图论及其应用

第六章 着色问题

6.1 边色数

- **k-边着色**（k-edge coloring）C
  - $\Leftrightarrow$ C是k种色在图G的边集上的一种分配。
  - $\Leftrightarrow$ C是E(G)的一个k-划分，即 $C = (E_1, \ldots, E_k)$
- 边着色C是**正常的** $\Leftrightarrow$ 每个E_i都是G的一个匹配。
- G为**k-边可着色的**（k-edge colorable）
  - $\Leftrightarrow$ G有一正常k-边着色。
  - $\Leftrightarrow$ 存在E(G)的一个k-划分 $C = (E_1, \ldots, E_k)$，使每个E_i 都是G的一个匹配。（注：允许$E_i=\varnothing$ ）
- 显然，G为k-边可着色的 $\Rightarrow$ G为p-边可着色的 $(p \geq k)$.
- G的**边色数**（edge chromatic number）

  $\chi'(G) = \min\{ k \mid G为k-边可着色的 \}$ 。
- G为**k-边色的**（k-edge chromatic） $\Leftrightarrow$ $\chi'(G)=k$ 。

6.1 边色数

- 例：n个人举行一些两两会谈，每次会谈用一个单元时间。问最少要多少单元时间，才能安排完所有会谈？
  - 解：作一n顶点图G，其中两顶点相邻当且仅当对应的两人间要安排一次会谈。易见，所需时间单元数≥ $\chi'(G)$ 。
- 称色i**表现(represented)**于顶点v $\Leftrightarrow$ 与v相关联的某一边有色i。

6.1 边色数

- 引理**6.1.1** 设连通图G不是奇圈，则G有一2-边着色，使该二色表现于G的每个度≥ 2的顶点。
  - 证明：不妨设G为非平凡的。
  - (A) 若G为Euler图：
    - ① 若G 为一个圈： 则G为偶圈，从而G的一个正常2-边着色满足要求。
    - ② 若G不是一个圈：则一定存在顶点v_0 ，使$d(v_0) \geq 4$ (∵Euler图每个顶点的度均为偶数）。令 $v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_\varepsilon v_\varepsilon$ 为G一的Euler环游 （ $v_\varepsilon = v_0$ ）。令 E_1 与 E_2 分别为Euler环游中下标为奇数与偶数的边子集。则G 的2-边着色 $C=(E_1, E_2)$满足要求。

6.1 边色数

  - (B) 若G为非Euler环游：往G中加一新顶点v_0，并将v_0 与G中每个度为奇数顶点都用一新边连起来，得图G′。显然，G′为一Euler图 。令$v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots\ldots e_\varepsilon v_\varepsilon$ （ $v_\varepsilon = v_0$ ）为G的一Euler环游 。与(A)②一样定义 $C = (E_1, E_2)$，易见$C' = (E_1 \cap E, E_2 \cap E)$满足要求。 #
- 记号 **c(v)** = 边着色C表现于v的不同颜色数。
- 易见， $c(v) \leq d(v) \quad \forall v \in V$ 。

  C为正常边着色 $\Leftrightarrow$ $c(v) = d(v) \quad \forall v \in V$ 。
  - 称G的k-边着色C′ 为其k-边着色C的一个**改进**

    $\Leftrightarrow \sum_{v\in V} c'(v) > \sum_{v\in V} c(v)$ 。
  - C为**最优k-边着色**（optimal k-edge colouring）

    $\Leftrightarrow$ C不能再改进 。

6.1 边色数

- 引理**6.1.2** 设 $C = (E_1, \ldots, E_k)$为G的一个最优k-边着色。若G中有一顶点u及色i与j，使i不表现于u，而j在u上至少表现2次。则$G[E_i \cup E_j]$中含u的分支是一奇圈。
  - 证明：令H为$G[E_i \cup E_j]$中含u的分支。假设H不是奇圈，由引理6.1.1.，H有一2-边着色，使该二色表现于H的每个度≥2顶点上。以这方式，用色i与j对H重新边着色，得G的一个新的k-边着色C′。显然，

    $c'(u) = c(u) + 1$ ，

    $c'(v) \geq c(v) \quad \forall v \neq u$ ，
  - ∴ $\sum_{v\in V} c'(v) > \sum_{v\in V} c(v)$ ，
  - 这与C为最优矛盾。 #

6.1 边色数

- **定理6.1** 设G为偶图，则$\chi' = \Delta$ 。
- 证明： （Wilson）对ε 进行归纳。当 ε = 1 时显然成立。假设对 ε < k(≥ 2) 都成立，而 ε(G)= k 。任取G的一边 e = uv ，考虑

  G′ = G - e 。

- 由归纳假设，G′ 有一 Δ(G′)-正常边着色 C′={E1′,...,EΔ(G′)}。若 Δ(G′) < Δ(G)，则G显然有Δ(G)-正常边着色，证完；
- 否则，Δ(G′) = Δ(G)。令Au与Av各表示C′中不表现于u与v的色集。由于在G′中u与v都不是其最大度顶点，从而有Au,Av ≠ ∅

  ① 当 Au∩ Av ≠ ∅ 时：将Au ∩ Av 之一色着在边e上，即得G的Δ(G)-正常边着色。

  ② Au ∩ Av = ∅ 时：任取色i ∈ Au 及色j ∈ Av 。令H为G[Ei′ ∪ Ej′] 中含u的分 支。易见，H是一条路，由色i与色j边交替组成。因此，v一定不在H上（不然，由于H的第一条边有色j，最后一边有i，其长为偶数。这导致G中含一奇圈H + e，矛盾。）对换H上的色i与j，得G′的另一正常 Δ(G′)-边着色，其中在u与v上色j都不表现。 再将色j着在e上，即得G的正常 Δ(G)-边着色 。#

6.1 边色数——习题

- **6.1.1** 找出一适当的边着色以证明χ′(Km,n) = Δ(Km,n)。
- **6.1.2** (a) 证明：任一偶图G都有一Δ-正则偶母图。 （不一定为生成母图！）
- (b) 利用(a)给出定理6.1 的另一证明。
- **6.1.3** 叙述求偶图G的正常Δ-边着色的好算法。
- 6.1.4* 证明：若偶图G有 δ > 0 ，则G有一δ-边着色，使所有δ 种色在每一顶点上都表 现。
- **6.1.5** 每一简单、3-正则、H-图，都有 χ′ = 3 。
- 6.1.6 (Issacs引理)设G为3-正则图，且其上有一3-边着色，则在G的任一边割中(任 S ⊂ V)，3-种色边的奇偶性相同。

  （提示：考虑G[Ei ∪ Ej]，i≠j，其中C=(E1, E2, E3)为G的3-边着色）

6.1 Vizing定理

- **定理6.2** (Vizing,1964) 对简单图G有 χ′ = Δ 或 Δ + 1 。
  - 证明：（Bollobas证法）不妨设G中 **除边uv1外** 都已用色

    1,2,......,Δ +1

    进行了正常边着色。下文中我们恒用Ei表示G中全体色i边的集合。注意到，G的每个顶点上都至少有一色未表现。令顶点u，v1 上各有色i0，i1 未表现。我们可逐步找到不同的色、边序列：

    i0 ， i1 ， i2 ，......，ij ，...... ；

    uv1 ， uv2 ，uv3 ,......，uvj ，...... 。

    其中， 色ij 是顶点 vj 上未表现的（任意取定的）一色；

    边uvj 上有色ij-1 。 j=2，3，...... 。

    显然，上述过程至多进行到某q（ ≤ Δ）次而停止（无法继续满足上述条件）。 这时只有两种可能：

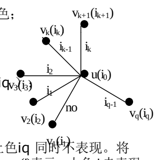
(A) 色iq 未表现于顶点u上（即没有一条u的关联边有色iq）

重新进行边着色如下，

uvj 改着色ij 1 ≤ j ≤ q-1

并抹去边uvq 上的色 iq-1 。

得G中除uvq外的正常（Δ +1）边着色。其中u与vq上色iq 同时不表现。将uvq 改着色 iq 即得G的正常（Δ +1）边着色。



v(i)表示 v 上色 i 未表现

6.2 Vizing定理

(B)iq = ik 某 1 ≤ k ≤ q-1 ： 重新进行边着色如下 ，

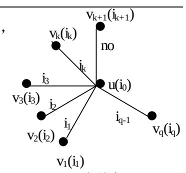
将uvj 改着色ij 1 ≤ j ≤ k

并抹去边uvk+1 上的色 ik 。

易见， H = 的每个分支是路或圈，由色i0与ik的边交错组成，且

u，vk+1，vq 在H中的度≤ 1。

从而，该三顶点不可能同时在H的一分支中。这时以下二情形至少有一个为真，



- ① u 与vk+1不在H的同一分支中：将H的含vk+1 分支中的色i0 与ik对换，得G 的除uvk+1外的正常（Δ +1）-边着色，其中u与vk+1上色i0都未表 现。从而，G有一正常（Δ +1）-边着色。
- ② u与vq不在H的同一分支中： 再继续调整边着色如下，

  将uvj 改着色ij k+1 ≤ j ≤ q-1

  并抹去边uvq上的色 （iq-1 ）

  易见，上述更动并未涉及色i0与ik ，因此H 保持不变。将H中含vq分支的色i0 与 ik 对换，得G 的除uvq外的正常（Δ +1）-边着色，其中在u与vq上色i0都未表现。从而，G有一正常（Δ +1）-边着色。

  #

6.2 Vizing定理

- **注1** 对一般图有**Vizing定理** 设G为无环图，则 Δ ≤ χ′ ≤ Δ + μ ，其中μ是G的重数（连接G中每一 对顶点上的最大边数） 。
- 注2 NP-complete prob：已给简单图G，是否有χ′ = Δ ?
- **注3** “2-边连通、3-正则、简单、平面图都有χ′ = 3” ⇔ “4-色猜想成立”。

6.2 Vizing定理——习题

- 6.2.1* 找出适当的边着色以证明χ′(K2N-1) = χ′(K2N) = 2n-1 。
- **6.2.2** ν 为奇数的非空正则简单图G有 χ′ = Δ + 1 。
- **6.2.3**(a) 设简单图G中ν = 2n+1且ε >n Δ ，则χ′ = Δ +1 ；

  (b) 利用(a)证明：

  ① 若G是从有偶数个顶点的简单图中剖分一条边所得的图，则χ′ = Δ +1 ；

  ② 若G是从有奇数个顶点的简单k正则图中删去少于k/2条边所得的图，则χ′=Δ+1
- **6.2.4** (a) 证明： 任一无环图G都有Δ-正则无环母图。（注：不一定为生成母图）

  (b) 利用(a)及习题5.2.3(b)证明：若G 是无环图且Δ 是偶数，则χ′ ≤ 3Δ /2。
- **6.2.5** 称G为唯一k-边可着色的，如果G的任意两个k-边着色都导致E有相同的划分。证明：每个唯一3-边可着色的3-正则图都是Hamilton 图 。
- 6.2.6 简单图的积图是指顶点集为V(G)×V(H)的简单图G×H，其中(u,v)与(u′,v′)相邻 ⇔ u = u′且vv′ ∈ E(H)； 或 v = v′且uu′ ∈ E(G)
  - (a) 利用Vizing定理证明：χ′(G×K2）= Δ(G×K2) 。
  - (b) 试证：若H是非平凡的，且χ′(H) = Δ(H)，则χ′(G×H) = Δ(G×H)。
- 6.2.7 叙述求简单图G的正常(Δ+1)-边着色的好算法。
- 6.2.8*证明δ ≥2的简单图G有一(δ-1)-边着色，使得所有δ-1种色在每个顶点上都表现
- 6.2.9 设简单图G有割点，则 χ′ = Δ + 1 。

6.2 排课表问题

- **问题** m位教师和n个班级，其中教师Xi要给班级Yj上p_{ij}节课。欲在最少节次p内排完所有的课。
- ⇔ 将偶图G = (X,Y,E) 的边集E划分成互不相交的p个匹配(E1，…，Ep)，且使p为最小，其中 $X=\{x_1,\ldots,x_m\}$, $Y=\{y_1,\ldots,y_n\}$
- ⇔ 求偶图G的p-边着色，其中p = Δ =χ′ 。
  - 由习题6.1.4知，上述问题有好算法。
  - 当上述问题中教室数有限时（ 教室数≥ $\max\limits_{1\le i\le p}|E_i|$），若要在p（≥ Δ ）节内排完全部（ l = |E|）节课，所需教室数c ≥ $\left\lceil \frac{l}{p} \right\rceil$
- **问题** 能否适当排课，使全部节课在p（≥ Δ ）节内排完，且每节课所用教室数≤ $\left\lceil \frac{l}{p} \right\rceil$?
- （∴ $\left\lfloor \frac{l}{p} \right\rfloor \le |E_i| \le \left\lceil \frac{l}{p} \right\rceil$ ∀ 1≤ i ≤ p ）

6.2 排课表问题

- **引理6.3** 设M，N为G的二不相交匹配，且|M|>|N|，则存在G的二不相交匹配M′，N′使|M′| =|M|-1 ，|N′| = |N|+1 ，且M′ ∪N′ = M ∪ N 。
  - 证明：令H = G[M ∪ N]，则H的每个分支为一路或圈，由M及N的边交错组成。且由于|M|>|N| ，存在H的一个分支，它是路P，起、止于M 边。因此

    M′ = M Δ E(P)　及　N′ = N Δ E(P)

    即为所求。
- **定理6.3** 设G为偶图，p ≥ Δ ，则存在G的p个互不相交的匹配使

  E = M1 ∪ …… ∪ Mp 。
- 且 $\left\lfloor \frac{\varepsilon}{p} \right\rfloor \le |M_i| \le \left\lceil \frac{\varepsilon}{p} \right\rceil$,1 ≤ i ≤ p 。

6.2 排课表问题

- 证明：由定理6.1, E可划分为 Δ 个互不相交的匹配

  M1′，……，MΔ′ 。

  因此，对p ≥ Δ ，G有p个互不相交的匹配

  M1′，……，MΔ′，……，Mp′。 （令Mi′= ∅ 当i > p）

  使E = M1′∪ ……∪ Mp′ 。今对边数差 > 1的两个匹配，反复使用引理6.3，最后可得所求的匹配M1，……，Mp 。 #
- **注** 在实际应用中，教师和班级往往会提出一些，例如所上节次时间的要求，问题变得很复杂。Even，Itai & Shmir（1976）证明：在教师和班级提出条件时，判定课表的存在性问题是个NP-complete问题。甚至当G为简单偶图，且学生不提出要求的情况下，也是如此。

6.3 顶点着色和色数

- 正常（顶点）着色（proper （vertex） coluring）

  ⇔ 每边两端不同色。
- **k-**（顶点）着色（k-（Vertex）colouring）
  - k种色在V(G)上的一种分配，且任二相邻（的不同）顶点不同色。
  - V的一个k-划分（V1，……，Vk）使每个Vi（可为∅）都是G的一个独立集。
- **k-**（顶点）可着色（k-（vertex） colourable）

  ⇔ G有一k-着色。
- 显然， G为k-可着色 ⇒ G的基础简单图为k-可着色。
- 由此我们约定， **本章只讨论简单图。**
  - 例： G为1-可着色的 ⇔ G 为一空图。

    G为k-可着色的 ⇔ G 为k-部图。

    G为k-可着色的 ⇒ G为j-可着色的（k ≤ j）。

6.3 顶点着色和色数

- 色数（chromatic number）χ(G) = { k | G为k-可着色的} 。
- G为**k-色图** ⇔ χ(G) = k。
  - 例：设每一教师只开一门研究生课，每门课课时为一单元。问至少要多少单元才能排完所有课?
    - 解：作一图G，每一顶点对应一们课；两顶点相邻当且仅当有一研究生选修对应的两门课。由此，所需单元数 ≥ χ(G) 。
  - 例：设有一些药品存储在一仓库中，其中有些药品是不相容的，不能放在同一房间中，问至少应把仓库间隔成几个房间?
- G为**临界的**（crtical） ⇔χ(H) < χ(G) ∀ H ⊂ G

  ⇔G连通且满足χ(G-e)<χ(G) ∀ e ∊ E(G)
- G为**k-临界的** ⇔ G为临界图，且 χ(G) = k
- 显然，G为k-色图 ⇒ G包含一k-临界子图。

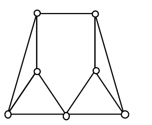
6.3 顶点着色和色数

- 例。 1-临界图 ⇔ K1（唯一）。

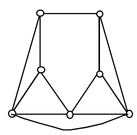
  2-临界图 ⇔ K2（唯一）。

  3-临界图 ⇔ 奇圈 。

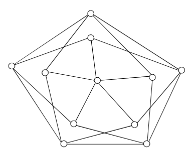
  4-临界图 例如：K4 ，Grotzsch图等。
- **注意** 一图G的临界图不一定是它的导出子图，例如



4-临界图



4-色图



Grotzsch 图

6.3 顶点着色和色数

- **定理8.1**　**G为k-临界图 ⇒ $\delta \ge k-1$ 。**
- 证明：反证，假设 $\delta < k-1$ 。取 $v \in V$ 使 $d(v) = \delta$ 。
  因G 为k-临界图的，G-v必是（k-1）-可着色的。令：
  $(V_1, \ldots\ldots, V_{k-1})$
  为G-v 的(k-1)-着色。
  由于 $d(v) = \delta < k-1$，v一定与某一 V_j 中所有顶点都不相邻。从而
  $(V_1, \ldots\ldots, V_j \cup \{v\}, \ldots\ldots, V_{k-1})$
  是G的(k-1)-着色，于是 $\chi(G) \le k-1$ ，矛盾。　#

6.3 顶点着色和色数

- **推论8.1.1**
  $\chi(G) = k$ ⇒ G中至少有k个度 $\ge k-1$ 的顶点。
- 证明：令H为G的k-临界子图。由定理8.1知
  $d_H(v) \ge \delta(H) \ge k-1 \quad \forall v \in V(H)$ 。
  $\therefore \quad d_G(v) \ge d_H(v) \ge k-1 \quad \forall v \in V(H)$ 。
  又因H为k-色的，必有 $|V(H)| \ge k$ 。　#

- **推论8.1.2**
  对任一图G都有 $\chi \le \Delta + 1$ 。
- 证明：由推论8.1.1知 $\Delta \ge \chi - 1$ 。　#

6.3 顶点着色和色数

- 令S为连通图G的一个点割。 V1，……，Vn为G - S 的各分支的顶点集。称
  $$G_i = G[V_i \cup S]$$
  为G的**S分支**。称G1，……，Gn上的各个着色**在S上是一致的**，当且仅当在各个着色中S中每顶点都被着以相同的色。

6.3 顶点着色和色数

- **定理8.2**
  临界图的任一点割都不是团。
- 证明：反证，假设k-临界图G有一点割S是团。令G1，……，Gn是G的S分支。因G为k-临界的，每个Gi都必是（k-1）-可着色的。但S为团，每个Gi的任一（k-1）-着色都导致S中所有顶点彼此不同色。从而一定存在G1，……，Gn在S上一致的（k-1）-着色。这些着色一起构成G的一个（k-1）-着色，矛盾。　#

- **推论8.2**
  每一临界图是一个块。
- 证明：若临界图G含一割点v，则 {v} 是G的一个点割，且是团。故临界图不含割点，因而是个块。　#

注：NP-complete prob：对任给图G及正整数 $k \le |V|$ ，G是否为k-可着色的？
从而，**求任给图G的色数是个NP-hard prob.** 。

6.3 顶点着色和色数

- **贪心**（greedy）**着色法**：用色1，2，... 逐步（按某一 顶点排序）一个个顶点进行正常着色，每次选用尽可能小的颜色进行着色。
  - 例如，对任给图G，按任一顺序进行贪心着色，则每当尝试对某一顶点v着色时，其邻集N(v)中至多出现Δ种色，因此总可从Δ + 1 种色中挑选一色着在v上。整个着色至多用了Δ + 1 种色，故G为 (Δ + 1)-可着色的。从而得到推论8.1.2的另一证明。
- 显然，贪心着色法所用的颜色数完全取决于着色的顺序，即**顶点的一个排序**。假如我们事先知道图G的一个χ-着色为
  $$C = (V_1, V_2, \ldots\ldots, V_\chi) \text{ 。}$$
  按 $(V_1, V_2, \ldots\ldots, V_\chi)$ 的顺序任作一顶点排序（同一色集Vi内随意排序），按此顺序进行贪心着色，易见，一定恰好用了χ 个色。因此，设法构想一适当的顶点排序进行贪心着色，往往可能得到关于着色的一个较好结果（如Brooks定理之证明）。下面是这方面的一些结果：

6.3 顶点着色和色数

- 例。设图G 中度序列满足：$d_1 \le \ldots\ldots \le d_\nu$ ，则 $\chi \le$
  - 证明：不妨设顶点排序 φ：v1，……，vν 恰使 $d(v_i) = d_i \quad i=1,2,\ldots,\nu$ 。沿φ 进行贪心着色。不妨设某vk被着上了色χ 。易见，它一定与前面 $\ge \chi - 1$ 个不同色的顶点相邻，因此　$\max\limits_i \min\{d_i + 1, i\}$
    $$d_k = d(v_k) \ge \chi - 1 \text{ 。}$$
    又，显然　$k \ge \chi$ 。
    $$\therefore \quad \min\{d_k + 1, k\} \ge \chi \quad \text{得证。}$$
    #
- 例。试证：$\chi(G) \le 1 + \max\{\delta(H) \mid H\text{为G的导出子图}\}$。
  - 证明：作G的顶点排序 φ：v1，……，vν 如下：
    vν 为图G的最小度顶点；
    vν-1 为图G-vν 的最小度顶点；
    vν–2 为图G-{vν，vν-1} 的最小度顶点；s
    ………………
    令 $L = \max\{\delta(H) \mid H\text{为G的导出子图}\}$。注意到G，G-vν ，G-{vν，vν-1} ，…都是G 的导出子图，因而每个 $d_H(v_i) \le L$。于是每个vi 都只与前面 ≤ L个顶点相邻，从而贪心着色法至多用了L+1个色。故
    $$\chi(G) \le 1+L = 1+ \max\{\delta(H) \mid H\text{为G的导出子图}\} \text{ 。}$$
    #

6.3 顶点着色和色数

- **注:**顶点着色问题的另一常用技巧是基于以下显而易见的命题：
  - 设$d(u) \le k-1$ $(k \ge 2)$ $\forall u \in U \subset V$，而G-U为k-可着色的，则G也是k-可着色的。(从而，当尝试G是否为k-可着色时，可先不管（先**逐步**删去）所有度≤k-1的顶点。)
  - 由上知：若 $d(u) \le \chi(G) - 2$ 则 $\chi(G-u) = \chi(G)$
- 例:试证 $\chi(G)+\chi(G^c) = \nu + 1$。
  - 证明：对ν 进行归纳。当$\nu \le 2$时，显然成立。假设对顶点数< ν 时都成立，而$\nu(G)=\nu$ 。
    情况1 当$\delta(G) \ge \chi(G) - 1$时：则
    $\Delta(G^c)= \nu-1-\delta(G) \le \nu - \chi(G)$
    $\chi(G^c) \le \Delta(G^c)+ 1 \le \nu - \chi(G) + 1$，得证
    情况2 当$\delta(G) < \chi(G)-1$时：取u使
    $d_G(u) = \delta(G) \le \chi(G) - 2$
    因此，首先有 $\chi(G_1) = \chi(G)$
    其中$G_1=G - u$ 。由归纳假设知，
    $\chi(G_1) + \chi(G_1^c) = \nu$
    $\therefore \chi(G)+\chi(G^c) = \chi(G_1)+\chi(G^c) \le \chi(G_1)+\chi(G_1^c) +1=\nu+1$ #

6.3 顶点着色和色数

- **8.1.1**. 证明：若G 是简单图，则 $\chi \ge \nu^2/(\nu^2 - 2\varepsilon)$ 。
- **8.1.2.** 证明：若G的任二奇圈都有公共顶点，则 $\chi \le 5$ 。
- **8.1.3**. 证明：设图G 中度序列满足$d_1 \le \ldots\ldots \le d_\nu$ ，则 $\chi \le \max_i \min\{d_i + 1, i\}$
- **8.1.4**. 利用习题8.1.3 证明：
  (a) $\chi \le$
  (b) $\chi(G)+\chi(G^c) = \nu + 1$。
  (c) 推论8.1.1 。
- **8.1.5**. 试证：$\chi(G) \le 1+ \max\{ \delta(H) \mid H$为G的导出子图$\}$。
- 8.1.6.* 设k-色图G上有这样一个正常着色（不一定为k-着色），其中每种色都至少分配给两个顶点。证明：G也有这样的k-着色 。
- **8.1.7**. 证明：若C =（V_1，V_2 ，……，V_χ ）是图G的一个χ-着色，则每一V_i都含一顶点v_i ，它与其他每个 V_j ($j \ne i$)至少有一边相连。
- 8.1.8. 若G 的任二k-着色都导出V的相同的k-划分，则称G为**唯一k-可着色的**。证明：k-临界任一顶点割的导出子图不会是个唯一(k-1)-可着色子图。

8.1 色数——习题（续）

- 8.1.9 (a)证明：若u、v为临界图的二顶点，则不可能有$N(u) \subseteq N(v)$ 。
  (b)试证：不存在恰有k+1个顶点的k-临界图。
- 8.1.10. (a) $\chi(G_1 \vee G_2) = \chi(G_1) +\chi(G_2)$ ，其中**$G_1 \vee G_2$** 称为图G1与G2的**联图**，它是将它们间的每对顶点都用新边连起来所得的图。
  (b)$G_1 \vee G_2$是临界图，当且仅当G1与G2都是临界图。
- 8.1.12. 设G1与G2是恰有一公共顶点v的k-临界图，且vx和vy分别是G1和G2的边，则$(G_1-vx) \cup (G_2-vy)+xy$ 也是k-临界图。
- 8.1.13. 对 $n = 4$及 $n \ge 6$ 构造n个顶点的4-临界图。
- 8.1.14.* (a) 设V的2-划分（X，Y）使G[X]和G[Y]都是n-可着色的，且边割 [X，Y] 最多有n-1条边，则G也是n-可着色的。
  (b) 试证：每个k-临界图都是(k-1)-连通的。

(提示(a)：令(X_1, X_2, … , X_n)及(Y_1 , Y_2 , … , Y_n)分别是G[X] 和G[Y]的n着色。作一偶图H=({$x_1,x_2,\ldots,x_n$} ,{$y_1,y_2,\ldots,y_n$} , E)，使$x_iy_j \in E$ $\Leftrightarrow$ 边割$[X_i , Y_j]_G = \phi$ 。利用习题5.2.6(b)证明H有完美匹配。由此构造G的n-着色。）

8.1 色数——习题（续）

- 8.1.15. 求$\chi(K_n - e)$ 及 $\chi(K_n - e_1 - e_2)$，其中e、 e1 、e2都是Kn 的边，且后两者互不相邻。
- 8.1.16.任一4-可着色简单图G的边都有一红、兰2-边着色，使G中每一三角形都恰含一红边及二兰边
  （提示: 令所用4色为0、1、2、3。对每边e= xy ，令 色(e)= 色(x)+色(y) (mod 2)）
- **8.1.17** 证明：奇圈数≤2 的图一定是3-可着色的。
- **8.1.18** 证明：$\alpha\chi \ge \nu$ 。
- **8.1.19** 设e为简单图G的任一边，则$\chi(G - e) = \min\{\chi(G) ,\chi(G \cdot e)\}$ 。

8.2 Brooks定理

8.3定理8.4

- 定理**8.4**
  设简单连通图G 不是奇圈或完全图，则 $\chi \le \Delta$ 。
  - 证明：对ν 进行归纳。当$\nu \le 3$时，显然成立。假设当$\nu < n$时都成立，而$\nu(G) = n$ 。不妨设：
    ① G为Δ-正则的。（不然，取u使$d(u)= \delta < \Delta$ ，由归纳假设，易见，G - u为Δ -可着色的，从而G亦然。）
    ② G为2-连通的。（不然，令v为G的割点，由割点定义，存在E的2-划分（E1，E2）使G[E1]与 G[E2]恰有一公共顶点v，从而易见，结论成立。）
    ③ $\Delta \ge 3$。（不然，G为圈，结论成立。）

  今选取3个点 x_1 ，x_2，x_n 如下：
  - 若 $\kappa \ge 3$，则任取一点为x_n ，并取$N(x_n)$中任二不相邻顶点作为 x_1 与x_2 。（ 这样的二顶点一定存在。不然，$N(x_n) \cup \{x_n\}$ 是一团，从而易见G是完全图，矛盾。）
  - 若 $\kappa = 2$，则选取x_n使 $\kappa(G - x_n)= 1$。注意到$G - x_n$中至少有两个为**endklocks** （即，它是**G的块，且**其顶点中只有一个是G的割点 ），它们每个至少含一 G的非割点 与 x_n 相邻接。取不在同一endklock中的两个这种顶点作为x_1 与x_2 。

8.3定理8.4

- 在上述两种情况下，我们都有：
  $G - \{x_1, x_2\}$ 连通；
  且 x_nx_1， $x_nx_1 \in E(G)$ 而$x_1x_2 \notin E(G)$
  下面我们由此来作V的一个排序：
  取$x_{n-1} \in V \setminus \{x_1, x_2, x_n\}$ 使$x_{n-1} \in N(x_n)$；
  取$x_{n-2} \in V \setminus \{x_1, x_2, x_{n-1}, \}$ 使$x_{n-2} \in N(\{x_{n-1}, x_n\})$；
  ....;
  ....
  由于$G - \{x_1, x_2\}$是连通的，上述步骤可一直进行到底，得V的一个排序：
  x_1， x_2，......，x_n 。
  其中每个x_i （$i < n$)都至少与某x_j，$j > i$，相邻接。又，x_1 与x_2不相邻。于是，贪心着色法只用了$\leq \Delta$ 个色。 #

习题

- 8.2.1. 证明Brooks定理等价于下述命题：若G是k-临界图（$k \geq 4$），且不是完全图，则
  $2\varepsilon \geq \nu(k-1)+1$ 。
- 8.2.2*. 利用Brooks定理证明：若G是$\Delta = 3$的无环图，则$\chi' \leq 4$。

8.4 围长和色数

易见，若G中**最大团的顶点数k，则$\chi \geq k$**。下面的定理表明，一个有很大色数的图，其最大团的顶点数不一定也很大。

○定理8.7 对任正整数k，都存在不含3-圈的图G 使 $\chi(G) = k$ 。（即，可找到色数任意大的图，但其最大团顶点数却只为2。）

证明：对k进行归纳。当$k = 1$时，$G_1 = K_1$满足要求；当$k = 2$时，$G_2 = K_2$ 也满足要求；一般，设$G_k = (V_k , E_k)$，$V_k = \{v_1, ..., v_n\}$满足要求（$k \geq 2$），则由G_k构造 $G_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$如下：

(1) 添加新顶点u_1，......，u_n及v；
(2) 把每个u_i 连到v_i（在G_k中） 的每个邻点；
(3) 再将v连到每个u_j 。

- 易见，G_{k+1}中不含3-圈。又，G_k的任一k-着色可扩充成G_{k+1}的（k+1）-着色如下：将每个u_i着以v_i上的色；再用一新色着在v上。显然，这是G_{k+1}的正常（k+1）-着色，从而G_{k+1}是（k+1）-可着色的。
- 余下只要再证G_{k+1}不是k-可着色的即可：不然，不妨设在该k-着色中v被着以色k。这时无一u_i被着以色k。今，将每个被着以色k的顶点v_i都改着以顶点u_i的色。易见，这是G_{k+1}的正常k-着色。它导致G_k的一个正常（k-1）-着色，这与G_k为k色图相矛盾。 #

8.4 围长和色数

- 注：**Hajos**(1961年)曾提出似乎是可信的**猜想**：
  G为k-色图 $\Rightarrow$ G包含K_k的一个剖分。
  当k=3及4时可证 [1]猜想成立。但1986年（Jurnals of Graph Theory, vol.3, p314~ ）已证明该猜想不成立。

8.4 围长和色数——习题

- 8.3.1. 证明：定理8.7中的图G_k是一k-临界图。
- 8.3.2* (a) 设G是围长至少为6的k-色图（$k \geq 2$）。作一新图H如下：取kν个新顶点集S及G的 个互不相交的拷贝，且建立G的拷贝与S的ν元子集之间的一一对应。再将G的每个拷贝的顶点和与它相应的S的ν元子集的元素用一匹配连接起来。证明：H的色数至少为k+1，其围长至少为6。
  (b) 试证：对任 $k \geq 2$，都存在围长为6的k-色图。 *（提示(a)：易证H的围长至少为6。若H为k-可着色的，则存在S 的ν元子集，其 元素都染有相同的颜色。再考察对应的G的拷贝得出矛盾。）*