通信网理论基础

第四章　网内业务分析

第一节　　排队论基础

北京邮电大学 信息与通信工程学院
授课教师：武穆清
电子信箱：wumuqing@bupt.edu.cn

课程内容介绍

第一章　引论

通信系统和通信网的种类和基本要求

第二章　通信网的组成要素

通信系统和网络的构成部件、功能、特性

第三章　通信网的结构

图论基础，最短径、最大流、最佳流算法

第四章　网内业务分析

排队论基础，业务模型与分析，网络效率

第五章　通信网的可靠性

可靠性理论，系统可靠性，网络可靠性

第四章 网内业务分析

第一节 排队论基础

4.1.1 基本概念

4.1.2 M|M|1 问题

4.1.3 M|M|c 问题

4.1.4 一般排队问题

第四章 网内业务分析

– 引言

≡ 上一章中，讨论了网的整体拓扑结构

∆ 其中也涉及到网内各信道中的业务流量

∆ 但在那里，假定流量都是恒定的

∆ 这样做，在估计容量设置方面有其意义

∆ 但与实际并不相符

≡ 业务流量总是随机的

∆ 网络性能的分析就要从研究这种随机性出发

≡ 本章将讨论业务流量的随机性

∆ 网内业务分析的理论基础主要是排队论

∆ 第一节介绍近代排队论的基础内容

∆ 第二节用它来建立通信网中某一局站的业务模型

- 进而介绍分析方法

∆ 第三节基于这些计算和分析，讨论建网时应考虑的一些原则

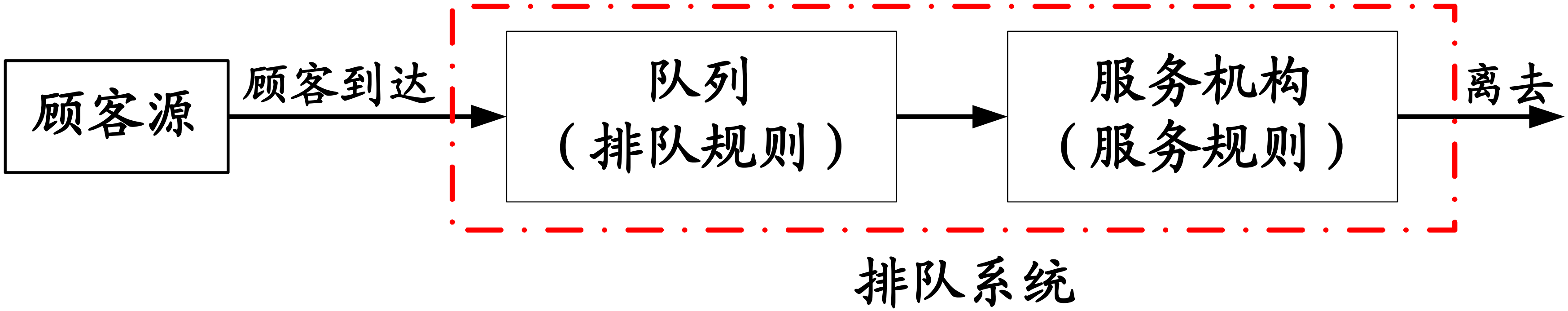
∆ 第四节讨论阿罗华（ALOHA）网络结构中的排队问题

4.1 排队论基础

- 概述
  - ≡ 日常生活中经常遇到排队
    - Δ 排队购物，排队看病，排队存款、取款等
  - ≡ 资源的有限性和需求的随机性是排队现象存在的基础
    - Δ 服务设备太少
      - 排队现象严重
      - 给社会和个人都带来不利影响
    - Δ 服务设备增加
      - 投资增加
      - 发生空闲浪费
    - Δ 一个高效的排队系统：
      - 为顾客提供满意的服务
      - 同时尽量提高资源的利用率
      - 要在二者之间取平衡

排队系统的构成

- 要求服务的顾客
- 提供服务的服务员
- 排队规则



这种排队系统具有广泛性

- 系统中的顾客
  - 可以是人
  - 也可以是机器、设备、或某一事件
- 系统中的队列
  - 可以是有形的具体排队
  - 也可以是无形的等待。（如水库中的蓄水，分不出哪些水是哪一天进入的）

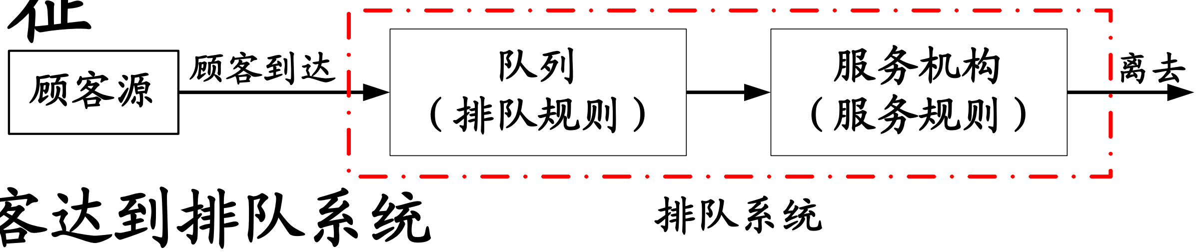
≡排队系统举例:

到达的顾客	要求的服务	服务机构
1、需要修理的机器	修理	维修的工程师
2、维修工程师	领取修理零件	仓库管理员
3、病人	诊断或手术	医生（或手术台）
4、文件稿	打字、录入	打字员、录入员
5、电话呼叫	通话	交换机（交换台）、中继线路
6、到达机场上空的飞机	降落	跑道
7、上游河水进入水库	放水、调整水位	水库管理处
8、数据到达通信系统中某设备（某节点）	存储、转发	缓冲存储器、路由器

- 排队论也称为随机服务系统理论
  - 主要研究三方面的内容
    - 性能问题：即研究各种排队系统的概率规律性
      - 队列长度的分布
      - 等待时间的分布
      - 忙期分布等
      - 包括瞬态情形和稳态情形两种
    - 最优化问题
      - 静态最优化：即研究最优系统设计
      - 动态最优化：即研究现有排队系统的最优运营
    - 排队系统的统计推断
      - 判断一个实际排队系统符合哪种模型
      - 以便根据排队理论进行分析研究

4.1.1 基本概念

– 排队系统的特征



= 输入过程

≡ 输入：指顾客达到排队系统

Δ 可以有下列各种不同的情况，这些情况并不彼此排斥

≡ 顾客源（即顾客的总体）：

Δ 可能是有限的

Δ 也可能是无限的

- 上游河水流入水库，可以认为总体是无限的
- 工厂里待修的机器，显然总体是有限的

≡ 顾客到来的方式:

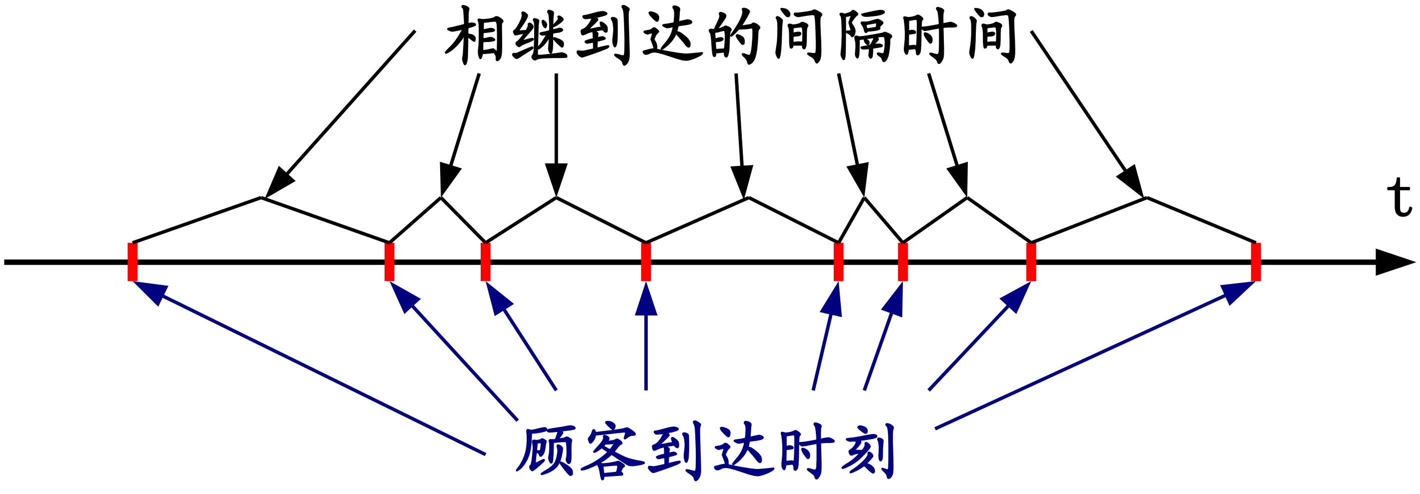
Δ 可能是一个一个到达的

Δ 也可以是成批到达的

- 到餐厅就餐的顾客，有单个来的，也有乘车成批来赴宴的

≡顾客相继到达的间隔时间

- Δ　可以是确定型的
- Δ 也可以是随机型的
- Δ 自动装配生产线上，各部件是按确定的时间间隔到达装配点的
- Δ 定期运行的班车，班轮，班机也都是确定型的
- Δ 到商店购物的顾客，到医院就诊的病人，通过路口的车辆等，则是随机到达的
- Δ 对于随机型的情形，单位时间内到达的顾客数是一个重要参量
  - 或顾客相继到达的间隔时间的概率分布



- ≡顾客的到达可以是相互独立的，也可以是相互关联的
  - Δ 前面顾客的到达对后面顾客的到达没有影响__相互独立
  - Δ 有影响，则是相关联的
    - 如：到达某电话局的电话呼叫就是相互独立的
    - 又如：在电话有奖竞答活动中，到达活动组织部门的电话呼叫就是相互关联的。

- ≡输入过程可以是平稳的，或称为对时间是齐次的
  - Δ 相继到达的间隔时间分布及有关参数（如期望、方差等）都与时间无关
    - 则称为平稳的，对时间齐次的
  - Δ 若与时间有关，则为非平稳的，对时间非齐次的
  - Δ 非平稳情形在数学处理上是很困难的

= 排队规则

≡ 即时制或损失制

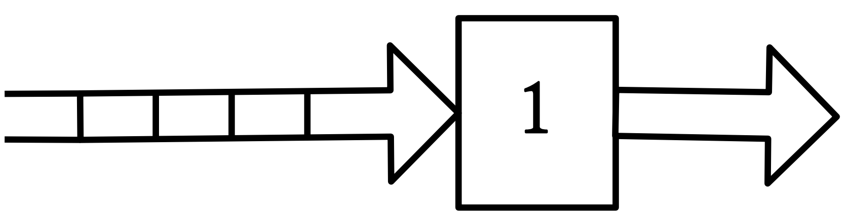
- Δ 顾客到达时，若所有服务台都已被占用，则顾客随即离去
- Δ 没有队列可排，不可等候。 这种规则会损失许多顾客
- Δ 如：普通市内电话服务

≡ 等待制

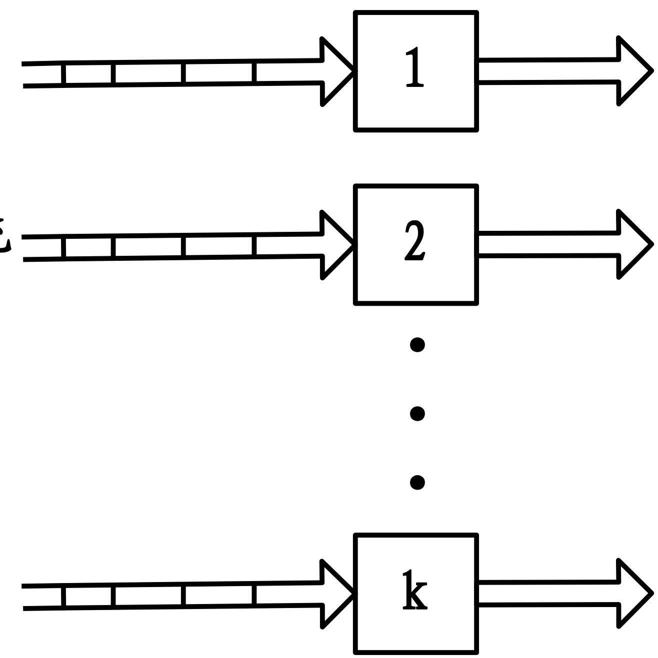
- Δ 顾客到达时，若所有服务台都已占用，则顾客排队等候
- Δ 在等待制中，为顾客服务的次序可以有如下一些规则：
  - 先到先服务：即按到达次序服务，**FCFS**，**FIFO**
    如：商场排队购物，医院排队候诊
  - 后到先服务：
    如：乘电梯、仓库中存放的厚钢板、计算机中的数据堆栈
    又如：在情报系统中，最后到达的信息往往最有价值，所以通常采用后到先服务（即被采用）的规则
  - 随机服务：从等待的顾客中随机地选取其一进行服务，而不管其到达的先后
    如：电话交换台或信息台应答用户的电话呼叫就是如此
  - 优先级服务： 如医院对危重病人给予优先治疗

- 排队形式:
  - 占有具体的空间：如售票处，候诊室等
  - 抽象的：如向电话交换台要求通话的呼叫，银行的存款
- 队列长度:
  - 限长队列:
    - 由于空间的限制或其它限制，有的系统要规定队列容量
    - 即要限制进入排队系统的顾客数
  - 无限队列:
    - 没有长度限制的队列
    - 即容量无限大的队列
- 队列数目:
  - 单列队列:
  - 多列队列:
    - 有的系统队列间可以互相转换，有的则不可以转换（用栏杆隔开）
    - 有的系统顾客因等候时间过长而中途退出，有的系统则不允许中途退出（如高速公路上的汽车流）

- 服务机构
  - 服务机构可以没有服务员
    - 也可以有一个服务员
    - 还可以有多个服务员（服务台，通道，窗口等）
  - 在多个服务台的情况下
    - 各服务台可以是并列的
    - 各服务台可以是串列的
    - 各服务台可以是串并混合排列的
  - 服务机构举例
    - 例1：单队_单服务台队列
    - 例2：多队_多服务台并列的队列系统



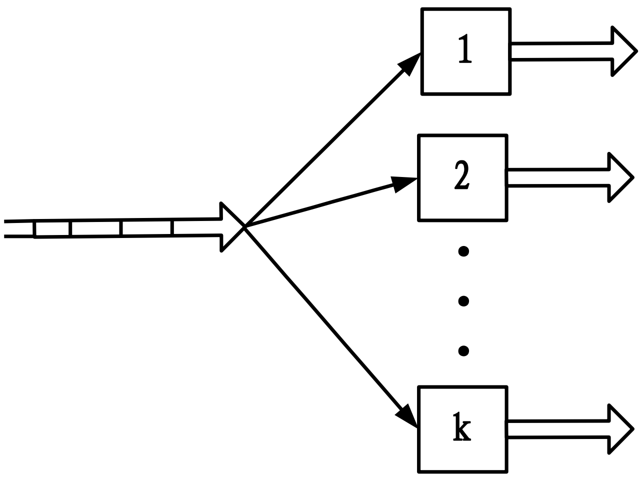
例1



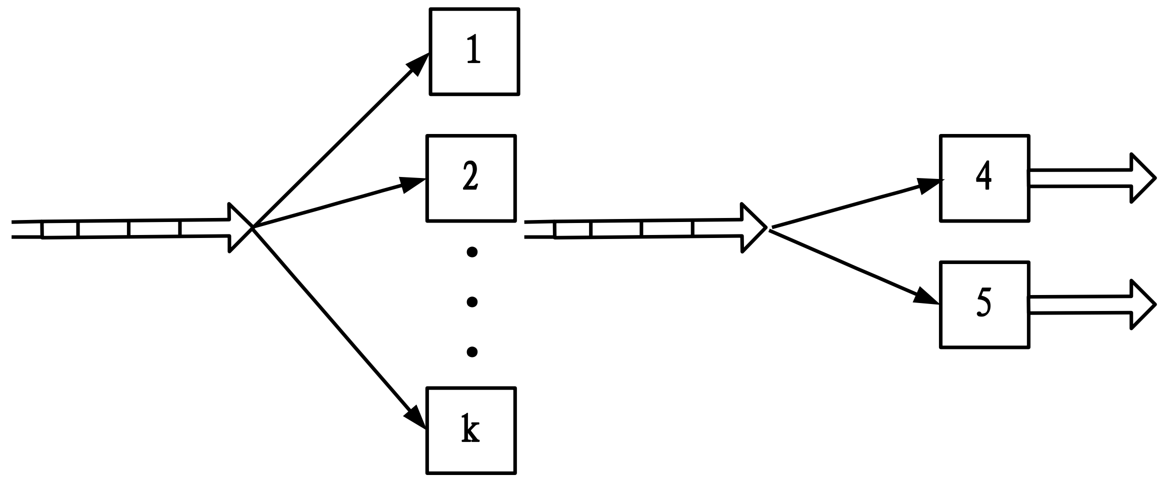
例2

≡服务机构举例

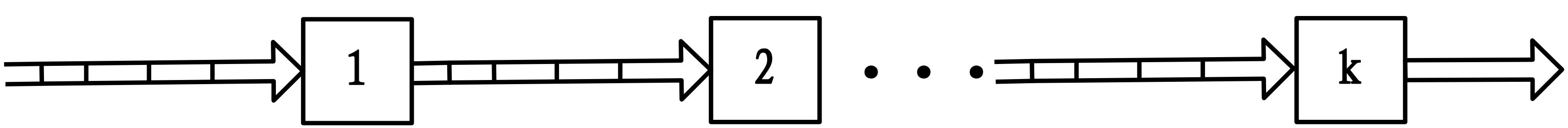
- Δ 例3：单队_多服务台并列的队列系统
- Δ 例4：多服务台串列的队列系统
- Δ 例5：多服务台串并混合排列的队列系统



例3



例5



例4

≡ 服务方式

Δ 对单个顾客进行服务

Δ 对成批顾客进行服务

- 如公共汽车对在站台上候车的顾客成批进行服务

≡ 服务时间

Δ 确定型服务时间

- 如：自动洗车装置对每辆车的冲洗服务时间就是确定型的

Δ 随机型服务时间

- 对每个顾客的服务时长是随机的

Δ 如果输入过程和服务时间都是确定型的，那么问题就太简单了

- 通常，排队论研究的是二者至少有一个是随机型的

≡ 服务过程:

Δ 通常假定是平稳的

Δ 即服务时间的概率分布，期望值，方差等均不受时间的影响

– 排队模型的分类

= 阚德尔(Kendall)分类法

≡1953年，D.G.Kendall先生按照排队系统中最主要、影响最大的三个特征进行分类，即

- 1、 顾客相继到达的间隔时间的分布
- 2、 服务时间的分布
- 3、 服务台个数

Δ按照这三个特征分类，并用符号形式表示：X/ Y/ Z

- X：表示相继到达的间隔时间的分布
- Y：表示服务时间的分布
- Z：表示并列的服务台的数目

- 间隔时间和服务时间有各种不同的分布：
  - M：负指数分布，M是Markov的字头，因为负指数分布具有无记忆性，即Markov性（马尔可夫性）
  - D：确定型分布（Deterministic）
  - E_k：k阶爱尔朗（Erlang）分布
  - GI：一般相互独立（General Independent）的时间间隔分布
  - G：一般（General）服务时间的分布
  - H_R：R阶指数分布
- 排队模型举例
  - M/M/1：表示相继到达的间隔时间为负指数分布，
    - 服务时间为负指数分布，单服务台的排队模型
  - D/M/C：表示确定的到达间隔，负指数分布的服务时间，
    - C个服务台（但顾客排一队）的排队模型
  - M/M/1问题称为初级问题或基本问题
  - G/M/1和M/G/1问题称为中级问题
  - G/G/1和G/G/m问题称为高级问题
    - 其中包括E_r /G/1，G / E_r /1，E_r / E_k /1等成批到达/离开问题

- 在1971年一次关于排队论符号标准化会议上
  - 决定对阚德尔(Kendall)符号进行扩充
  - X/Y/Z /A/B/C
    - 前三项意义不变
    - A处填写系统容量限制N，即队长限于N个以内
    - B处填写顾客源数目m
    - C处填写服务规则，如：先到先服务FCFS，后到先服务LCFS等
  - 并约定，如果略去后三项，则意味着：X/Y/Z /∞/∞/FCFS

– 排队问题的求解

- 一个实际问题作为排队问题求解时
  - 首先要研究它属于哪个模型
  - 其中，只有顾客到达的间隔时间分布和服务时间的分布，需要根据实际测量的数据来确定
  - 其它因素都是在问题提出时给定的
- 求解排队问题的目的
  - 是研究排队系统运行的效率
  - 估计服务质量
  - 确定系统参数的最优值
  - 判断系统结构的合理性
  - 研究、设计改进的措施等

▪ 排队系统运行的基本指标

- 系统队长：在系统中的顾客数，其期望值记为L_s
- 队列长：在系统中排队等待服务的顾客数的期望值为L_q
  - 系统中的顾客数 = 排队等待服务的顾客数 + 正被服务的顾客数
  - 一般说来，L_s（或L_q）越大，说明服务率越低，排队成龙，顾客总是不满意的
- 逗留时间：一个顾客在系统中停留的时间
  - 期望值记为Ws
- 等待时间：一个顾客在系统中排队等待的时间
  - 期望值记为W_q
  - 逗留时间 = 等待时间 + 服务时间
  - 在机器故障问题中，无论是等待修理，还是正在修理
    - 工厂都受到停工的损失
    - 所以逗留时间是主要的，是工厂更关心的
  - 在排队购物，诊病等问题中，顾客们更关心的是等待时间
- 列德尔（Little）公式：$\lambda \cdot W_s = L_s$
  - 适用于任何排队系统

≡ 忙期（Busy Period）

- Δ 从顾客到达空闲服务机构起，直到服务机构再次空闲为止，这段时间长度
- Δ 亦即服务机构连续繁忙的时间长度
- Δ 它关系到服务人员的工作强度
- Δ 忙期和一个忙期中平均完成服务的顾客数是衡量服务机构效率的指标

≡ 系统效率η

- Δ 即平均服务台占用率
- Δ 设共有m个服务台
- Δ 某时刻有r个服务台被占用
- Δ 则占用率为：r/m
  - 它是一个随机变量
- Δ 其统计平均值即为系统效率： $\eta = \frac{\bar{r}}{m}$
- Δ 对于单服务台系统：η = 忙期效率
- Δ η越大，服务资源的利用率越高

≡ 损失率

- Δ 在即时制或队长有限制的系统中
- Δ 由于拒绝顾客进入系统而带来的损失

≡ 系统强度ρ

- Δ 定义为顾客到达率λ与服务率μ之比：$\rho = \lambda/\mu$
- Δ 当ρ大于服务台数m时
  - 平均顾客到达数将大于平均顾客离去数
  - 于是队列将越来越长，平均等待时间趋于无穷大
  - 系统变得不稳定
- Δ 当ρ小于服务台数m时，系统是稳定的
- Δ 对于截止型系统
  - 由于队长被人为地限制，即使$\rho > m$，系统仍能稳定地工作
  - 只是有些顾客将被拒绝而已

- 这些指标的计算基础
  - 系统状态：即系统中的顾客数
    - 如果系统中有n个顾客，就说系统的状态是n
    - 系统状态的可能取值为:
      - 队长没有限制时，n = 0，1，2，…
      - 队长限制在最长N以内时，n = 0，1，2，…，N
      - 在即时制系统中，服务台有C个时，n = 0，1，2，…，C，此时，状态n又表示正在工作的服务台数
  - 系统状态的概率
    - 系统处于某一状态下的概率
    - 系统状态概率通常是随时刻t变化的
      - 所以，在时刻t，系统状态为n的概率，用$P_n(t)$表示

≡ 求解状态概率P_n（t）的方法

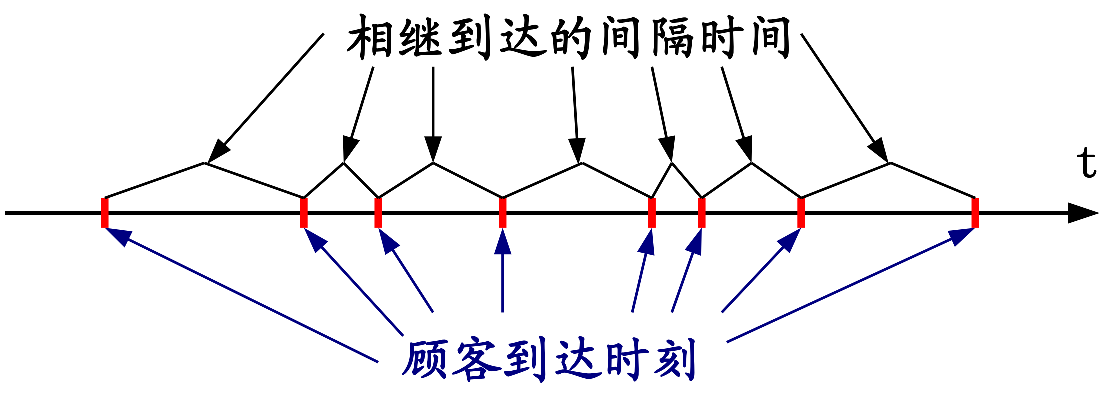
- Δ 首先要建立含P_n（t）的关系式
  - 其中，t是连续变量
  - n是离散变量，只取非负整数
- Δ 所以，P_n（t）的关系式一般为微分差分方程
  - 即关于 t 的微分方程
  - 关于 n 的差分方程
- Δ 方程的解称为瞬态解（或过渡状态解）
  - 求瞬态解一般是不容易的
  - 即使求出，也很难利用
- Δ 因此，我们常用瞬态解的极限（如果存在的话）
  - $$\lim_{t\to\infty} P_n(t) = P_n$$
  - 称之为稳态（Steady State ）解
  - 或统计平衡状态（Statistical Equilibrium State）解

Δ稳态的物理含义

- 当系统运行了无限长的时间以后
- 初始（$t=0$）状态的概率分布｛P_n（0），$n\geq 0$｝的影响已消失
- 系统的状态概率分布不再随时间变化
- 当然，在大多数实际应用中，系统会很快趋于稳态，并不真的需要 $t\to\infty$
- 但是，在实际应用中，永远达不到稳态的情形也确实存在
- 求稳态概率P_n时，并不一定求 $t\to\infty$时，P_n（t）的极限；而只需令导数P_n'（t）=0即可，因为此时P_n（t）已与时间 t 无关，即P_n（t）已经稳定，可记为P_n

4.1.2 到达间隔的分布和服务时间的分布

- 解决排队问题首先要根据原始数据作出到达间隔和服务时间的经验分布
- 然后按照统计学方法确定出合于哪种理论分布，并估计参数值
- 本课程不介绍如何取得经验分布
  - 有关的知识请参考《数理统计》和《统计学》方面的书籍
- 这里只介绍几种常见的理论分布
  - 泊松分布
  - 负指数分布
  - 爱尔朗分布
  - R阶指数分布



– 泊松流（泊松过程）

= 变量与符号

≡ $N(t)$：表示在时间 $[0, t)$ 内到达的顾客数（$t > 0$）

≡ $P_n(t_1, t_2)$：表示在时间 $[t_1, t_2)$ 内（$t_2 > t_1$），有 n 个（$n \geq 0$）顾客到达的概率

Δ 在时间 $[t_1, t_2)$ 内有 n 个顾客到达，是随机事件

Δ $P_n(t_1, t_2) = P\{N(t_2) - N(t_1) = n\}$ （$t_2 > t_1$，$n \geq 0$）

泊松流的定义

- 当$P_n(t_1, t_2)$满足下列三个条件时，就说顾客的到达形成泊松流，或顾客是按泊松流到达的。
  - △（1）在不相重叠的时间区间内，顾客到达数是相互独立的
    - 即：$P\{N(\Delta t_2) \mid N(\Delta t_1)\} = P\{N(\Delta t_2)\}$
    - 我们称这种性质为无后效性
  - △（2）对充分小的时长Δt，在时间[t, t+Δt)内，
    - 有一个顾客到达的概率与t无关
    - 而约与时长Δt成正比
    - 即$P_1(t, t+\Delta t) = \lambda \cdot \Delta t + O(\Delta t)$
    - 其中，$O(\Delta t)$是当$\Delta t \to 0$时关于Δt的高阶无穷小
      λ是大于零的常数，它表示单位时间内有一个顾客到达的概率，称为概率强度
    - 我们称这种性质为平稳性
  - △（3）对于充分小的时长Δt，在时间[t, t+Δt)内，
    - 有两个或两个以上顾客到达的概率极小，以致可以忽略
    - 即

$$\sum_{n=2}^{\infty} P_n(t, t+\Delta t) = O(\Delta t)$$

    - 我们称这种性质为疏稀性

- 在泊松流条件下，顾客到达数n的概率分布
  - 由平稳性条件，我们可以取时间从0开始，并简记为
    - $P_n(0, t) = P_n(t)$
    - 即由平稳性知，概率分布与时间起点无关，只与时长有关
  - 由平稳性和稀疏性，可以推出在[t, t+Δ t)内，没有顾客到达的概率：

$$
\begin{aligned}
P_0(t,t+\Delta t) &= 1-P_1(t,t+\Delta t)-P_2(t,t+\Delta t)-P_3(t,t+\Delta t)-\ldots\ldots \\
&= 1-P_1(t,t+\Delta t)-\sum_{n=2}^{\infty}P_n(t,t+\Delta t) \\
&= 1-\lambda\cdot\Delta t+O(\Delta t)
\end{aligned}
$$

  - 下面求$P_n(t)$
    - 方法：建立未知函数的微分方程
    - 先求未知函数$P_n(t)$从时刻t到t+Δ t的改变量
    - 然后建t时刻的概率分布与t+Δt时刻的概率分布的关系方程
    - 区间[0, t+Δ t)可以分成两个互不重叠的区间[0, t)和[t, t+Δ t)

△ 顾客到达总数是n，分别出现在这两个区间上，不外乎下列三种情况：

区间 / 情况	$[0,t)$		$[t,t+\Delta t)$		$[0,t+\Delta t)$	
	到达个数	概率	到达个数	概率	到达个数	概率
A	n	$P_n(t)$	0	$1-\lambda\Delta t+0(\Delta t)$	n	$P_n(t)[1-\lambda\Delta t+0(\Delta t)]$
B	n−1	$P_{n-1}(t)$	1	$\lambda\Delta t$	n	$P_{n-1}(t)\lambda\Delta t$
C	n−2 n−3 . . . 0	$P_{n-2}(t)$ $P_{n-3}(t)$ . . . $P_0(t)$	2 3 . . . n	$O(\Delta t)$ $O(\Delta t)$ . . . $O(\Delta t)$	n n . . . n	$O(\Delta t)$ $O(\Delta t)$ . . . $O(\Delta t)$

△ 所以，概率$P_n(t+\Delta t)$应是这三种情况之和：

- 各$O(\Delta t)$合为一项

$$P_n(t+\Delta t)=P_n(t)(1-\lambda\cdot\Delta t)+P_{n-1}(t)\lambda\cdot\Delta t+0(\Delta t)$$

Δ 作变换:

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\frac{O(\Delta t)}{\Delta t}$$

Δ 令**Δt→0**，得下列方程，并注意初始条件:

- $$\begin{cases}\dfrac{dP_n(t)}{dt}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t) & n\geq 1\\ P_n(0)=0 & n\geq 1\end{cases}$$

Δ 当**n = 0**时，没有**B**和**C**两种情况，所以得:

- $$\begin{cases}\dfrac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t)\\ P_0(0)=1\end{cases}$$

△ 解(4.1-5) 和 (4.1-6)两式，

- 由(4.1-6)式：$P_0(t) = ce^{-\lambda t}$
- $P_0(0) = c = 1 \quad \therefore P_0(t) = e^{-\lambda t}$
- 由4.1-5式：两边乘积分因子$e^{\lambda t}$

$$e^{\lambda t}\frac{dP_n(t)}{dt} + \lambda P_n(t)e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)$$

$$\frac{d[P_n(t)e^{\lambda t}]}{dt} = \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)$$

- 积分得: $$P_n(t)e^{\lambda t} = \lambda\int_0^t P_{n-1}(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau$$
- n = 1: $$P_1(t)e^{\lambda t} = \lambda\int_0^t P_0(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau$$

$$= \lambda\int_0^t e^{-\lambda\tau}e^{\lambda\tau}d\tau = \lambda t$$

- $\therefore P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$

- **n = 2:** $$P_2(t)e^{\lambda t} = \lambda\int_0^t P_1(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau$$

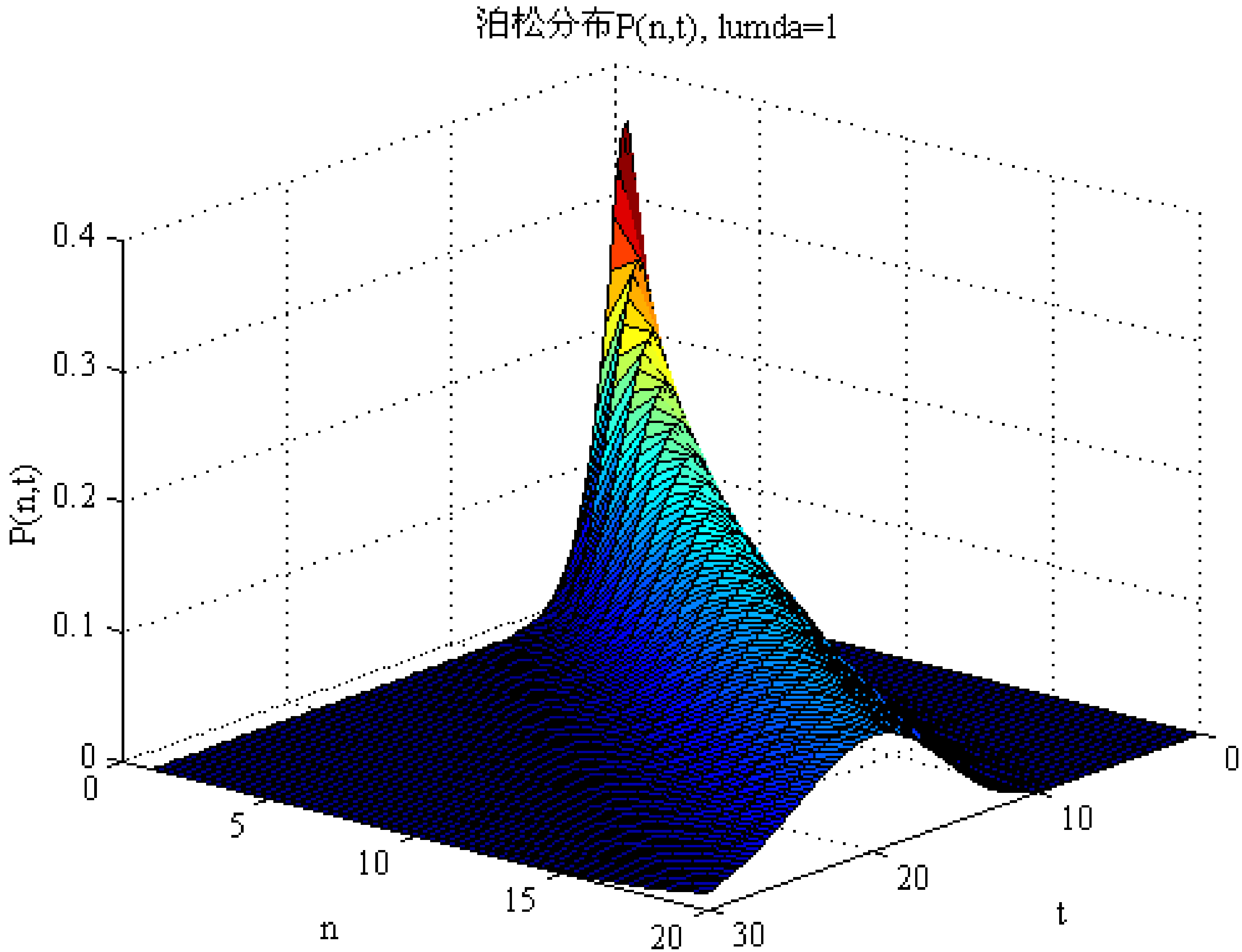
$$= \lambda\int_0^t \lambda\tau\cdot e^{-\lambda\tau}e^{\lambda\tau}d\tau = \frac{(\lambda t)^2}{2}$$

- $\therefore$ $$P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!}e^{-\lambda\tau}$$

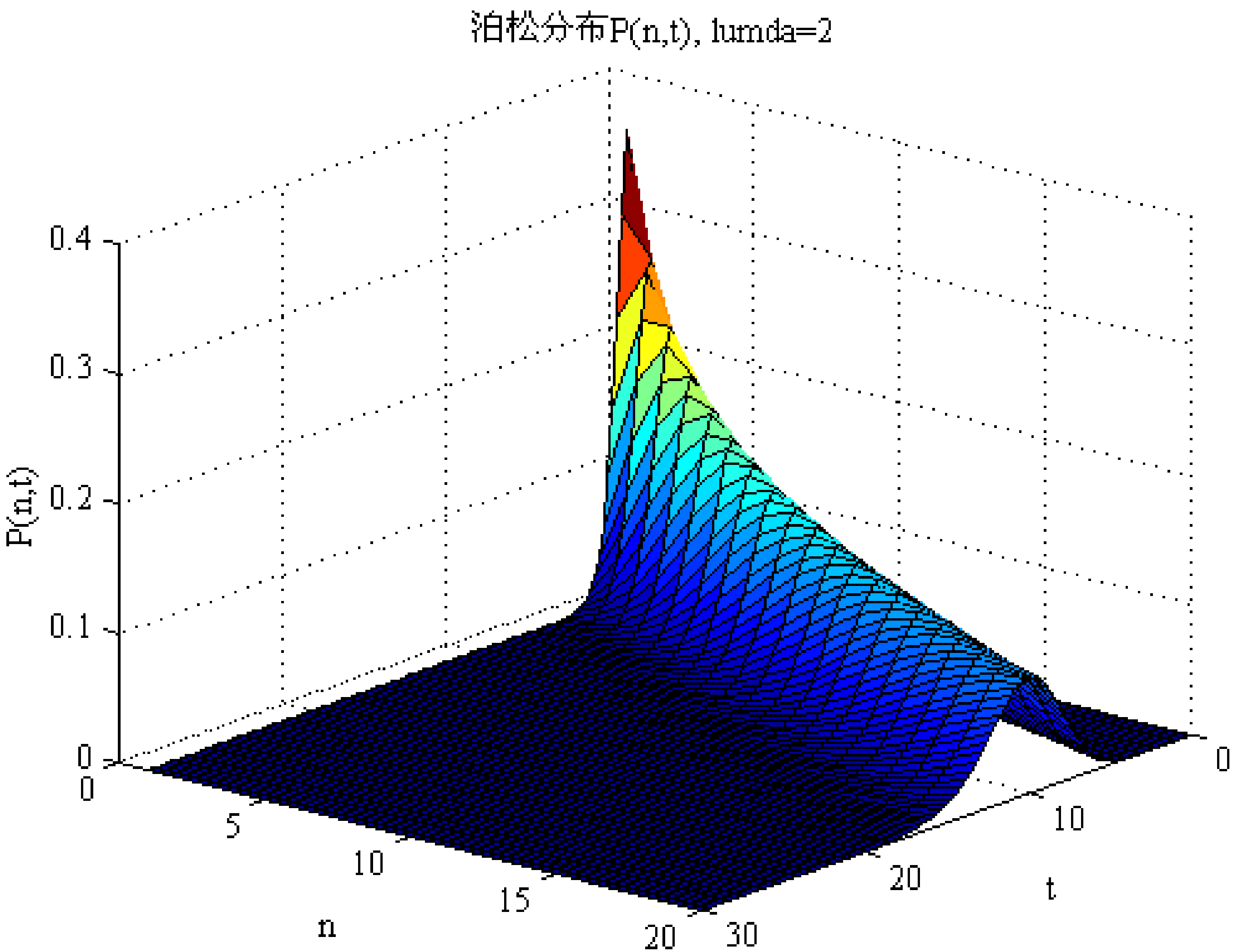
- 依此类推，最终可得:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda t} \qquad t>0;\quad n=0,1,2,\cdots$$

Δ 下图是当 λ=1时，在观察时间 t 内，到达n个顾客的概率曲面



△ 下图是当 λ=2时，在观察时间t内，到达n个顾客的概率曲面



≡ 泊松过程的数学期望

- ∆ P_n（t）表示在时长t内到达n个顾客的概率
- ∆ 随机变量｛N(t) = N(s + t) − N(s)｝服从泊松分布
- ∆ 其数学期望是: E[N(t)] = λt
- ∆ 【证明】

$$E[N(t)] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{(i-1)!} = \lambda \cdot t \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!}$$

$$= \lambda \cdot t \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t} = \lambda \cdot t$$

- ∆ 可见，参数λ恰好是单位时间内平均到达的顾客数
- ∆ 因此，也称之为顾客到达率

≡ 泊松过程的方差

Δ 其方差是: **D[N(t)] = λt**

Δ【证明】 **D[N(t)] = E[N²(t)] − {E[N(t)]}²**

- 其中:

$$
\begin{aligned}
E[N^2(t)] &= E\{N(t)[N(t)-1]+N(t)\} \\
&= E\{N(t)[N(t)-1]\}+E[N(t)] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)P_i(t)+\lambda t \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}+\lambda t \\
&= e^{-\lambda t}(\lambda t)^2\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{i-2}}{(i-2)!}+\lambda t \\
&= (\lambda t)^2+\lambda t
\end{aligned}
$$

- ∴ **D[N（t）] = （λt）² + λt − （λt）² = λt**

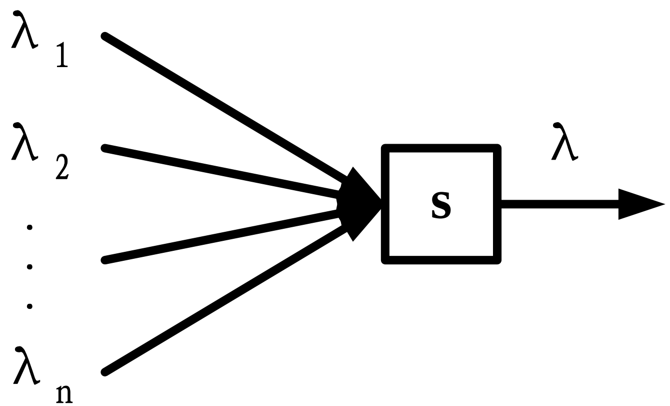
Δ 期望值与方差相等，是泊松分布的一个重要特征

- 我们可以利用它对一个经验分布是否合于泊松分布进行初步的识别

泊松过程的性质

- 泊松过程是一个很简单的随机过程
  - 具有很多良好的性质

- 性质一： 泊松过程的可加性
  - 设有n个泊松流
    - 参数分别为：λ_1、λ_2、……、λ_n
    - 它们之间是相互独立的
  - 如果这些泊松流合并为一个流，即合并为一个随机过程，则：
    - 合并后的流仍为泊松流
    - 其参数为：$\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\ldots\ldots+\lambda_n$



＝泊松过程的性质

≡性质一： 泊松过程的可加性

△证明

- 以n=2的情况为例来证明
- 设$N_1(t)$：时间[0，t)内第一个流到达的顾客数，
- $N_2(t)$：时间[0，t)内第二个流到达的顾客数，
- $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ 表示时间[0，t)内两个流合并后到达的顾客数
- 则N(t)=k的概率为：

$$P\{N(t)=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{N_1(t)=i,\ \ N_2(t)=k-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}P\{N_1(t)=i\}\cdot P\{N_2(t)=k-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{(\lambda_1 t)^i}{i!}e^{-\lambda_1 t}\bullet\frac{(\lambda_2 t)^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2 t}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\sum_{i=0}^{k}\frac{(\lambda_1 t)^i}{i!}\bullet\frac{(\lambda_2 t)^{k-i}}{(k-i)!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}(\lambda_1 t)^i(\lambda_2 t)^{k-i}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{k!}[(\lambda_1+\lambda_2)t]^k$$

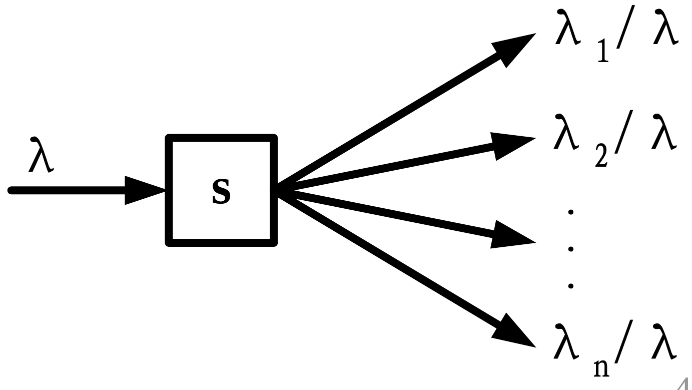
$$=\frac{[(\lambda_1+\lambda_2)t]^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

- 可见，N(t)=k为参数是$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$的泊松流
- 此结果可以推广到n>2的情况。

泊松过程的性质

性质二： 泊松过程的可分解性

- 设有一个泊松流
  - 参数为λ
- 随机地分成n个流
  - 如：顾客到达后分别走向n个不同的方向（分别去乘n路公共汽车、分别走向n个路口、分别去n个窗口排队、等）
  - 它们之间是相互独立的，
  - 且去每个方向的概率分别为：$p_i = \lambda_i / \lambda$, $i=1,2,\ldots,n$
  - $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_n$
- 则： 这n个流仍为相互独立的泊松流，
  - 且参数分别为λ_1、λ_2、……、λ_n



= 泊松过程的性质

≡性质二： 泊松过程的可分解性

Δ 证明

- 以n=2的情况为例来证明
- 设N(t)表示时间[0，t)内初始流到达的顾客数，
- N_1(t)表示时间[0，t)内第一个流到达的顾客数，
- N_2(t)表示时间[0，t)内第二个流到达的顾客数，
- 则N(t) = N_1(t)+ N_2(t)
- 下面计算概率P{ N_1(t)=k_1，N_2(t)=k_2}：
- 因为初始流为泊松流，所以：N(t)=k的概率为：

$$P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda t} \qquad t>0;\ \ k=0,1,2,\cdots$$

- 这k个顾客中，假设有N_1(t)=k_1个去了第一个流，有N_2(t)=k_2个去了第二个流，
- 其中$k=k_1+k_2$，$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$
- （$k=\lambda/t$，$\lambda_1=k_1/t$，$\lambda_2=k_2/t$）

＝泊松过程的性质

≡性质二：　泊松过程的可分解性

△ 证明

- 这是一个k阶贝努力试验，其发生的概率为：

$$P\{N_1(t)=k_1,\ \ N_2(t)=k_2 \mid N(t)=k\}=C_k^{k_1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{k_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^{k_2}$$

- 则第一个流有k_1个顾客，第二个流有k_2个顾客的概率为：

$$\begin{aligned}
&P\{N_1(t)=k_1,\ \ N_2(t)=k_2\}\\
&=P\{N_1(t)=k_1,\ \ N_2(t)=k_2 \mid N(t)=k\}\cdot P\{N(t)=k\}\\
&=C_k^{k_1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{k_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^{k_2}\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda t}\\
&=\frac{k!}{k_1!(k-k_1)!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{k_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^{k_2}\cdot\frac{(\lambda t)^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)!}\cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\\
&=\frac{(\lambda_1 t)^{k_1}}{k_1!}e^{-\lambda_1 t}\cdot\frac{(\lambda_2 t)^{k_2}}{k_2!}e^{-\lambda_2 t}\\
&=P\{N_1(t)=k_1\}\cdot P\{N_2(t)=k_2\}
\end{aligned}$$

= 泊松过程的性质

≡性质二： 泊松过程的可分解性

Δ 证明

- 可见，初始泊松流按照$p_1=\lambda_1/\lambda$ 和$p_2=\lambda_2/\lambda$ 分解为两个独立的泊松流，这两个泊松流的参数分别为λ_1和λ_2
- 此结果可以推广到n>2的情况。

≡泊松过程的这些性质使得它在解决很多工程问题时非常方便。

– 负指数分布

= 定义：随机变量T的概率密度若是：

Δ $$f_T(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

Δ 则称T服从负指数分布

≡ 其分布函数是：

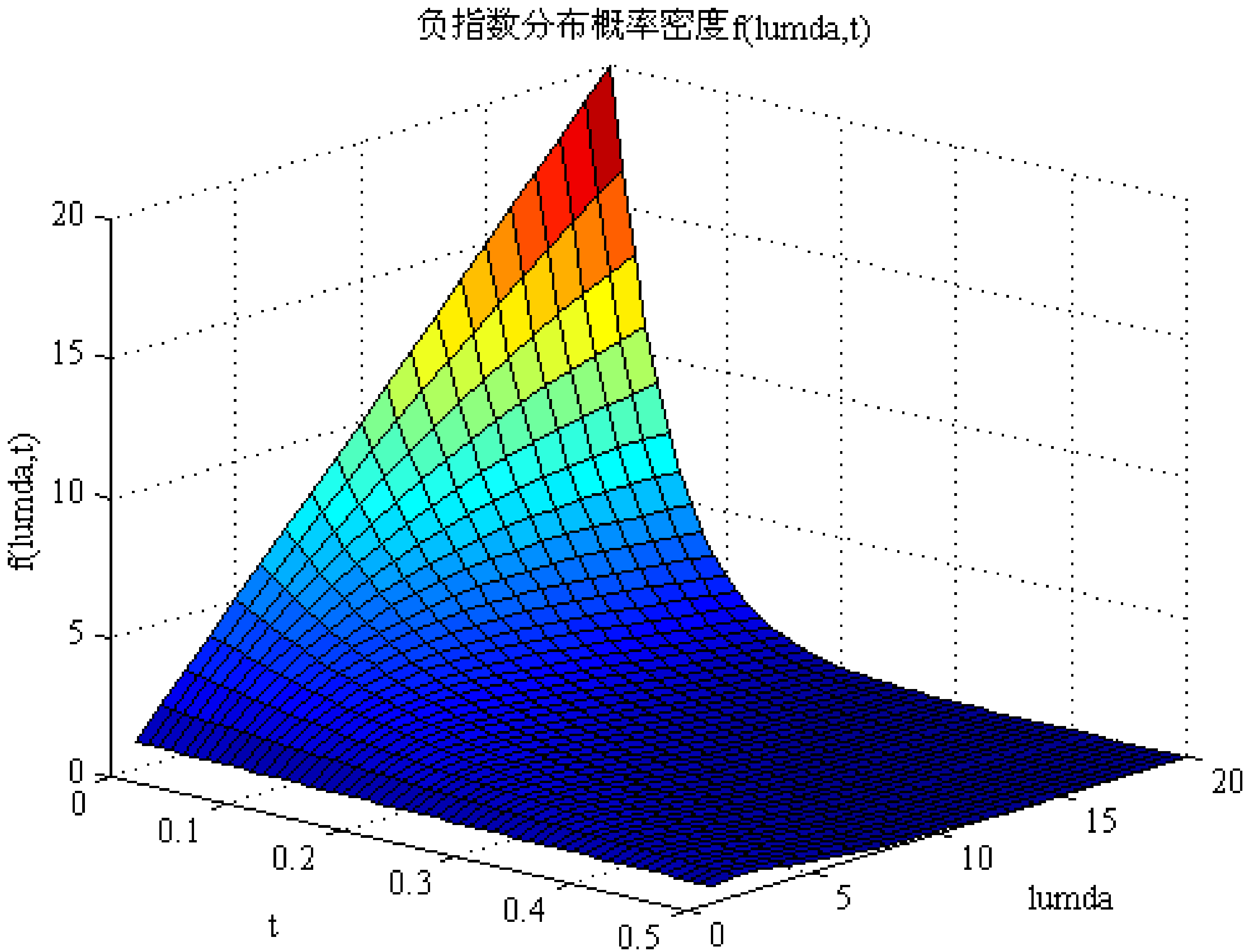
Δ $$F_T(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

≡ 其数学期望是： **E[T]=1/λ**

≡ 其均方差是： **D[T]=1/λ²**

≡ 其标准差是： **σ[T]=1/λ**

≡ 负指数分布的概率密度曲面



负指数分布的性质

- 无记忆性（或马尔柯夫性，所以又称为M分布）
  - 即：$P\{T > t + s \mid T > s\} = P\{T > t\}$
  - 其含义是:
    - 若T表示排队系统中顾客等待服务的时间
    - 则这个性质说明，若一个顾客已经等待了时间s，
    - 那么他还要再等待时间t才能被服务的概率与他刚进入系统时（即尚未等待时间s时）需等待时间t的概率是一样的
    - 也就是说，这种情况下顾客的等待时长是纯随机的
- 若输入过程为泊松流
  - 则顾客相继到达的间隔时间T一定服从负指数分布

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t} \qquad t > 0;\quad n = 0,1,2,\cdots$$

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- ≡ 若输入过程为泊松流
  - Δ 则顾客相继到达的间隔时间T一定服从负指数分布
- ≡ 【证明】
  - Δ 对于泊松流，在时间[0, t)内至少有1位顾客到达的概率是:

$$1-P_0(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda t}$$

$$=e^{-\lambda t}(e^{\lambda t}-1) \qquad t>0$$

$$=1-e^{-\lambda t}$$

  - Δ 此概率又可表示为：P｛T ≤ t｝=$F_T(t)$＝1－$e^{-\lambda t}$， t > 0
  - Δ 对比(4.1-10)式可知，T服从负指数分布，证毕
- ≡ 所以“相继到达的间隔时间是独立的且服从负指数分布”与“输入过程为泊松流”是等价的
  - Δ 因此，在阚德尔(Kendall)记号中就都用M表示

= 几点说明

≡ 对于泊松流

Δ λ表示单位时间内平均到达的顾客数

Δ 1/λ表示相继顾客到达的平均间隔时间

≡ 服务时间v的分布

Δ 服务时间v即为一顾客服务的时间

Δ 亦即：在忙时相继离开系统的两顾客的间隔时间

Δ 有时，服务时间v也服从负指数分布

Δ 其分布函数为： $F_v(t) = 1 - e^{-\mu \cdot t}$

Δ 其概率密度为： $f_v(t) = \mu e^{-\mu \cdot t}$

Δ μ表示单位时间内能被服务完成的顾客数，称为平均服务率

Δ 1/μ = E（v）表示一个顾客的平均服务时间

– 爱尔朗（Erlang）分布

= 定义

≡ 设$v_1, v_2, \cdots; v_k$是k个相互独立的随机变量

≡ 它们服从相同参数kμ的负指数分布 $f_{v_i}(t) = k\mu e^{-k\mu \cdot t}$

≡ 令：$T = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$ $F_{v_i}(t) = 1 - e^{-k\mu \cdot t}$

≡ 则T的概率密度为：

$$\Delta \quad b_k(t) = \frac{\mu k(\mu k t)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\mu \cdot k \cdot t} \qquad t > 0$$

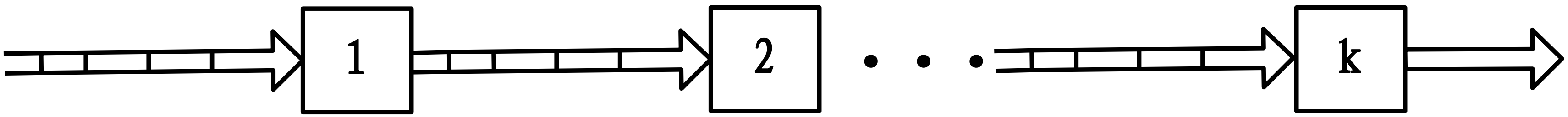
≡ 称T服从 k阶爱尔朗分布

≡ 其均值：E[T] = 1/μ

≡ 其方差：D[T] = 1/(kμ²)

爱尔朗分布例1：串列的k个服务台问题

- 串列的k个服务台，每台的服务时间相互独立
- 且均服从相同的负指数分布（参数为kμ）
- 则：一顾客走完这k个服务台总共需要的服务时间T，就服从k阶爱尔朗分布



$$f_{v_i}(t) = k\mu e^{-k\mu\cdot t} \qquad F_{v_i}(t) = 1 - e^{-k\mu\cdot t}$$

$$b_k(t) = \frac{\mu k(\mu k t)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot e^{-\mu\cdot k\cdot t} \qquad t > 0$$

= 爱尔朗分布例2：成批出发的排队问题

≡ 在一个公共汽车站，发车规则是：

Δ 当一辆车的所有k个座位都坐满后，就发车

≡ 则相邻两趟车发车的时间间隔t就服从k阶爱尔朗分布

Δ 假设顾客到达车站的速率为kλ(即单位时间平均到达kλ位)

Δ 假设相邻两顾客间的时间间隔t′服从负指数分布（即泊松流）

- $$f(t') = k\lambda \cdot e^{-k\cdot\lambda\cdot t'}$$

Δ 两车间的时间间隔 $t = t_1' + t_2' + \cdots + t_k'$

Δ 由于各t′是相互独立的

Δ 所以，t的分布是f(t′)的k次卷积

Δ 或t的特征函数φ(Z)是t′的特征函数的k次方

- $$\phi(Z) = \left[\frac{k\lambda}{k\lambda - iZ}\right]^k$$

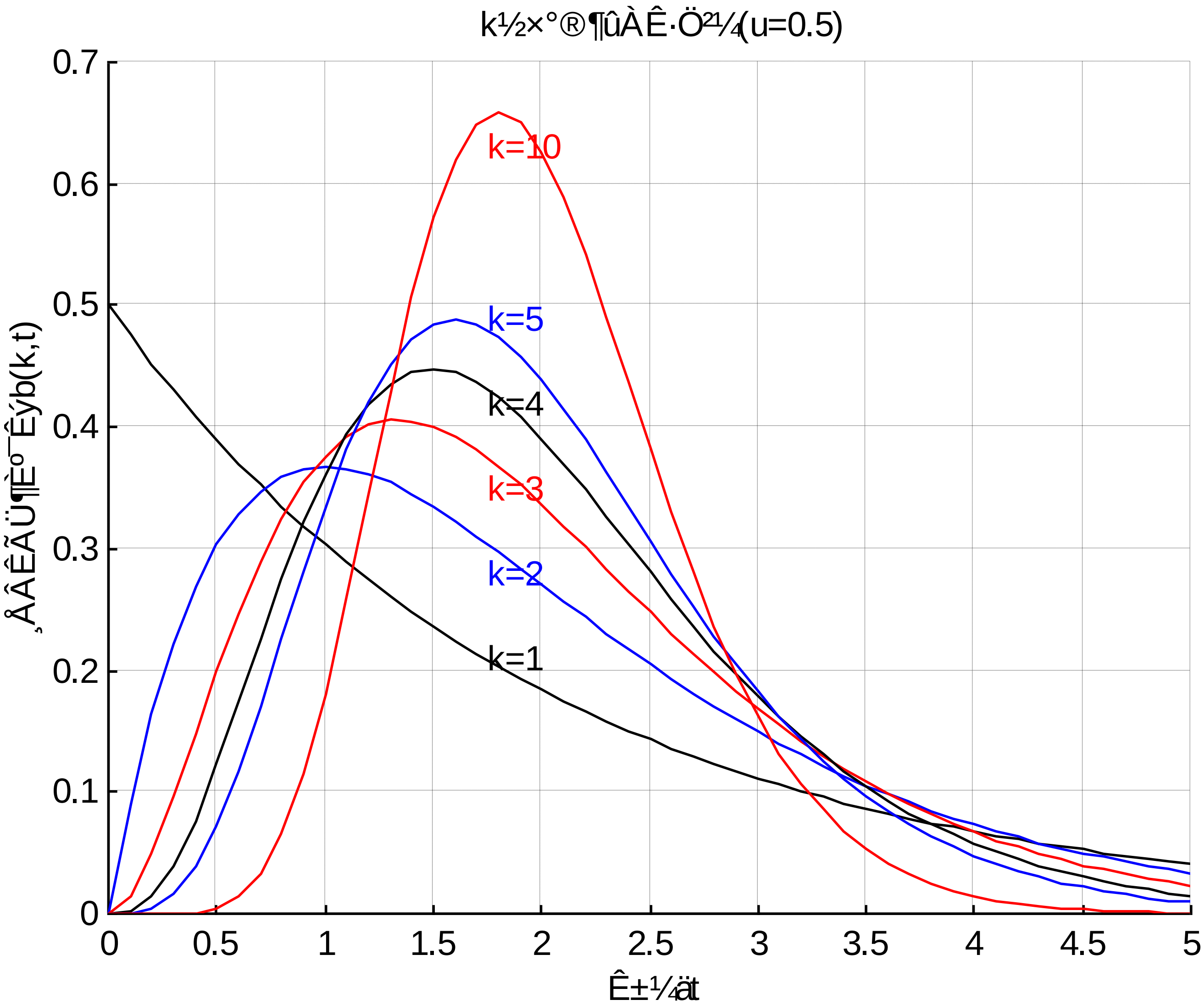
Δ 经反变换就得到（4.1-13）式

$$b_k(t) = \frac{\lambda k(\lambda k t)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-k\cdot\lambda\cdot t}$$

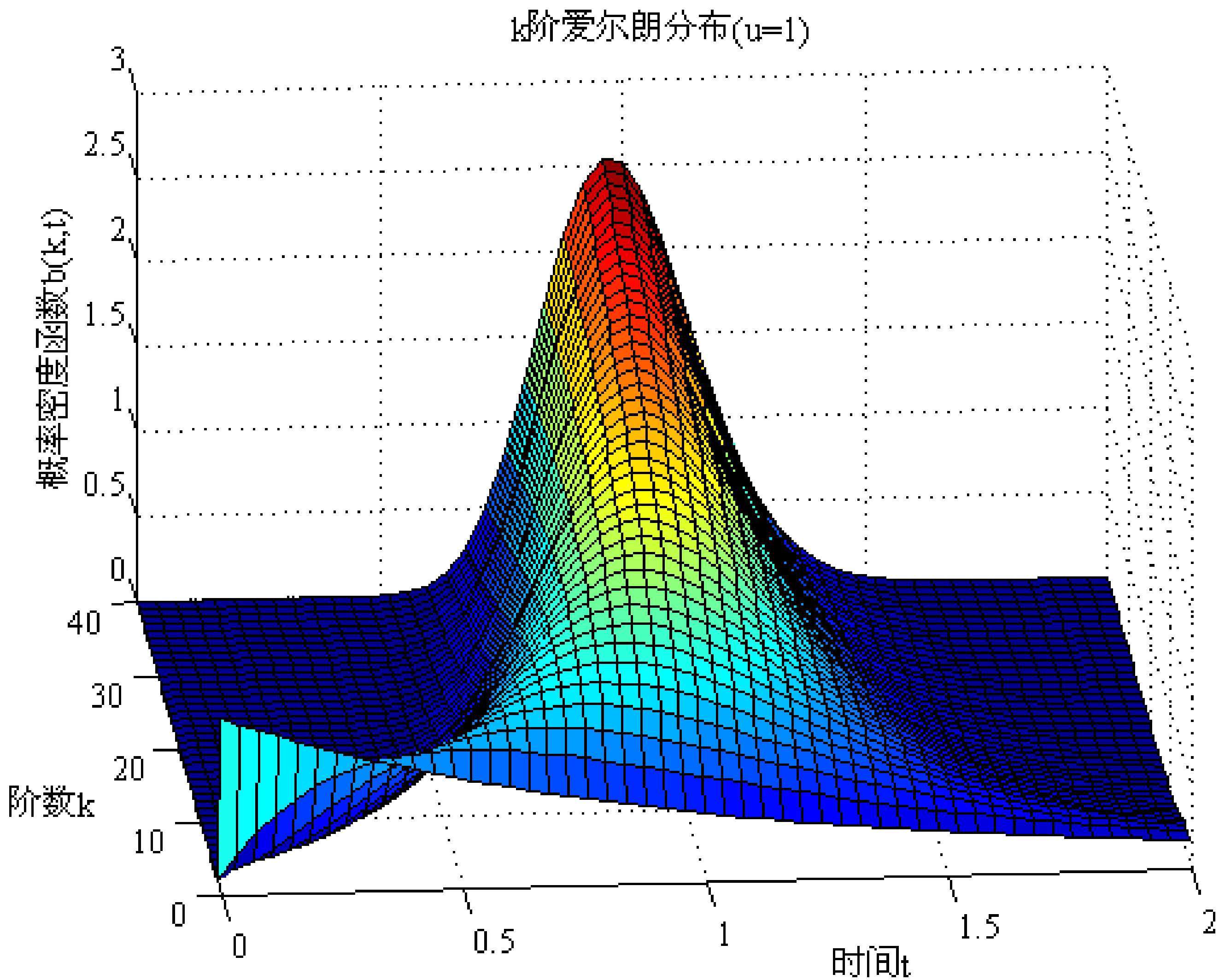
$$b_k(t) = \frac{\mu k(\mu k t)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\mu \cdot k \cdot t}$$

- 注：
  - 爱尔朗分布族提供更为广泛的模型类
  - 比指数分布有更强的适应性
  - 当k = 1时，爱尔朗分布即为负指数分布
    - Δ 此时，过程可看作是完全随机的
  - 当k增大时，爱尔朗分布的概率密度函数逐渐变为对称的
  - 当k≥30时，爱尔朗分布近似于正态分布
  - 当k→∞时，D[T] →0，b(t) = δ (t – 1/μ)
    - Δ 此时，爱尔朗分布变为确定型分布（D分布）
  - 可见，一般k阶爱尔朗分布可以看成是，完全随机过程与完全确定过程的中间型
    - Δ 因此，在表达现实世界中的随机过程时，能够提供更为广泛的适应性

≡爱尔朗分布的概率密度函数b(t)



≡ 爱尔朗分布的概率密度函数b(k, t)



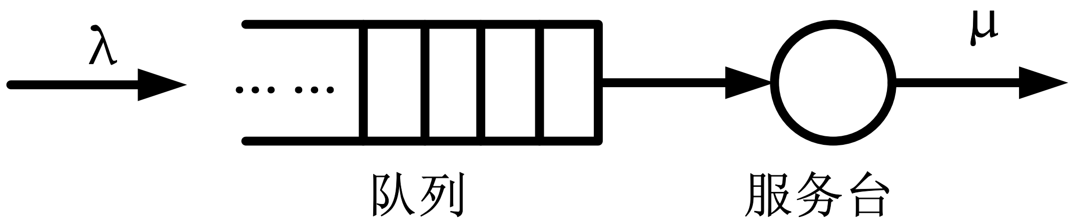
- **R阶指数分布（H_R分布）**
  - 定义
    - 概率密度函数是 $a(t)=\sum_{i=1}^{R}\partial_i\lambda_i e^{-\lambda_i t}$
    - 且有：$\sum_{i=1}^{R}\partial_i=1$
  - 例
    - 当有R类不同顾客到达
      - 各类的平均到达率不相同
      - 分别为 λ_1，λ_2，…，λ_R
      - 均服从以各自到达率为参数的负指数分布
    - 各类顾客所占的比例分别为 α_1，α_2，…；α_R
    - 当这些顾客混合排队时
      - 顾客到达的平均时间间隔的概率分布就是H_R分布

4.1.3 单服务台负指数分布排队系统的分析
（M / M / 1 排队系统的分析）

- 本节将讨论
  - 输入过程为泊松流
  - 服务时间服从负指数分布
  - 单个服务台的排队系统
- 这种排队系统可分为:
  - 标准的M/M/1模型，即M/M/1 / ∞/∞/FCFS
  - 系统容量有限的M/M/1模型，即M/M/1 / N/∞/FCFS
  - 顾客源有限的M/M/1模型，即M/M/1 / ∞/M/FCFS

– 标准的M/M/1模型（M/M/1 / ∞/∞/FCFS）

- 定义:
  - 满足下列条件的排队系统为标准的M/M/1模型
  - 输入过程:
    - 顾客源是无限的
    - 顾客单个到来且相互独立
    - 一定时间内到达的顾客数服从泊松分布
    - 到达过程已是平稳的
  - 排队规则:
    - 单队
    - 队长没有限制
    - 先到先服务



  - 服务机构
    - 单服务台
    - 各顾客的服务时间是相互独立的，且服从相同的负指数分布
  - 注：顾客到达的间隔时间与服务时间是相互独立

= 系统分析

≡ 首先要求出系统在任意时刻t的状态为n的概率P_n（t）

Δ 即系统在时刻t处有n个顾客的概率

Δ 它决定了系统运行的特征

≡ 已知：到达规律服从参数为λ的泊松过程

≡ 服务时间服从参数为μ的负指数分布

Δ 所以，在[t, t+Δ t)时间内，可分为如下三种情况:

（1）有一个顾客到达，概率为：$\lambda \Delta t + O(\Delta t)$

没有顾客到达， 概率为：$1 - \lambda \Delta t + O(\Delta t)$

（2）当有顾客在接受服务时，

1个顾客被服务完成，离去的概率为：$\mu \Delta t + O(\Delta t)$

没有顾客离去的概率为：$1 - \mu \Delta t + O(\Delta t)$

（3）多于一个顾客的到达或离去的概率是：$O(\Delta t)$，即可以忽略

△ 在时刻t + Δt处，系统中有n个顾客（n > 0）的情况可分为下列四种：（到达或离去2个以上的情况未列入）

情况	在时刻 t 处顾客数	在时间（t, t + Δt）到达	在时间（t, t + Δt）离去	在时刻 t + Δt 处顾客数	概率（略去 O（t））
A	n	×	×	n	$P_n(t)\cdot(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)$
B	n + 1	×	√	n	$P_{n+1}(t)\cdot(1-\lambda\Delta t)\cdot\mu\Delta t$
C	n − 1	√	×	n	$P_{n-1}(t)\cdot\lambda\Delta t\cdot(1-\mu\Delta t)$
D	n	√	√	n	$P_n(t)\cdot\lambda\Delta t\cdot\mu\Delta t$

△ 由于这四种情况是互不相容的，所以，P_n（t + Δt）应是这四项概率之和。即：（将Δt的高阶无穷小合为一项）

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)\,(1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t) + P_{n+1}(t)\mu\Delta t + P_{n-1}(t)\,\lambda\Delta t + O(t)$$

- 整理：$\dfrac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = \lambda\cdot P_{n-1}(t)+\mu P_{n+1}(t)-(\lambda+\mu)P_n(t)+\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}$
- 令 Δt→0，得到关于P_n（t）的微分差分方程：

△ $$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda\cdot P_{n-1}(t)+\mu P_{n+1}(t)-(\lambda+\mu)P_n(t) \qquad n=1,2,\cdots\cdots$$

△ 找出边界条件:

- 当n = 0时，只有前表A、B两种情况:

$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1-\lambda\Delta t) + P_1(t)(1-\lambda\Delta t)\mu\Delta t$

- 处理后得: $$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t)$$
- 这样的系统状态n随时间变化的过程是称为生灭过程的一个特殊情形

△ 求解这些方程是很麻烦的

- 求得的瞬态解中，含有修正的贝塞尔函数，∴不便于应用

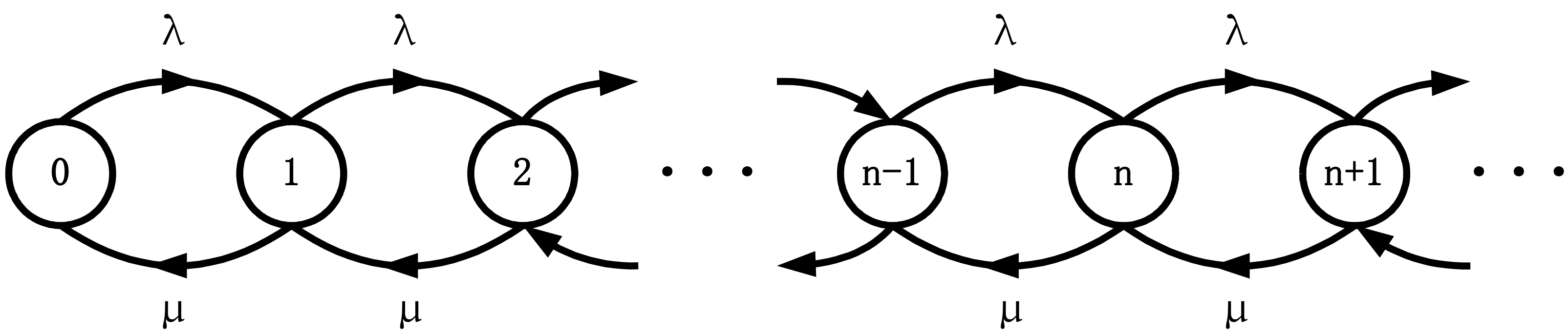
△ 我们只研究稳态的情况

- 此时$P_n(t)$与t无关，可写成P_n，其导数为0
- 可得:

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 & (4.1\text{–}17) \\ \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} - (\lambda+\mu)P_n = 0 \qquad n > 0 & (4.1\text{–}18) \end{cases}$$

- 这是关于P_n的差分方程，它表明了各状态间的转移关系，如图

- 这组P_n的差分方程表明了各状态间的转移关系，如下面状态转移图



$$\mu P_1 = \lambda P_0$$

$$\lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} = (\lambda + \mu) P_n$$

- 从图中可以看出：
- 状态0转移到状态1的转移率为 λP_0
- 状态1转移到状态0的转移率为μP_1
- 对状态0，必须满足平衡方程： $\lambda P_0 = \mu P_1$
- 同样，对任何$n\geq 1$的状态，可得到（4.1-18）的平衡方程：
  $\lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} = (\lambda + \mu) P_n$
- 解（4.1-17）得： $$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot P_0$$
- 代入（4.1-18），并令$n = 1$，得： $$\mu \cdot P_2 = (\lambda + \mu) \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot P_0 - \lambda P_0$$
- $\therefore$ $$P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot P_0$$

- 依此类推，可得： $$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$$
- 令$\rho = \lambda/\mu < 1$ (否则系统不稳定，队列将排至无限长)
- 又由概率的归一性： $$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$
- 将P_n的关系式代入： $$P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = P_0 \cdot \frac{1}{1-\rho} = 1$$
- 得到： $$\begin{cases} P_0 = 1-\rho & \rho < 1 \\ P_n = (1-\rho)\rho^n & n \geq 1 \end{cases} \qquad (4.1\text{-}19)$$
- 这是系统状态为n的概率

Δ 参数ρ的实际意义:

（1）若ρ表达为: $\rho = \lambda/\mu$

- 它是平均到达率与平均服务率之比
- 即在相同的时间范围内，顾客到达的平均数与被服务的平均数之比

（2）若ρ表达为: $$\rho = \frac{1/\mu}{1/\lambda}$$

- 它是一个顾客的平均服务时间与平均到达间隔时间之比
- 称ρ为服务强度（traffic intensity）
- 或称ρ为话务强度
- （这是因为，早期的排队论是由爱尔朗等人在研究电话理论时提出的，所用的术语多与电话网有关）

（3）由（4.1-19）式: $\rho = 1 - P_0$

- 它刻划了服务机构的繁忙程度
- 所以又称为：服务机构的利用率

≡ 系统的运行指标

Δ（1）在系统中的平均顾客数（系统队长的期望值）L_S

$$L_S = E(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (1-\rho)\rho^n$$

$$= (\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \cdots) - (\rho^2 + 2\rho^3 + 3\rho^4 + \cdots)$$

$$= \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} \qquad (0 < \rho < 1)$$

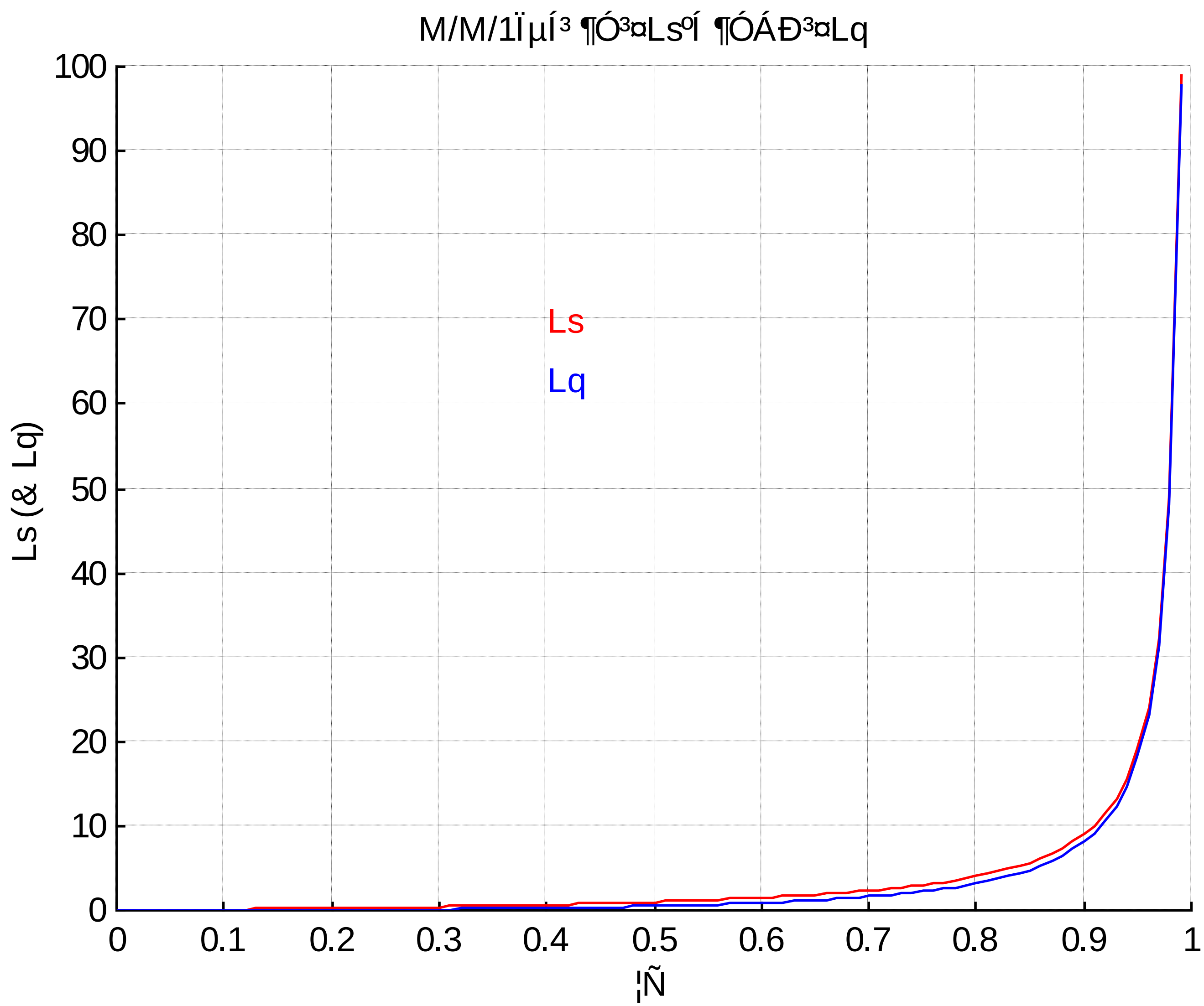
或：$L_S = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}$

Δ（2）在队列中等待的平均顾客数（队列长的期望值）L_q

$$L_q = E(n-1) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) P_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

$$= L_S - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\rho\lambda}{\mu - \lambda}$$

Δ 系统队长的期望值L_S和队列长的期望值L_q的曲线



Δ（3）顾客在系统中逗留时间的期望值W_s

- 逗留时间W（随机变量）在M/M/1情形下，服从参数为μ－λ的负指数分布，即：

$$\begin{cases} \text{分布函数} \quad F(w) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)w} \\ \text{概率密度} \quad f(w) = (\mu-\lambda)\cdot e^{-(\mu-\lambda)w} \end{cases} \qquad w \geq 0 \qquad (4.1\text{-}20)$$

- 【证明】

– 设顾客到达时，系统已有n个顾客，这一状态概率为π_n
  = 若顾客到达是泊松流，则：$\pi_n = P_n$
– 则此顾客的逗留时间W_n应为
  = 前n个顾客的服务时间T_i和此顾客的服务时间T_{n+1}之和
  = 即：　$W_n = T_1' + T_2 + T_3 + \cdots + T_n + T_{n+1}$
  = 其中第一位顾客正被服务，T_1'是剩余的服务时间
– 令f（w｜n）表示W_n的概率密度
– 所以，w的概率密度为：$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} f(w|n)\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} f(w|n)P_n$

- 若T_i（i＝1,2, ⋯； n+1）都服从参数为μ的负指数分布
  - 则根据负指数分布的无记忆性，
  - T_1' 也服从同参数的负指数分布
- 则可知W_n服从爱尔朗分布：

$$f(w|n)=\frac{\mu\cdot(\mu\cdot w)^n e^{-\mu\cdot w}}{n!}$$

- 所以：

$$f(w)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\rho)\cdot\rho^n\frac{\mu\cdot(\mu\cdot w)^n}{n!}\cdot e^{-\mu w}$$

$$=(1-\rho)\cdot\mu\cdot e^{-\mu w}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\rho\cdot\mu\cdot w)^n}{n!}$$

$$=(\mu-\lambda)\cdot e^{-(\mu-\lambda)\cdot w}$$

• 证毕

• 也可以参见书上第171页的方法，思路和方法与此不一样

Δ 于是，可以得到逗留时间的期望值W_S

$$W_S = E[w] = 1/(\mu-\lambda)$$

Δ（4）在队列中顾客等待时间的期望值$\mathbf{W_q}$

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\mu}$$

Δ 将以上结论归纳如下：

$$L_S = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \qquad W_S = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\rho \cdot \lambda}{\mu-\lambda} \qquad W_q = \frac{\rho}{\mu-\lambda} \qquad (4.1-21)$$

Δ 各运行参数间的相互关系——列德尔（**Little**）公式

$$L_S = \lambda \cdot W_S \qquad L_q = \lambda \cdot W_q$$

$$W_S = W_q + \frac{1}{\mu} \qquad W_q = \rho \cdot W_S = W_S - \frac{1}{\mu} \qquad (4.1-22)$$

$$L_S = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \qquad L_q = \rho \cdot L_S = L_S - \rho$$

≡不同的服务规则：先到先服务 **FCFS**，

后到先服务 **LCFS**，

随机服务 **RS**

- Δ它们的不同点主要表现在：等待时间的分布函数是不同的
- Δ而一些参数的期望值是相同的
- Δ上面的各种指标都是期望值
- Δ所以各指标的计算公式对三种规则都适用
- Δ但对有优先权的排队规则不适用

- 举例
  - 某医院手术室根据病人来诊和完成手术时间的记录
    - 任意抽查100个工作小时
    - 每小时来就诊的病人数n的出现次数如表A
    - 又任意抽查了100个完成手术的病历
    - 手术所用时间v（小时）出现的次数如表B

表A

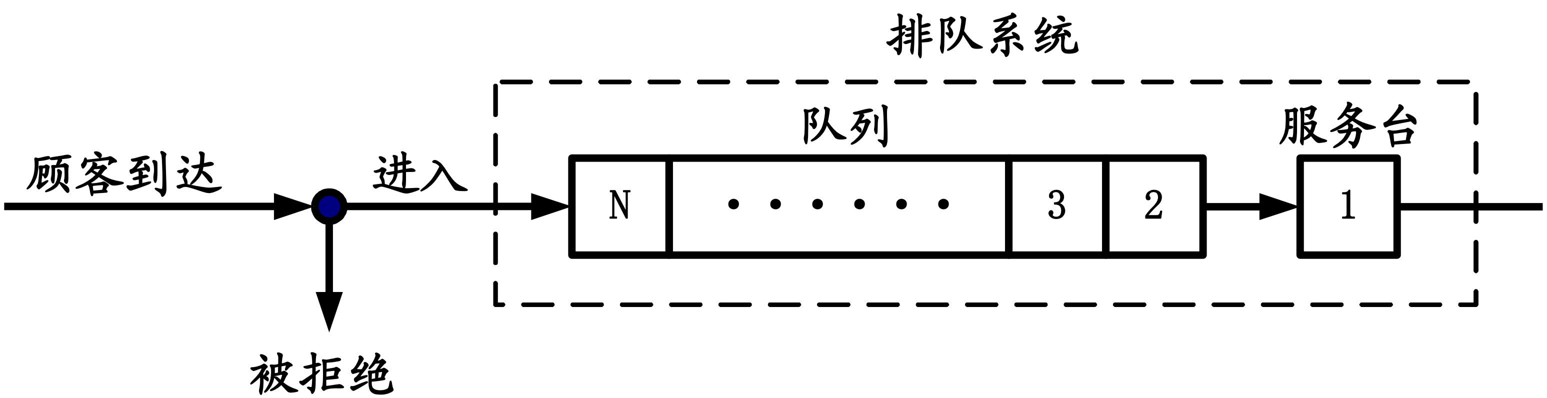
到达病人数 n	出现次数 f_n
0	10
1	28
2	29
3	16
4	10
5	6
6 以上	1

表B

手术时长 v	出现次数 f_v
0.0－0.2	38
0.2－0.4	25
0.4－0.6	17
0.6－0.8	9
0.8－1.0	6
1.0－1.2	5
1.2 以上	0

- 计算基本参数
  - 每小时病人平均到达率 = $\Sigma n f_n/100 = 2.1$（人/小时）
  - 每次手术平均时长 = $\Sigma v f_v/100 = 0.4$（小时/人）
  - 每小时平均完成手术人数 = 1/0.4 = 2.5（人/小时）
- 取 $\lambda = 2.1$，$\mu = 2.5$，通过统计检查的方法（如χ^2检查法）
  - 可以看出病人到达数服从参数为$\lambda = 2.1$的泊松分布
  - 而手术时长服从参数为$\mu = 2.5$的负指数分布
- $\rho = \lambda/\mu = 2.1/2.5 = 0.84$
  - 这说明服务机构（手术室）有84％的时间是繁忙的（被利用的）
  - 有16％的时间是空闲的
- 计算运行指标:
  - 在手术部门的病人数（期望值）$L_S = 2.1/(2.5-2.1) = 5.25$（人）
  - 病房中排队等待的病人数（期望值）$L_q = 0.84 \times 5.25 = 4.41$（人）
  - 病人在手术部逗留时间（期望值）$W_S = 1/(2.5-2.1) = 2.5$（小时）
  - 病人排队等待时间（期望值）$W_q = 0.84/(2.5-2.1) = 2.1$（小时）

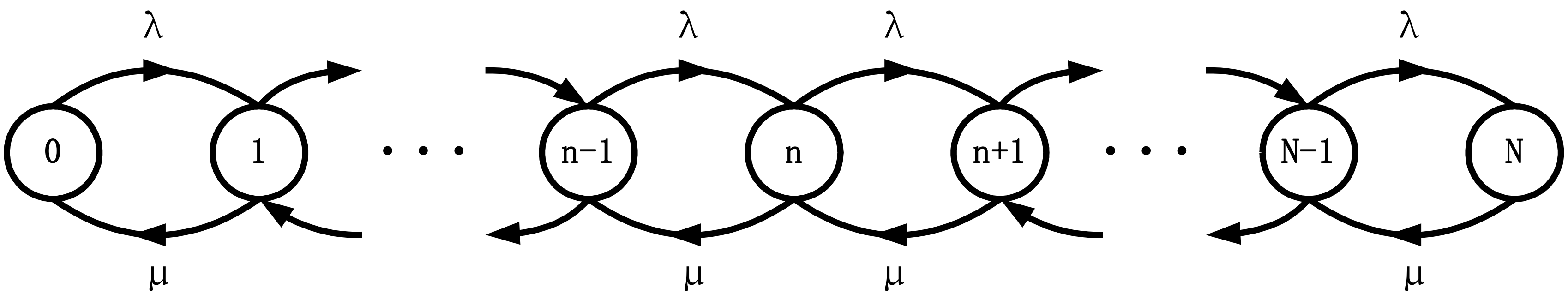
- 系统容量有限的M/M/1模型（M/M/1 /N/ ∞/FCFS）
  - 模型
    - 如果系统容量最大为N
    - 对于单服务台的情形
    - 排队等待的顾客最多为N－1个
    - 在某一时刻，一顾客到达时，若系统中已有N个顾客
    - 则这个顾客就拒绝进入系统



    - 当N＝1时，为即时制（立损制）的情形
    - 当N→∞时，为容量无限制的情形

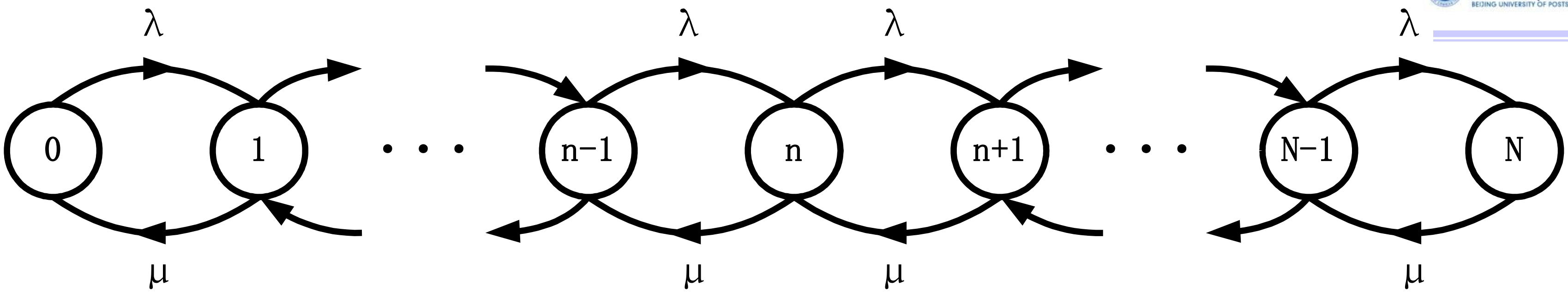
⌗ 稳态解

≡ 各状态间的转移关系图:



≡ 列出系统状态概率方程:

- Δ **n = 0:** $dP_0(t)/dt = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t)$
- Δ **0 < n ≤ N−1:** $dP_n(t)/dt = \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) - (\lambda + \mu) P_n(t)$
- Δ **n = N:** $dP_N(t)/dt = \lambda P_{N-1}(t) - \mu P_N(t)$



≡稳态下：列出状态概率的稳态方程：

Δ
$$\begin{cases} \mu \cdot P_1 = \lambda \cdot P_0 \\ \mu \cdot P_{n+1} + \lambda \cdot P_{n-1} = (\lambda + \mu) \cdot P_n \quad , \qquad n \le N-1 \\ \mu \cdot P_N = \lambda \cdot P_{N-1} \end{cases}$$ **(4.1-23)**

≡解此差分方程

Δ **$P_0 + P_1 + \cdots + P_N = 1$**

Δ **令$\rho = \lambda / \mu$**

Δ
$$\begin{cases} P_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} & \rho \ne 1 \\ P_n = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \cdot \rho^n & n \le N \end{cases}$$ **(4.1-24)**

≡求解差分方程的递推过程

$$\begin{cases} \mu\cdot P_1=\lambda\cdot P_0 \\ \mu\cdot P_{n+1}+\lambda\cdot P_{n-1}=(\lambda+\mu)\cdot P_n \quad , \qquad n\le N-1 \\ \mu\cdot P_N=\lambda\cdot P_{N-1} \end{cases}$$

$$P_1=\frac{\lambda}{\mu}P_0=\rho P_0$$

$$P_2=\frac{\lambda}{\mu}P_1=\rho^2 P_0$$

$$\vdots$$

$$P_k=\rho^k P_0$$

$$\vdots$$

$$P_N=\rho^N P_0$$

≡利用归一条件:

$P_0 + P_1 + \cdots + P_N = 1$

可求出P_0

$$\begin{cases} P_0=\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} & \rho\neq 1 \\ P_n=\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\cdot\rho^n & n\le N \end{cases}$$

≡ ρ = 1情形的讨论：留为作业---课堂作业1

≡ ρ≠1情形的讨论：

Δ 在系统容量没有限制的情形下

- 我们曾设ρ < 1，这是实际问题的需要
- 也是无穷级数收敛所必需的

Δ 在系统容量为有限数N的情形下

- ρ < 1这个条件就不必要了
- 不过，当ρ> 1时，表示损失率的P_N将是很大的
- 亦即，表示被拒绝排队的顾客平均数λP_N将是很大的

Δ 系统运行的各项指标：

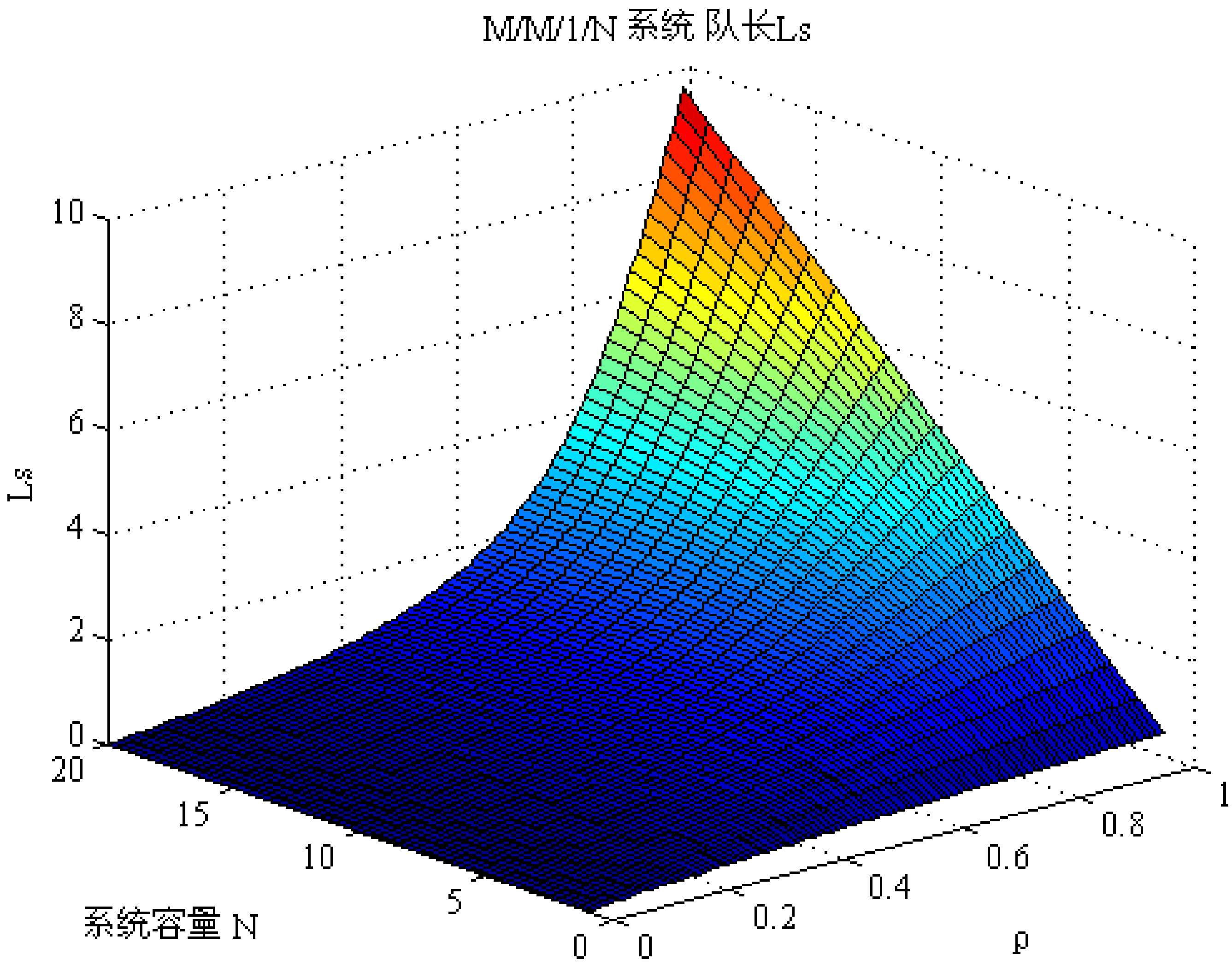
- （1）系统队长（期望值）

$$L_S = E(n) = \sum_{n=0}^{N} nP_n = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}, \qquad \rho \neq 1$$

- （2）队列长（期望值）

$$L_q = E(n-1) = \sum_{n=1}^{N} (n-1)P_n = L_S - (1-P_0)$$

- 系统队长随系统容量N和ρ的变化曲面



Δ（3）顾客逗留时间（期望值）

- （4.1-22）式的列德尔（Little）公式仍可使用
- 但须注意：平均到达率 λ 是当系统未满员时平均到达率
- 而当系统满员时（n = N），则到达率为 0
- 因此，需要求出有效到达率：$\lambda_e = \lambda(1 - P_N)$
- 先求有效服务率：$\mu_e = (1 - P_0)\mu$
- 稳态时：$\lambda_e = \mu_e$
- 所以，$1 - P_0 = \lambda_e/\mu$　　或：$\lambda_e = \mu(1 - P_0)$
- 顾客逗留时间：

$$W_S = \frac{L_S}{\mu(1-P_0)} = \frac{L_S}{\lambda(1-P_N)}$$

$$= \frac{L_q}{\mu(1-P_0)} + \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda(1-P_N)} + \frac{1}{\mu}$$

Δ（4）顾客等待时间（期望值）

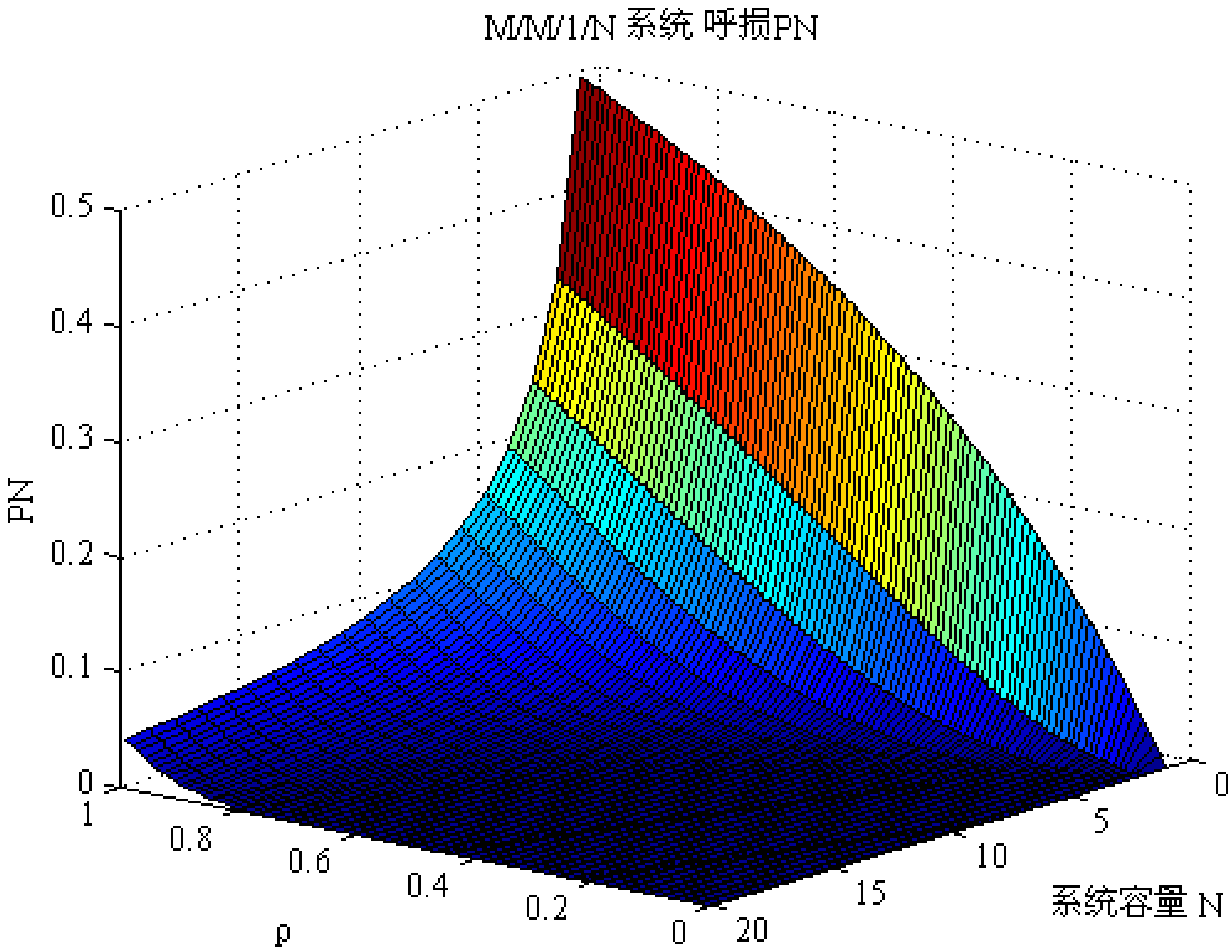
$$W_q = W_s - 1/\mu$$

△ 归纳如下:

$$\left.\begin{aligned}
L_S &= \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}} \\
L_q &= L_S - (1-P_0) \\
W_S &= \frac{L_S}{\mu(1-P_0)} \\
W_q &= W_S - \frac{1}{\mu}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(4.1-25)}$$

△（5）呼损: $P_N = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \cdot \rho^N$

△ 系统呼损P_N随系统容量N和ρ的变化曲面



= 举例

≡ 在单服务员理发店里，有六把椅子供人们排队等待

- Δ 当六把椅子都坐满时，再到达的顾客不进店就离开
- Δ 顾客平均到达率为：3人/小时
- Δ 理发平均需时：15分钟
- Δ 则：N = 7为系统中最多的顾客数
  - • λ = 3人/小时， μ = 4人/小时

（1）求某顾客一到达就能理发的概率

- • 这种情形相当于理发店里没有顾客
- • 所求概率为：

$$P_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}=\frac{1-\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{7+1}}=0.2778$$

（2）求需要等待的顾客数的期望值:

$$L_S=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}-\frac{8\times\left(\frac{3}{4}\right)^8}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^8}=2.11$$

$$L_q=L_S-(1-P_0)=2.11-(1-0.2778)=1.39$$

（3）求有效到达率

$\lambda_e = \mu（1-P_0）= 4 \times（1-0.2778）= 2.89$（人/小时）

（4）求一顾客在理发店内逗留的时间的期望值

$W_S = L_S / \lambda_e = 2.11/2.89 = 0.73$（小时）$= 43.8$（分钟）

（5）在可能到来的顾客中有百分之几不等待就离开?

- 这就是系统中有N（即 7）个顾客的概率

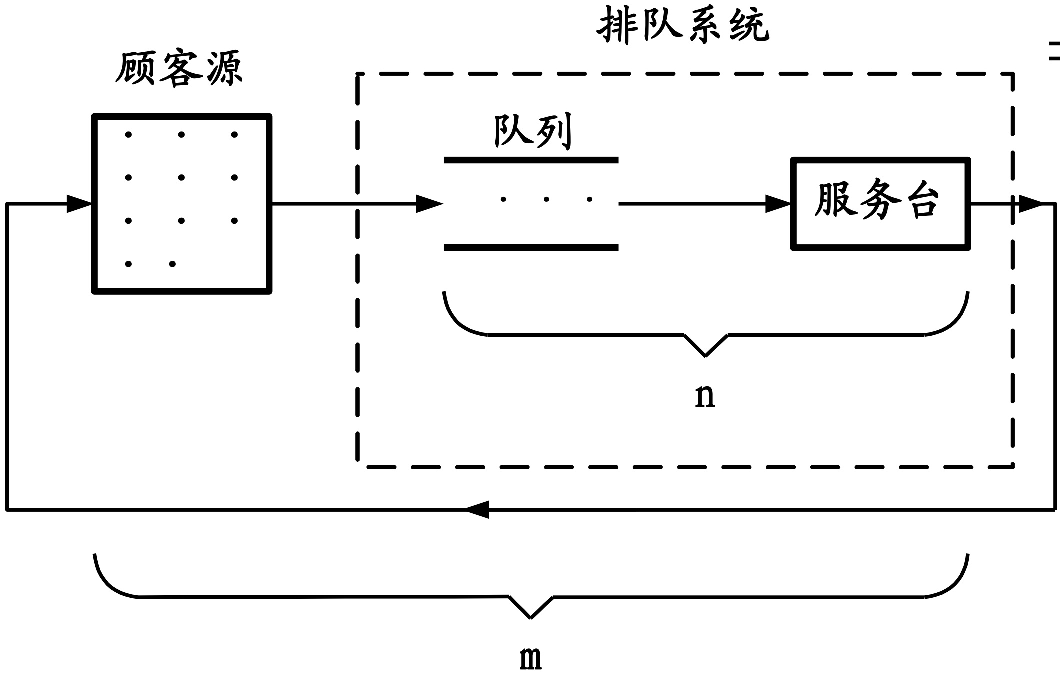
$$P_7 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^7 \left[\frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^8}\right] = \left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot \frac{1-\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^8} \approx 3.7\%$$

- 这也是理发店的损失率

≡以本例的数据来比较一下队长有限和无限的两种结果：

λ = 3 人/小时 μ = 4 人/小时	L_S	L_q	W_S	W_q	P_0	损失率
有限队长 N = 7	2.11	1.39	0.73	0.48	0.278	3.7%
无限队长	3	2.25	1.0	0.75	0.25	0

- 顾客源为有限的M/M/1模型（M /M /1 /∞/m/FCFS）
  - 背景举例
    - 设共有m台机器，这就是顾客总体
    - 机器因故障停机表示“到达”
    - 待修的机器形成队列
    - 修理工人是服务员（本节只讨论单服务员的情形）
    - 类似的例子还有
      - m个打字员共用一台打字机
      - m个会计分析员共用一台计算机终端
    - 顾客虽然只有m个
      - 但每个顾客到来并得到服务后，仍回到原来总体
      - 所以，可以再次到来



≡模型

≡模型符号M/M/1/∞/m/FCFS中的第4项写了"∞"

- Δ 这表示对系统的容量没有限制
- Δ 但实际上，它永远不会超过m
- Δ 所以，与写成M/M/1/m/m/FCFS的意义相同

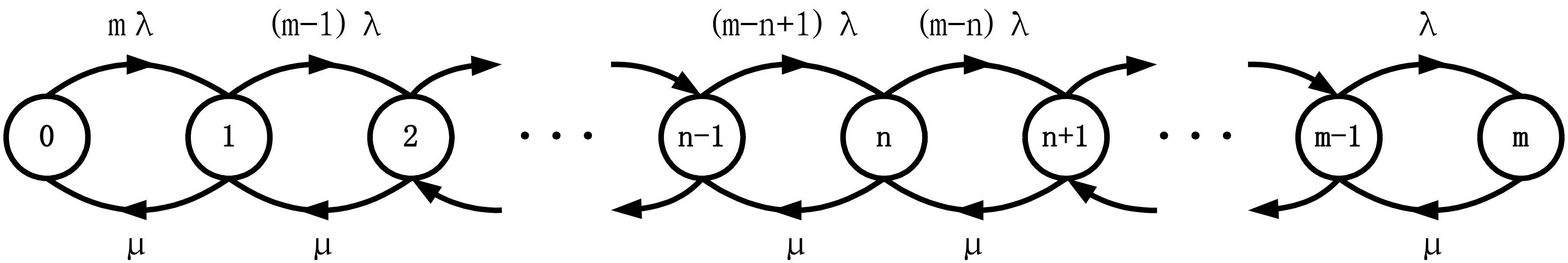
≡关于平均到达率

- Δ 在无限源的情形下，是针对全体顾客来考虑的
- Δ 在有限源的情形下，必须按每位顾客来考虑
- Δ 为简单起见，设各位顾客的到达率都是相同的λ
- Δ 这里，λ的含义是每台机器单位运转时间内发生故障的概率或平均次数
- Δ 这时，在排队系统外的顾客平均数为：$m-L_s$
- Δ 所以，对排队系统来说，顾客的有效到达率λ_e应为：

$$\lambda_e=\lambda(m-L_s) \qquad (4.1\text{-}26)$$

＝稳态解

≡状态转移概率图



≡系统状态方程

n = 0: $dP_0(t)/dt = \mu P_1(t) - m\lambda P_0(t)$

0 < n ≤ m−1: $dP_n(t)/dt = (m-n+1)\lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) - [(m-n)\lambda + \mu] P_n(t)$

n = m: $dP_m(t)/dt = \lambda P_{m-1}(t) - \mu P_m(t)$

≡稳态下，状态转移差分方程

$$\begin{cases} \mu \cdot P_1 = m\lambda P_0 \\ \mu \cdot P_{n+1} + (m-n+1)\lambda \cdot P_{n-1} = [(m-n)\cdot\lambda + \mu]P_n \quad , \qquad 1 \le n \le m-1 \\ \mu \cdot P_m = \lambda P_{m-1} \end{cases}$$

≡求解差分方程:

Δ 使用递推法（令ρ = λ /μ）

$$\begin{cases} \mu \cdot P_1 = m\lambda P_0 \\ \mu \cdot P_{n+1} + (m-n+1)\lambda \cdot P_{n-1} = [(m-n)\cdot\lambda + \mu]P_n \quad , \qquad 1 \le n \le m-1 \\ \mu \cdot P_m = \lambda P_{m-1} \end{cases}$$

$$P_1 = \frac{m\lambda}{\mu} P_0 = m\rho \cdot P_0 = A_m^1 \rho \cdot P_0$$

$$\mu P_2 = (m-1)\lambda P_1 \qquad P_2 = \frac{(m-1)\lambda}{\mu} P_1 = m(m-1)\rho^2 P_0 = A_m^2 \rho^2 P_0$$

$$\mu P_3 = (m-2)\lambda P_2 \qquad P_3 = \frac{(m-2)\lambda}{\mu} P_2 = m(m-1)(m-2)\rho^3 P_0 = A_m^3 \rho^3 P_0$$

$$\vdots$$

$$\mu P_k = (m-k+1)\lambda P_{k-1} \qquad P_k = \frac{(m-k+1)\lambda}{\mu} P_{k-1} = m(m-1)\cdots(m-k+1)\rho^k P_0 = A_m^k \rho^k P_0$$

$$\vdots$$

$$\mu P_m = \lambda P_{m-1} \qquad P_m = \frac{\lambda}{\mu} P_{m-1} = m!\rho^m P_0 = A_m^m \rho^m P_0$$

△ 利用归一条件: $$\sum_{i=0}^{m} P_i = 1$$ （因而不要求 λ /μ <1）

可求出P_0，进而求出所有状态概率

△ 最终解得:

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{(m-i)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i}} \\ P_n &= \frac{m!}{(m-n)!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}\cdot P_0 \qquad (1 \le n \le m) \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(4.1-27)}$$

Δ 求解系统运行指标

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\quad L_S = m - \frac{\mu}{\lambda}\cdot(1-P_0) \\
&(2)\quad L_q = m - \frac{(\lambda+\mu)\cdot(1-P_0)}{\lambda} \\
&\qquad\quad = L_S - (1-P_0) \\
&(3)\quad W_S = \frac{m}{\mu\cdot(1-P_0)} - \frac{1}{\lambda} \\
&(4)\quad W_q = W_S - \frac{1}{\mu}
\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.1-28)}$$

≡在机器故障问题中

Δ（某一时刻）平均故障机器数：$\mathbf{L_S}$

Δ（某一时刻）平均正常运转机器数：$\mathbf{m - L_S}$

= 例

≡ 某车间有5台机器

Δ 每台机器的连续运转时间服从负指数分布

Δ 平均连续运转时间15分钟

≡ 有一位修理工

Δ 每次修理时间服从负指数分布

Δ 平均每次修理需要12分钟

≡ 求

（1）修理工空闲的概率

（2）5台机器都出故障的概率

（3）出故障的平均台数

（4）等待修理的平均台数

（5）每台机器平均停工时间

（6）每台机器平均等待修理时间

（7）评价这些结果

≡**解:**

∆ m = 5， λ = 1/15， μ = 1/12， λ / μ = 0.8

(1) $P_0 = \left[\frac{5!}{5!}(0.8)^0 + \frac{5!}{4!}(0.8)^1 + \frac{5!}{3!}(0.8)^2 + \frac{5!}{2!}(0.8)^3 + \frac{5!}{1!}(0.8)^4 + \frac{5!}{0!}(0.8)^5 \right]^{-1}$

$$= \frac{1}{136.8} = 0.0073$$

(2) $P_5 = \frac{5!}{0!} \cdot (0.8)^5 \cdot P_0 = 0.287$

(3) $L_S = 5 - \frac{1}{0.8} \cdot (1 - 0.0073) = 3.76$ (台)

(4) $L_q = 3.76 - 0.993 = 2.77$ (台)

(5) $W_S = \dfrac{5}{\frac{1}{12} \cdot (1 - 0.0073)} - 15 = 46$ (分钟)

(6) $W_q = 46 - 12 = 34$ (分钟)

(7)机器停工时间过长，修理工几乎没有空闲时间，应当提高服务率，以减少修理时间；或增加修理工人

4.1.4 多服务台负指数分布排队系统的分析

（M/M/c排队系统的分析）

- 本节将讨论单队列、并列多个（c个）服务台的情形

- 这种排队系统可分为
  - 标准的M/M/c模型，即M/M/c /∞/ ∞/ FCFS
  - 系统容量有限的M/M/c模型，即M/M/c /N/ ∞/FCFS
  - 顾客源有限的M/M/c模型，即M/M/c / ∞/m/FCFS

– 标准的M/M/c模型（M/M/c /∞/ ∞/FCFS）

= 定义

≡ 输入过程：同标准M/M/1模型

∆ 顾客源是无限的，顾客单个到来且相互独立

∆ 一定时间内到达的顾客数服从泊松分布，到达过程是平稳的

≡ 排队规则：单队，队长没有限制，先到先服务

≡ 服务机构：

∆ c个服务台（$c > 1$）

∆ 各服务台的工作是相互独立的（不搞协作）

∆ 各服务台的平均服务率相同，即$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_c = \mu$

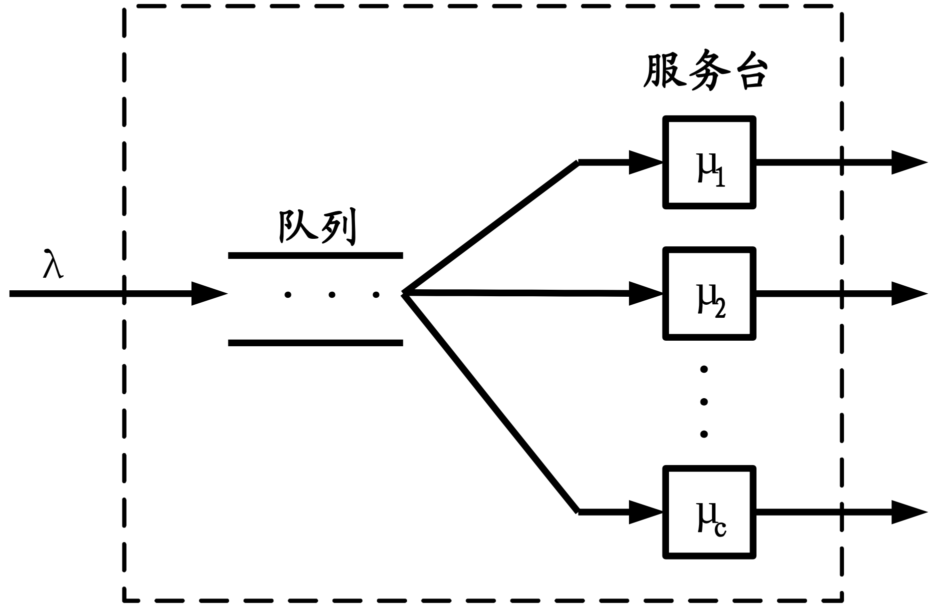
∆ 整个服务机构的服务率为

- $\begin{cases} c\mu & 当 n \geq c 时 \\ n\mu & 当 n < c 时 \end{cases}$ （n：系统中顾客数）

∆ 令$\rho = \lambda / c\mu$

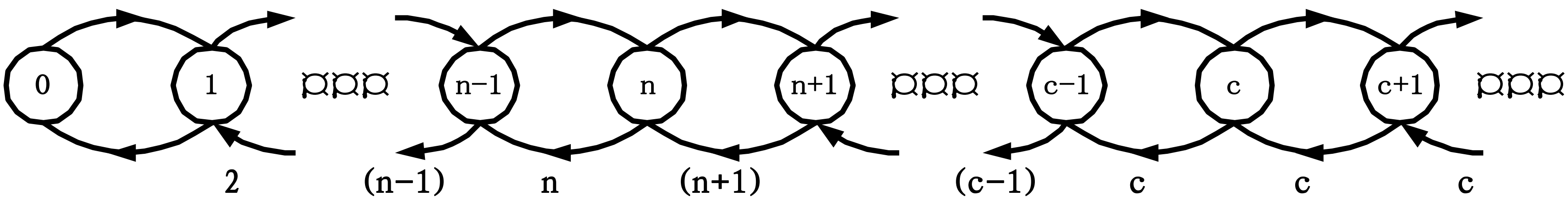
- 只有当$\rho = \lambda / c\mu < 1$时，才不会排成无限长的队列
- 称ρ为系统的服务强度，或服务机构的平均利用率

= 模型



= 系统分析

≡ 状态转移图

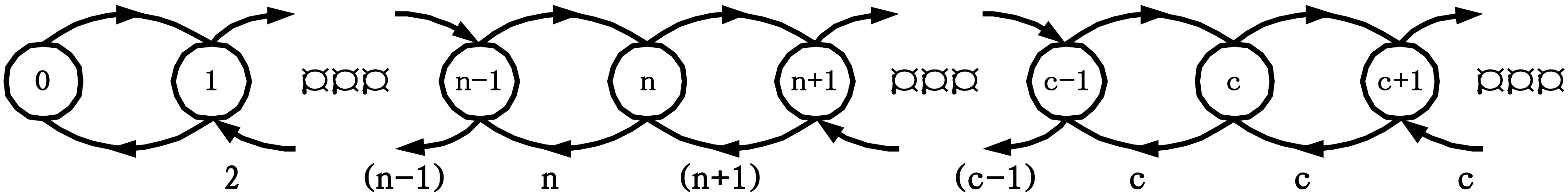


Δ 状态1→状态0：系统中只有一位顾客，被服务完而离去的转移概率为μP_1

Δ 状态2→状态1：系统中有二位顾客在二个服务台上被服务，其中有一人被服务完成而离去的转移概率，为$2\mu P_2$

Δ 状态n→状态n−1：当$n \le c$时，状态转移概率为$n\mu P_n$

- 当$n > c$时，由于只有c个服务台，最多只有c个顾客在被服务，所以状态转移概率为$c\mu P_n$



≡系统状态方程

n = 0:　　$dP_0(t)/dt = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t)$

0 < n < c:　　$dP_n(t)/dt = \lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) - (\lambda + n\mu)P_n(t)$

n ≥ c:　　$dP_n(t)/dt = \lambda P_{n-1}(t) + c\mu P_{n+1}(t) - (\lambda + c\mu)P_n(t)$

≡稳态下，状态方程:

$$\begin{cases} \mu \cdot P_1 = \lambda \cdot P_0 \\ (n+1)\mu \cdot P_{n+1} + \lambda \cdot P_{n-1} = (\lambda + n\mu) \cdot P_n & (1 \le n < c) \\ c\mu \cdot P_{n+1} + \lambda \cdot P_{n-1} = (\lambda + c\mu) \cdot P_n & (n \ge c) \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1 \qquad \rho \le 1$$

≡状态方程求解（递推法）

- 推导中令：$\rho_1 = \lambda / \mu$

$$\begin{cases} \mu \cdot P_1 = \lambda \cdot P_0 \\ (n+1)\mu \cdot P_{n+1} + \lambda \cdot P_{n-1} = (\lambda + n\mu) \cdot P_n & (1 \le n < c) \\ c\mu \cdot P_{n+1} + \lambda \cdot P_{n-1} = (\lambda + c\mu) \cdot P_n & (n \ge c) \end{cases}$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \rho_1 \cdot P_0$$

$$2\mu P_2 = \lambda P_1 \qquad P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{1}{2} \rho_1^2 P_0 = \frac{1}{2!} \rho_1^2 P_0$$

$$3\mu P_3 = \lambda P_2 \qquad P_3 = \frac{\lambda}{3\mu} P_2 = \frac{1}{3 \cdot 2} \rho_1^3 P_0 = \frac{1}{3!} \rho_1^3 P_0$$

$$\vdots$$

$$n\mu P_n = \lambda P_{n-1} \qquad P_n = \frac{\lambda}{n\mu} P_{n-1} = \frac{1}{n!} \rho_1^n P_0 \qquad (1 \le n < c)$$

$$\vdots$$

$$c\mu P_n = \lambda P_{n-1} \qquad P_n = \frac{\lambda}{c\mu} P_{n-1} = \frac{1}{n! \cdot c^{n-c}} \rho_1^n P_0 \qquad (n \ge c)$$

Δ 利用归一条件，可求出P_0，进而求出所有的状态概率：

- 这里： $\rho = \lambda / c\mu$

$$
\left.
\begin{aligned}
P_0 &= \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{c!}\cdot\frac{1}{1-\rho}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \right]^{-1} \\
P_n &= \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\cdot\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 & (n < c) \\[2ex] \dfrac{1}{c!\cdot c^{n-c}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 & (n \ge c) \end{cases}
\end{aligned}
\right\} \qquad \textbf{(4.1-29)}
$$

≡系统运行指标

（1）平均系统队长： $L_s = L_q + \lambda/\mu$ (4.1-30-1)

（2）平均队列长： $L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty}(n-c)P_n = \dfrac{(c\rho)^c\cdot\rho}{c!(1-\rho)^2}\cdot P_0$ (4.1-30-2)

- 其中:

$$\sum_{n=c+1}^{\infty}(n-c)P_n \overset{令k=n-c}{=} \sum_{k=1}^{\infty}kP_{k+c} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{c!\cdot c^k}\cdot(c\rho)^{k+c}\cdot P_o$$

$$= \frac{(c\rho)^c}{c!}\cdot P_0\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k = \frac{(c\rho)^c\cdot\rho}{c!(1-\rho)^2}\cdot P_0$$

（3）平均系统逗留时间（由Little公式求得）： $W_s = L_s/\lambda$

（4）平均等待时间（由Little公式求得）： $W_q = L_q/\lambda$

（5）系统效率： $\eta = \rho = \lambda/c\mu$

≡ 系统运行指标

（6）一个顾客到达服务系统后肯定要等待的概率C(c, ρ):

Δ 当一个顾客到达服务系统时，如果系统中的顾客数已经超过窗口数，即：k≥c时，则一定要等待，所以：

$$C(c,\rho)=P\{W>0\}=\sum_{n=c}^{\infty}p_n=\sum_{n=c}^{\infty}\frac{1}{c!\cdot c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\cdot P_0=\sum_{n=c}^{\infty}\frac{c^c}{c!\cdot}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^n\cdot P_0$$

$$=\frac{P_0}{c!}\cdot\frac{(c\rho)^c}{1-\rho}\qquad\qquad=\frac{(c\rho)^c}{c!}\cdot\frac{P_0}{1-\rho}$$

Δ 此式通常称为爱尔朗C公式

= 举例

≡ 某售票所有三个窗口

Δ 顾客的到达服从泊松过程

Δ 平均到达率为 λ = 0.9人/分钟

Δ 服务时间（为每顾客售票时长）服从负指数分布

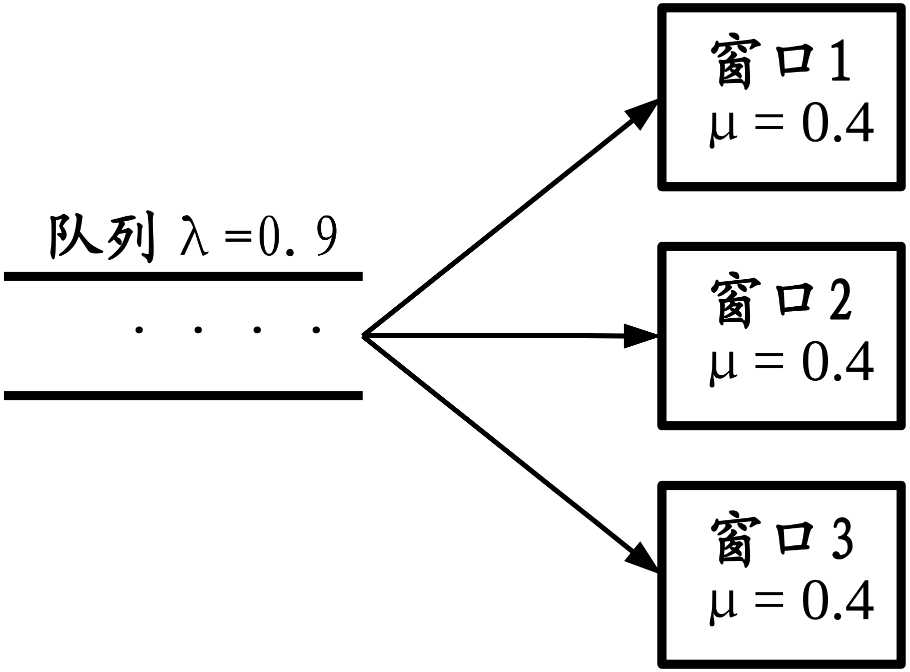
Δ 平均服务率为 μ = 0.4人/分钟

Δ 顾客到达后排成一队

Δ 依次到空闲的窗口购票

≡ 模型

Δ 如图：



≡ 参数

Δ $c = 3$

Δ $\lambda/\mu = 2.25$

Δ $\rho = \lambda/c\mu = 2.25/3 < 1$

≡运行指标

（1）整个售票所空闲的概率：

- $$P_0=\left[\frac{2.25^0}{0!}+\frac{2.25^1}{1!}+\frac{2.25^2}{2!}+\frac{2.25^3}{3!}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{2.25/3}}\right]^{-1}=0.0748$$

（2）平均队长： $$L_q=\frac{2.25^3\cdot\dfrac{3}{4}}{3!\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}\times 0.0748=1.70$$

（3）系统队长： $\mathbf{L_S = L_q + \lambda/\mu = 3.95}$

（4）平均等待时间： $\mathbf{W_q = 1.70/0.9=1.89}$ **（分钟）**

（5）平均逗留时间： $\mathbf{W_s = 1.89+1/0.4=4.39}$ **（分钟）**

（6）顾客到达后必须等待的概率：

- 即系统中已有c(=3)人以上的概率：
- 亦即各服务台都不空闲的概率：

$$P(n \geq 3) = \frac{(2.25)^3}{3! \cdot \frac{1}{4}} \times 0.0748 = 0.57$$

$$= 1 - P_0 - P_1 - P_2$$

$$= 1 - 0.0748 - \frac{1}{1!} \cdot (2.25)^1 \times 0.0748 - \frac{1}{2!} \cdot (2.25)^2 \times 0.0748$$

$$= 0.57$$

≡ 由于公式较为复杂，人们编制了数据图表，供工程技术人员查用

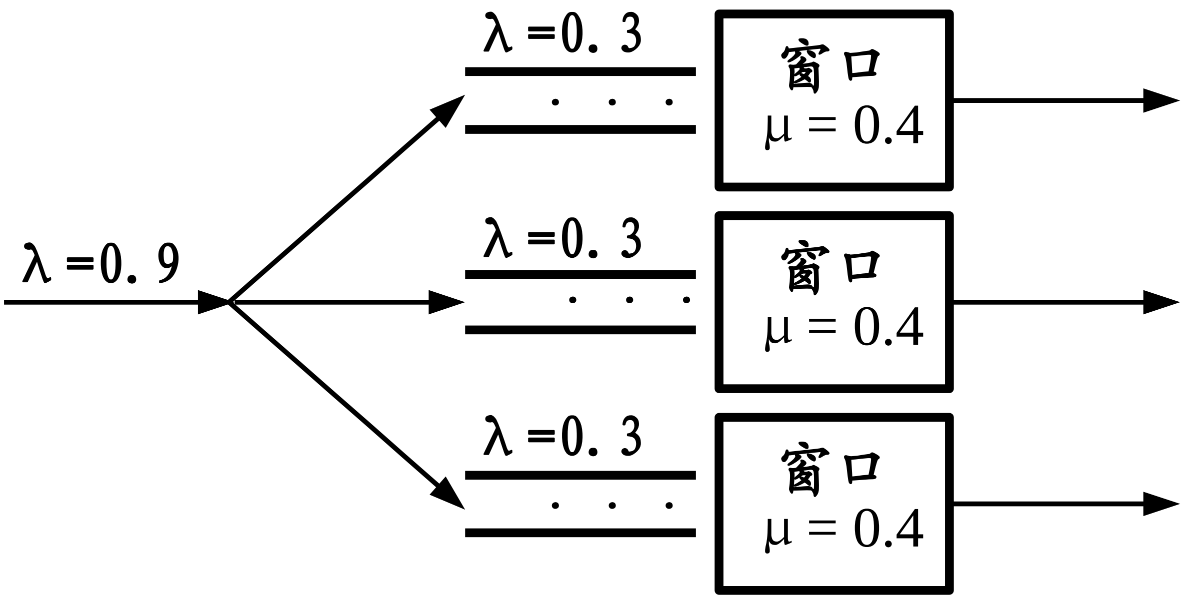
M/M/c型系统与c个M/M/1型系统的比较

- 利用前例来作比较
- c个M/M/1系统
  - Δ 原题除排队方式外，其它条件均不变
  - Δ 排队方式变为:
    - 顾客到达后在每个窗口前各排一队
    - 进入队列后，坚持不换
    - 模型:

其中，设每个队列的平均到达率相等:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda/3$
$= 0.3$人/分钟

于是，原来的系统就变成了c = 3个M/M/1型的子系统



≡求解c个M/M/1型系统的运行指标，并与前例作比较

指标	M/M/3 型	3 个 M/M/1
服务台空闲概率 P_0	0.0748	0.25（每个子系统）
顾客必须等待的概率	$P(n \geq 3) = 0.57$	0.75
平均队列长 L_q	1.70	2.25（每个子系统)
平均系统队长 L_s	3.95	9.00（整个系统）
平均逗留时间 W_s	4.39（分钟）	10（分钟）
平均等待时间 W_q	1.89（分钟）	7.5（分钟）

- Δ 从表中可以看出，单队系统（**M/M/c**）比三队系统（**3**个**M/M/1**）有显著优越性
- Δ 所以，现在有些银行等经常需要顾客排队的部门已将多队系统改为单队系统

– 系统容量有限制的M/M/c系统（M/M/c / N/∞/FCFS）

= 定义:

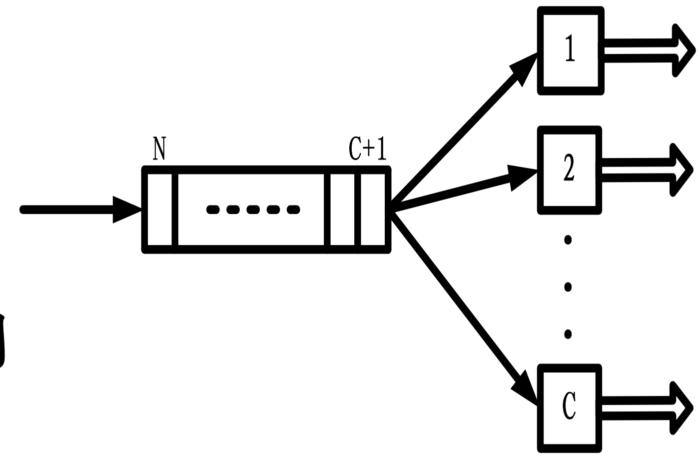
≡ 系统容量最大限制为：N（≥c）

Δ 当系统中顾客数n已达到N时

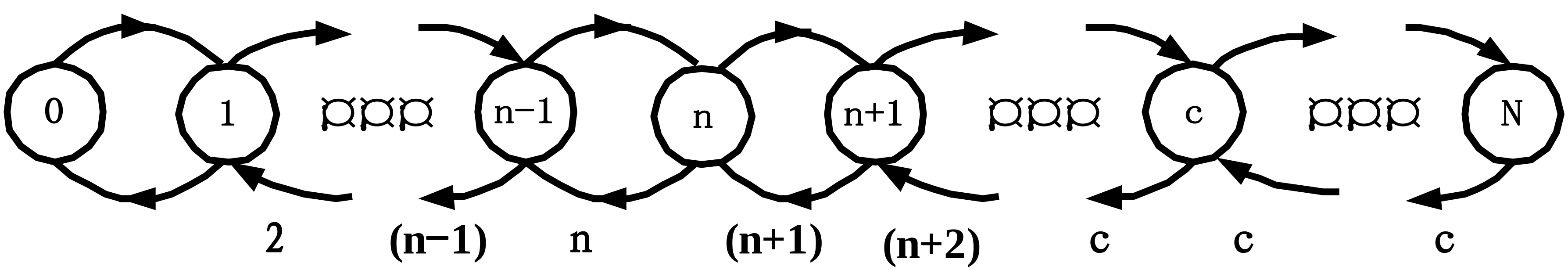
Δ 亦即队列中顾客数已达到N－c时

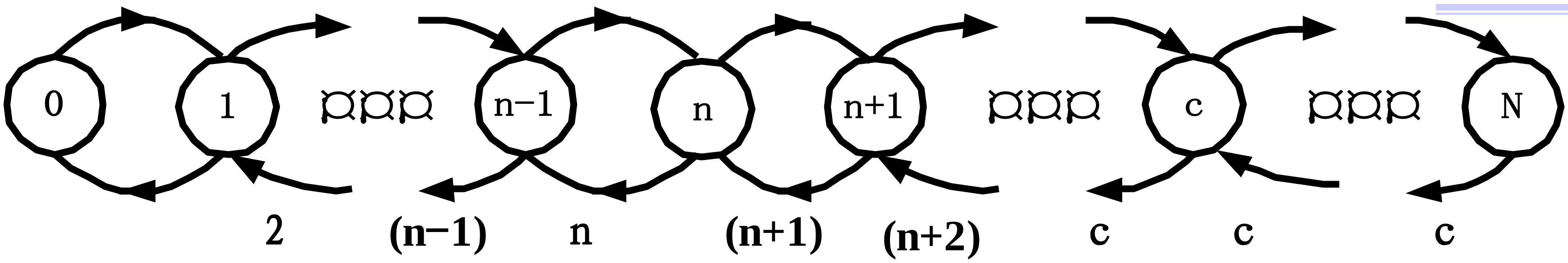
Δ 再到达的顾客即被拒绝排队

≡ 其它条件与标准M/M/c系统相同



= 状态转移图





≡ 系统状态方程

n=0: $dP_0(t)/dt = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t)$

$0 < n \le c$: $dP_n(t)/dt = \lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) - (\lambda + n\mu)P_n(t)$

$c \le n < N$: $dP_n(t)/dt = \lambda P_{n-1}(t) + c\mu P_{n+1}(t) - (\lambda + c\mu)P_n(t)$

$n = N$: $dP_n(t)/dt = \lambda P_{n-1}(t) - c\mu P_n(t)$

≡稳态下系统状态方程

Δ 稳态下： $dP_n(t)/dt = 0$，$P_n(t)$与t无关，记为：P_n

- n=0: $\mu P_1 = \lambda P_0$
- $0 < n \le c$: $\lambda P_{n-1} + (n+1)\mu P_{n+1} = (\lambda + n\mu)P_n$
- $c \le n < N$: $\lambda P_{n-1} + c\mu P_{n+1} = (\lambda + c\mu)P_n$
- $n = N$: $\lambda P_{n-1} = c\mu P_n$

Δ 归一性条件： $\sum_{i=0}^{N} P_i = 1$

- 系统的状态概率
  - 利用递推法可解出上述方程组

$$P_0=\left[\sum_{k=0}^{c}\frac{(c\rho)^k}{k!}+\frac{c^c}{c!}\cdot\frac{\rho\cdot(\rho^c-\rho^N)}{1-\rho}\right]^{-1},\qquad \rho\neq 1$$

$$P_n=\begin{cases}\dfrac{(c\rho)^n}{n!}P_0, & (0\le n\le c)\\ \dfrac{c^c\rho^n}{c!}P_0, & (c\le n\le N)\\ 0\quad, & (n>N)\end{cases}\qquad \textbf{(4.1-31)}$$

  - 其中，$\rho = \lambda / c\mu$，但已不必对ρ加以限制
    - Δ 关于$\rho = 1$的情形，作为习题进行讨论

= 系统运行指标

$$\left.\begin{aligned}
L_q &= \frac{P_0\rho(c\rho)^c}{c!(1-\rho)^2}\left[1-\rho^{N-c}-(N-c)\rho^{N-c}(1-\rho)\right] \\
L_s &= L_q + c\rho(1-P_N) \\
W_q &= \frac{L_q}{\lambda(1-P_N)} \\
W_s &= W_q + \frac{1}{\mu}
\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.1-32)}$$

- 由于公式较为复杂，人们编制了数据图表，供工程技术人员查用

Δ 系统效率:

- 当n < c 时，系统的效率（即窗口占用率）是n/c
- 当n ≥ c 时，系统的效率（即窗口占用率）是1
- 所以，系统的平均效率为:

$$\eta=\sum_{k=0}^{c-1}\frac{k}{c}p_k+\sum_{k=c}^{N}p_k=p_0\left[\sum_{k=0}^{c-1}\frac{k}{c}\cdot\frac{(c\rho)^k}{k!}+\sum_{k=c}^{N}\frac{c^c}{c!}\rho^k\right]$$

$$=p_0\left[\rho\sum_{k=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^k}{k!}+\frac{c^c}{c!}\cdot\frac{\rho^{c+1}-\rho^{N+1}}{1-\rho}\right]$$

$$=\rho\cdot\frac{\sum_{k=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^k}{k!}+\frac{c^N}{c!}\cdot\frac{\rho^{c+1}-\rho^{N+1}}{1-\rho}}{\sum_{k=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^k}{k!}+\frac{(c\rho)^c}{c!}\cdot\frac{1-\rho^{N-c+1}}{1-\rho}}$$

- 特别当N = c时：（即时制系统）
  - 例如：街头的停车就不允许排队等待空位
  - 此时的状态概率为：

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum_{k=0}^{c}\frac{(c\rho)^k}{k!}} \\ P_n &= \frac{(c\rho)^n}{n!}P_0, \qquad 0 \le n \le c \end{aligned}\right\} \tag{4.1-33}$$

    - Δ 其中，当n = c时， $P_c = \frac{(c\rho)^c}{c!}P_0$ 称为爱尔朗呼损公式
    - Δ 有时也称之为爱尔朗B公式，表示为： $B(c,\rho) = P_c$
    - Δ 是A.K.Erlang在1917年推出的，广泛应用于电话系统的设计中
  - 此时的运行指标为：

$$\left.\begin{aligned} &L_q = 0, \qquad W_q = 0, \qquad W_s = \frac{1}{\mu} \\ &L_s = \sum_{n=1}^{c} nP_n = c\rho(1-P_c) \end{aligned}\right\} \tag{4.1-34}$$

    - Δ 其中，L_s又是平均被占用的服务台数

≡ M/M/c / N/∞/FCFS（ N= c ）例

- △ 某风景区准备建造旅馆，顾客到达为泊松流
- △ 每天平均到达6人（ λ = 6人/天）
- △ 顾客平均逗留时间为2天（$1/\mu$ = 2天）
- △ 试就旅馆在分别具有c = 1，2，3，‥8个房间的条件下计算：每天客房平均占用数L_s及满员概率P_c
- △ 显然，这是即时式，在客房满员条件下，旅客不可能排队等待
- △ 计算过程如下表： $c\rho = \lambda / \mu = 12$

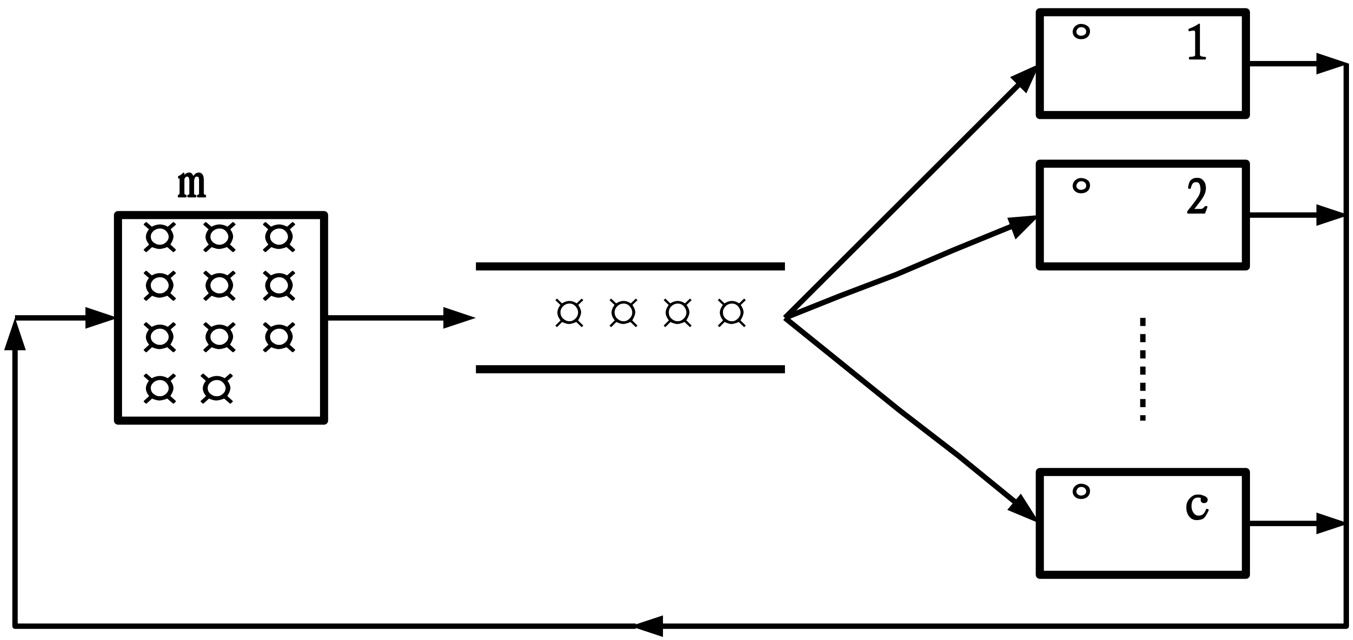
(1) n	(2) $(c\rho)^n=12^n$	(3) n!	(4) $(c\rho)^n / n!$	(5) $\sum_{n=0}^{c}\frac{(c\rho)^n}{n!}$	(6) P_c（答）	(7) $\sum_{n=0}^{c-1} \Big/ \sum_{n=0}^{c}$	(8) L_s（答）
0	1	1	1	1	1	--	--
1	1.2×10	1	12	13	0.92	0.08	0.96
2	1.44×10^2	2	72	85	0.85	0.15	1.80
3	1.73×10^3	6	288	373	0.77	0.23	2.76
4	2.07×10^4	24	864	1.24×10^3	0.70	0.30	3.60
5	2.49×10^5	120	2.07×10^3	3.31×10^3	0.63	0.37	4.44
6	2.99×10^6	720	4.15×10^3	7.46×10^3	0.56	0.44	5.28
7	3.58×10^7	5.04×10^3	7.11×10^3	1.45×10^4	0.49	0.51	6.12
8	4.30×10^8	4.03×10^4	1.07×10^4	2.52×10^4	0.42	0.58	6.96

Δ 其中:

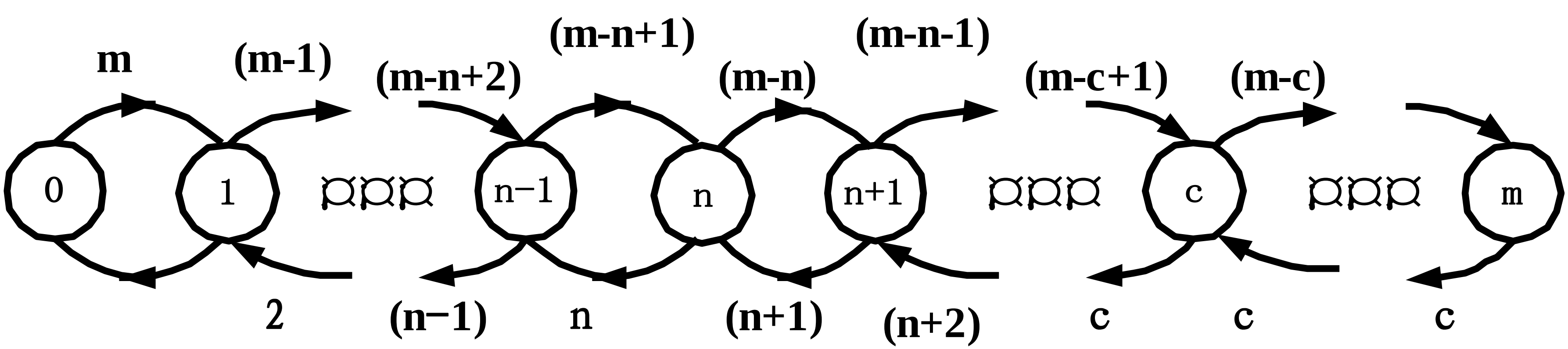
- 第5栏：第4栏各数累加
- 第6栏：满员概率
- 第7栏：用第5栏同行去除上一行的结果
- 第8栏：第7栏 × 12的结果，得每天客房平均占用数L_s

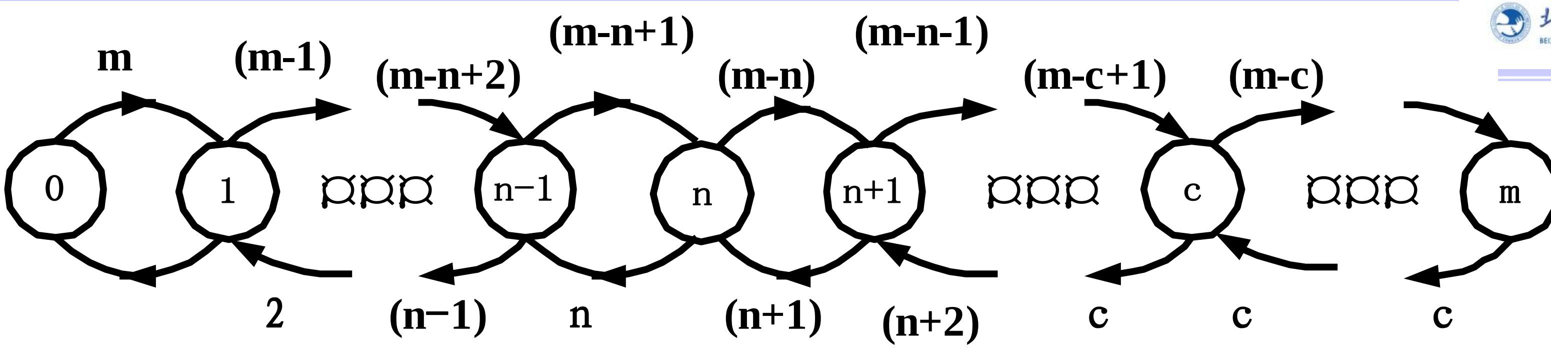
- 顾客源有限的M/M/c模型（M/M/c/ ∞/m/FCFS）
  - 模型
    - 顾客总体（顾客源）为有限数m，且$m > c$
    - 顾客到达率λ是按每个顾客来考虑的（同单服务台情形一样）
    - 当顾客数$n \le c$时，所有顾客都被服务
      - 有（$c - n$）个服务台空闲
    - 当从$c < n < m$时，
      - 有（$n - c$）个顾客在排队等待
      - 有c个顾客在被服务
      - 所有c个服务台都繁忙
    - 假定c个服务台的服务水平相同
      - 服务时间都服从参数为μ的负指数分布
    - 假定顾客的服务时间与后面顾客的到达是相互独立的

= M/M/c/∞/m/FCFS模型框图



= 状态转移图





≡ 系统状态方程

n=0: $dP_0(t)/dt = \mu P_1(t) - m\lambda P_0(t)$

$0<n\le c$: $dP_n(t)/dt = (m-n+1)\lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) - [(m-n)\lambda + n\mu] P_n(t)$

$c\le n<m$: $dP_n(t)/dt = (m-n+1)\lambda P_{n-1}(t) + c\mu P_{n+1}(t) - [(m-n)\lambda + c\mu] P_n(t)$

n = m: $dP_m(t)/dt = \lambda P_{m-1}(t) - c\mu P_m(t)$

≡ 稳态下系统状态方程

Δ 稳态下: $dP_n(t)/dt = 0$，$P_n(t)$与t无关，记为：P_n

n=0: $\mu P_1 = m\lambda P_0$

$0 < n \le c$: $(m-n+1)\lambda P_{n-1} + (n+1)\mu P_{n+1} = [(m-n)\lambda + n\mu] P_n$

$c \le n < m$: $(m-n+1)\lambda P_{n-1} + c\mu P_{n+1} = [(m-n)\lambda + c\mu] P_n$

n = m: $\lambda P_{m-1} = c\mu P_m$

Δ 归一性条件: $\sum_{i=0}^{m} P_i = 1$

≡ 求解状态方程

△ 推导中令： $\rho_1 = \lambda/\mu$

n=0: $\mu P_1 = m\lambda P_0$

$0 < n \le c$: $(m-n+1)\lambda P_{n-1} + (n+1)\mu P_{n+1} = [(m-n)\lambda + n\mu] P_n$

$c \le n < m$: $(m-n+1)\lambda P_{n-1} + c\mu P_{n+1} = [(m-n)\lambda + c\mu] P_n$

$n = m$: $\lambda P_{m-1} = c\mu P_m$

$$P_1 = \frac{m\lambda}{\mu} P_0 = m\rho_1 \cdot P_0$$

$$2\mu P_2 = (m-1)\lambda P_1 \qquad P_2 = \frac{(m-1)\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{m(m-1)}{2!}\rho_1{}^2 P_0 = C_m^2 \rho_1{}^2 P_0$$

$$3\mu P_3 = (m-2)\lambda P_2 \qquad P_3 = \frac{(m-2)\lambda}{3\mu} P_2 = \frac{m(m-1)(m-2)}{3\cdot 2!})\rho_1{}^3 P_0 = C_m^3 \rho_1{}^3 P_0$$

$\vdots$

$$n\mu P_n = (m-n+1)\lambda P_{n-1} \qquad P_n = \frac{(m-n+1)\lambda}{n\mu} P_{n-1} = \frac{m!}{(m-n)!n!}\rho_1{}^n P_0 = C_m^n \rho_1{}^n P_0 \qquad (1 \le n < c)$$

$\vdots$

$$c\mu P_n = (m-n+1)\lambda P_{n-1} \qquad P_n = \frac{(m-n+1)\lambda}{c\mu} P_{n-1} = \frac{m!}{(m-n)!c!c^{n-c}}\rho_1{}^n P_0 \qquad (c \le n \le m)$$

△ 利用归一性条件可求出P_0，进而求出所有状态概率

= 系统的状态概率

$$P_0 = \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^{c} \frac{1}{k!(m-k)!}\left(\frac{c\rho}{n}\right)^k + \frac{c^c}{c!}\sum_{k=c+1}^{m} \frac{1}{(m-k)!}\left(\frac{\rho}{m}\right)^k}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & (0 \le n \le c) \\ \frac{m!}{(m-n)! \cdot c! \cdot c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & (c+1 \le n \le m) \end{cases}$$

Δ 其中： ρ = mλ/(cμ)

Δ 由于P_0，P_n计算公式过于复杂，有专书列成表格可供查用

北京邮电大学 BEIJING UNIVERSITY OF POSTS AND TELECOMMUNICATIONS

- 系统运行指标
  - $$L_s = \sum_{n=1}^{m} nP_n$$
  - $$L_q = \sum_{n=c+1}^{m} (n-c)P_n$$
  - 有效到达率 λ_e
    - 应为每个顾客的到达率λ乘以在系统外顾客数的期望值
    - $\lambda_e = \lambda(m - L_s)$
    - 在机器故障问题中，它是每单位时间m台机器平均出现故障的次数

- 有用的关系式

$$\left.\begin{aligned} & L_s = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu} \\ & W_s = \frac{L_s}{\lambda_e} \\ & W_q = \frac{L_q}{\lambda_e} \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(4.1-36)}$$

- 例
  - 有2位修理工人，负责5台机器的正常运行
    - 每台机器平均损坏率为：每运转小时1次
    - 两位工人能以相同的平均修复率4台/小时修好机器
  - 求
    - （1）等待修理的机器平均数
    - （2）需要修理的机器平均数
    - （3）有效损坏率
    - （4）等待修理时间
    - （5）每台机器损坏后的平均停工时间
  - 解
    - 参数：**m = 5**　　**λ=1次/小时**　　**μ = 4台/小时**
      - **c = 2**　**cρ/m = λ/μ=1/4**

$$P_0=\frac{1}{5!}\cdot\left[\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{4}\right)^0+\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{4}\right)^1+\frac{1}{2!\cdot 3!}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{2^2}{2!\cdot 2!}\left(\frac{1}{8}\right)^3+\left(\frac{1}{8}\right)^4+\left(\frac{1}{8}\right)^5\right]^{-1}=0.3149$$

Δ **P_1 = 0.394** **P_2 = 0.197** **P_3 = 0.074**

Δ **P_4 = 0.018** **P_5 = 0.002**

- **队列长为1时，概率为P_3；队列长为2时，概率为P_4；**
- **队列长为3时，概率为P_5；所以，L_q为:**

$$(1)\quad L_q = P_3 + 2P_4 + 3P_5 = 0.118$$

$$(2)\quad L_s = \sum_{n=1}^{m} nP_n = L_q + c - 2P_0 - P_1 = 1.094$$

$$(3)\quad \lambda_e = \lambda(m - L_s) = 1 \times (5 - 1.094) = 3.906$$

$$(4)\quad W_q = {L_q}/{\lambda_e} = {0.118}/{3.906} = 0.03 \text{ 小时}$$

$$(5)\quad W_s = {L_s}/{\lambda_e} = {1.094}/{3.906} = 0.28 \text{ 小时}$$

4.1.5 一般服务时间M/G/1模型

- 前面研究了泊松输入和负指数服务时间的模型
- 下面讨论在服务时间任意分布情形下的重要关系
- 在任何情形下，以下这些关系都是正确的：

Δ 用E[ ]表示求期望值，则

E[系统中顾客数] = E[队列中顾客数] + E[服务机构中顾客数]

E[在系统中逗留时间] = E[排队等候时间] + E[服务时间] (4.1-37)

Δ 用符号表示：

- $L_s = L_q + L_{se}$ $W_s = W_q + E[T]$
- 其中：T是服务时间（随机变量），
  当T服从负指数分布时，$E[T] = 1/\mu$

Δ 另外：

- $L_s = \lambda W_s$ $L_q = \lambda W_q$
- 注：在有限源和有限队长情况下，
  λ要换成λ_e（有效到达率）

– **P_K公式（Pollaczek_Khintchine泊拉哚克_欣钦）**
  - **对于M/G/1模型，服务时间T的分布是一般的**
    - **但要求期望值E[T]和方差Var[T]都存在**
    - **其它条件与标准的M/M/1模型相同**
    - **为了达到稳定，需ρ = λE[T]< 1**
    - **在上述条件下，有P_K公式:**

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot Var[T]}{2\cdot(1-\rho)} \qquad \textbf{(4.1-38)}$$

    - **即，只要知道λ，E[T]和Var[T]**
      - **则不管T是什么具体分布**
      - **都可求出系统队长L_s**
      - **进而求出L_q，W_q，W_s**

- 从P_K公式可以看出：
  - 由于有方差项的存在
  - 说明随机性的波动会对所研究的各期望值有影响
    - 即：L_s，L_q，W_q，W_s等（都是期望值）都会受随机性波动的影响
  - 只有当Var[T] = 0时，随机性波动才不会对L_s等有影响
  - 所以，要想改进系统的各项指标
    - 也可以从改变方差的角度来考虑

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot Var[T]}{2\cdot(1-\rho)}$$

- 例:
  - 已知：一售票口，顾客按平均2分30秒的时间间隔的负指数分布到达，顾客在售票口前服务时间平均为2分钟
    - （1）若服务时间也服从负指数分布，求顾客为购票所需的平均逗留时间和等待时间
    - （2）若经调查，顾客在售票口前至少要占用1分钟，且服务时间不服从负指数分布，而是服从以下概率密度分布：

$$f(y)=\begin{cases} e^{-y+1} & y\geq 1 \\ 0 & y<1 \end{cases}$$

      - 再求顾客的逗留时间和等待时间
  - 解（1）
    - $\lambda=1/2.5=0.4$
    - $\mu=1/2=0.5$
    - $\rho=\lambda/\mu=0.8$
    - $W_s=1/(\mu-\lambda)=10$（分钟）
    - $W_q=\rho/(\mu-\lambda)=8$（分钟）

≡解（2）

- △ 令 y为服务时间
- △ 若 y = 1+X，则X为服从均值为1的负指数分布
- △ 于是：E[Y] = 2
  - Var[Y] = Var[1+X]=Var[X] = 1
  - ρ = λ E[Y] = 0.8
- △ 代入P_K公式，得:

$$L_s = 0.8 + \frac{0.8^2 + 0.4^2 \times 1}{2 \times (1 - 0.8)} = 2.8$$

$$L_q = L_s - \rho = 2$$

$$W_s = {L_s}/{\lambda} = 7 \text{ (分钟)}$$

$$W_q = {L_q}/{\lambda} = 5 \text{ (分钟)}$$

– 定长服务时间模型M/D/1

- 服务时间是确定的常数
  - 如在一条装配线上完成一件工作的时间就是确定的常数
  - 再如自动汽车冲洗台上，冲洗一辆汽车的时间也是确定的
  - 此时:

$$T = \frac{1}{\mu}$$

$$Var[T] = 0$$

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2}{2 \cdot (1-\rho)} \quad (4.1-39)$$

$$L_q = L_s - \rho = \frac{\rho^2}{2 \cdot (1-\rho)}$$

定长服务时间模型M/D/1计算举例:

- 某实验室有一台自动检验机器性能的仪器
  - 要求检验机器的顾客按泊松到达，每小时平均到达4位顾客
  - 检验每台机器所需时间为6分钟
- 求：（1）在实验室内，机器的平均台数Ls
  - （2）等候检验的机器的平均台数Lq
  - （3）每台机器在实验室平均消耗的时间Ws
  - （4）每台机器平均等待检验的时间Wq
- 解：$\lambda = 4$，　　　　E[T] = 1/10（小时）
  - $\rho = 4/10$，　　　　Var[T] = 0

(1) $L_s = 0.4 + \dfrac{0.4^2}{2\cdot(1-0.4)} = 0.533$（台）

(2) $L_q = L_s - \rho = 0.533 - 0.4 = 0.133$（台）

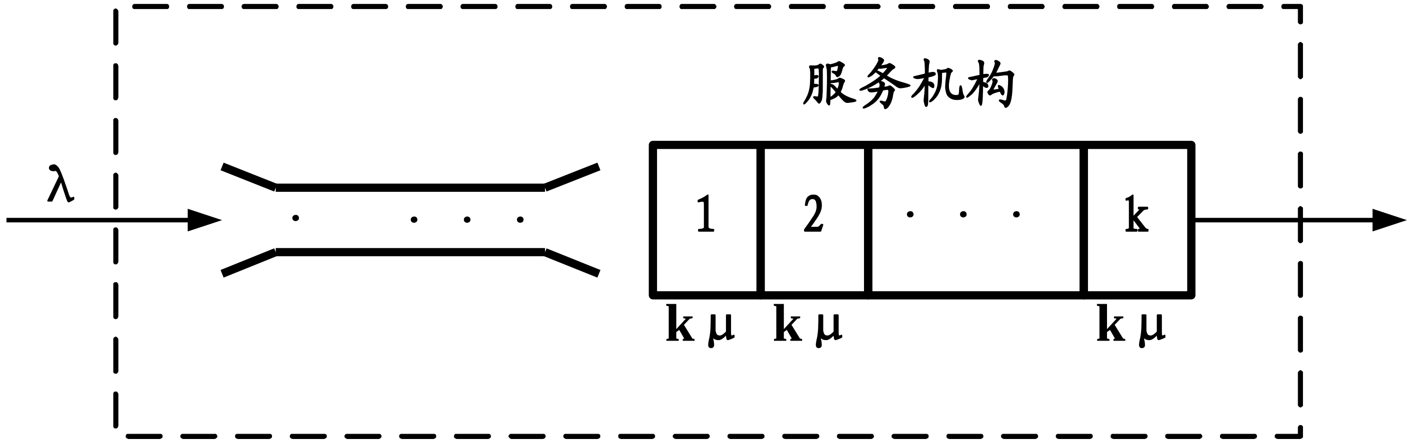
(3) $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda} = 0.133$（小时）$= 8$（分钟）

(4) $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{0.133}{4} = 0.033$（小时）$= 2$（分钟）

- 可以证明
  - 在一般服务时间分布的L_q和W_q中
    - 以定长服务时间的L_q和W_q为最小
  - 这符合我们通常的理解:
    - 服务时间越有规律，等候的时间就越短

– 爱尔朗服务时间M / E_r /1模型

- 适用情景
  - 如果顾客必须经过k个服务站
  - 每个服务站的服务时间T_i相互独立
    - 并且服从相同的负指数分布（参数kμ）
  - 则总的服务时间服从k阶爱尔朗分布



- 其中:
  - $E[T_i] = \frac{1}{k\mu}$ $\qquad Var[T_i] = \frac{1}{k^2\mu^2}$
  - $E[T] = \frac{1}{\mu}$ $\qquad Var[T] = \frac{1}{k\mu^2}$

- 对于M/E_r/1模型
  - 除服务时间外，其它条件与标准的M/M/1模型相同
  - $$L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \dfrac{\lambda^2}{k\mu^2}}{2\cdot(1-\rho)} = \rho + \frac{(k+1)\cdot\rho^2}{2k\cdot(1-\rho)}$$
  - $$L_q = \frac{(k+1)\cdot\rho^2}{2k\cdot(1-\rho)} \qquad \textbf{(4.1-40)}$$
  - $W_s = L_s / \lambda$
  - $W_q = L_q / \lambda$

- $M/E_r/1$系统例:
  - 某单人裁缝店做衣服
    - 每套需经过4个不同的工序，4个工序完成后才开始做另一套
    - 每一工序的时间服从负指数分布，期望值为2小时
    - 顾客的到来服从泊松分布，平均定货率为5.5套/周，设一周工作6天，每天8小时
  - 求：一顾客为等到做好一套衣服期望时间有多长?
  - 解:
    - 顾客到达率$\lambda = 5.5$套/周
    - 设μ为平均服务率（单位时间内做完的套数）
    - $1/\mu$为平均每套所需的时间
    - 由题设：$1/4*\mu = 2$小时
      - $\therefore \mu = 1/8$ 套/小时 $= 6$ 套/周
    - $\rho = \lambda/\mu = 5.5/6$

Δ设T_i为做完第i个工序所需时间

T 为做完一套衣服所需时间

- $E[T_i]= 1/(k\mu) = 2$
- $Var[T_i]= 1/(k\mu)^2 = 1/a^2 = 1/(4 \times 6)^2$
- 其中： a：负指数分布的参数$f_T(t) = a\, e^{-at}$

- $E[T]= 1/\mu = 8$（小时）
- $Var[T]= 1/(k\mu^2) = 1/(4 \times 6^2)$

$$\therefore \quad L_s = \frac{5.5}{6} + \frac{\left(\frac{5.5}{6}\right)^2 + (5.5)^2 \times \frac{1}{4\times 6^2}}{2\times\left(1-\frac{5.5}{6}\right)} = 7.2188$$

- 则：顾客为等到做好一套衣服的期望时间为：

$W_s = L_s/\lambda = 7.2188/5.5 = 1.3$（周）

– 作业:

＝（周先生著）第266页： 4.2， 4.3

＝（张琳著）第78页: 2.2 2.3

（本节结束）