通信网理论基础

第三章　通信网的结构

第一节　图论基础

北京邮电大学　　信息与通信工程学院
授课教师：武穆清
电子信箱：wumuqing@bupt.edu.cn

课程内容介绍

第一章　引论

通信系统和通信网的种类和基本要求

第二章　通信网的组成要素

通信系统和网络的构成部件、功能、特性

第三章　通信网的结构

图论基础，最短径、最大流、最佳流算法

第四章　网内业务分析

排队论基础，业务模型与分析，网络效率

第五章　通信网的可靠性

可靠性理论，系统可靠性，网络可靠性

第三章 通信网的结构

3.1　图论基础

3.2　最短径问题

3.3　站址问题

3.4　流量分配

第一节 图论基础

- 通信网的拓扑结构
  - 影响网络的造价
  - 影响网络的运营、维护费用
  - 是通信网规划和设计的第一层次问题
- 通信网的结构是发展变化的
  - 通信网建设初期都是多级转接的
  - 随着社会与经济的发展，转接级数会逐渐减少
  - 终极发展目标是网状网
- 通信网的拓扑结构可用数学模型来表示
  - 这就是图论所研究的问题
  - 图论基础知识
  - 最短径问题，最小代价等优化问题，流量问题

- 图论:
  - 组合数学的一个分支
  - 广泛应用于各种网路设计、电路分析、可靠性设计、集成电路设计

- 基本定义
  - 端集：V = { v_1， v_2， v_3， ……， v_n } 端点(vertex)
  - 边集：E = { e_1， e_2， e_3， ……， e_m }　边(edge)
  - 二元关系：

$$R : V \times V \xrightarrow{R} E$$

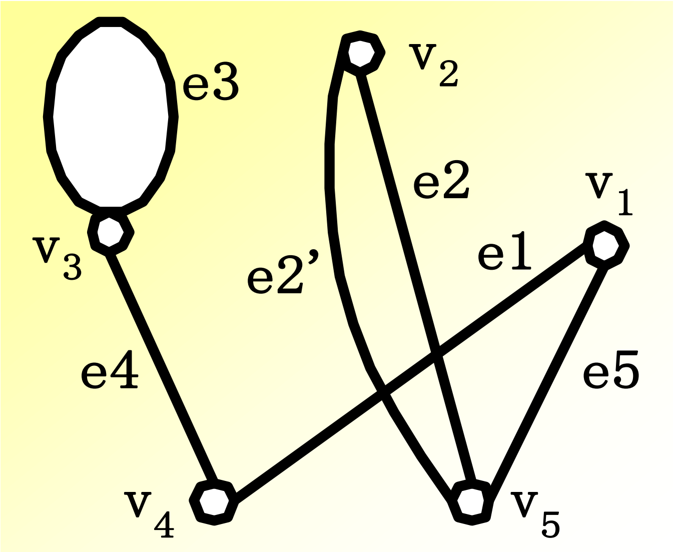
＝图（ Graph）：

- ≡当二元关系R存在时，V和E组成图G
- ≡记为：G ={V，E}
- ≡图G中的V集是任意给定的
  - △而E集只是V集中两个元的关系
- ≡若v_i∈V，v_j∈V
  - △则当且仅当 v_i R v_j 时
  - △即v_i对v_j有某种二元关系（如邻接关系）时，
  - △才有某个e_r∈E
  - △也可以有多个e_r∈E 与v_i和v_j对应
- ≡反之，一个e_r只能对应于一对端
  - △但这两个端可以是同一端
- ≡e_r的每个端称为与e_r相关联的端
- ≡e_r的两个端称为邻接端

相邻(adjacent)

关联 (incident)

联结(connect)

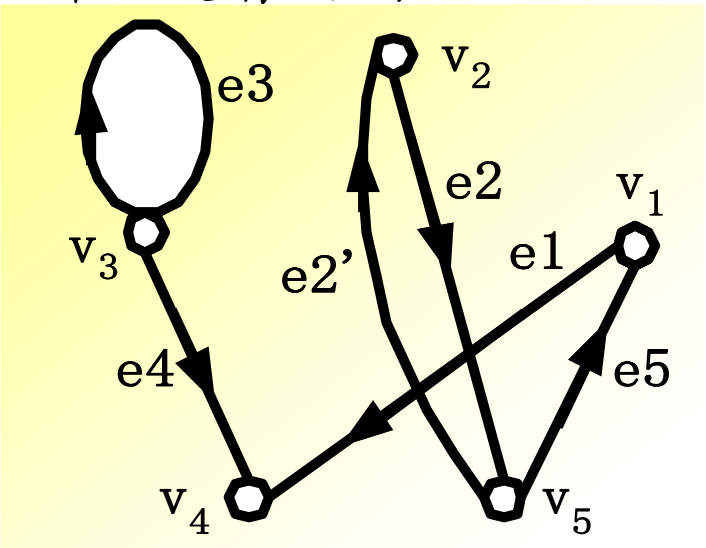


无向图：

- 若v_i对v_j有某种关系 等价于 v_j对v_i有某种关系
- 则称这种图为无向图（**Undirected Graph**）
- v_i，v_j是无序的，即$v_i v_j = v_j v_i$

有向图：

- 若v_i对v_j有某种关系 并不意味着 v_j对v_i有某种关系
- 则称这种图为有向图（ **Directed Graph** ）
- 如转移关系，v_i可以转移到v_j，并不意味着 v_j可以转移到v_i，这种关系是有向的，所以是有向图
- v_i，v_j是有序的，即$v_{ij} \neq v_{ji}$

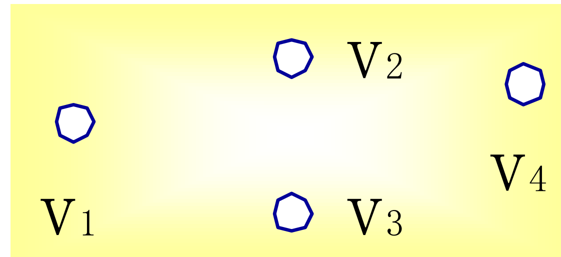


空图：

- 端集为空集$V = \{\phi\}$
  （当然，边集也为空$E = \{\phi\}$）
  的图称为空图

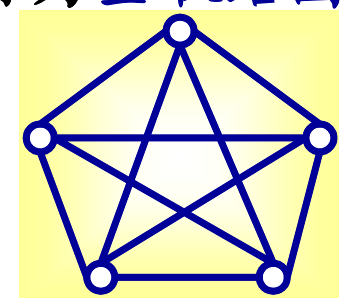
孤立点图

- 边集为空E = { ϕ}，但端集不空V{ ϕ}，端间无关系，
  - Δ 则称为孤立点图
- 在一个图中，无端必定无边，但无边却不一定无端
- 例:



全联结图

- 任何两端之间都有一条边的图，称为全联结图
- 记为Kn
- 例:



有限图

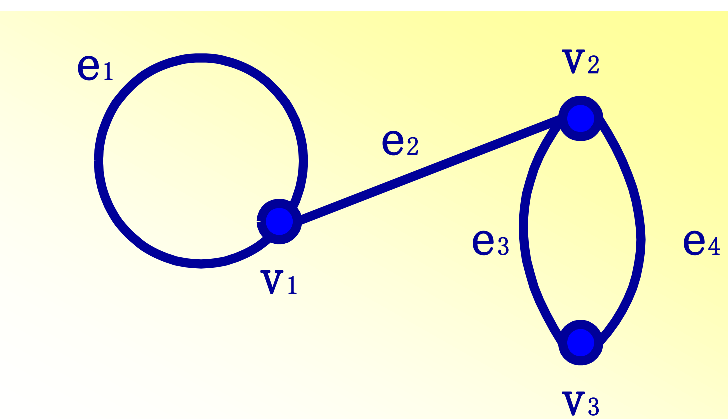
- 当集合V和E都为有限集时，所构成的图称为有限图

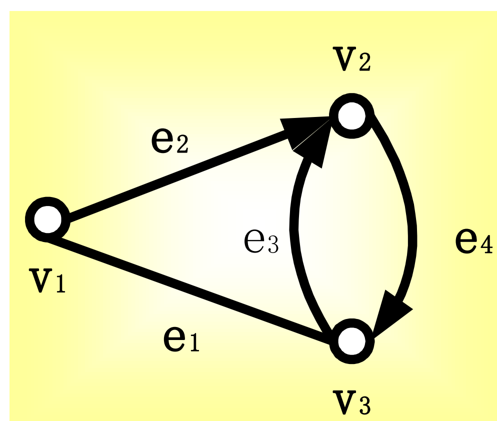
无限图

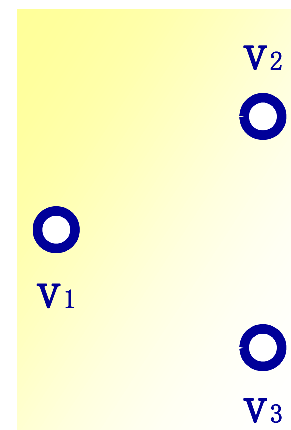
- 当集合V和E都为无限集时，所构成的图称为无限图

图的几何表示（1）

- 图a中：边e1称为**自环**，e1所关联的两个端为同一端
- 边e3 、e4称为**重边**，e3和e4关联相同的两个端v2 、v3
- 图b中：边e3 和e4不是重边，因为，它们的方向不同
  - 但二者可以合并，成为一条无向边
  - e1为无向边，它也可以拆分成两条不同向的有向边
- 一个不含自环和重边的图称为**简单图(Simple Graph)**
- 一个不是简单图的图称为 **伪图**
- 今后，我们主要讨论和研究简单图



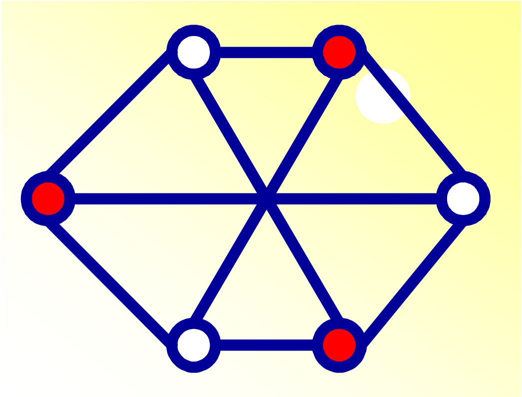


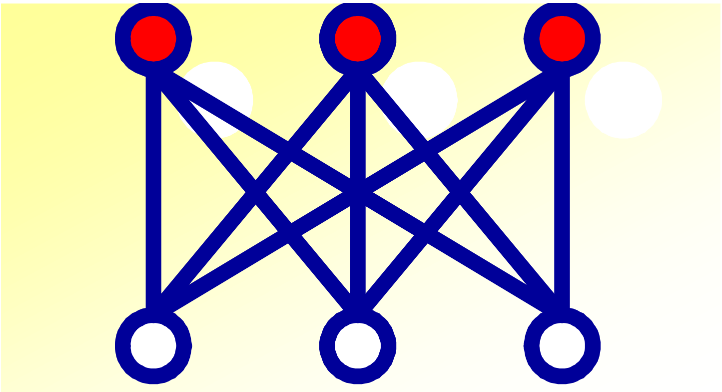


- a. 无向图　　b. 有向图　　c. 孤立点图

＝图的几何表示（2）

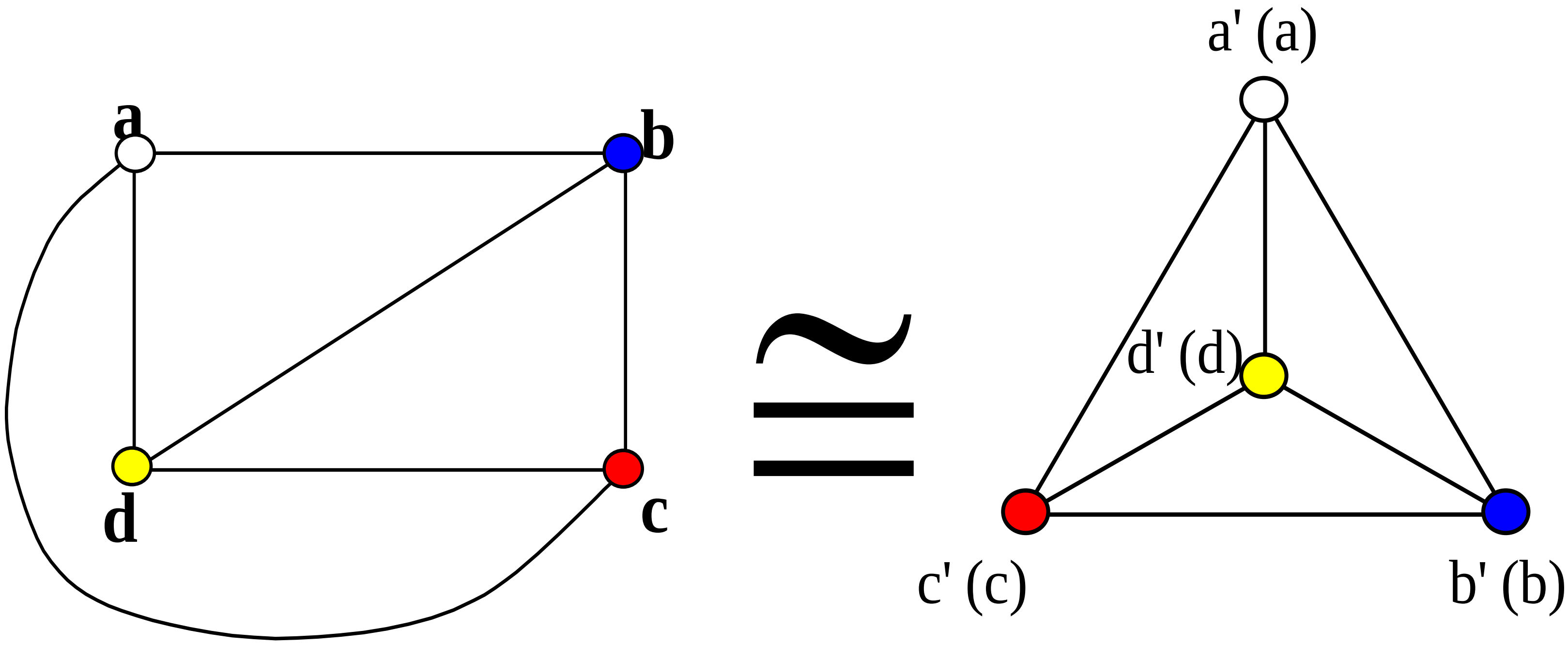
- ≡任何有限图，都可表示为三维空间的几何图形
  - Δ若两条边的交点不认为是端点，则有限图可以画在二维平面上
- ≡一个图，画成几何图形时
  - Δ端点的几何位置是任意的
  - Δ线的长度和形状也是任意的，即可以是直线，也可以是曲线
  - Δ即：图，只规定了结构特征，而不考虑具体的几何特性
- ≡图的同构：
  - Δ有图G1＝（V1，E1） 和 G2＝（V2，E2）
  - Δ有变换f：V1→V2，使端集一一对应，且保持边的关联
  - Δ如下图，则称：这两图同构
  - Δ即：图的结构相同，仅仅因为节点摆放不一样而表现为不同图





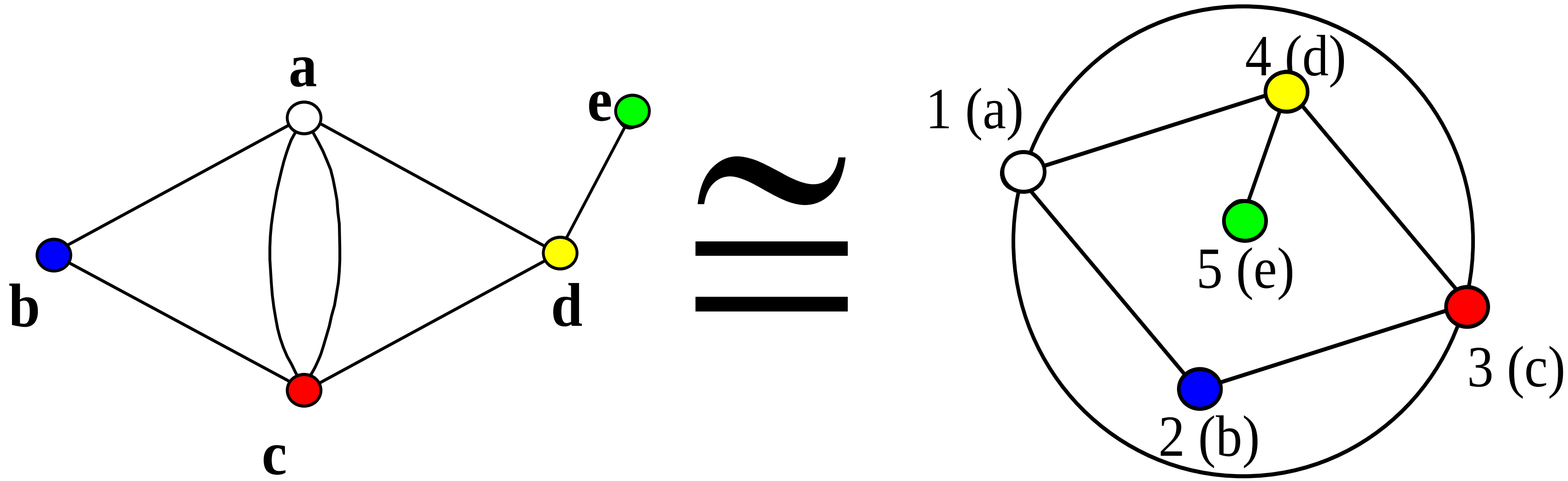
同构图的更多例子：（2）

无向图



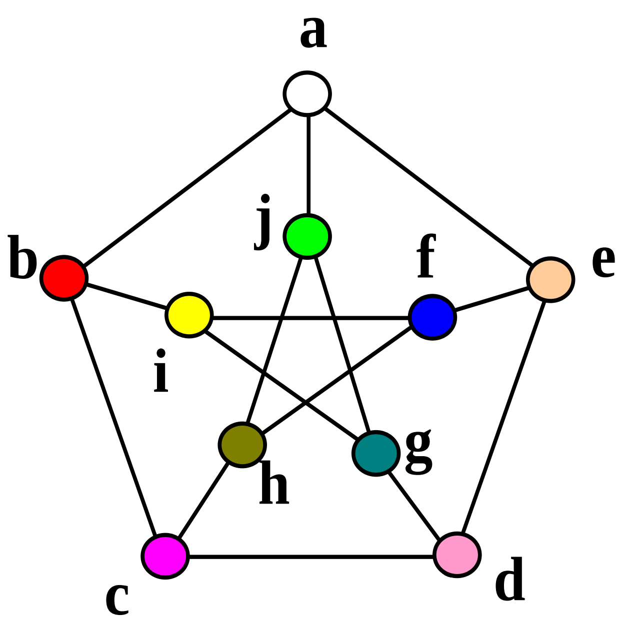
≡同构图的更多例子：（3）

无向图

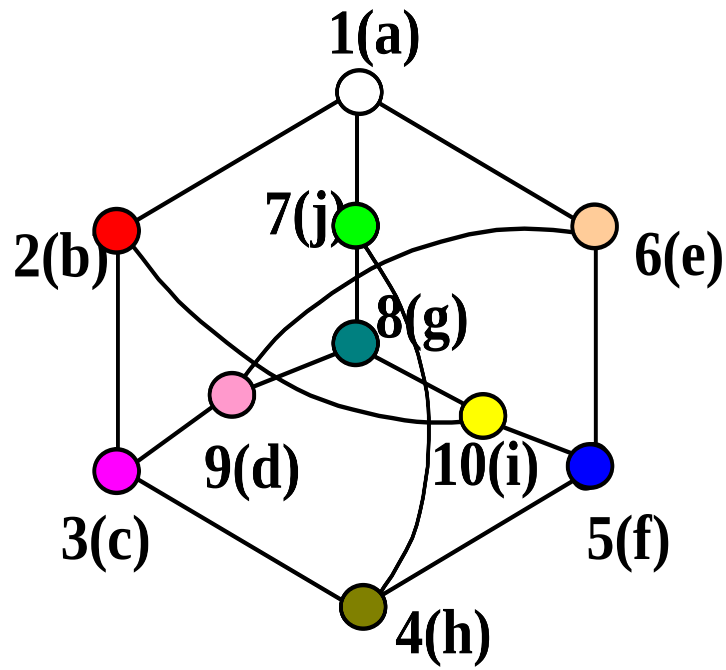


≡同构图的更多例子：（4）

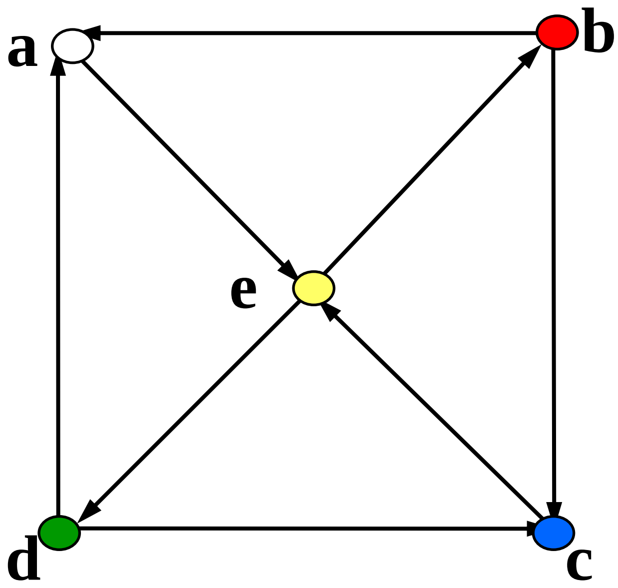
无向图



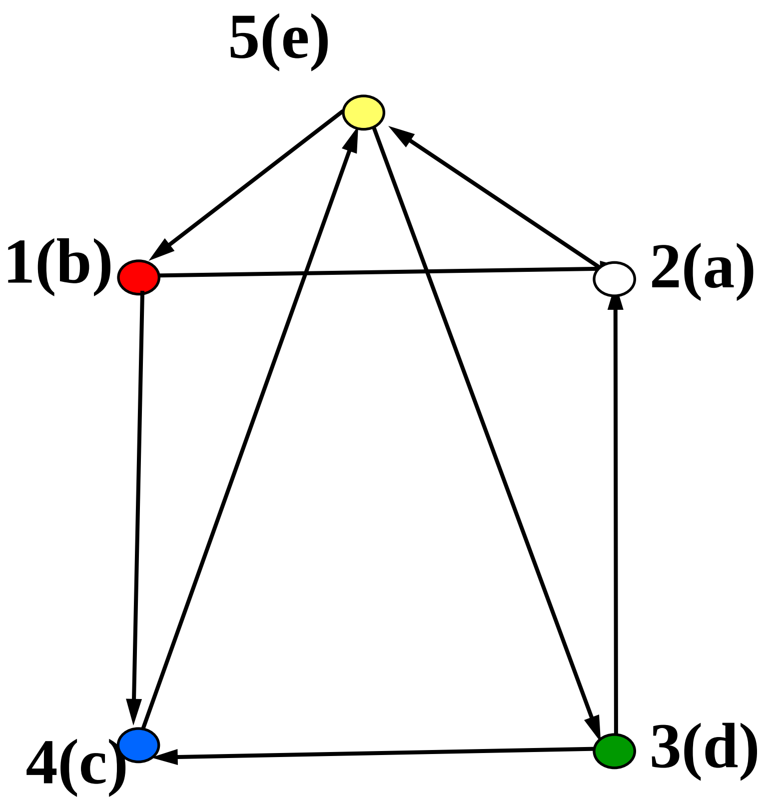
≅

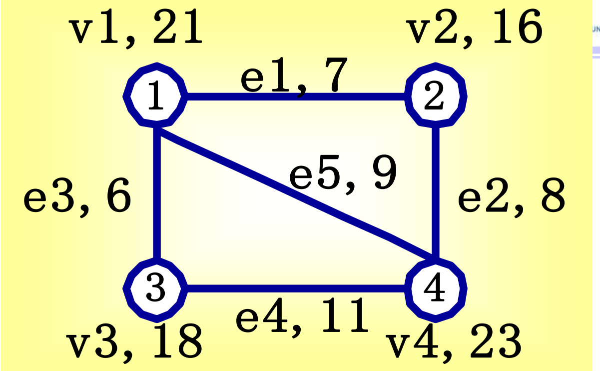


≡同构图的更多例子：（5）



$\cong$





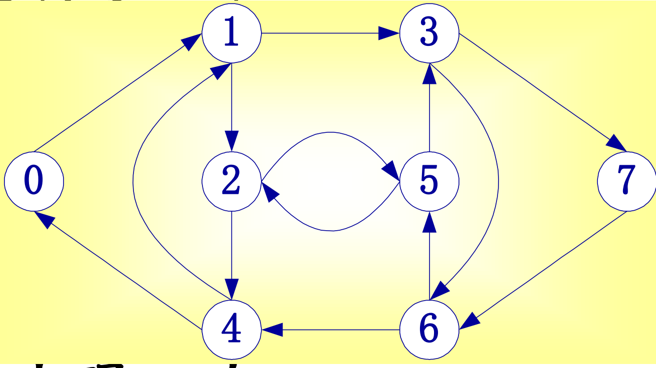
图的几何表示（3）

有权图

- 对于某些实际问题，也还需要考虑几何特性
- 为此，可以对端和边赋予某些数值，这样的图称为有权图
- 边或端上所赋的值称为权值，或权（weight）
- 一条边或一个端的权值也不限于一个，可以用几个权来表示几种性质
- 如在电路图中：
  - 端的权值可以是电位，边的权值可以是电流
- 而在通信网中：
  - 端可以是交换局，端的权值可以是该局造价、交换容量等
  - 边可以是信道，其权值可以是信道的造价、容量、长度等
- 又如公路运输网、铁路运输网、邮政网、给水和排水管网等等，都可以有不同的权值，如线路等级、运输价格、运输速度

= 图论在逻辑分析方面的应用

- ≡ 图论，除了适用于几何图形性质的应用以外
  - Δ 还在逻辑分析、逻辑推理等方面也有广泛应用
- ≡ 如用n位D寄存器产生M序列的状态转移过程
  - Δ 就可抽象为图

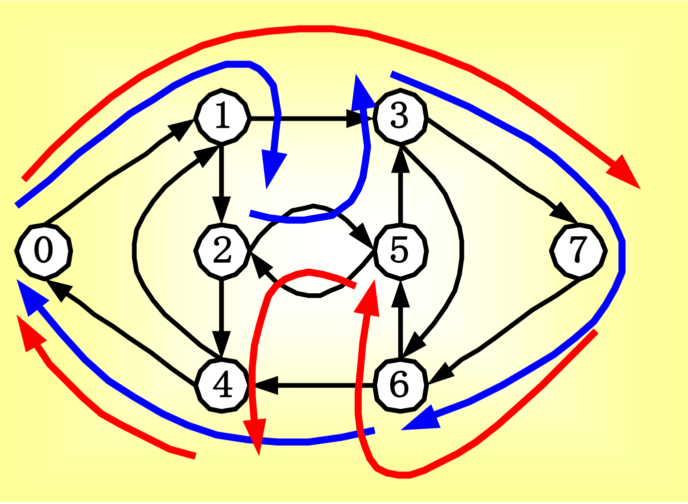


- ≡ n位移位寄存器可以产生2^n种状态
  - Δ 每个状态可以用图的一个端来表示
  - Δ 状态的转移可以用有向边来表示
- ≡ M序列：所有状态在一个周期中只出现一次
  - Δ 所以需要找出一个环，它遍历所有状态
- ≡ 令n = 3
  - Δ 有两种可能的环路：

0 → 1 → 2 → 5 → 3 → 7 → 6 → 4 → 0

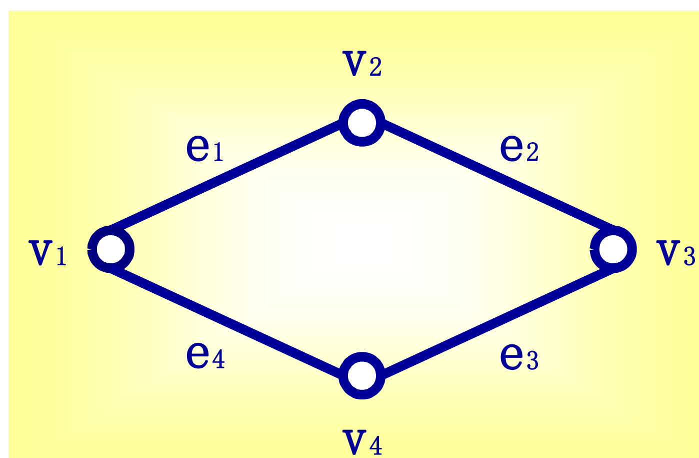
0 → 1 → 3 → 7 → 6 → 5 → 2 → 4 → 0

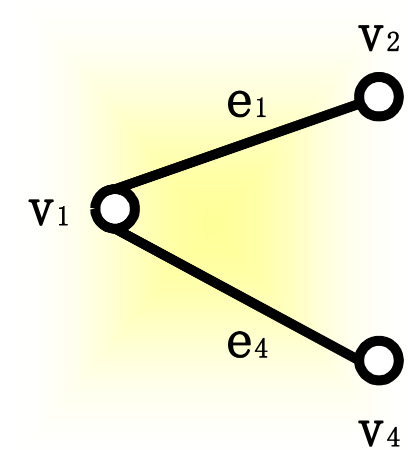
  - Δ 对应于两个M序列：0 1 0 1 1 1 0 0
  - 0 1 1 1 0 1 0 0



– 图的运算

- 图是集合V及其关系E的综合{V，E}
  - 即G = {V，E}
  - 所以，集合论中的一些概念及术语可以移植过来
- 子图（subgraph）：
  - 图A的端集和边集分别为图G的端集和边集的子集
  - 即：$G = \{V, E\}$，$A = \{V_A, E_A\}$，$V_A \subseteq V$，$E_A \subseteq E$
  - 则图A是G的子图，记为：$A \subset G$
  - 例：图A为G的子图
  - 任何图都是自己的子图，即：$A \subset G$ 也包括 $A = G$





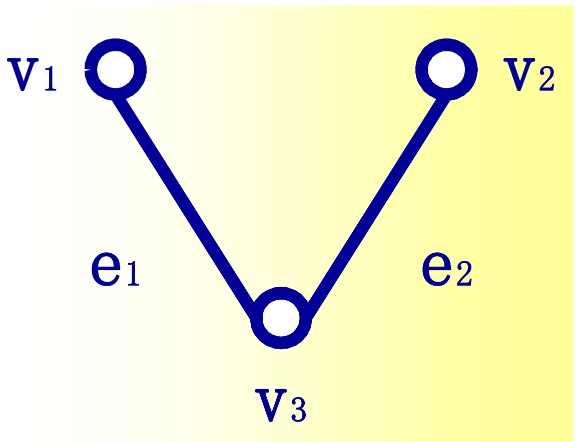
- 真子图
  - 若$A \subset G$，但$A \neq G$，则称A为G的真子图
  - 若$A \subset G$，且$G \subset A$，则必有$A = G$

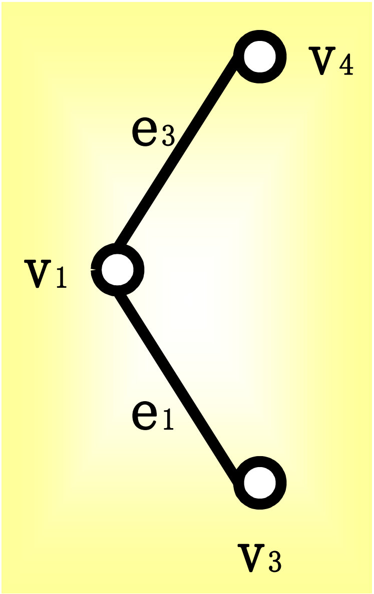
- 支撑子图
  - 特别地，当$V_A = V$，$E_A \subset E$时，
  - 称图$A = \{V, E_A\}$是图$G = \{V, E\}$的支撑子图

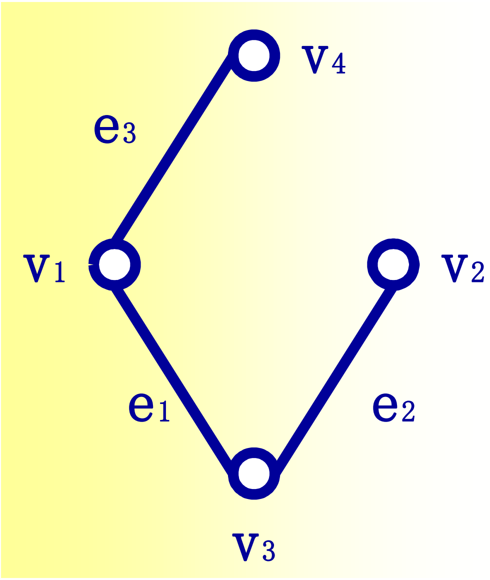
- 补图
  - 若图$G = \{V, E\}$，则图$G^C = (V, E^C)$称为图G的补图
    - 其中：E^C是集合E的补集
    - E的全集为全联结图的边集
    - 如：全联结图的补图K_n^C是只有端而无边的图
      - 即为孤立点图

并图

- 图Gc的端集和边集分别为图Ga与Gb的端集和边集之并
  - $V_c = V_a \cup V_b$
  - $E_c = E_a \cup E_b$
  - 记为： $G_c = G_a \cup G_b$，称图Gc为图Ga与Gb的并图
  - 即：大家有的它都有
- 例：







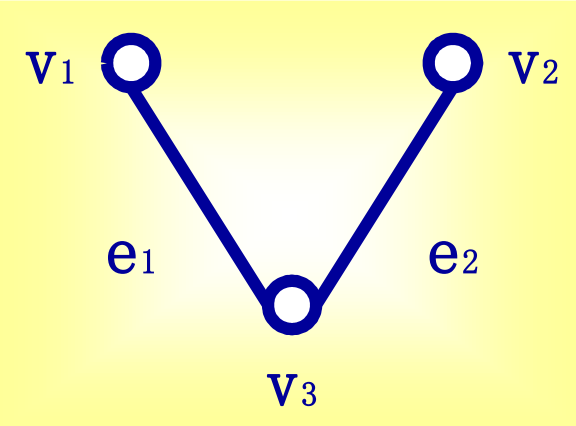
- Ga　　Gb　　Gc

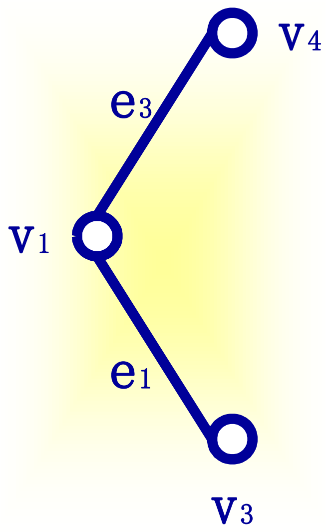
= 交图

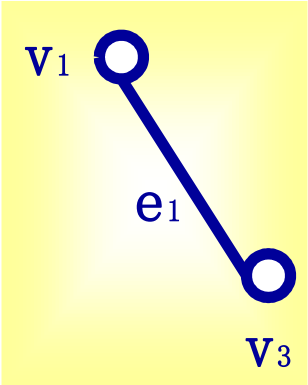
≡ 图Gc的端集和边集分别为图Ga和Gb的端集和边集之交

- Δ $V_c = V_a \cap V_b$
- Δ $E_c = E_a \cap E_b$
- Δ 记为：$G_c = G_a \cap G_b$，称图Gc为图Ga与Gb的交图
- Δ 即：大家都有的它才有

≡ 例：







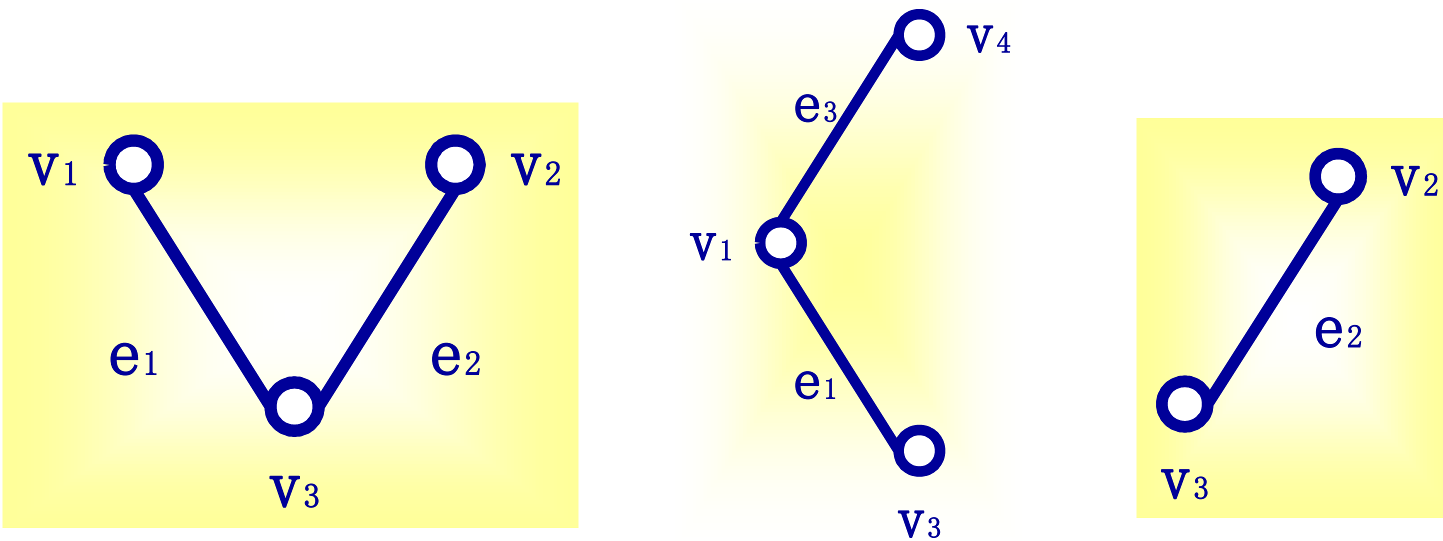
≡ Ga Gb Gc

= 差图：

≡ 从图Ga中减去Ga和Gb的共有边和共有端，但保留未去掉的边所关联的端

- Δ 记为： Gc = Ga ~ Gb = Ga ~ Ga ∩ Gb
- Δ 用“～”表示差图运算是因为图Gb的有些部分没有参与运算，与传统的差运算不同
- Δ 称图Gc为图Ga与Gb的*差图*
- Δ 即：只有Ga特有的，没有Ga和Gb共有的，但保留边的关联端

≡ 例：



≡ **Ga** **Gb** **Gc**

- 环和图:
  - 从图 $Ga \cup Gb$ 中去掉Ga和Gb的共有边
  - 记为: $Gc = Ga \oplus Gb = Ga \cup Gb \sim Ga \cap Gb$
  - 并称它们为环和
    - △保留二者特有的边，去掉二者共有的边

- 直和图:
  - 若图 $Ga \cap Gb = \phi$ = 空图
  - 则Ga和Gb的并图可记为: $Ga \cup Gb = Ga + Gb$
  - 并称它们为直和
    - △特点:两个独立部分简单地并列在一起

- 直差图:
  - 若 $Gb \subset Ga$，即Gb是Ga的真子图
  - 则Ga与Gb的差图可记为: $Ga \sim Gb = Ga - Gb$
  - 并称它们为直差

– 图的联结性

= 在通信网中，图的联结性起着重要的作用

= 端的度数：与某端相关联的边数，记为 $d(v_i)$

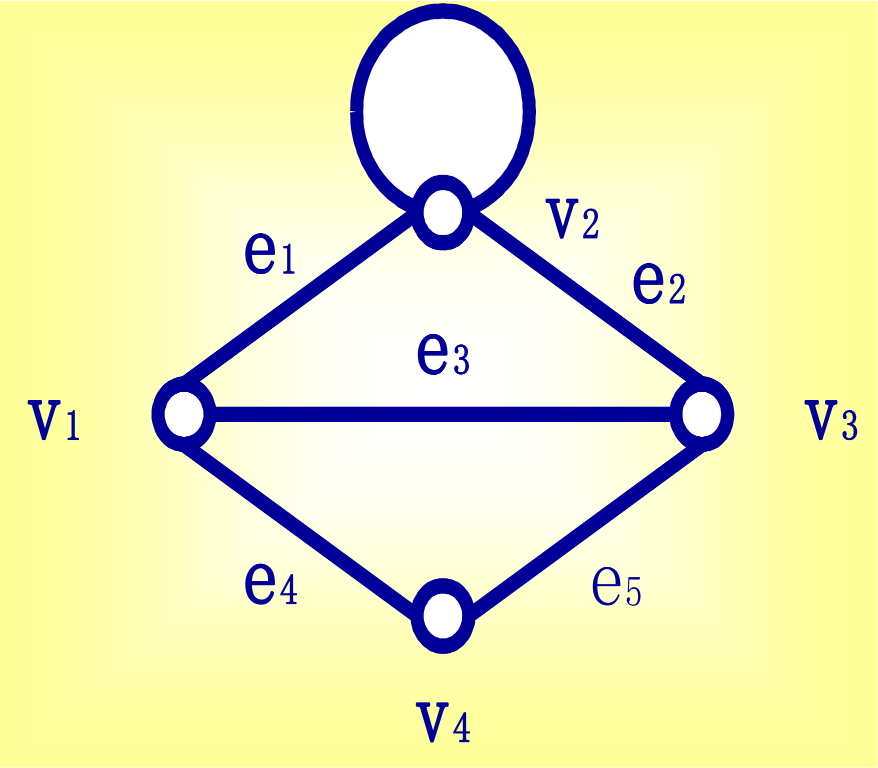
≡ 例1：无向图

Δ $d(v_1)=3$

Δ $d(v_2)=4$

Δ $d(v_3)=3$

Δ $d(v_4)=2$



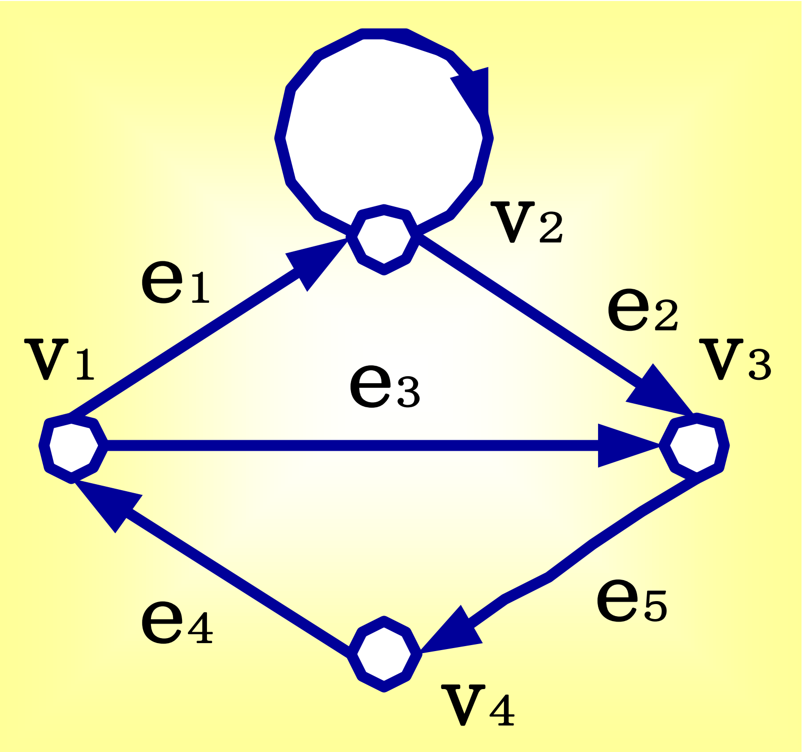
端的度数:

例2: 有向图

- $d^{+}(v_i)$: 表示离开v_i端或从v_i端输出的边数
- $d^{-}(v_i)$: 表示进入v_i端或输入v_i端的边数
- $d(v_i) = d^{+}(v_i) + d^{-}(v_i)$ 表示v_i的度数

- $d^{+}(v_1) = 2$
  $d^{-}(v_1) = 1$
  $d(v_1) = 3$

- $d^{+}(v_2) = d^{-}(v_2) = 2$
  $d(v_2) = 4$



≡ 图G中，端的度数最小值：$\delta(G) = \min\limits_{v_i \in V}[d(v_i)]$

≡ 端的度数最大值：$\Delta(G) = \max\limits_{v_i \in V}[d(v_i)]$

= 图的度数的性质（1）（握手定理）

≡ 性质1：对于有n个端，m条边，即|V|= n，|E|= m 的图

Δ 必有 $$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m \qquad (3-1)$$

Δ 对于有向图：$$\sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i) = m$$

≡ 【证明】：

Δ 因为 每条边都将提供度数2

Δ 所以 一定有上式成立

- 图的度数的性质（2）
  - 性质2：任何图中，度数为奇数的端，其数目必为偶数个（或零个）

  - 【证明】：
    - 将图的端集V分为奇度数端集V1和偶度数端集V2
    - 则有：V = V1 + V2
    - 由(3-1)式：$\sum_{v_i \in V} d(v_i) = \sum_{v_j \in V_1} d(v_j) + \sum_{v_k \in V_2} d(v_k) = 2m$
    - 因为 d(v_k) 是偶数，2m也是偶数
    - 所以 $\sum_{v_j \in V_1} d(v_j)$ 必为偶数
    - 由于d(v_j)是奇数
    - 所以，V_1中v_j的个数必为偶数

– 图中的链、径、环

= 边序列:

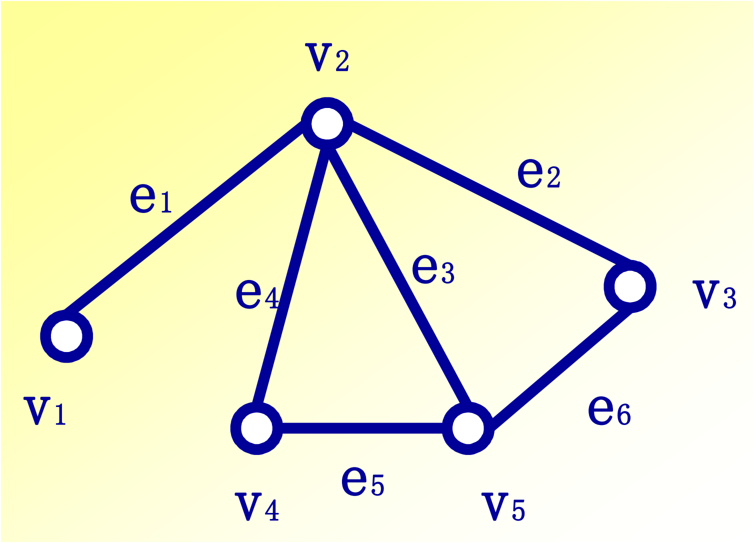
≡ 定义:

△ 有限条边的一种串序排列（相邻两边有公共端）：

（v_{i1}，e_{i1}，v_{i2}，e_{i2}，……，v_{ik}，e_{ik}，v_{ik+1}）称为边序列

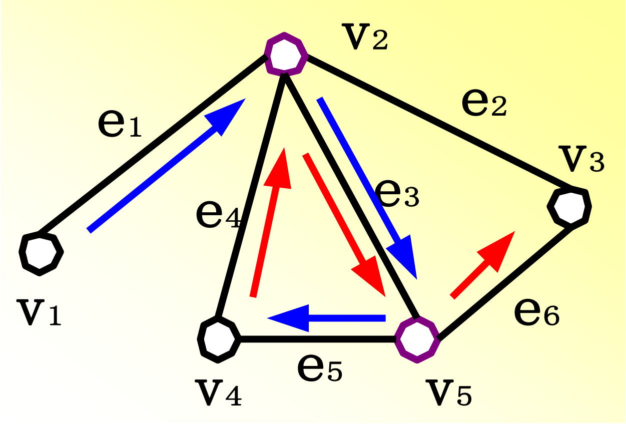
△ 其中：l_{it}=（v_{it}，e_{it}，v_{it+1}）称为$v_{it}-v_{it+1}$链

≡ 在边序列中，某条边可以重复出现，某个端也可以重复出现



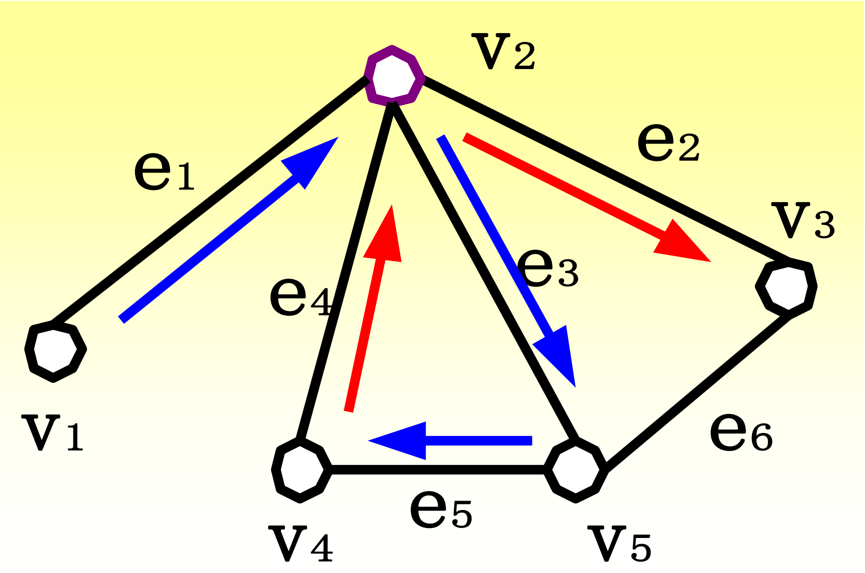
≡ 例

△（e1,e3,e5,e4,e3,e6）是一个边序列

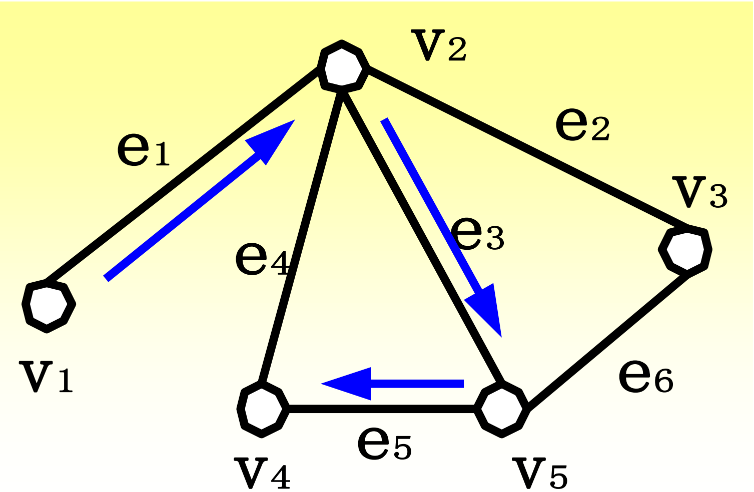


链

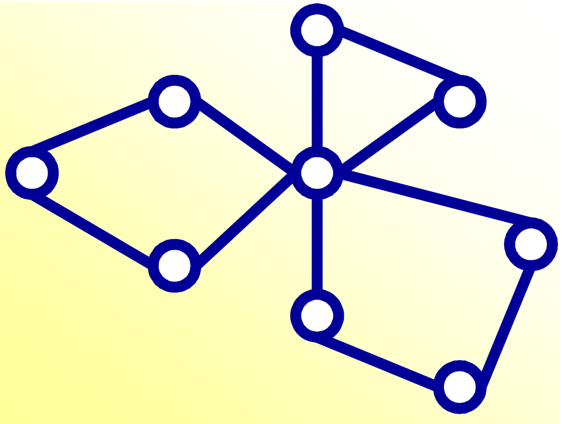
- 定义：没有重复边的边序列
- 链中每条边只能出现一次，但可以有重复端
- 链通常是指开链，即起点和终端不是同一端
- 链中只有两个端，其度数为奇数
- 如前例：（e1,e3,e5,e4,e2）是一条从V1到V3的链
  - 其中：端V2在序列中经过两次



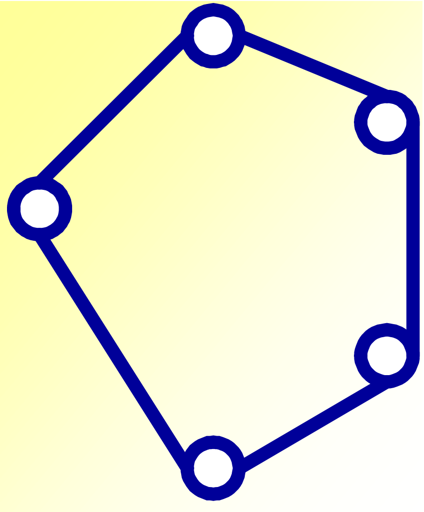
- 径（path）
  - 定义：径是既无重复边、又无重复端的边序列
    - Δ或无重复端的链
  - 在径中，每条边和每个端都只能出现一次
  - 径又是无环的链
  - 在一条径中，只有起点和终端的度数为1，其余端点的度数均为2
  - 如前例：（e1, e3, e5）是V1到V4的之间的一条径



- 环（ring）：
  - 定义：起点和终点为同一端的链，即闭链
  - 例：



- 圈（circle）：
  - 定义：顶点不相同的环，即闭径
  - 例：



- 对于有向图的链、径、环，可有相仿的定义
  - 只是在其边序列中，相邻两边对共有端而言，前面的边必须是输入边，后面的边必须是输出边

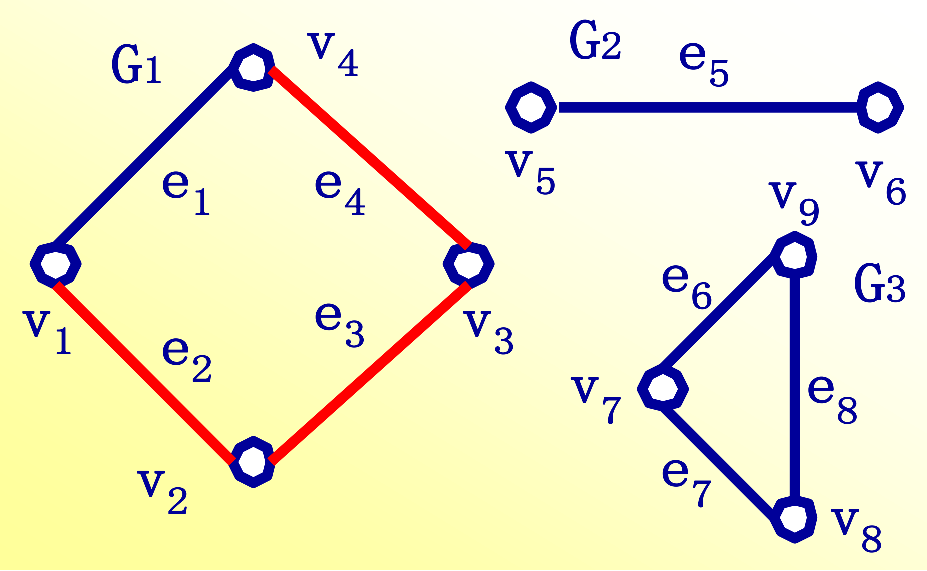
– 联结图

= 定义:

≡ 图内任何两个端之间都有径

≡ 这类图称为联结图

≡ 否则，称为非联结图



= 关于非联结图

≡ 非联结图总可以分成几个部分

≡ 部分：是指原图的一个子图，此子图是一个最大联结子图

≡ 最大联结子图：是联结图，但若再加上一个属于原图的任何一个其他元素，就失去联结性，成为非联结图

≡ 例：

Δ 此图为非联结图

Δ 由三个部分G1，G2和G3组成，即 G = G1 + G2 + G3

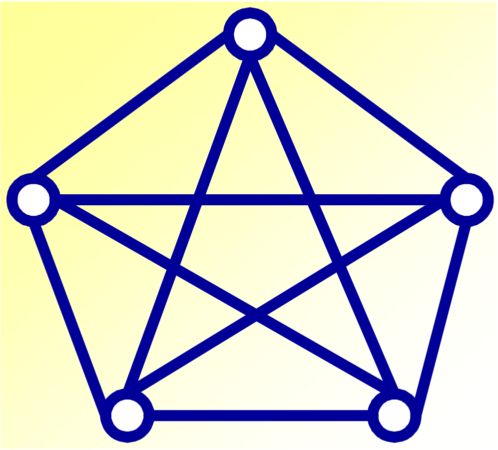
Δ G1，G2和G3都是最大联结子图

Δ 若将G1中去掉一条边e1，则它是图G的一个子图，但它不是图G的一个部分，所以它不是最大的。

- 简单联结图：
  - 无自环，无重边的联结图，称为简单联结图
  - 今后主要研究这种图
- 全联结图Kn（完全图）：
  - 定义：任何两端都有边的无向图，称为全联结图
  - 一个无重边，无自环的全联结图的边数m和端数n之间有固定关系：

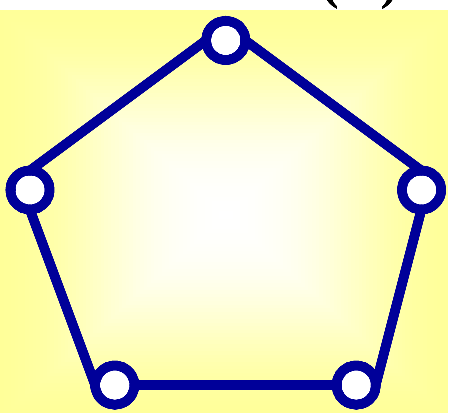
$$m = C_n^2 = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

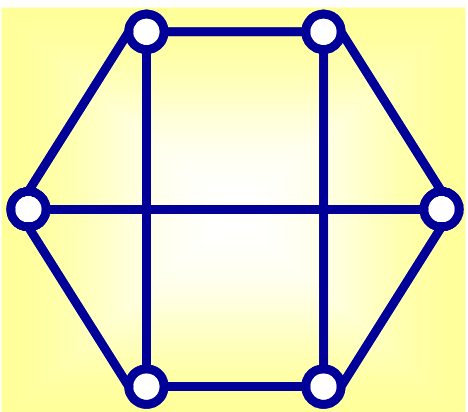
    Δ 因为任取两端都有一条边
  - 各端的度数均为：d(vi)=n−1
  - 全联结图是联结性最好的图
  - 例：n = 5的全联结图

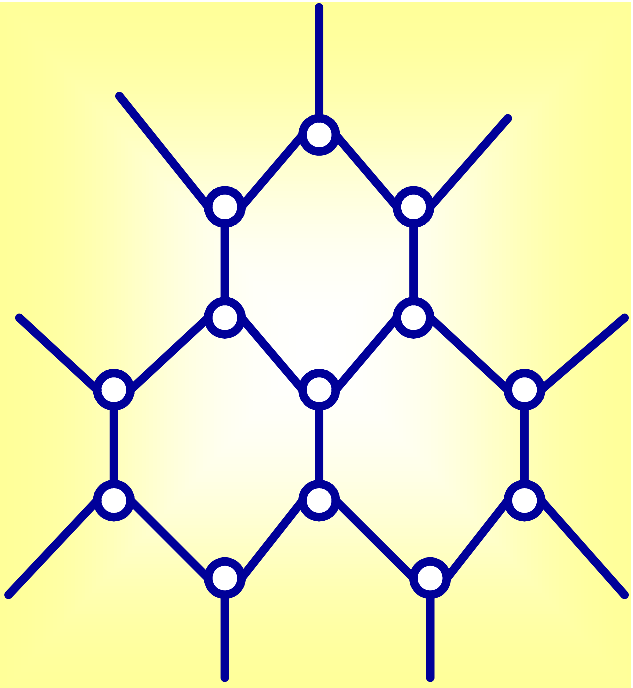


二 正则图:

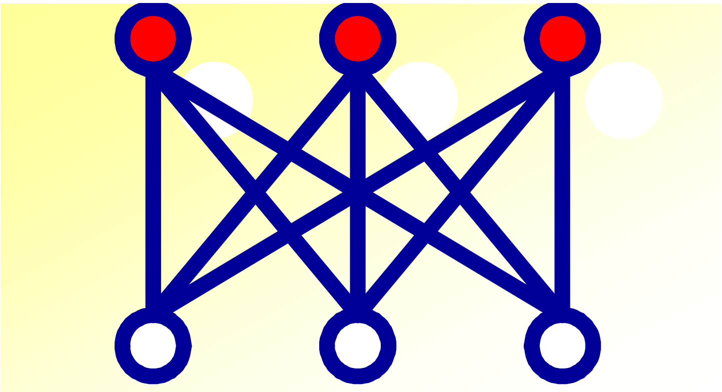
- 定义：所有端的度数都相等的联结图，称为正则图
- d(vi)=常数， i = 1, 2, …， n （n为图的端数）
  - 或者，$\delta(G) = \Delta(G)$
- 正则图的联结性最均匀
- 在要求确定的联结性时，正则图是边数最少的图
- 无重边，无自环的全联结图是正则图
- 正则图不一定是全联结图
- 例:
  - d(vi)=2，（n = 5）:
  - d(vi)=3，（n = 6，n = ∞）:







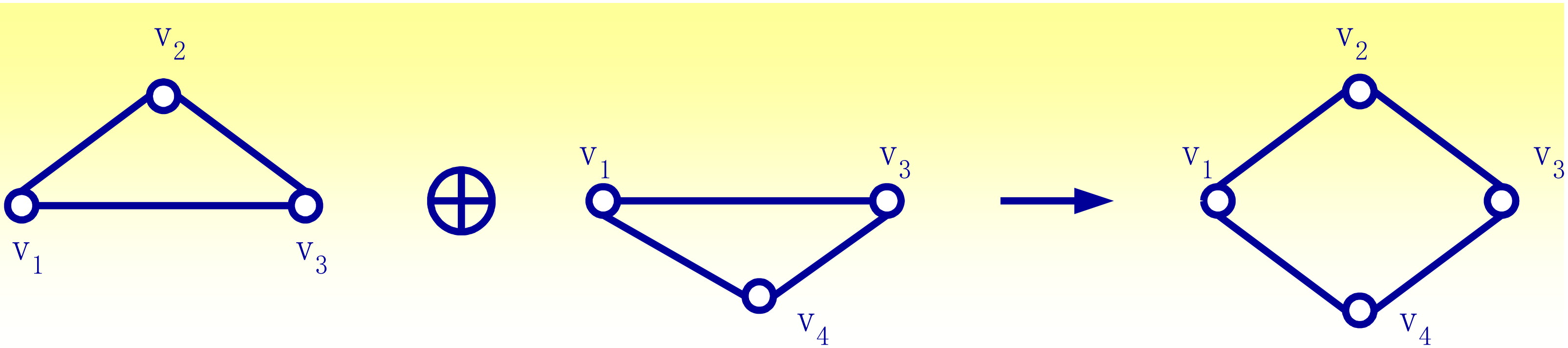
- 二部图:
  - 定义:
    - 二部图的端点集合可以分为两个子集
    - 所有边的两个邻端分别在这两个子集中， $G=\{V_1,V_2, E\}$
  - 特别地，完全二部图K_{mn}的端点集合有两个子集
    - 分别有m和n个端点， $K_{mn}=\{V_1,V_2, E\}$， $|V_1| =m, |V_2|=n$
    - 从这两个子集中各任取一个端，它们之间都有一条边
    - 共有mn条边
  - 类似地，还可以有多部图等



  - 右图就是一个六端的二部图:
  - 而且是一个完全二部图$K_{3,3}$，
  - 共有3*3=9 条边
  - 红端和白端分别是两个端子集

二、尤拉图

- ≡定义：各端度数均为偶数的图，称为尤拉图
  - Δ（尤拉：图论的创始人）
  - Δ 尤拉图可以是联结图，也可以是非联结图
  - Δ 如果是非联结图，则其各部分必均为联结的尤拉图
- ≡联结尤拉图的特点
  - Δ 在联结的尤拉图中，一定可以找到一个包含所有边的环
  - Δ 反之，如果在图中存在一个包含所有边的环，则此图必为联结的尤拉图
- ≡联结尤拉图的充分必要条件是：存在一个包含所有边的闭链。
- ≡两个尤拉图的环和，仍是尤拉图

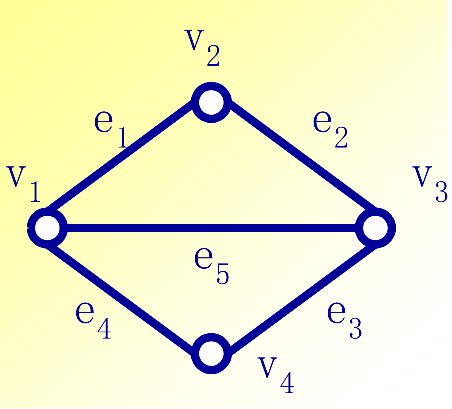


尤拉图（2）

- 一个非尤拉图可能有几个子图是尤拉图
  - 这些尤拉子图的环和仍是原图的尤拉子图
- 尤拉图的**特点**：
  - 能从一点出发，
  - 经过不重复边，
  - 回到源端点（出发点）
  - 即存在一个包含所有边的环（闭链）
- **邮递员问题**

＝M图：

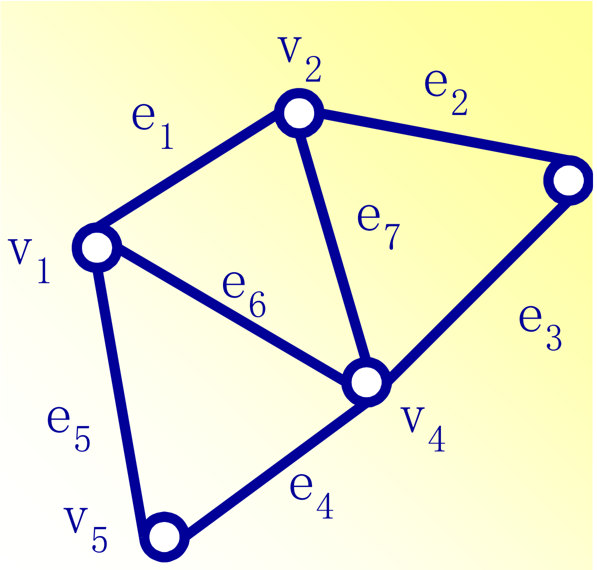
- ≡定义：图中只有两个度数为奇数的端，这种图称为M图
- ≡在M图中，除两个端外，其余各端的度数均为偶数
- ≡M图可以是联结图，也可以是非联结图
  - Δ 对于非联结的M图，其只有一个部分是M图
    - • 其余各部分均为尤拉图
  - Δ 联结M图的充要条件是：存在一个包含所有边的链
- ≡实际上，任一尤拉图去掉任一边就成为M图
  - Δ 而M图在度数为奇数的两个端之间加一条边即成为尤拉图
- ≡例：
  - Δ 这是一个M图，存在一条包含所有边的链
    - • 如：（e1，e2，e3，e4，e5）
    - • 又如（e5，e3，e4，e1，e2）
  - Δ 其起点与终点一定是度数为奇数的两个端点
  - Δ 由于不存在包含所有边的环，所以，不是尤拉图

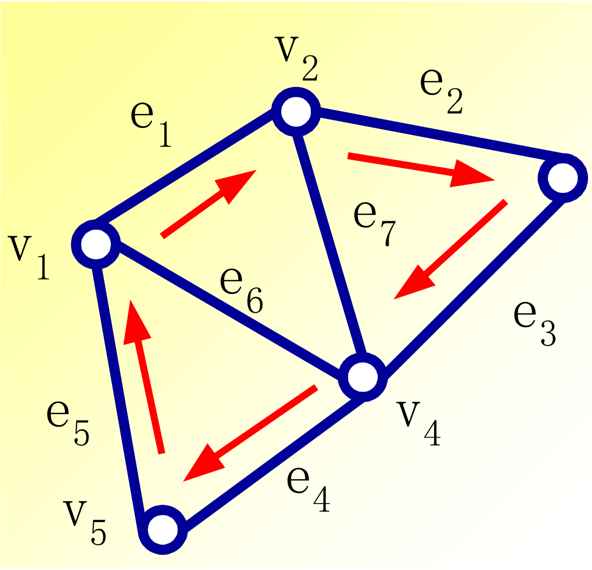


- ≡一笔划问题

汉密尔顿图（H图）

- 定义：图中至少存在一个包含所有端的环
  - △ 这种图称为汉密尔顿图，简称为H图
  - △ 这样的环称为汉密尔顿环
- H图的充要条件是：存在一个包含所有端的环
- 例：
  - △ 下图是一个H图
    - 其中的汉密尔顿环为：（e1，e2，e3，e4，e5）

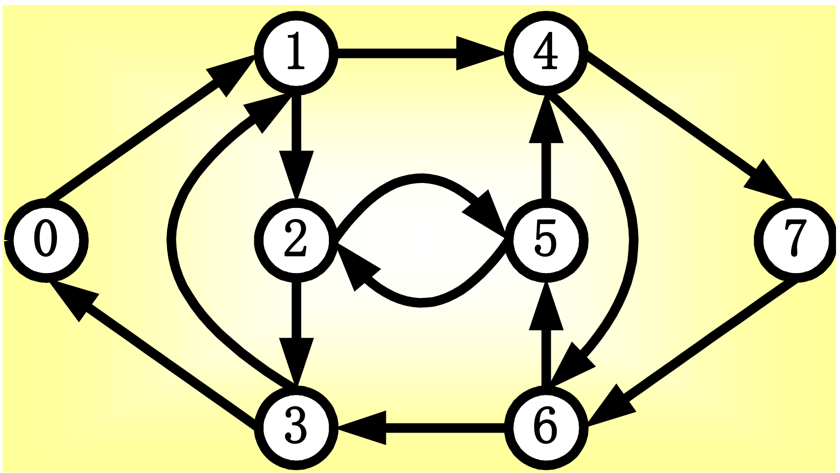


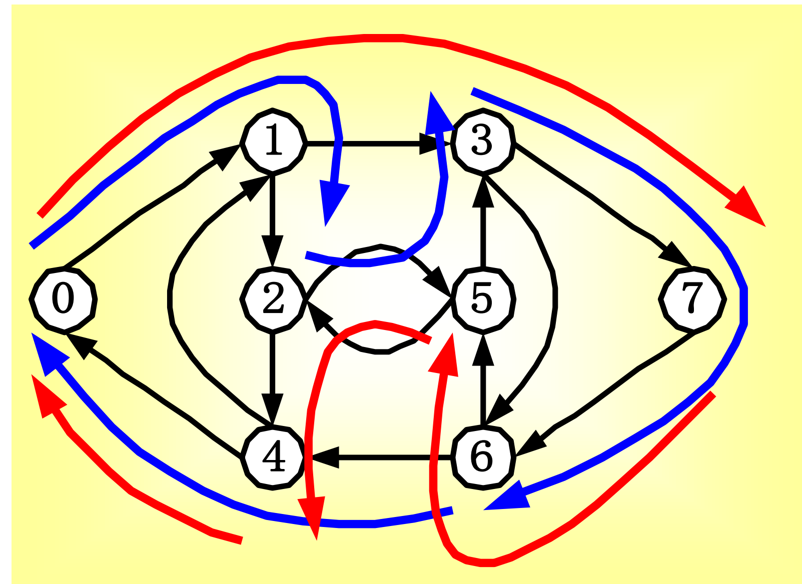


≡ 例：有向的汉密尔顿图

△ 前面逻辑序列例中的图是一个有向的汉密尔顿图，如有图：

- 其中的汉密尔顿环为：（0，1，4，7，6，5，2，3，0）
- 或：（0，1，2，5，4，7，6，3，0）





= 辨异

≡ 尤拉图和M图都是着眼于边的

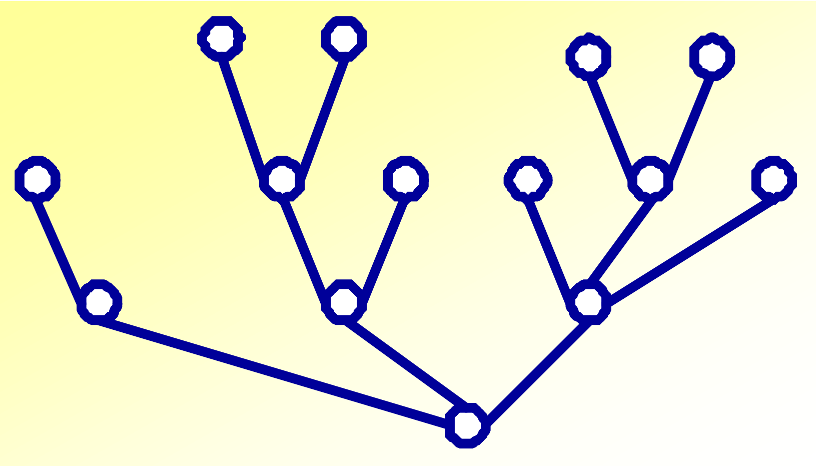
△ 即能够把所有的边连成一条链。尤拉图是闭链，M图是开链

≡ 汉密尔顿图则是着眼于端的

△ 即能够把所有的端连成一条链

– 树

- 树是图论中一个重要的概念，许多理论结果都是从树出发的
- 定义：任何两端间有且仅有一条径的图，称为树
- 树有多种定义方法，它们都是等价的：
  - 树是有n个端、n-1条边的联结图
  - 树是最小联结图
  - ……
- 要点：
  - 树是一种图
  - 其任何两端间都有径
  - 其任何两端间仅有一条径

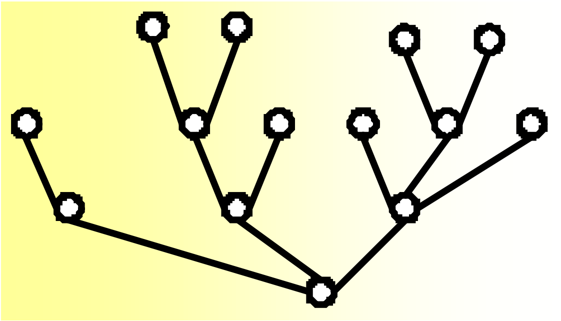


- 树的性质：
  - 树是最大的无环联结图
    - 因为任何两端间有径，所以，一定是联结图
    - 因为任何两端间只有一条径，所以，一定无环
    - 只要增加任何一条边，图中就会出现一个环，且仅出现一个环，所以，是最大的无环图
  - 树是最小联结图
    - 树中去掉任一边就成为非联结图，丧失了联结性
    - 所以是最小的联结图
  - 若树有m条边及n个端，则有m=n-1

– 树的性质（2）

- = 除单点树外，树至少有两个端的度数为1
  - ≡ 即树至少有两个悬挂点
  - ≡ 【证明】
    - Δ ∵ 对于有n个端，m条边的图来说，有：$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$
    - Δ 又∵ 对于树，有：m = n−1
    - Δ ∴ 对于树，就有：$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2(n-1) = 2n-2$
    - Δ 这意味着，如果每个端的度数都为2的话，则

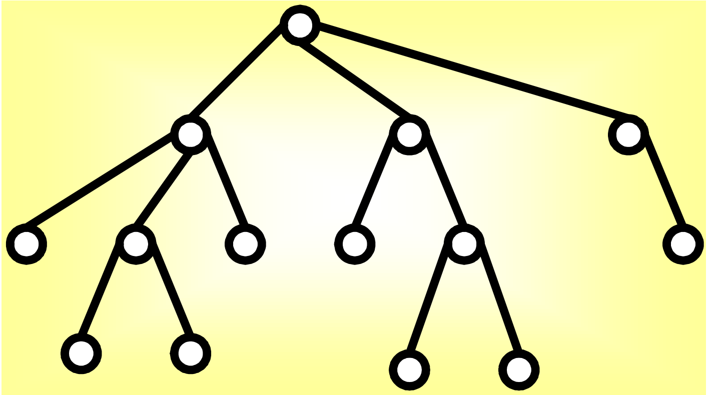
$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2n$$



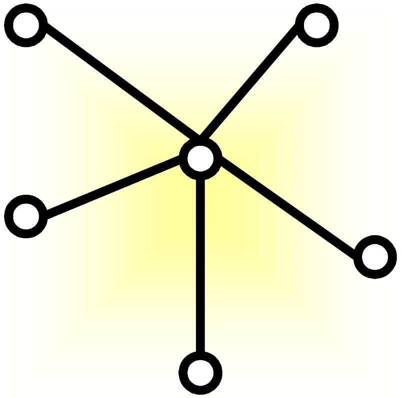
    - Δ 所以有两个端的度数必须为1
    - Δ 如果有一个或更多个端的度数大于2的话
      - 则会有更多个端的度数为1
    - Δ 命题得证

– 树的例子

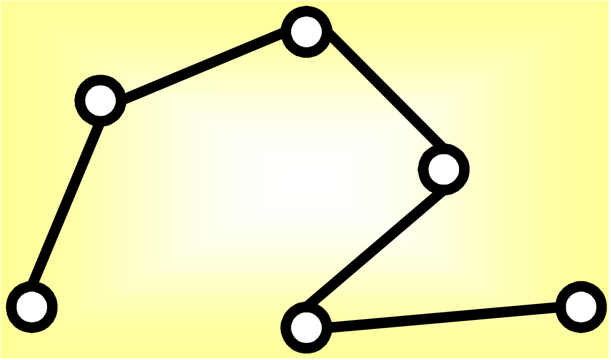
= 根树:



= 星树:

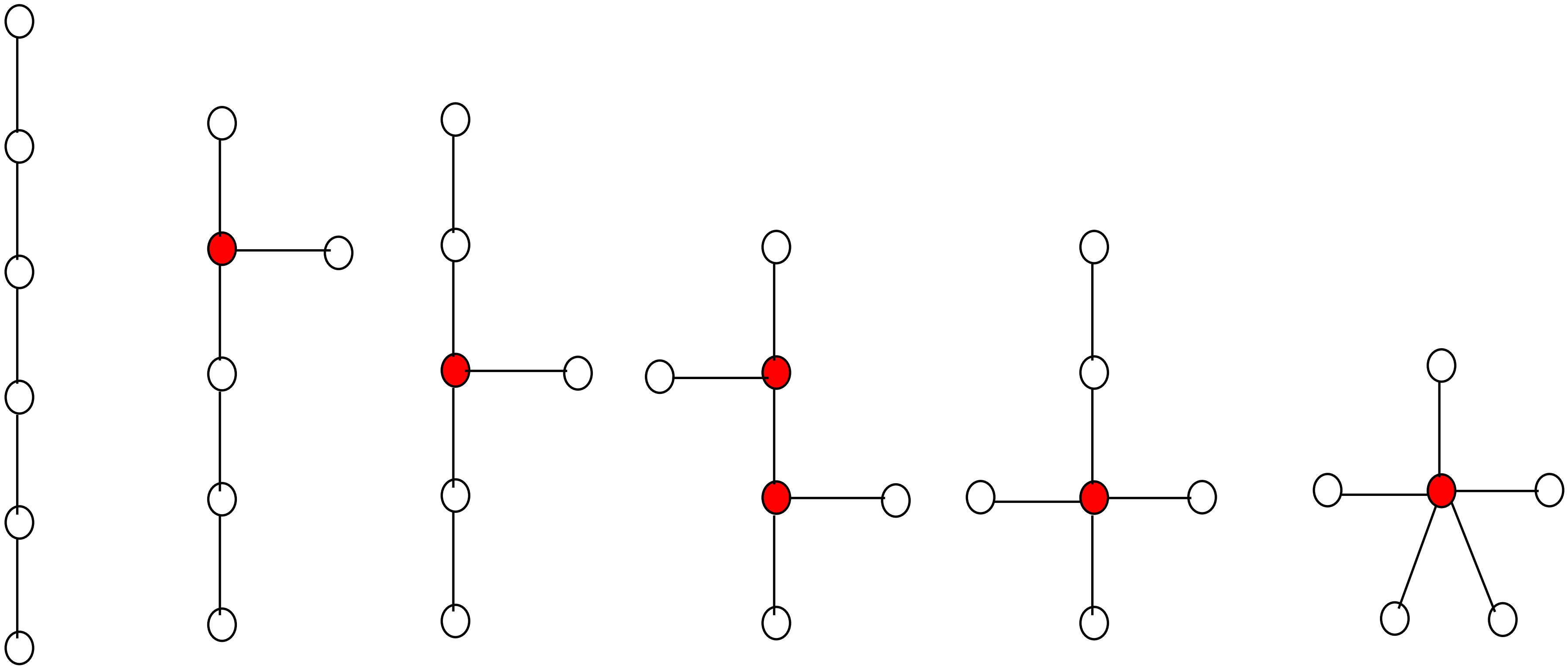


= 线树:



– 树的例子(2)

= 下面列出所有不同构的6个端的树:

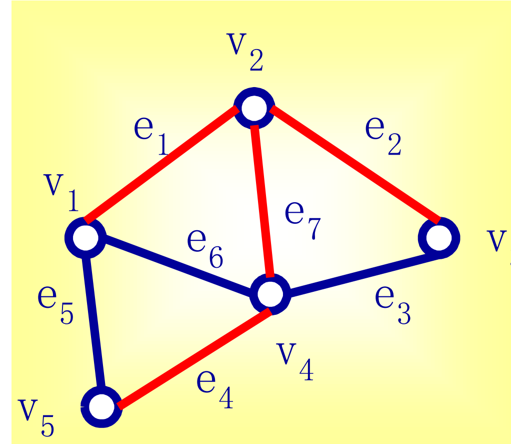


- 主树
  - 定义：覆盖联结图G所有端的树T，称为G的主树
    - 亦称支撑树
  - 在联结图G中，若树T⊂图G，且T包含了G的所有端点
    - 则称T是G的主树
  - 性质：
    - 只有联结图才有主树
    - 有主树的图必为联结图
    - 一个联结图可以有多个主树
      - Δ（图G本身已是树的情况除外）
    - 联结图至少有一棵主树

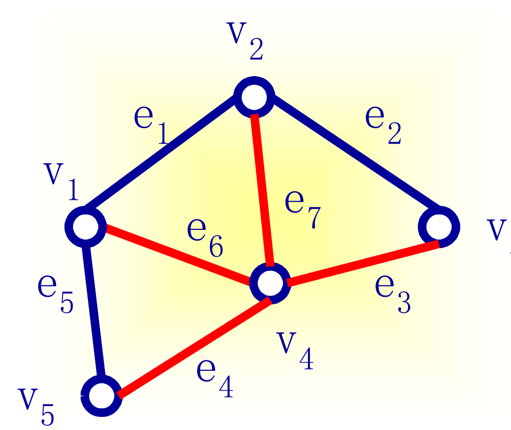
– 主树（2）

= 例:

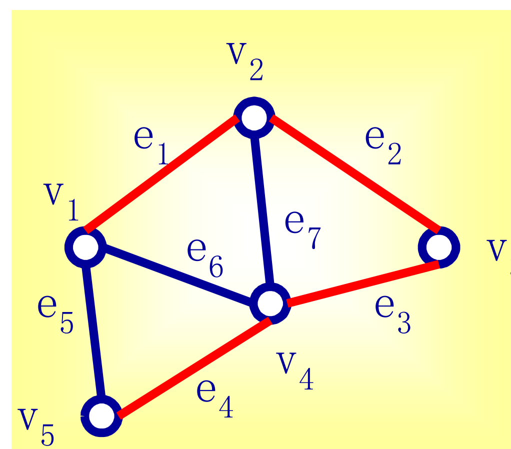
≡ 图G的一棵主树可以是根树（e1，e2，e7，e4）



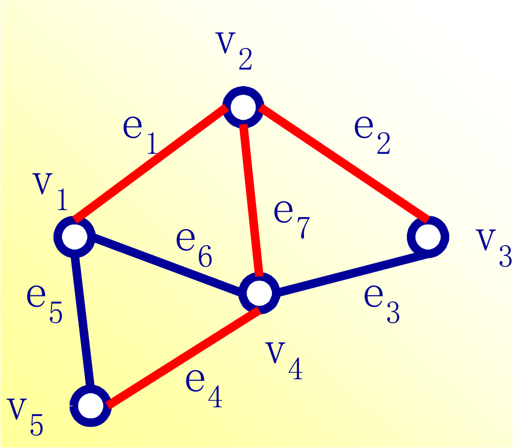
≡ 图G的另一棵主树是星树（e3，e4，e6，e7）



≡ 图G的另一棵主树是线树（e1，e2，e3，e4）



- 树枝:
  - 定义：对于某个图G，其主树上的边称为**树枝**
  - 非树枝的边称为**连枝**
  - 主树就是树枝集
  - 连枝的边集称为**连枝集**或**树补**
  - 不同的主树有不同的连枝集



- 图的阶：联结图G的主树T的树枝数称为**图G的阶**
  - 记为 ρ
  - 若图G有n个端，则它的阶数ρ是：$\rho(G)=|T|=n-1$
    - Δ $|X|$: 代表集合X中的元素数
  - 图的阶表示主树的大小，取决于图G中的端数

- 图的空度:
  - 定义：联结图G的连枝集的连枝数称为图G的空度
    - 记为μ
  - 若图G有m条边和n个端时，则其空度μ为:
    - $\mu(G) = |G - T| = m - (n-1) = m - n + 1$
    - 显然有：$\rho + \mu = m$
  - 图的空度表示主树覆盖该图的程度
    - μ表示原图中没有被主树覆盖住的那些边的数目
    - μ越小，覆盖程度就越高
    - $\mu = 0$表示图G就是树，主树T覆盖了全图
  - 图的空度还反映出图G的联结程度
    - μ越大，则连枝数越多，图的联结性就越好
    - $\mu = 0$表示最低联结性，即图G是最小联结图

- 主林
  - 定义：对于一个非联结图G，它可分成k个部分
    - 即k个最大联结图
    - 每个部分至少有一棵主树，一共有k 棵主树
    - 它们构成的集称为**主林**
    - 其余边所形成的集称为**林补**
  - 主林和林补也不是唯一的
  - **非联结图G的阶**可定义为：主林的边数，$\rho(G)=n-k$
    - 第1部分中，端数为：n_1，主树的边数为：n_1-1
    - 第2部分中，端数为：n_2，主树的边数为：n_2-1
    - ……
    - 第k部分中，端数为：n_k，主树的边数为：n_k-1
  - **非联结图G的空度**可定义为：林补的边数
    - 即：$\mu(G) = m-(n-k) = m-n+k$
  - 若k=1，则成为联结图
  - 主树或主林可以有多个，但ρ 和μ却是确定的

- 小结
  - 以上对树的讨论，都是从无向图出发的
  - 对于有向图，可以去掉边上的方向而得到无向图，仍用上述定义
    - 此时，联结两端的有向径可能不一定存在

– 割与环

≡ 在讨论图的联结性时，常用树的概念

≡ 在讨论破坏图的联结性时，常用割的概念

= 割（cut）

≡ 割是图的某些子集，去掉这种子集就使图的部分数增加

≡ 若图G是联结的，则去掉这种子集就成为非联结图

≡ 割分为割端集和割边集两种

= 割端：

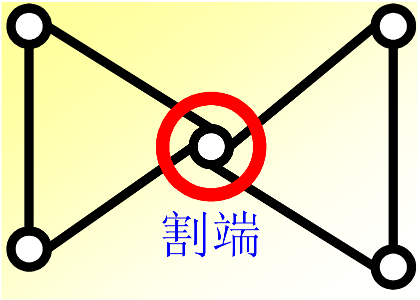
≡ 若v是图G的一个端，

Δ 去掉v及与之相关联的边后，使图G的部分数增加

Δ 则称v是G的割端

≡ 割端对于图的联结性来说是一个重要的端

≡ 例：

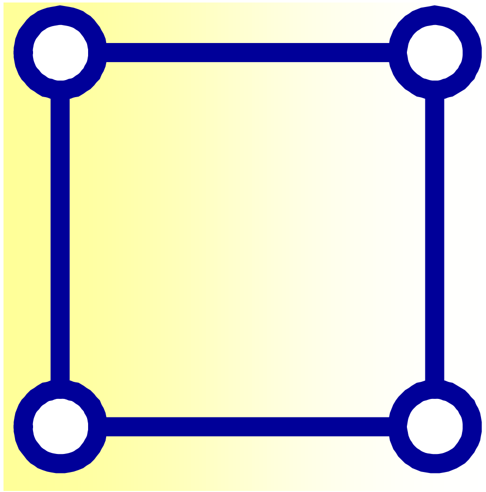


= 不可分图：没有割端的图

≡即去掉图中任一个端，及其相关联的边，图的部分数不变

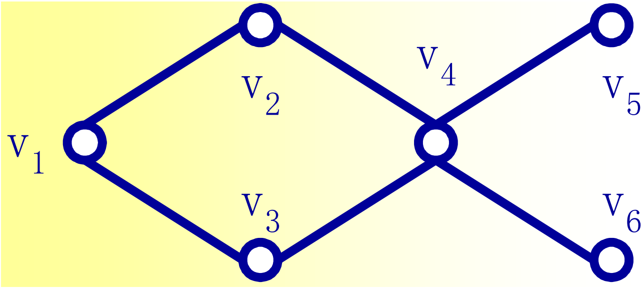
Δ这样的图称为不可分图

Δ若原图是联结的，则去掉任一端及其相关联的边后仍是联结的。如右图：



割端集

- 如果去掉几个端后，图的部分数增加
  - 则这些端的集称为割端集
- 例:
  - 此图的割端集有：{v4},{v2,v3},{v2,v4},{v3,v4},{v1,v4}
  - 其中，v4就是割端



- 最小割端集
  - 在一个图的割端集中，至少存在一个端数最少的割集，称为最小割端集
  - 上例中，{v4}就是最小割端集
- 极小割端集
  - 在图的一个割端集中，其任意真子集都不是割端集，则称其为极小割端集
  - 上例中，{v2,v3}就是极小割端集，但{v2,v4}则不是
- 最小割端集是极小割端集，反之不然

图的联结度

- 定义：图G中，其最小割端集中的端数称为图的联结度
  - 用α表示，$\alpha = \min|X|$
  - X：割端集
- 图的联结度表示要破坏图的联结性的难度
  - 联结度越大，联结性越好，联结性越不易被破坏
  - 它是从端点的角度来看网的联结性的
  - 它对网的可靠性有直接影响
    - 即网络节点对网络可靠性的影响

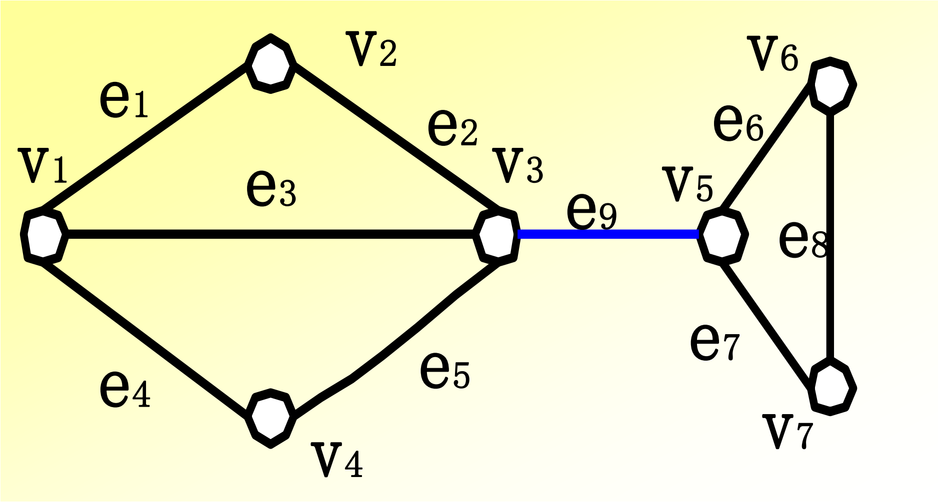
割边集和割集

割边:

- 联结图G中某条边被去掉后，图G变为非联结图
- 则此边称为**割边**

割边集

- 设S是联结图G的某个边子集
- 若在G中去掉S，就使G成为非联结图
- 则称S是G的**割边集**



＝割边集和割集（2）

≡割集（极小割边集）

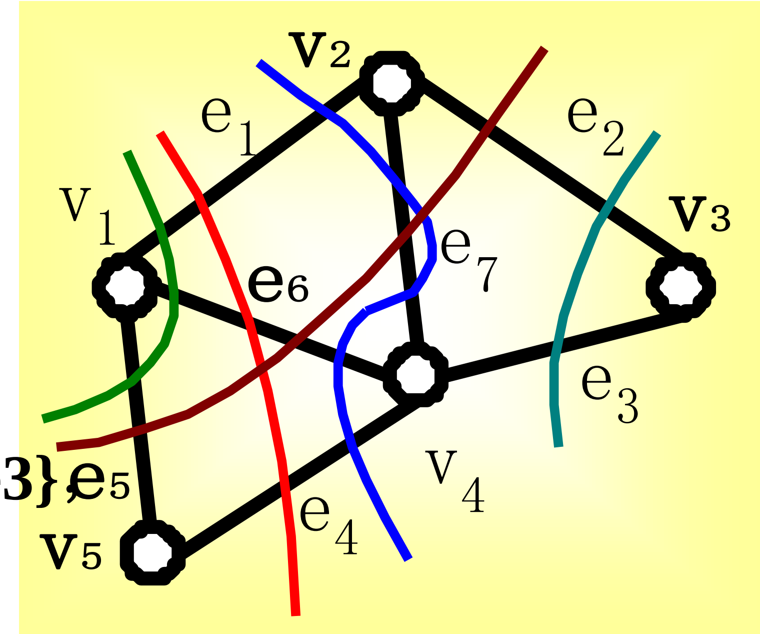
Δ若S的任何真子集都不是割边集，则称S为极小割边集，或割集

≡例

Δ{e1,e4,e6,e7}是一个割边集，但不是割集

Δ它的真子集{e1,e4,e6}也是割边集

Δ{e1,e4,e6}，{e1,e5,e6}，{e2,e3}，{e2,e5,e6,e7}都是割集



≡最小割集

Δ在图G的若干割集中，边数最少的割集称为最小割集

Δ在前例中，{e2,e3}是最小割集之一

- 图的结合度
  - 图的最小割集的边数称为图的结合度
    - 用 β 表示 $\beta = \min|Y|$
    - Y：割集

  - 图的结合度表示图的连通程度
    - 它是从边的角度来看网的联结性的
    - 也对网的可靠性有直接影响
    - 即网络的边对网络可靠性的影响

= 结论

≡ 图G，|V|=n，|E|=m，则： $\partial \le \beta \le \delta \le \dfrac{2m}{n}$

Δ 【证明】:

Δ 1. $\sum_{v\in V} d(v) = 2m \ge n\delta$ $\delta = \min_{v\in V}\left[d(v)\right]$ $\therefore$ $\delta \le \dfrac{2m}{n}$

Δ 2. δ的含义是：网络中端的最小度数。

- 即：割断此端的 δ条相关联的边，就一定可破坏联结性;
- 即： β最大是 δ ；当网络中有割边时， β会更小。

≡ 其含义是：要破坏图G的联结性

Δ 至少应破坏 α个端点

Δ 或至少应破坏 β条边

Δ 但需破坏的端数不会多于边数

Δ 二者都不会多于图中各端最小的度数 δ

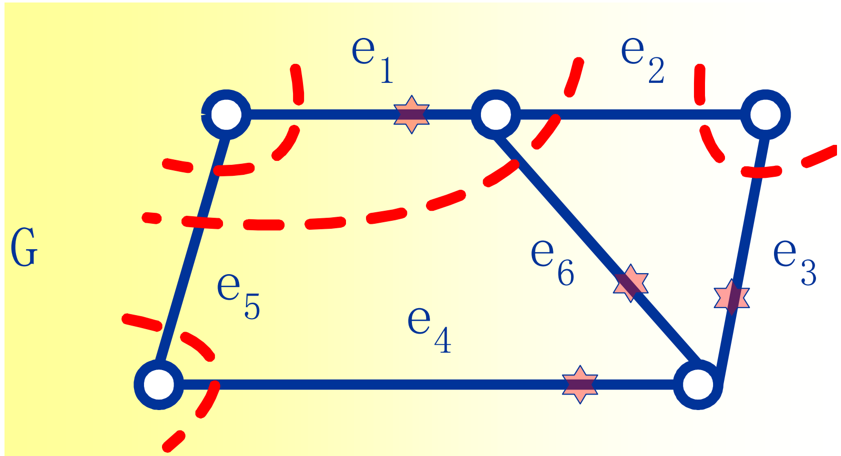
Δ 三者都不会多于端的平均度数 $\dfrac{2m}{n}$

结论（2）

- 对任意图（包括联结图和非联结图），若去掉割集S后变成G’
  - 则有 $$\rho(G)-\rho(G')=\rho(G)-\rho(G-S)=1$$
  - 其含义是：从图G中去掉割集S，对应到树上，相当于去掉一个树枝　　　(ρ：图的阶，主树树枝数)

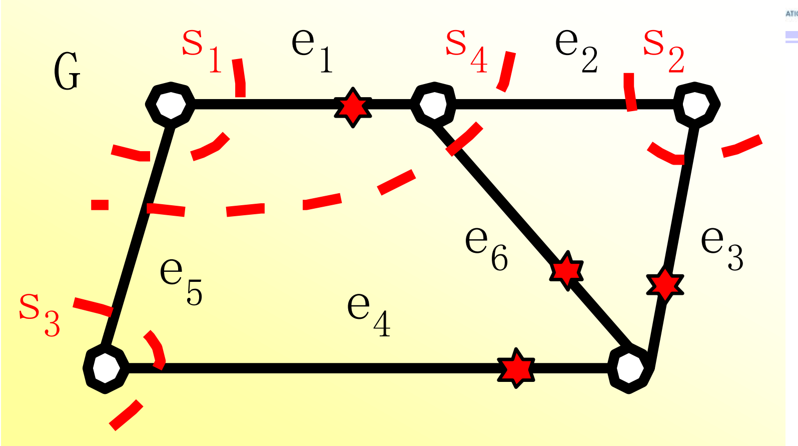
≡ 基本割集与基本环

- 为列举联结图的所有割集，需要建立基本割集和基本环的概念
- **基本割集**:
  - Δ 设T是联结图G的一棵主树
    - 取一条树枝与某些连枝
    - 一定能构成一个割集
    - 称之为基本割集
  - Δ 基本割集只有一条树枝
    - 若图G有n个端，则其主树有n−1条树枝
    - ∴ G有n−1个基本割集
  - Δ 从基本割集出发，利用环和，可求出图G的所有割集



- 基本割集举例:
  - Δ 取主树T = {e1, e3, e4, e6}
    - 则连枝集为{e2, e5}

≡基本割集举例：（2）



Δ 于是可得到基本割集如下：

- 与e1对应：**S1={e1, e5}**
- 与e3对应：**S2={e2, e3}**
- 与e4对应：**S3={e4, e5}**
- 与e6对应：**S4={e6, e2, e5}**

Δ 这四个基本割集与四条树枝一一对应，所以它们是线性独立的

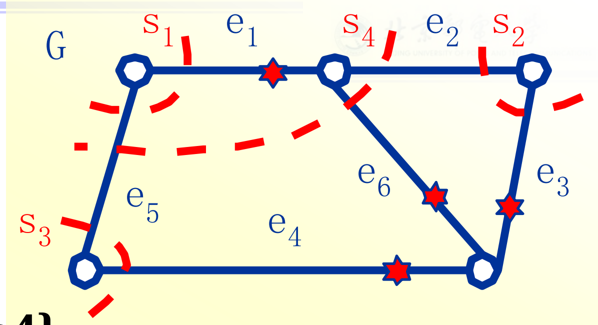
Δ 以它们作基，用环和运算可以生成一个子空间，可得到

- $2^4-1=C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=4+6+4+1=15$ 个元
- 每个元或为割集，或为割集的并
- 即，当两个基本割集有公共连枝时，其环和是另一个割集
- 而当两个基本割集无公共连枝时，其环和是二者的并集;
- 注：割集的并是割边集，但不是割集

Δ 其含义是：共有 $C_4^1=4$ 个基本割集

- 由其中2个可生成 C_4^2 个 割边集
- 由其中3个可生成 C_4^3 个 割边集
- 由其中4个可生成 C_4^4 个 割边集
- 图G的全部割集都包含在这些割边集中

≡基本割集举例：（3）



- 除四个基本割集外，还有：

△ *S5 = S1⊕S2 = S1∪S2 = {e1, e2, e3, e5}

△ S6 = S1⊕S3 = S1∪S3 − S1∩S3 = {e1, e4}

△ S7 = S1⊕S4 = S1∪S4 − S1∩S4 = {e1, e2, e6}

△ *S8 = S2⊕S3 = S2∪S3 = {e2, e3, e4, e5}

△ S9 = S2⊕S4 = {e3, e5, e6}

△ S10 = S3⊕S4 = {e2, e4, e6}

△ *S11 = S1⊕S2⊕S3 = S6⊕S2 = S6∪S2 = {e1, e2, e3, e4}

△ S12 = S1⊕S2⊕S4 = S5⊕S4 = {e1, e3, e6}

△ *S13 = S1⊕S3⊕S4 = S6⊕S4 = S6∪S4 = {e1, e2, e4, e5, e6}

△ S14 = S2⊕S3⊕S4 = S8⊕S4 = {e3, e4, e6}

△ *S15 = S1⊕S2⊕S3⊕S4 = S6⊕S9 = S6∪S9 = {e1, e3, e4, e5, e6}

- 最终我们会发现，这15个割边集中，有10个是割集：
S1，S2，S3，S4，S6，S7，S9，S10，S12，S14
- 而标“*”号的，都不是割集
- 如：S5的子集{e1, e5}是割集，所以S5不是割集

≡基本环

∆ 取一条连枝，可与某些树枝构成闭径（或环）

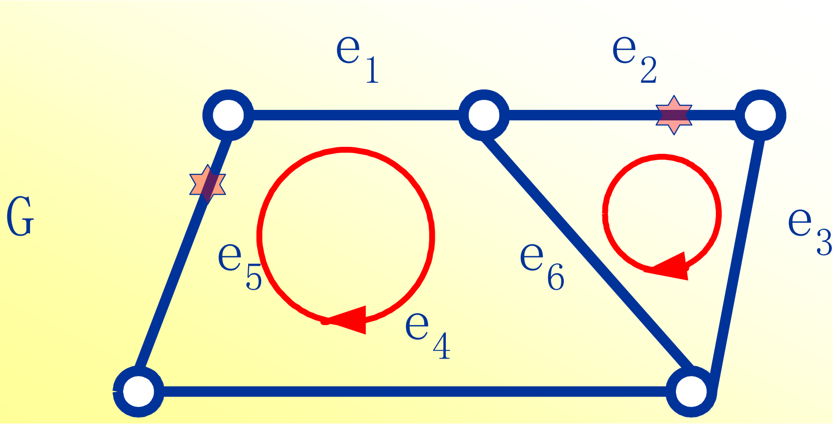
- 这种仅由一条连枝构成的环称为联结图的**基本环**

∆ 基本环的数目等于连枝数，共有m−(n−1)个

∆ 用环和运算可构成$2^{m-n+1}-1$个元的子空间

- 其中包括：环，以及环的并

≡基本环举例：如前例



∆ 取主树T = {e1, e3, e4, e6}

- 则：连枝集为{e2, e5}

∆ 基本环有两个:

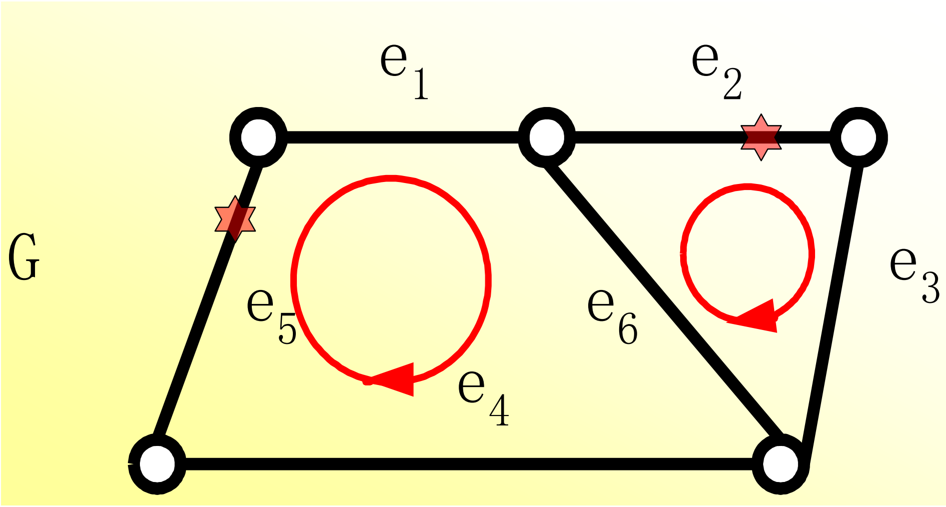
- 与e2对应：C1 = { e2, e3, e6}
- 与e5对应：C2 = { e5, e1, e6, e4}

∆ 利用环和可以形成$2^{6-5+1}-1 = 3$个元的子空间

- 其中两个是基本环
- 另一个是：C3 = C1⊕C2 = {e1, e2, e3, e4, e5}

– 图的平面性

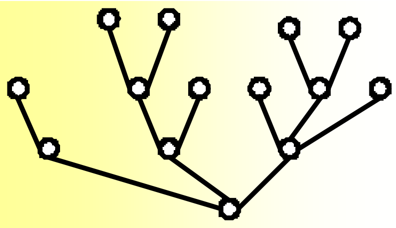
- 定义:
  - 若图G画在平面上时，除端点外，任何两条边可以没有其他交点，则称G为平面图，或称G具有平面性
- 尤拉公式:
  - 设一个联结的平面图G 有m条边，n个端
  - 把平面分成S个区域（包括开区域）
  - 即S是指图中所有的环及外空间的个数
  - 则有著名的尤拉公式：$S = m - n + 2$



≡ 尤拉公式：S = m − n + 2

≡ 【证明】（用数学归纳法）

Δ 当S=1时，全平面只有一个区域，即只有一个包括无限远点的开区域，不存在环，这就是树的情况



- 已知树的边与端的数量关系是：m=n−1
- 所以： m − n + 2 = (n−1) − n + 2 = 1 = S ， 尤拉公式成立

Δ 设当S= r−1时，尤拉公式成立，即： S= r−1= m − n + 2

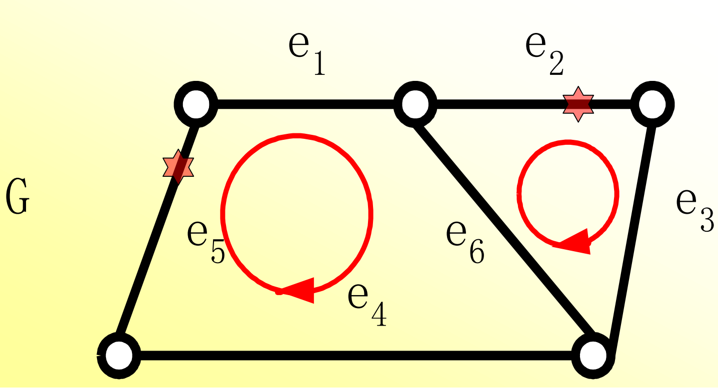
- 下面来证明当S = r时，尤拉公式成立

Δ 因为r > 2时，图内必有环。

- 去掉这环的一条边，边数成为m−1，区域数也将减少一，成为r−1。
- 即m−1条边和n个端把区域分成r−1个。
- 依假设，此时尤拉公式是成立的，即：r−1= (m−1) −n+2

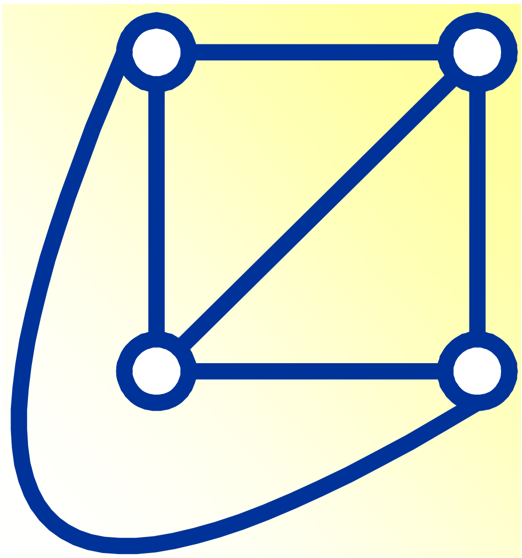
Δ 整理后得到：S = r = m − n + 2

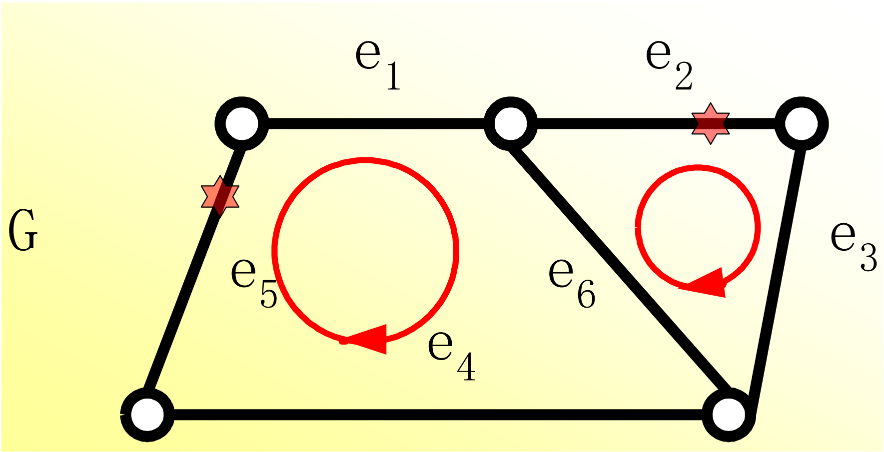
Δ 可见尤拉公式成立。 证毕



平面性的必要条件

- 对于无重边、无自环的联结图，
- 具有平面性的必要条件是：$m \le 3n-6$ （$n \ge 3$）
  - 这是因为，在无重边、无自环的条件下
  - 要形成一个区域，至少要三条边
  - 又：一条边只能介于两个区域之间，即只能计算两次
  - 如果把每个区域的边界都走一遍，则走过的边数为：$2m \ge 3S$
  - 把尤拉公式 $S = m - n + 2$ 代入，即可得证





- 注意：此不等式为必要条件，但不是充分条件
  - 因为形成一个区域也可能用了4条边或更多
  - 见下例：虽然图1和图3都满足此不等式$m \le 3n-6$，但图1是平面图，而图3则是非平面图
- 例：
  - 图1：平面图
    - $n = 4$
    - $m = 6$
    - $3n - 6 = 6$
  - 图2：非平面图
    - $n = 5$
    - $m = 10$
    - $3n - 6 = 9$
  - 图3：非平面图
    - $n = 6$
    - $m = 9$
    - $3n - 6 = 12$

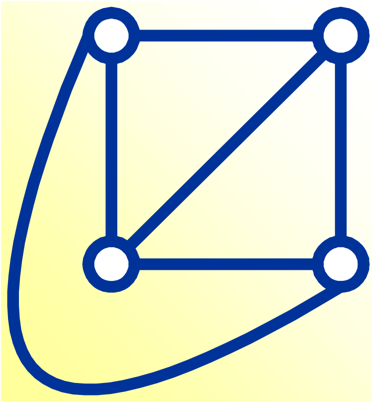


图1

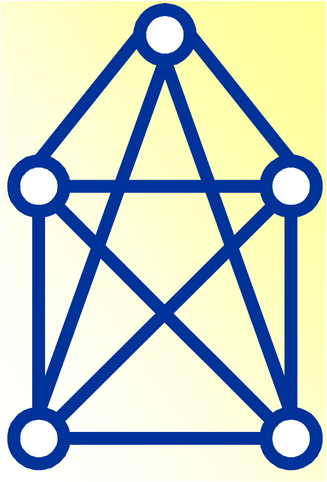


图2

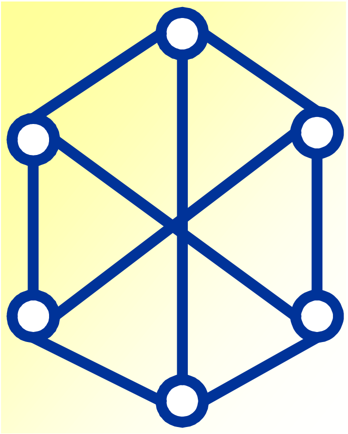
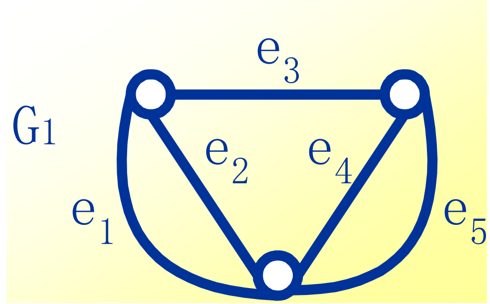
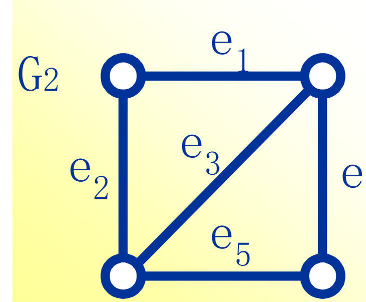


图3

– 图的对偶性





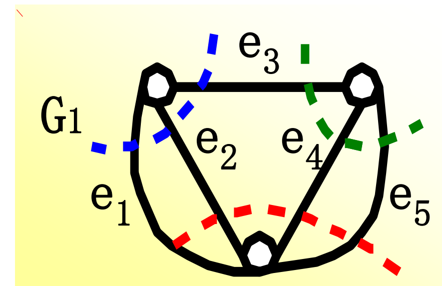
= 定义:

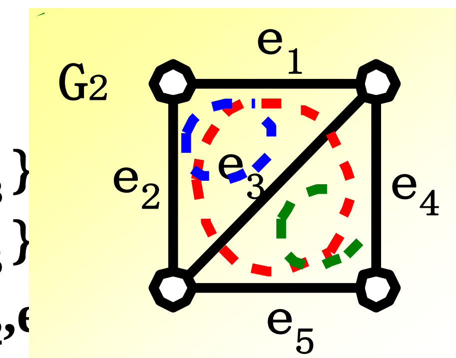
≡ 设有两个边集E相同的图G1和G2(无自环)

≡ 若G1中的割集 ⟵一一对应⟶ G2中的环

≡ 则G1与G2互为**对偶图** (二者具有**对偶性**)

= 例





≡ G1中的三个割集对应于G2中的三个环

- Δ G1中的割集 $\{e_1,e_2,e_3\}$ → G2中的环 $\{e_1,e_2,e_3\}$
- Δ G1中的割集 $\{e_3,e_4,e_5\}$ → G2中的环 $\{e_3,e_4,e_5\}$
- Δ G1中的割集 $\{e_1,e_2,e_4,e_5\}$ → G2中的环 $\{e_1,e_2,e$

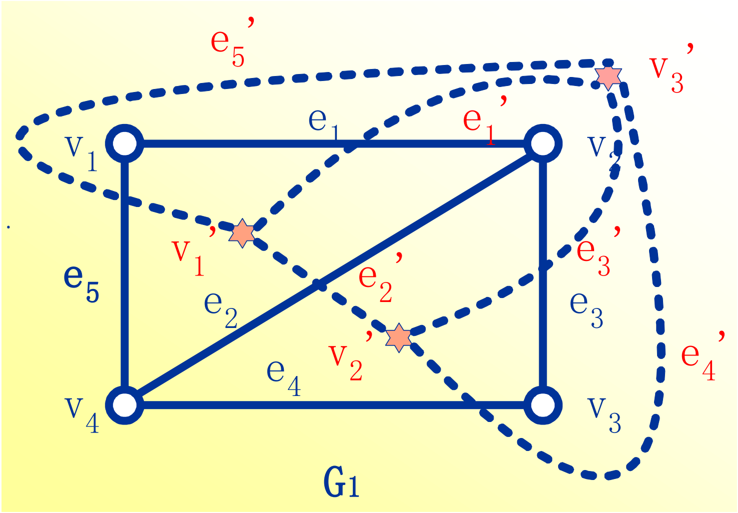
≡ 反之，G1中的六个环对应于G2中的六个割集

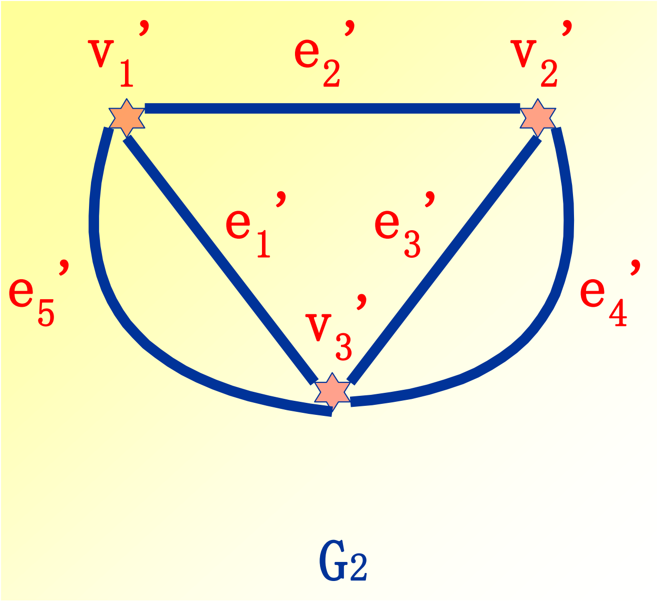
- Δ 分别为 $\{e_1,e_2\}$ ，$\{e_4,e_5\}$ ，$\{e_1,e_3,e_4\}$ ，$\{e_2,e_3,e_4\}$ ，$\{e_2,e_3,e_5\}$ ，$\{e_1,e_3,e_5\}$

≡ 所以，G1与G2互为对偶图，二者具有对偶性

对偶图的存在性

- 平面图的对偶图总是存在的
- 而非平面图不可能有对偶图
- 例：平面对偶图的**构成方法**
  - 如图G1：把平面分成三个区域
  - 每个区域内各取一点v1', v2', v3'
    - 作为对偶图的三个端
  - 把分隔两个区域的边用作对偶图中两个端的联结边
  - 即在两两端间作连线，使每个连线穿越这两个区域间的一条分界线
  - 这样就构成了对偶图G2
  - 对偶图G2将平面分成四个区，对应于原图的四个端





＝自对偶

≡定义：

Δ如果一个图G的对偶图就是自己，则称G为自对偶图

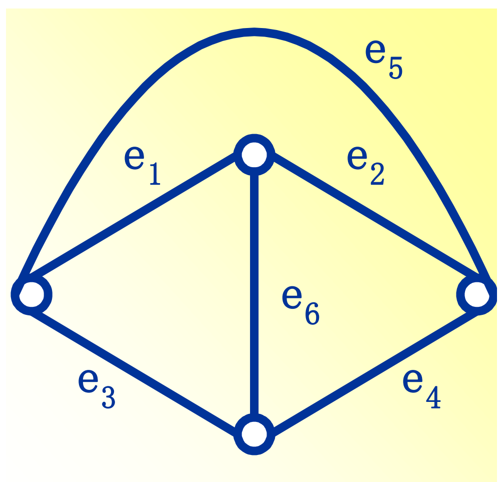
≡性质：

Δ自对偶图必为平面图

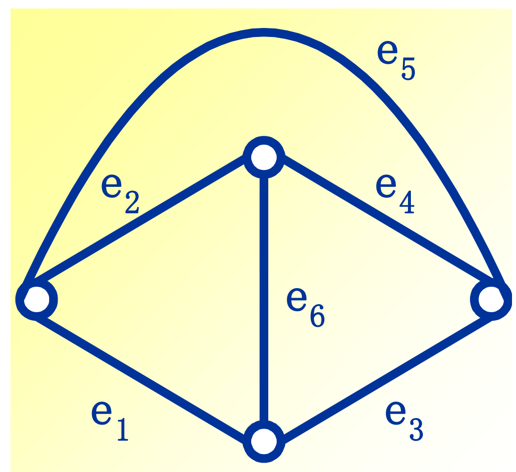
Δ自对偶图的区域数必等于端数

Δ自对偶图的端数n与边数m有确定的关系：$m = 2n - 2$

≡例：$n = 4$，$m = 6$的自对偶图为：



G_1



G_2

3.1.6 图的矩阵表示

- 图的几何表示具有直观性
- 图的矩阵表示则适于数值计算和分析，可存入计算机
- 图的矩阵表示与几何表示一一对应

– 关联矩阵

= 关联矩阵是表达：端与边的关联性的矩阵

= 全关联阵A_0定义:

≡ 设图G有n个端，m条边

≡ 以每端为一行，以每边为一列，作n × m矩阵

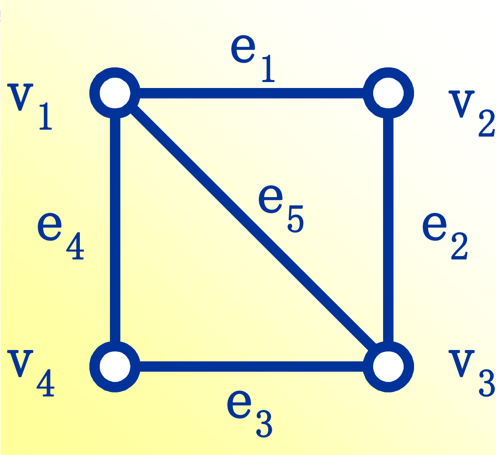
Δ $A_0 = [\, a_{ij} \,]_{n \times m}$

Δ 无向图：$a_{ij} = \begin{cases} 1 & 若e_j与v_i关联 \\ 0 & 若e_j与v_i不关联 \end{cases}$

Δ 有向图：$a_{ij} = \begin{cases} 1 & 若e_j是v_i的输出边 \\ -1 & 若e_j是v_i的输入边 \\ 0 & 若e_j与v_i不关联 \end{cases}$

≡ 例:

Δ 如图: **n = 4, m = 5**



Δ 全关联阵:

$$A_0=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}\\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n\times m} \end{array}$$

≡ 特点:

Δ 每行中，非零元素的个数等于该端的度数，**d(v_i)**

Δ 若行向量是零向量，则该端是个孤立端

Δ 若行向量仅有一个非零元素，则它是一个悬挂端

Δ 对于无自环的图，任一边必与且仅与两个端相关联

- 所以列向量中有且仅有两个非零元素(有向图为 + 1和 − 1)
- 且和值必为零（无向图：用模2和；有向图：用算术和）

Δ 所以，**n**个行向量不是线性无关的，而是线性相关的

Δ 最多只有**n − 1**个线性无关的向量

Δ 这意味着：在全关联矩阵中，有一个行向量是多余的

- 即使去掉后，也是可以补上的，不会丢失信息
- 所以，不用写在矩阵中

= 关联阵

≡ 定义:

- Δ 从全关联阵中去掉一个行向量后得到的矩阵，称为关联阵
- Δ 关联阵已能充分代表一个图
- Δ 去掉的一行，所对应的端可作为图的参考端
  - 如电路图中的接地点
- Δ 例：如前例，去掉v4端的行向量
  - 则关联阵为:

$$A=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(n-1)\times m} \end{array}$$

≡ 根据关联阵，判断联结图

- Δ 对于联结图，关联阵的阶是n－1
  - 实际上，这就是图的阶，即主树的边数
  - 也可以表示为：rank(A) = n－1　　A对应一个联结图
- Δ 由此可知：联结图的关联阵中，必存在至少一个非奇异的（n－1）×（n－1）方阵
  - 这个方阵所对应的边集就是一棵主树

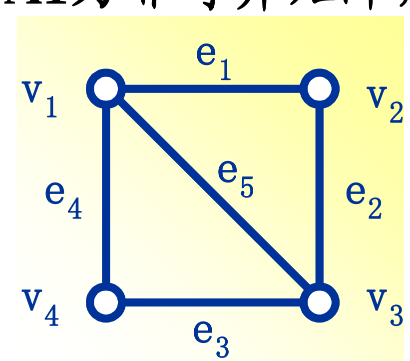
≡根据关联阵，判断环的存在

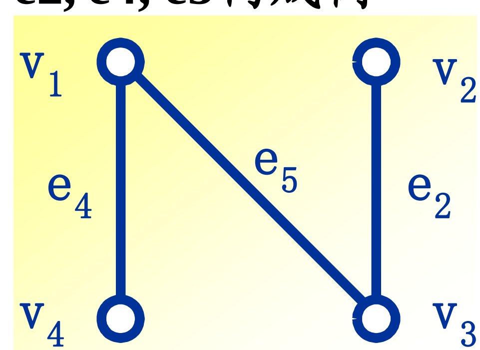
- Δ 若关联阵中有一个（n－1）×（n－1）方阵为奇异的
- Δ 即其行列式值为零（模2）
- Δ 则这方阵所对应的边集中必存在环
  - 因为，形成环的边所对应的列向量必线性相关
  - 从而使行列式值为零（模2）

≡例1：前例中取边e2, e4, e5构成方阵

$$A_1 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_2 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad |A_1| = 0 - 1 = -1 \neq 0$$

- A1为非奇异矩阵，所以，e2, e4, e5构成树

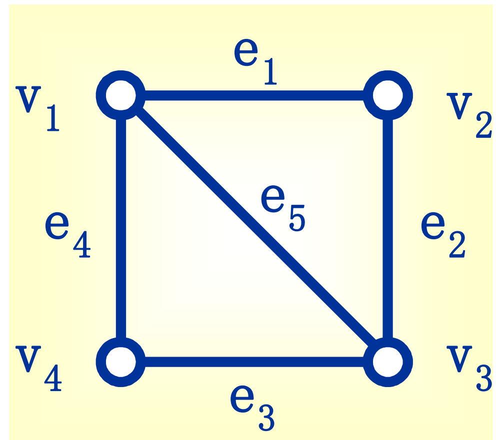


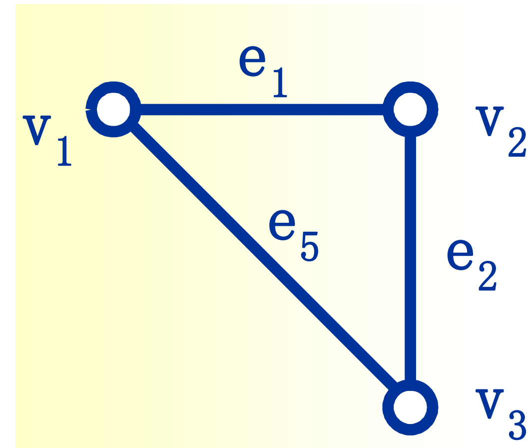


≡ 例2：前例中取边e1, e2, e5构成方阵

- A2为奇异矩阵，所以，对应边中有环，不是主树

$$A_2 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$





$$|A_2| = 1 + 1 \overset{\text{模2加}}{=} 0$$

≡ 当关联阵的阶小于n－1时，它所对应的图必为非联结图

Δ 因为，没有一个（n－1）×（n－1）方阵是非奇异的

- 也就是没有主树

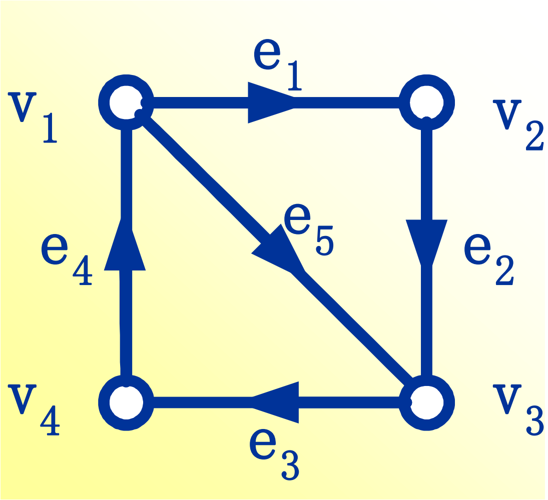
≡根据关联阵，计算联结图的主树数目

Δ 计算联结图的主树数目S的公式：$S = |AA^T|$

- A^T：是A阵的转置

Δ 例1：如前例

- 注意：此法只对有向图是准确的
- 所以，应在原图上随意加上方向



$$S = \left|AA^T\right| = \left| \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left\| \begin{matrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{matrix} \right\| = 18-1-1-2-3-3 = 8$$

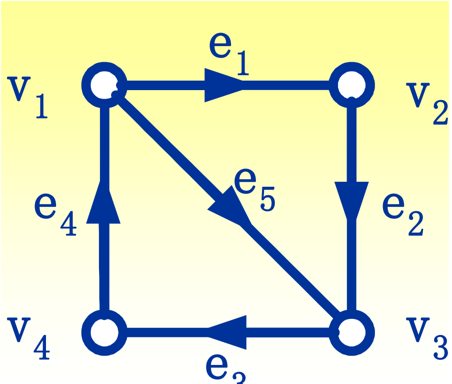
Δ 我们可以换一种方法验证一下:

- ∵有四个端，∴树枝数为4－1＝3
- ∵有五条边，∴可能形成树的情况有 $C_5^3 = 10$ 种
- 其中：有两种是三条边形成的环，另八种是树

Δ 其实，方阵AA^T可以从图中直接求得，而不必先求关联阵A

- AA^T是对称矩阵
- AA^T的元是A的行向量的内积
- 对角线上的元就是该端的度数
- 其他元为0或－1
- 两端之间无边，则内积必为0
- 两端之间有边，则内积必为－1，因为边对之一端为＋1，另一端必为－1

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$



- 割阵
  - 割阵是表达基本割集与边的关系的矩阵
  - 定义：
    - 具有n个端，m条边的联结图具有n－1个基本割集
    - 所以，割阵是一个（n－1）×m的矩阵
    - 它对应于某一棵主树
    - 每行对应一个基本割集，每列对应一条边
    - 对于有向图，基本割集的方向取树枝的方向为正
    - 割阵元素为： $Q=\left[q_{ij}\right]_{(n-1)\times m}$

Δ 对于有向图：

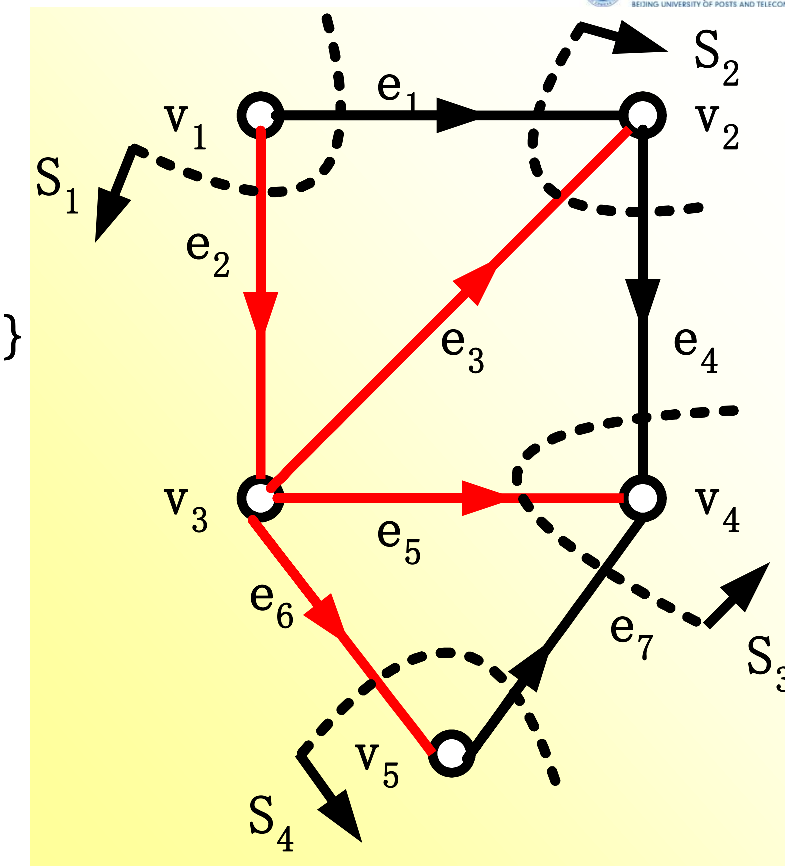
$$q_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若}e_j\text{在基本割集}S_i\text{内，且与割集同向}\\-1 & \text{若}e_j\text{在基本割集}S_i\text{内，且与割集反向}\\0 & \text{若}e_j\text{不在基本割集}S_i\text{内}\end{cases}$$

对于无向图：

$$q_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若}e_j\in S_i\\0 & \text{若}e_j\bar{\in}S_i\end{cases}$$

≡例:

△ 如图:



△ 以 {e2, e3, e5, e6} 为主树

△ 有4个基本割集:

- $S_1 =$ {e_1,e_2} $S_4 =$ {e_6,e_7}
- $S_2 =$ {e_1,e_3,e_4}
- $S_3 =$ {e_4,e_5,e_7}

△ 割阵为:

$$Q = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

△ 重排Q阵边的次序

将树枝放在前面:

$$Q_f = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_2 & e_3 & e_5 & e_6 & e_1 & e_4 & e_7 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \end{array} = [IQ_t]$$

I **Q_t**

- 其中: I是(n－1)×(n－1)单位阵，对应于主树树枝
- Q_t是(n－1)×(m－n +1)矩阵，对应于连枝

- 根据割阵，可以求出全部割集的矩阵
  - 由割阵的行向量的环和，可以得出全部割集的矩阵
  - 因为基本割集的环和可以求出全部割集

- 环阵
  - 环阵是用环与边的关系来表达图的
  - 定义：
    - 联结图的环阵也是针对某一主树的
    - 以基本环为行，边为列
    - 环阵是一个（m－n＋1）×m的矩阵
    - 对于有向图，环的方向取连枝的方向
    - 环阵元素为：

$$B = \left\lfloor b_{ij} \right\rfloor_{(m-n+1)\times m}$$

△对于有向图：

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若} e_j \in c_i \text{，且二者同向；} \\ -1 & \text{若} e_j \in c_i \text{，且二者反向；} \\ 0 & \text{若} e_j \overline{\in} c_i \text{。} \end{cases}$$

对于无向图：

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若} e_j \in c_i \\ 0 & \text{若} e_j \overline{\in} c_i \end{cases}$$

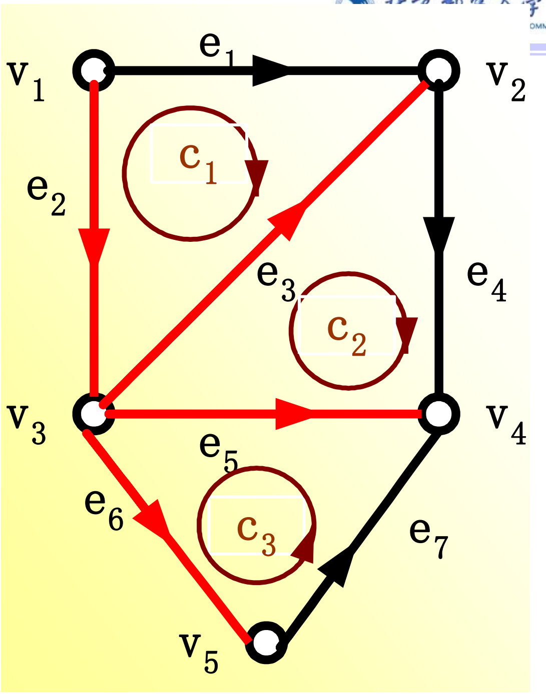
≡ 例：如前例

△ 取主树：{e2, e3, e5, e6}

△ 有三个基本环

- C_1 = $\{e_1, e_3, e_2\}$
- C_2 = $\{e_4, e_5, e_3\}$
- C_3 = $\{e_7, e_6, e_5\}$

△ 环阵为：



$$B_f = \begin{array}{c} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_2 & e_3 & e_5 & e_6 & e_1 & e_4 & e_7 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc:ccc} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} = [B_t I]$$

B_t **I**

- 其中：B_t对应于主树的树枝，是$(m-n+1)\times(n-1)$矩阵
- I对应于连枝，是一个$(m-n+1)\times(m-n+1)$单位阵

= 环阵的行向量作环和，可以得到全部环的矩阵

- 割阵与环阵的关系
  - 联结图的环阵B与割阵Q存在关系式：$BQ^T = 0$
  - 含义：任一割集的m维向量与任一环的m维向量都是正交的
  - 环与割集之间的关系可分为两种情况
    - 环与割集无公共边
      - 则它们的点积必为零，可称之为正交
    - 环与割集有公共边
      - 则公共边数必为偶数
      - 内积时，+1与－1项数必相等
      - 所以，两者的点积也必为零

= 割阵与环阵的互求算法

≡ 令 $\mathbf{B}_f = [\mathbf{B}_t \mathbf{I}]$， $\mathbf{Q}_f = [\mathbf{I}\ \mathbf{Q}_t]$

$$B_f Q_f^T = \begin{bmatrix} B_t I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I Q_t \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} B_t I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ Q_t^T \end{bmatrix} = B_t + Q_t^T = 0$$

≡ 所以： $\mathbf{B}_t = [-\mathbf{Q}_t^T]$

≡ 或：

- Δ $\mathbf{B}_f = [-\mathbf{Q}_t^T\ \mathbf{I}]$
- Δ $\mathbf{Q}_f = [\mathbf{I}\ (-\mathbf{B}_t^T)]$

– 邻接阵

= 邻接阵是表达端与端之间关系的矩阵

= 定义:

≡ 行与列都与图的端相对应的矩阵，称为邻接阵

≡ 对于有n个端的图，邻接阵是一个$n \times n$的方阵

≡ 邻接阵的行和列上的端要按相同顺序排列

≡ 邻接阵的元素：$C = [c_{ij}]_{n \times n}$

Δ 对于有向图:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若从}v_i\text{到}v_j\text{有边} \\ 0 & \text{若从}v_i\text{到}v_j\text{无边} \end{cases}$$

Δ 对于无向图

• $c_{ij} = c_{ji}$ 为一个对称阵

≡ 当图中无自环时，C阵的对角线上的元都是零

≡ 若v_i端有自环，则对应的对角线元为$c_{ii} = 1$

– 邻接阵（2）

≡有向图的邻接阵中，

Δ每行上1的个数为该端的输出度数$d^+(v_i)$

Δ而每列上1的个数为该端的输入度数$d^-(v_i)$

Δ若某端所对应的行与列全部为0元，则该端为孤立端

≡无向图的邻接阵中，

Δ每行和每列上1的个数均为端的总度数$d(v_i)$

Δ所以，其全零的行（或列）对应于孤立端

= 邻接阵在研究图中的径时，很有用

≡其变化形式可用于有权图

＝ C阵的幂

≡ 令$C^2 = C\,C = [c_{ij}^{(2)}]$

≡ 其中

Δ $$c_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} \cdot c_{kj}$$ $c_{ij}^{(2)}$可以为0或1

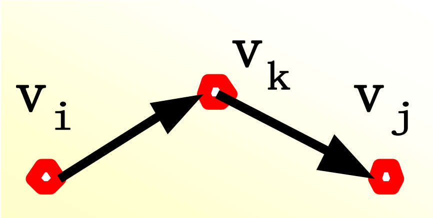
≡ 若$c_{ij}^{(2)} = 1$， 意味着$c_{ik} = 1$， 且$c_{kj} = 1$

Δ 即v_i到v_k有边，v_k到v_j也有边

Δ 亦即v_i到v_j 可经v_k转接

Δ 亦即v_i到v_j有一条径长为2的径

Δ 径长：表示组成这条径的边数



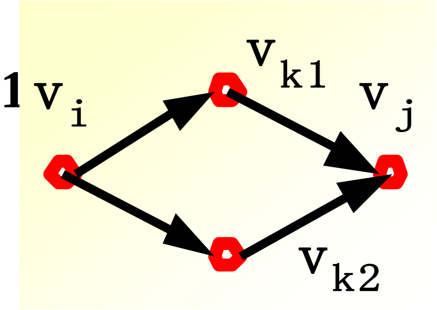
≡ 若$c_{ij}^{(2)} = 0$， 意味着v_i到v_j没有一条径长为2的径

≡ *若$c_{ij}^{(2)} = 2$， 意味着

Δ $c_{ik_1} = 1$，且$c_{k_1 j} = 1$，同时，$c_{ik_2} = 1$，且$c_{k_2 j} = 1$

Δ 即v_i到v_j 即可经v_{k_1}转接，也可经v_{k_2}转接

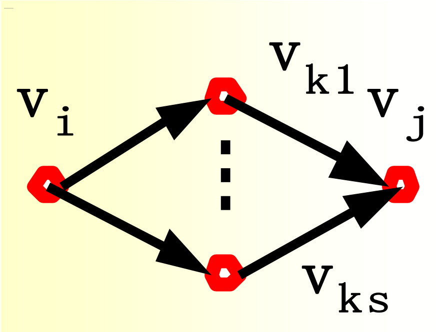
Δ 亦即v_i到v_j有两条径长为2的径



≡若$c_{ij}^{(2)} = s$，意味着

Δv_i到v_j 可分别经v_{k1}、v_{k2}、……、v_{ks}转接

Δ亦即v_i到v_j有s条径长为2的径



≡同理，可令$C^3 = [c_{ij}^{(3)}]$

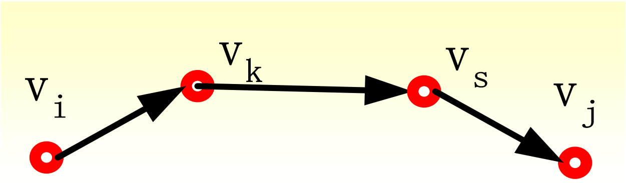
Δ

$$c_{ij}^{(3)} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} \cdot c_{kj}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} c_{ik} c_{ks} c_{sj}$$

Δ$c_{ij}^{(3)}$ 为1的充要条件是：存在$c_{ik} = c_{ks} = c_{sj} = 1$

Δ即v_i到v_k有边，v_k到 v_s有边，v_s到v_j也有边

Δ亦即v_i到v_j有径长为3的径



≡ 同理，可令$C^m = [c_{ij}^{(m)}]$

Δ $c_{ij}^{(m)}$ 就是v_i到v_j的径长为m的径数

Δ 这些径严格地说应该是边序列，因为其中可能有重复边

≡ 若某两端v_i与v_j之间，$c_{ij}^{(r)} = 0$，$r \leqslant m$

Δ 则说明v_i至v_j没有径长小于等于m的径

Δ 若m为图的边数，则说明v_i不能接至v_j

≡ 对于无向图，上述结论都正确

Δ 若$c_{ij}^{(r)} = 0$，$r \leqslant m$，m为图的边数

Δ 则意味着此图为非联结图

≡ 在通信网中，上述径长也可认为是转接次数

Δ 存在径长为r的径，意味着经r－1次转接后可接通

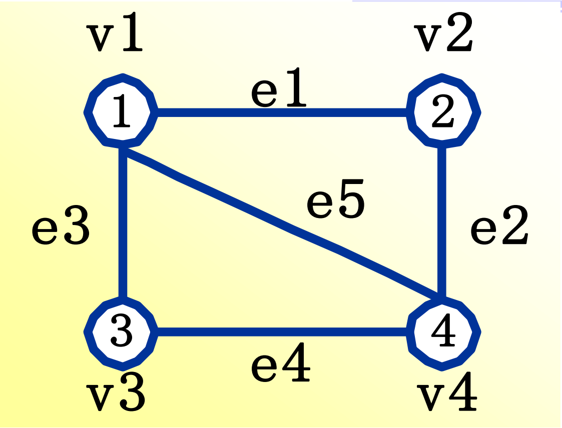
Δ 径数：就是两端之间，一定转接次数的全部可能的路由数

≡例

Δ 如图

Δ 列邻接阵

$$C=\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$



Δ 求C^2:

$$C^2=\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ v_2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ v_3 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ v_4 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

- 其中：$C_{11}^{(2)}=3$意味着从v_1到v_1有三条长度为2的路径
- 即1-2-1，1-3-1，1-4-1
- $C_{14}^{(2)}=2$意味着从v_1到v_4有两条长度为2的路径
- 即1-2-4，1-3-4

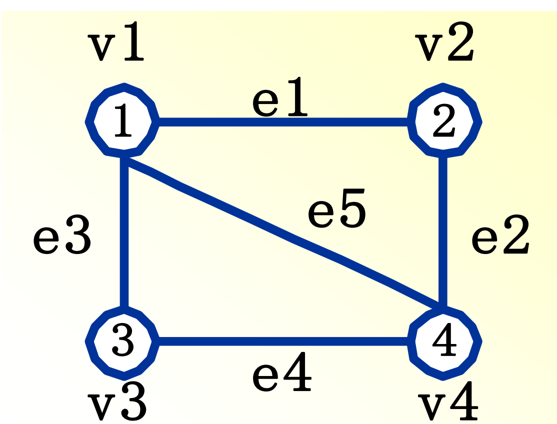
Δ 求C^3:

$$C^3=C^2C=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

- **其中：$C_{11}^{(3)}=4$意味着从v_1到v_1有四条长度为3的路径**
- **即1-2-4-1，1-3-4-1，1-4-2-1，1-4-3-1**

- **$C_{14}^{(3)}=5$意味着从v_1到v_4有五条长度为3的路径**

即1-2-1-4，1-3-1-4，1-4-1-4，1-4-2-4，1-4-3-4



– 作业

= （周先生著）P154. 3.1, 3.4, 3.5

= （张琳著）P142. 4.4

(本节结束)