \times 2 + 3 \times 3)] = 54$$

权重 距离 点数 距离 点数 左右两群 权重 距离 点数 距离 点数

≡ 步骤2：按前一步分成的三群分别求单中点解

Δ 方法是：

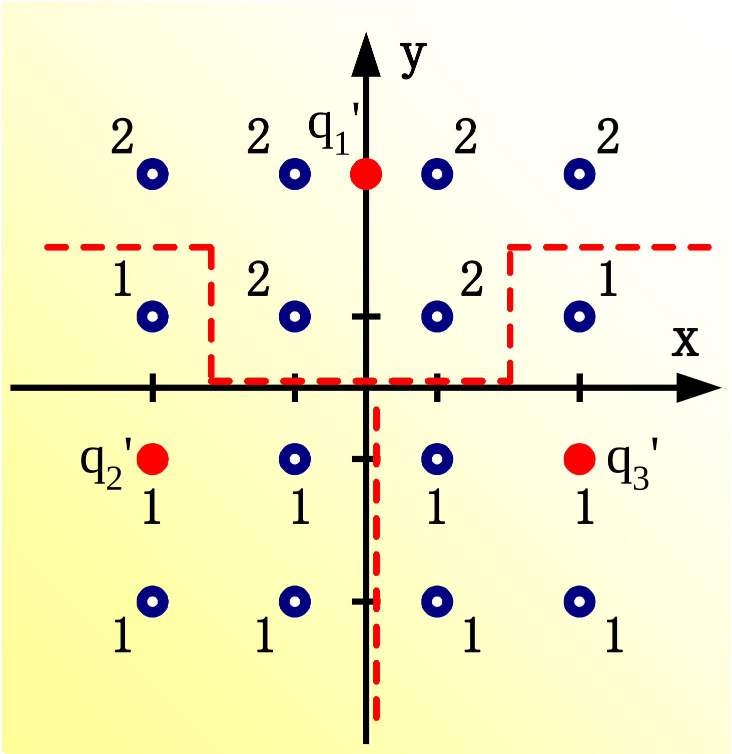
$$x_q:\sum_{i:x_q>x_i} w_i=\sum_{i:x_q<x_i} w_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i$$

$$y_q:\sum_{i:y_q>y_i} w_i=\sum_{i:y_q<y_i} w_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i$$

Δ 可得新的中点为：

- q_1' ＝（0，3）
- q_2' ＝（－3，－1）
- q_3' ＝（3，－1）

Δ 重新计算总代价



$$L_1=2\times(3\times4+1\times2)+2\times[1\times(2\times3+4\times1)]=48$$

权重 距离 点数 距离 点数 左右两群 权重 距离 点数 距离 点数

≡ 步骤1：按三个新中点解

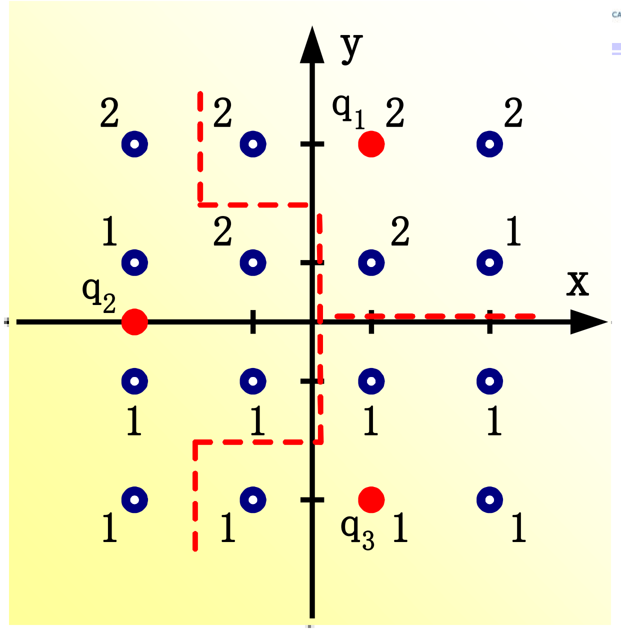
Δ 发现仍为原来的分群，所以已是最后解

Δ 称之为第一种解

＝试解二

≡步骤1：取初始中点：

- q_1＝（1，3）
- q_2＝（－3，0）
- q_3＝（1，－3）



Δ按矩形线距离最短来分群：

- 右边上面五个端属于q_1＝（1，3）
- 左边六个端属于 q_2＝（－3，0）
- 右边下面五个端属于q_3＝（1，－3）

Δ计算总代价：

$$L_{21} = (2 \times 2 \times 3 + 1 \times 4) + (1 \times 1 \times 2 + 2 \times 3 \times 2 + 1 \times 3 \times 2) + (1 \times 2 \times 3 + 1 \times 4) = 46$$

权重 距离 点数 权重 距离 权重 距离 点数 权重 距离 点数 权重 距离 点数 权重 距离 点数 权重 距离

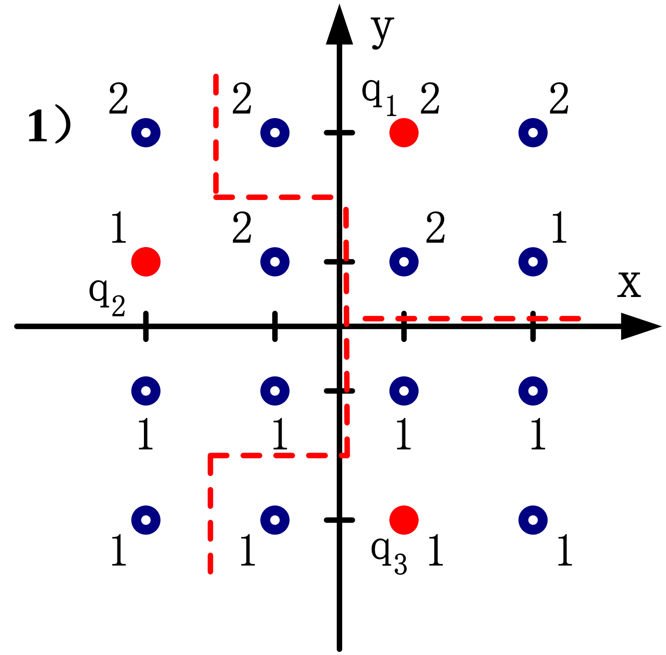
≡步骤2：在每一群中求单中点

Δ最左侧的小区需要调整，中点调至（－3，1）

= 试解二

≡ 步骤2：在每一群中求单中点

- Δ 最左侧的小区需要调整，中点调至（−3，1）
- Δ 即：中点调整为：
  - q_1 =（1，3）
  - q_2 =（−3，1）
  - q_3 =（1，−3）
- Δ 按矩形线距离最短来分群：
  - 右边上面五个端属于 q_1 =（1，3）
  - 左边六个端属于 q_2 =（−3，1）
  - 右边下面五个端属于 q_3 =（1，−3）



- Δ 计算总代价：

$$L_{22} = (2\times2\times3+1\times4)+(2\times2\times2+1\times2\times1+1\times4\times2)+(1\times2\times3+1\times4)=44$$

权重 距离 点数　权重 距离　权重 距离 点数　权重 距离 点数　权重 距离 点数　权重 距离 点数　权重 距离

≡ 步骤1：重新分群

- Δ 结果仍为这三点，所以，L_{22} 已是最后解
- Δ 称之为第二种解

≡ 试解三

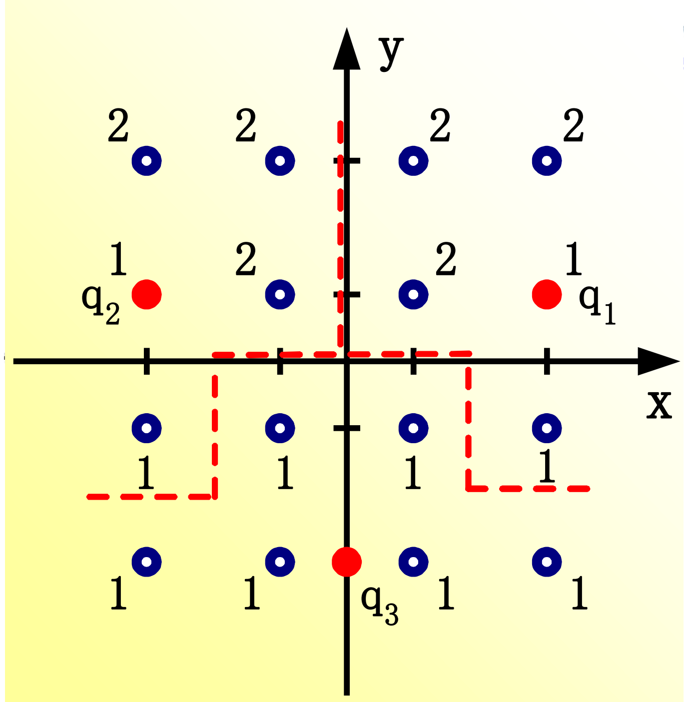
≡ 取初始中点:

- $q_1 = (3, 1)$
- $q_2 = (-3, 1)$
- $q_3 = (0, -3)$

Δ 按矩形线距离最短来分群

- 右上五个点属于 $q_1 = (3, 1)$
- 左上五个点属于 $q_2 = (-3, 1)$
- 下面六个点属于 $q_3 = (0, -3)$

Δ 计算总代价:



$$L_3 = 2 \times (2 \times 2 \times 2 + 2 \times 4 + 1 \times 2) + (1 \times 1 \times 2 + 1 \times 3 \times 4) = 50$$

≡ 按此分群，在每群中求单中点

Δ 结果仍为这三点，说明已是最后解

Δ 称之为第三种解

＝比较上面的三种解

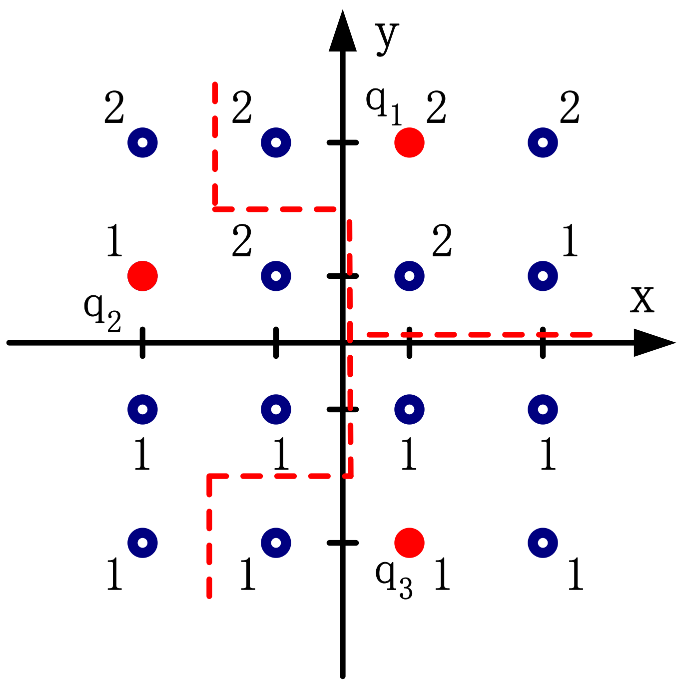
≡最佳的是第二种解

Δ 以（1，3），（－3，1），（1，－3）为中点，总代价为44

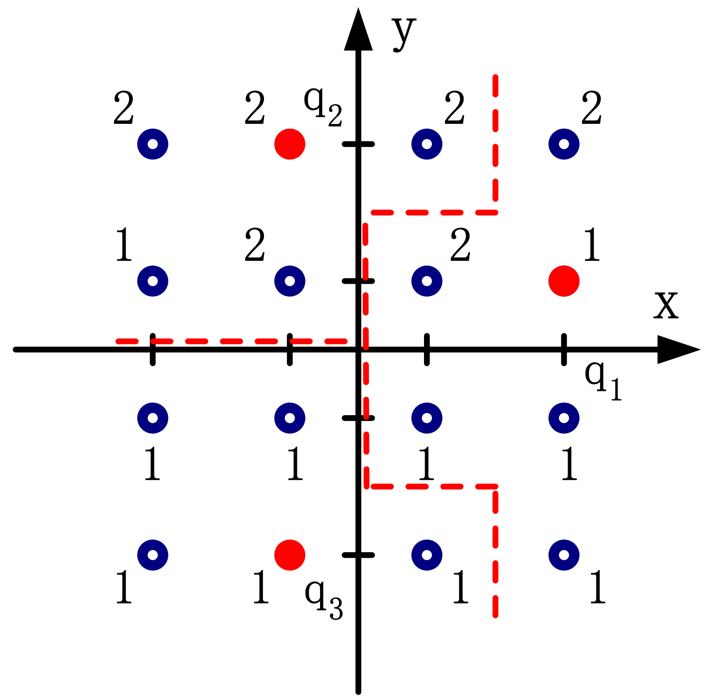
≡根据对称性可知（本题以纵轴为中心左右对称）

Δ 若中点设在（3，1），（－1，3），（－1，－3）

Δ 结果也可得最小总代价44



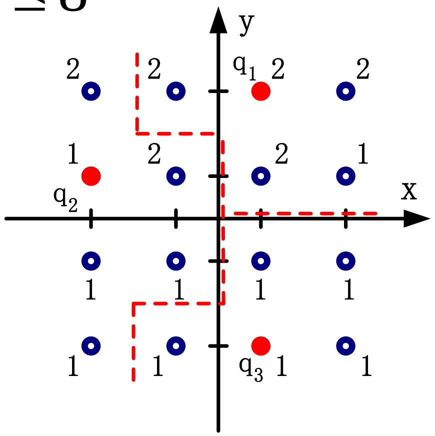
Δ 第二种解



对称解

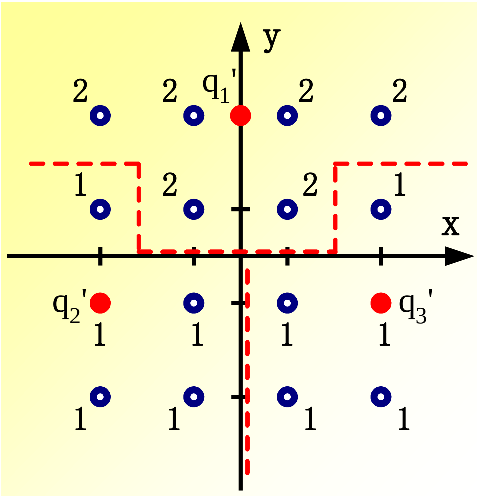
以上是在无其它限制条件时的准最优解

- 当有某些限制条件时，解法就需有所调整
- 如：把交换节点的容量加以限制
  - 要求每一群的端的权重之和不能超过某个预先给定的值
- 如在上例中，要求每个群的总权值 $\sum_j w_j \le 8$
  - 则前面的第二种解就不可用了
    - 因为这时以$q_1=(1,3)$为中心的群中
    - 端的权之和已为9



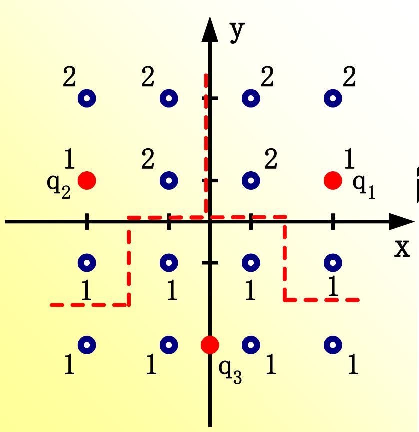
第二种解

  - 第一种解也不能用
    - 因为以$q_1=(0,3)$为中心的群的总权重为12



第一种解

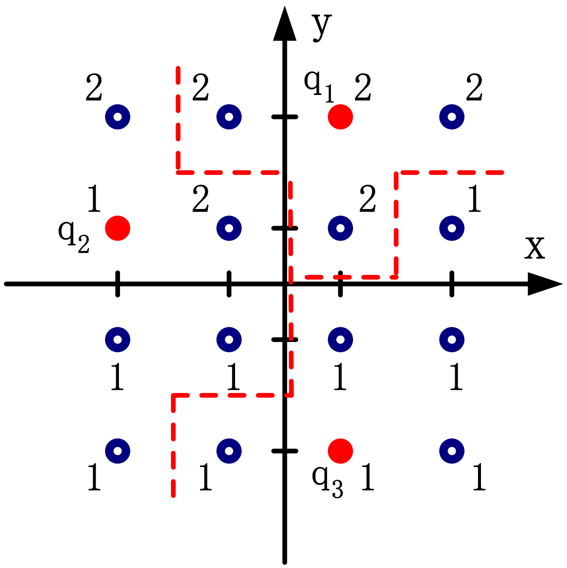
- 能用的只有第三种解
  - 总代价为50



第三种解

Δ 也可以对第二种解进行调整

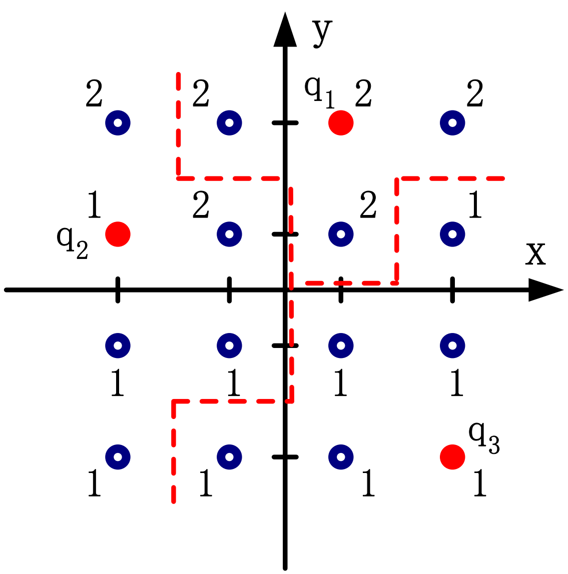
- 把（3，1）端划给以 q_3＝（1，－3）为中点的群
- 这样，距离将增加 2
- 但可满足 $\sum_j w_j \le 8$ 的条件
- 而总代价为 46
- 优于第三种解



$$L'_{22} = (2\times2\times3) + (2\times2\times2 + 1\times2\times1 + 1\times4\times2) + (1\times2\times3 + 1\times4 + 1\times6) = 46$$

Δ 对第二种解的另一种调整方法

- 把中点 q_3＝(1, －3) 改为 q_3＝(3, －3)
- 这样，在按最短距离分群时，(3, 1)端自然分给以 q_3 为中心的群中
- 既保持了最短距离分群的规则不变
- 又满足了总权重 $\sum_j w_j \le 8$ 的条件
- 总代价也为46
- 这样调整使中点到各端的最长距离小了，对降低传输损耗是有利的



- 连续分布的用户点的情况
  - 其解法仍可按前述两个步骤进行
    - 求出准最佳的k个中点
  - 不同点
    - 计算总代价、求解各区域的单中点时
      - 要采用积分，计算将更为复杂

3.3.3 设站问题

- 引言
  - 在前面讨论的问题中，k值已给定
    - 即交换站总数已确定
    - 所以设立交换站的总费用是确定的
    - 因此，优化过程未考虑设站的投资和维护费用
      - 而只考虑了线路的代价
  - 在实际中，要把n个用户点联成星形网
    - 需要多少个交换点并不是事先确定的
      - 即k值也是需要研究确定的
      - 进而，设立交换站的总费用也不是确定的
    - 因此，需要把设站费用和线路费用同时考虑
      - 一起优化
    - 这就是设站问题

– 设站问题的目标函数

$$L=\sum_{i=1}^{k} f_i+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}w_j d_{ij} \qquad (3-49)$$

= 其中

≡ f_i是设立第i个站的费用

≡ w_j是第j个用户点的权值

≡ d_{ij}是第i个站与第j个用户点联线的费用

≡ $c_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若第}j\text{个用户点属于}i\text{站，即与}i\text{站有联线}\\ 0 & \text{若第}j\text{个用户点不属于}i\text{站}\end{cases}$

= 各交换站之间的中继线费用忽略不计，它可以包括在建站费用中

- 建站问题的求解方法
  - 最直观的方法是:
    - 顺序求解单中点、双中点、三中点直到 k 中点
    - 然后选定其中代价L最低的一个，从而确定了k 值
  - 说明
    - 前面已验证过，多中点的解一般只是准最优解
    - 所以，用这种方法所得的解也只能是准最优解
- 建站问题求解举例
  - 题设
    - 待选的站址已定为最多三个，分别为q_i（i = 1，2，3）
      - Δ 每个站的建设费用都是 f
    - 有十个用户点，分别为v_j（j = 1，2，…，10）
      - Δ 它们的权值分别为w_j
      - Δ 它们与三个站的距离为d_{ij}

≡所有已知数据列表如下:

v_j		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
w_j		1	2	1	2	1	2	1	2	1	1
d_{ij}	q_1	1	1	1	1	3	2	5	4	5	6
	q_2	4	2.5	1	1	5	4	2	1	6	1
	q_3	7	3.5	6	2.5	4	1.5	3	1	2	1

= 求解

≡先求单中点的解

Δ 以q_1为中点，即$c_{1j}=1$（$j=1, 2, \cdots, 10$），其它c_{ij}均为零

- 总代价: $L_1 = f + \sum_j d_{1j} w_j = f + 37$

Δ 以q_2为中点，即$c_{2j}=1$（$j=1, 2, \cdots, 10$），其它c_{ij}均为零

- 总代价: $L_2 = f + 36$

Δ 以q_3为中点，即$c_{3j}=1$（$j=1, 2, \cdots, 10$），其它c_{ij}均为零

- 总代价: $L_3 = f + 40$

Δ 比较这些结果，可知：最优解是以q_2为单中点，代价是L_2

≡再求双中点的解

Δ 以q_1和q_2为两个中点

- 按最短距离把用户点分群
- c_{1j}（j = 1，2，3，5，6，9）＝1
- c_{2j}（j = 4，7，8，10）＝1
- 其它c_{ij}均为零
- 总代价 $L_4 = 2f + 23$

Δ 以q_1和q_3为两个中点

- 用同样方法可得总代价 $L_5 = 2f + 20$

Δ 以q_2和q_3为两个中点

- 用同样方法可得总代价 $L_6 = 2f + 26$

Δ 通过比较可知，最佳解是以q_1和q_3为两个中点，总代价是L_5

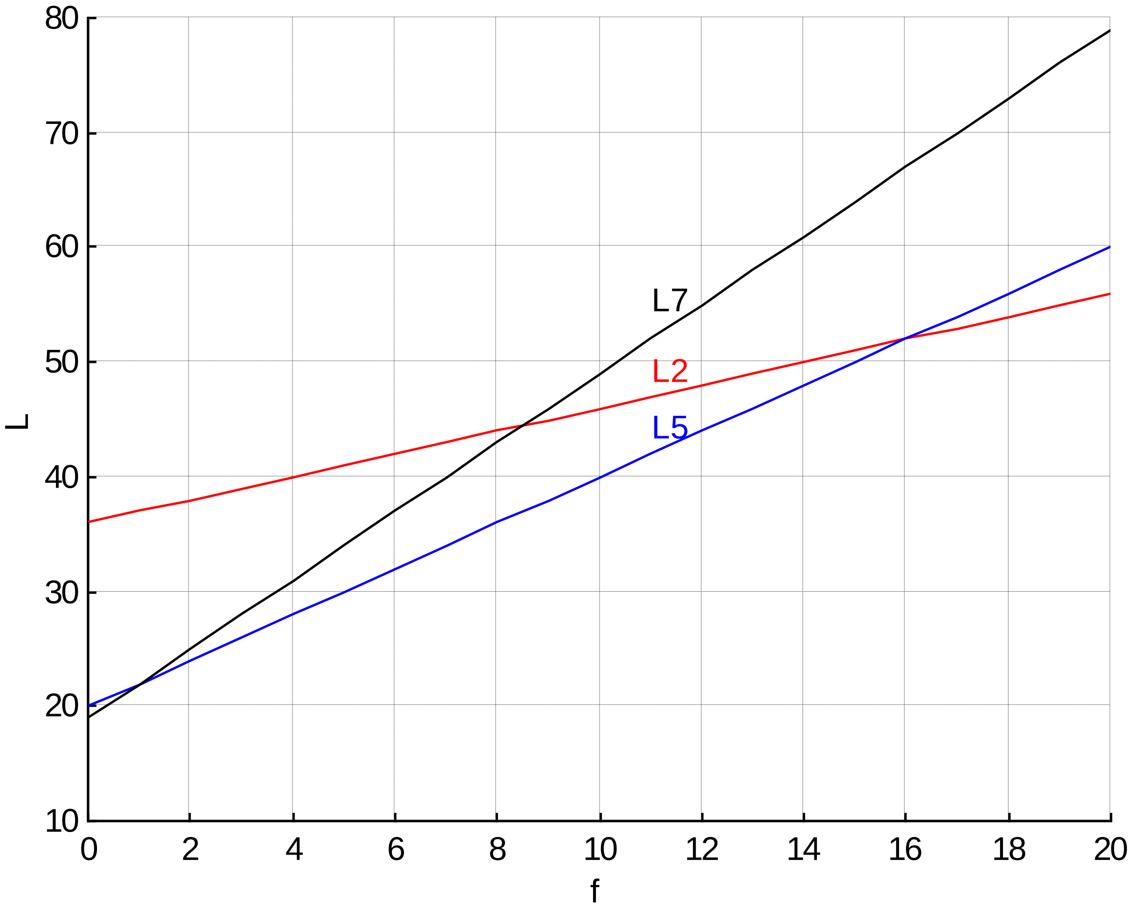
≡ 最后求三中点解

Δ 按最短距离来分配用户点群

Δ 可得总代价 $L_7 = 3f + 19$

≡ 求最终的最佳解

Δ 把 L_2，L_5 和 L_7 与 f 的关系画成图



Δ 可见，最佳解与 f 的取值有关

- 当 $f \le 1$ 时，三中点解 L_7 为最佳
- 当 $1 \le f \le 16$ 时，双中点解 L_5 为最佳
- 当 $f \ge 16$ 时，单中点解 L_2 为最佳

- 附加其它限制条件时
  - 前面的解是在没有其它限制条件下求得的
  - 当有另外的限制条件时，则必须加以调整
  - 比如：由于交换站设备的容量限制
    - 每个站所属用户的权值之和不能大于7
    - 那么，即使在$f > 16$时，也不能采用单中点解
      - 而需采用双中点解

- 例题的解法实际上是穷举法
  - 即把所有可能的情况都加以计算，从而取得最优的
  - 若象本例这样，每步计算都是最优的
    - 则最终的解就是真正最优的
  - 但若待选站不是预先给定的
    - 如以前讨论的多中点解，就不一定是最优的
    - 则最终的解就只能是准最优的

- 穷举法的缺点是计算量较大
- 穷举法的优点是在有限制条件时，可以随时调整
  - 易于满足要求
- 当用户点数和中点数目很大时
  - 这类方法的缺点就比较显著

- 还有一些其它的方法来求准最佳解
  - 一般说来，都有各自的优缺点
  - 用户点多时，计算量也都不小
  - 从理论上说，也都不是很完整
  - 而且许多方法的原理也与上述方法相似，不再列举

(本节结束)