

# 通信网理论基础

## 第五章 通信网的可靠性

### 第四节 局间通信和综合可靠度

北京邮电大学 通信网络综合技术研究所

授课教师: 武穆清

电子信箱: [wumuqing@bupt.edu.cn](mailto:wumuqing@bupt.edu.cn)

# 本章内容

5.1 可靠性理论概要

5.2 通信网的可靠性

5.3 通信网的联结性

5.4 局间通信和综合可靠度

5.5 随机图和灾害控制

## 5.4 局间通信和综合可靠度

- = 前面是从全网的角度来计算可靠度的
- = 本节将讨论两个端之间通信的可靠度问题

### 5.4.1 端间联结性的计算

- 在通信网中，两端之间可以有多条径
  - = 当这些径都不能通信时，才使端间通信中断
  - = 当这些径均无共端时
    - ≡ 可以将这些径分解为串并系统，直接计算两端间的联结概率

= 当这些径有共端时，或既有共端又有共边时

≡ 求解可靠度就要复杂一些

≡ 但仍可用以前分解桥式联接的系统那样

△ 采用各种状态下的串并系统来解

≡ 需要注意

△ 当网内的端出故障时

△ 与它相关联的边也将失去作用

△ 分解时要注意这一点

# — 例1 多条径无共端的情况

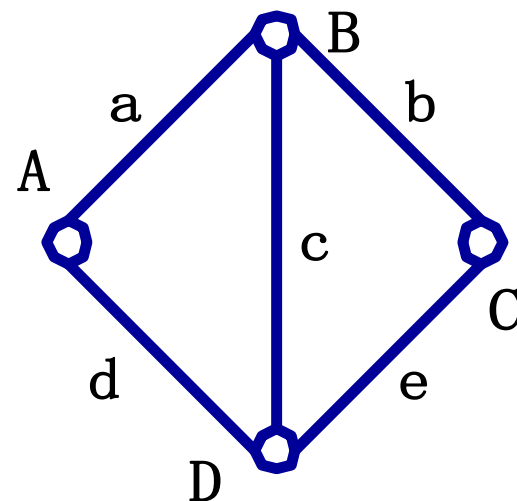
≡ 网络如图

≡ 各端的可靠度分别为：

$$\Delta R_A, R_B, R_C, R_D$$

≡ 各边的可靠度分别为：

$$\Delta R_a, R_b, R_c, R_d, R_e$$



≡ 端B和D之间的联结，由三条径构成

≡ 一条直通边c

≡ 两条迂回路径 BAD 和 BCD

≡ 端B和D间的可靠度为：

$$R = 1 - (1 - R_c)(1 - R_A R_a R_d)(1 - R_C R_b R_e)$$

≡ 因为B和D间的不可靠度为：

$$F = F_{BAD} \cdot F_c \cdot F_{BCD} = (1 - R_A R_a R_d) \cdot (1 - R_c) \cdot (1 - R_C R_b R_e) \quad 5$$

# — 例2 多条径有共端有共边的情况

≡ 网络如图

≡ 各端的可靠度分别为:

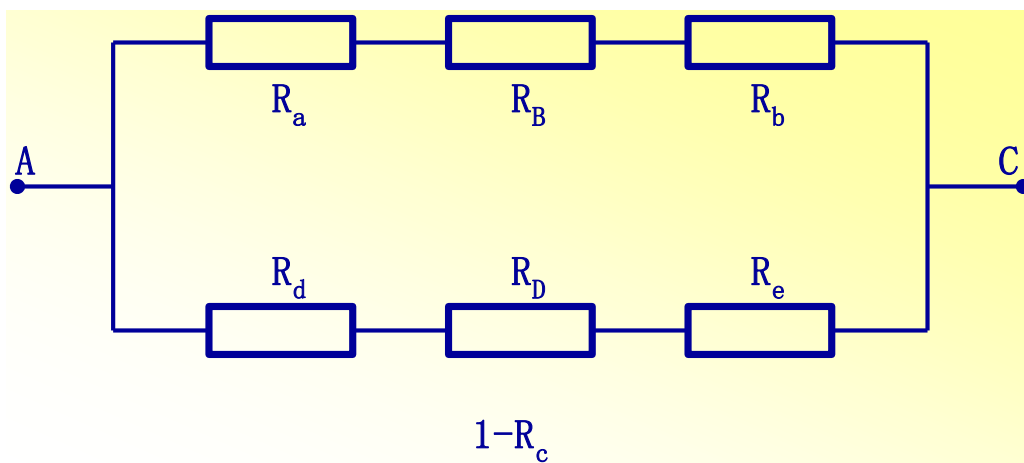
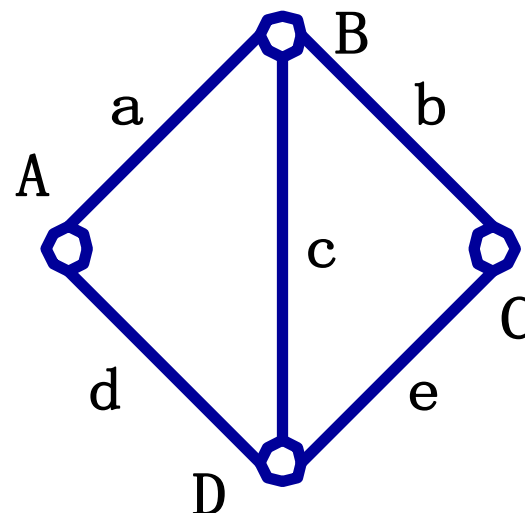
$$\Delta R_A, R_B, R_C, R_D$$

≡ 各边的可靠度分别为:

$$\Delta R_a, R_b, R_c, R_d, R_e$$

≡ 试计算A端和C端间的可靠度

≡ 桥路C失效状态，其概率为  $1 - R_c$



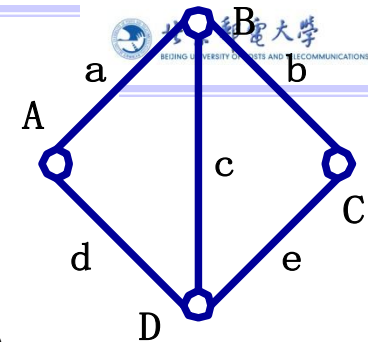
≡ 此时，网络成为串并系统

≡ 此子系统的不可靠度为:

$$(1 - R_a R_B R_b)(1 - R_d R_D R_e)$$

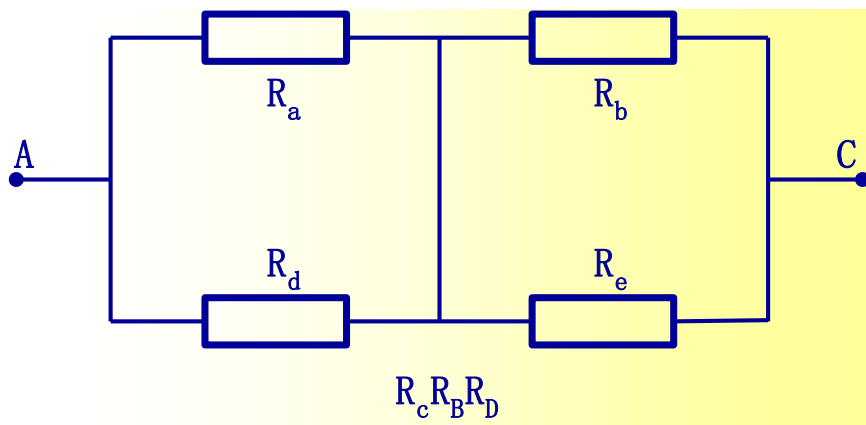
≡ 此子系统的可靠度为:

$$1 - (1 - R_a R_B R_b)(1 - R_d R_D R_e)$$



= 桥路C正常状态，其概率为 $R_c$

≡ B端和D端均为正常状态



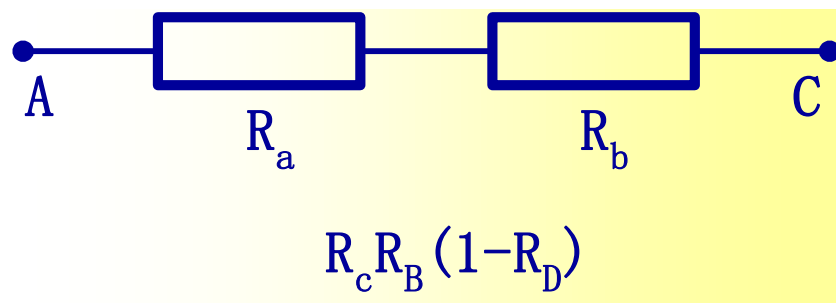
△ 其发生概率为： $R_B R_D$

△ 此时，网络成为并串系统

△ 此子系统的可靠度为：

$$[1 - (1 - R_a) \cdot (1 - R_d)] \cdot [1 - (1 - R_b) \cdot (1 - R_e)]$$

≡ B端正常，D端失效状态



△ 其发生概率为： $R_B (1 - R_D)$

△ 此时，网络成为串接系统

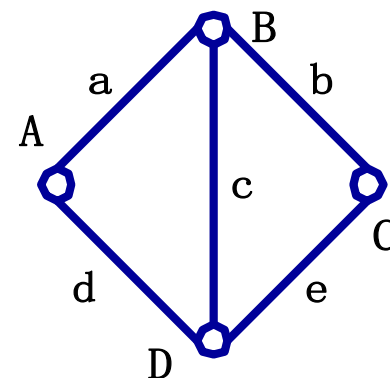
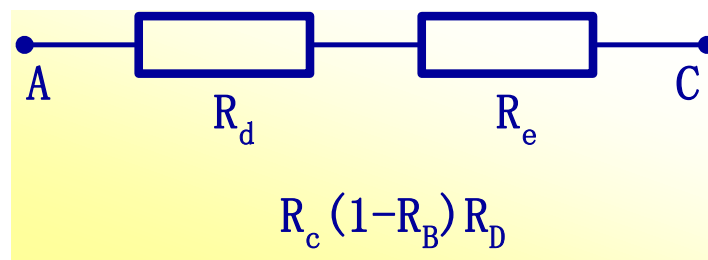
△ 此子系统的可靠度为： $R_a R_b$

≡ **B端失效，D端正常状态**

△ 其发生概率为：  $(1 - R_B) R_D$

△ 此时，网络成为串接系统

△ 此子系统的可靠度为：  $R_d R_e$



= 所以，A端和C端间的通信可靠度为：

$$\begin{aligned}
 R = & (1 - R_c) \cdot [1 - (1 - R_a R_B R_b)(1 - R_d R_D R_e)] \\
 & + R_c R_B R_D \cdot [1 - (1 - R_a) \cdot (1 - R_d)] \cdot [1 - (1 - R_b) \cdot (1 - R_e)] \\
 & + R_c R_B (1 - R_D) R_a R_b \\
 & + R_c (1 - R_B) R_D R_d R_e
 \end{aligned}$$



## 5.4.2 端间通信的综合可靠度

### — 引言

= 在电路转接网中，可取呼损作为可靠性的指标

≡ 因为当某一呼叫由于线路无空闲而被拒绝时

≡ 通信就不能进行，与线路有物理性故障时并无差异

= 设有 $n$ 条独立的线路联结两个端

≡ 两端间的业务量强度为 $a$

≡ 端间通信的综合可靠度

△ 就是综合考虑线路的物理性故障和呼损时的可靠度

# – 不可修复系统的端间综合可靠度

= 设这n条线路的故障率均为 $\alpha$ （次/年）

= 则t年内它的可靠度（也就是仍能使用的概率）为 $e^{-\alpha t}$

≡ 不可靠度（或失效概率）为 $1 - e^{-\alpha t}$

= 令x: 是t年内损坏的线路数

≡ y: 是在通信中已被占用的线路数

≡ 则可靠集为 $\{x + y < n\}$

≡ x和y都是随机变量，它们的概率是已知的：

$$\begin{aligned} P_r(x) &= C_n^x \cdot (1 - e^{-\alpha t})^x \cdot e^{-\alpha t(n-x)} \\ &= C_n^x \cdot (1 - e^{-\alpha t})^x \cdot (e^{-\alpha t})^{(n-x)} \end{aligned}$$

$$P_r(y|x) = \frac{\frac{a^y}{y!}}{\sum_{r=0}^{n-x} \frac{a^r}{r!}}$$

△ 注：在M/M/c即时拒绝模型中：

$$P_k = \frac{(c\rho)^k}{k!} \cdot p_0 \quad (0 < k \leq c)$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^c \frac{(c\rho)^k}{k!}}$$

= 所以，可靠度为

$$R(t) = \sum_{x+y < n} C_n^x e^{-\alpha t(n-x)} \cdot (1 - e^{-\alpha t})^x \cdot \frac{\frac{a^y}{y!}}{\sum_{r=0}^{n-x} \frac{a^r}{r!}} = \sum_{x+y < n} P_r(xy) \quad (5-63)$$

$$= \sum_{x=0}^{n-1} C_n^x e^{-\alpha t(n-x)} \cdot (1 - e^{-\alpha t})^x \cdot \frac{\sum_{s=0}^{n-1-x} \frac{a^s}{s!}}{\sum_{r=0}^{n-x} \frac{a^r}{r!}}$$

= 不可靠度为

$$F(t) = 1 - R(t) = \sum_{x+y=n} C_n^x e^{-\alpha t(n-x)} \cdot (1 - e^{-\alpha t})^x \cdot \frac{\frac{a^y}{y!}}{\sum_{r=0}^{n-x} \frac{a^r}{r!}} \quad (5-64)$$

$$= \sum_{x=0}^n C_n^x e^{-\alpha t(n-x)} \cdot (1 - e^{-\alpha t})^x \cdot \frac{\frac{a^{n-x}}{(n-x)!}}{\sum_{r=0}^{n-x} \frac{a^r}{r!}}$$

## 二 例：数值分析

≡ 规定两端间十年内阻塞应小于0.01，问如何选择 $n$ 和 $\alpha$ ？

△ 即： $T = 10$ 年，不可靠度 $F \leq 0.01$ ，可靠度 $R = 1 - F \geq 0.99$

△ 在一定的网络故障率 $\alpha$ 下，需几条线路可保证可靠度？

≡ 设业务量强度 $a = 0.2$ 爱尔兰

△ 对不同的 $n$ ，画出不可靠度 $F$ 对 $\alpha T$ 的曲线

• 见下页

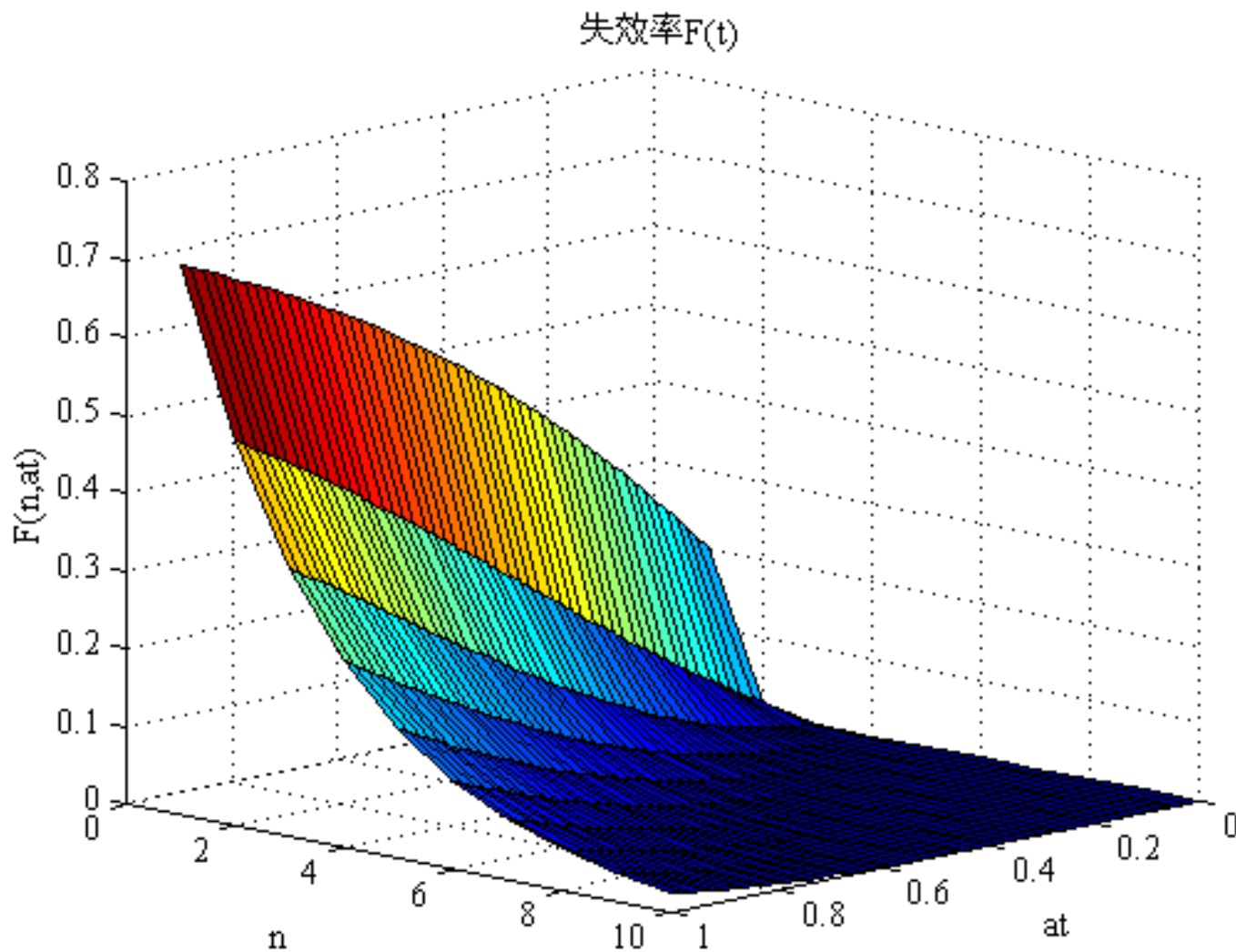
△ 要 $F < 0.01$ ，当 $\alpha T = 0.1$ 时，即线路平均寿命 $y_a$ 为100年时，  
 $n = 3$ 就行了

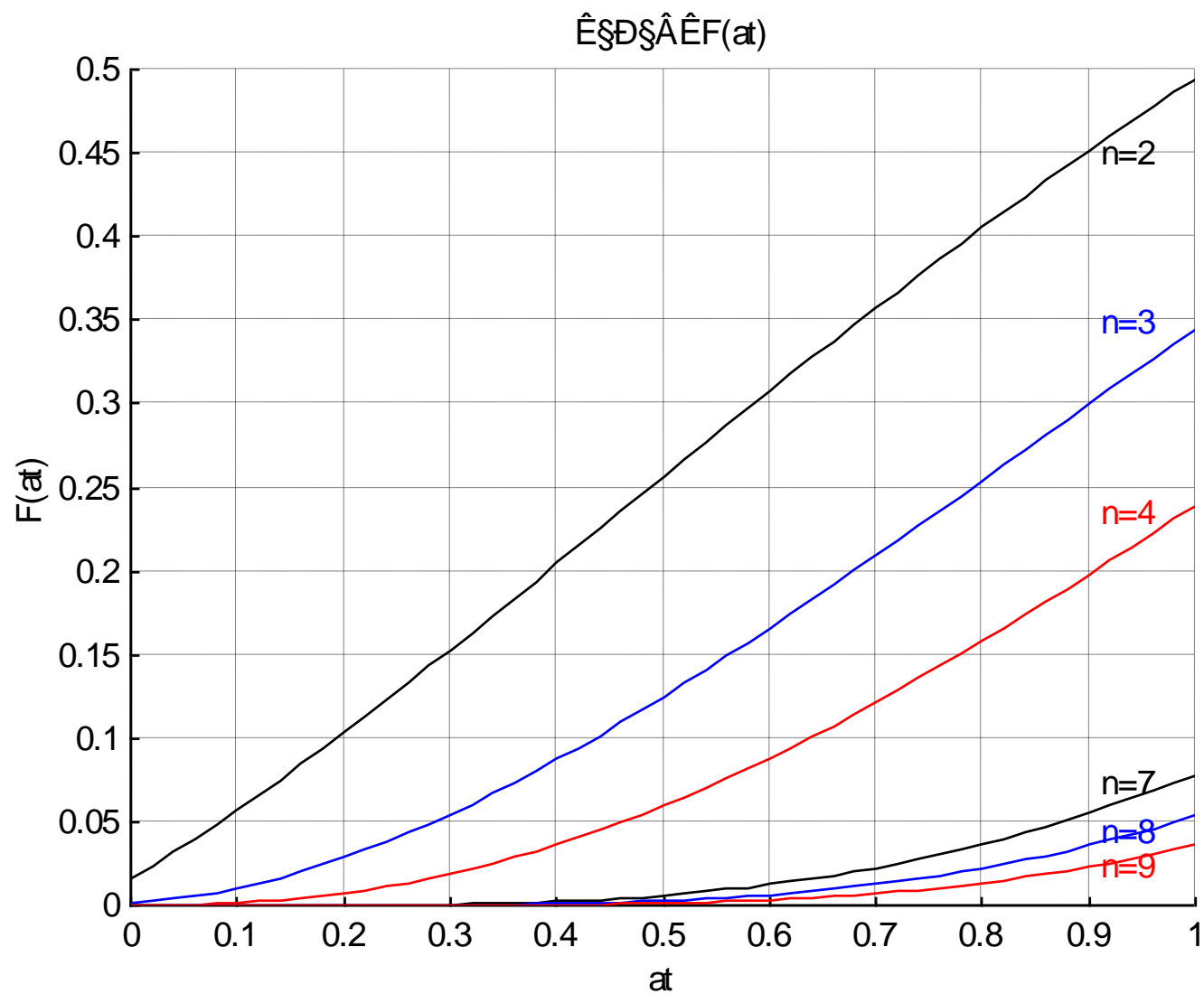
△ 要 $F < 0.01$ ，当 $\alpha T = 0.2$ 时，即线路平均寿命 $y_a$ 为50年时，  
就需要 $n = 4$ 条

△  $\alpha$ 越大，所需线路就越多

△ 对不同的 $n$ , 不可靠度 $F$ 对 $\alpha T$ 的曲线

△ 业务量强度 $a = 0.2$





# — 可修复系统的端间可靠度

= 设每条线路的稳态可靠度为R

≡ 则 
$$R = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

= 把 (5-63) 和 (5-64) 式中的  $e^{-\alpha t}$  换成 R 后，就成为计算可修复系统的端间可靠度公式了

≡ 即可靠度 
$$R(t) = \sum_{x=0}^{n-1} C_n^x R^{n-x} (1-R)^x \cdot \frac{\sum_{s=0}^{n-1-x} \frac{a^s}{s!}}{\sum_{r=0}^{n-x} \frac{a^r}{r!}}$$

≡ 不可靠度 
$$F(t) = 1 - R(t) = \sum_{x=0}^n C_n^x R^{n-x} (1-R)^x \cdot \frac{\frac{a^{n-x}}{(n-x)!}}{\sum_{r=0}^{n-x} \frac{a^r}{r!}}$$

## = 例：如前例

### ≡ 若仍用3条线路

△ 前面的 $\alpha T = 0.1$ 相当于每条线路的可靠度 $R = e^{-0.1} = 0.905$

△ 这时，线路的故障率 $\alpha$ 可以很大，例如：0.05

△ 则要求：

$$0.905 = \frac{\beta}{0.05 + \beta} \quad \frac{1}{\beta} = 2.1 \text{年}$$

△ 即要求平均修复时间为2.1年，这很容易做到

△ 此时所要求的线路平均寿命只有20年了

## = 注：

≡ 采用可修复系统一方面要增加维修力量，另一方面要看条件是否许可，如卫星和海底电缆维修均有困难

≡ 综合可靠度不一定要用呼损，其它指标也可作为综合的内容



## 5.4.3 通信网的综合可靠度

### — 引言

＝从端间通信的综合可靠度的讨论中可以看出

≡用呼损作为不可靠度的度量是合理的

≡不论是由于线路数量不足，还是由于线路故障，都将使通信无法进行

△从用户的角度看，二者差别不大

＝两方面应当综合考虑

≡如果为了提高可靠性

△付出很大代价去建设线路的可靠度

△而使线路数量太少，会导致较大呼损

≡或为了减小呼损而建设多条低劣线路而导致经常出故障

≡这两种偏颇的做法都不能满足用户的要求

△所以，应该综合考虑这两个方面

- 二 把这种综合可靠度推广到全网，困难是
  - ≡ 网内各端间均有通信在进行
  - ≡ 呼损可以各不相同
  - ≡ 如何从全网看呼损也是不易确定的
  - ≡ 各端对间的业务量强度可能是不同的
  - ≡ 仅计算全网中各端通信的呼损就相当困难
  - ≡ 再计入各线路和各交换点的故障将更加困难

# — 全网综合可靠度

## = 定义

≡ 设  $V_i$  端与  $V_j$  端间的业务量强度为  $a_{ij}$ ，呼损为  $p_{ij}$

△  $p_{ij}$  应包括由线路和交换站故障所带来的呼损

≡ 则信息损失为：  $a_{ij} p_{ij}$

≡ 把全网的信息损失总量作为网的不可靠度指标

△ 于是定义网的综合不可靠度为：

$$F = \frac{\sum_{i,j} a_{ij} p_{ij}}{\sum_{i,j} a_{ij}} \quad (5-65)$$

△ 网的综合可靠度为：

$$R = 1 - \frac{\sum_{i,j} a_{ij} p_{ij}}{\sum_{i,j} a_{ij}} \quad (5-66)$$

# = 计算

≡ 设网络有  $n$  个端， $m$  条边

≡ 则端和边的正常与故障共有  $2^{m+n}$  种状态

△ 状态集为： $\{s_r: r = 0, 1, 2, \dots; 2^{m+n} - 1\}$

△ 其中： $s_0$  为未出任何故障的状态

≡ 设在状态  $s_r$  下的呼损为  $p_{ij}^{(r)}$

△ 网络处于状态  $s_r$  的概率为  $p_r$

≡ 则全网平均信息损失为：

$$L = \sum_{r=0}^{2^{m+n}-1} p_r \sum_{i,j} a_{i,j} p_{ij}^{(r)}$$

≡ 此时，网的综合可靠度为：

$$R = 1 - \frac{\sum_{r=0}^{2^{m+n}-1} p_r \sum_{i,j} a_{ij} p_{ij}^{(r)}}{\sum_{i,j} a_{ij}} \quad (5 - 67)$$

△

△ 通常  $a_{ij}$  是给定的

△  $p_r$  可根据边和端的可靠度求得

△ 问题的关键是求  $2^{m+n+1} C_n^2$  个  $p_{ij}^{(r)}$

- $r$  有  $2^{m+n}$  个

- $i \rightarrow j$  和  $j \rightarrow i$  共有  $2C_n^2$  个

≡如果考虑到近代通信网中，同时出现两个故障而未修复的概率很小，以致可以忽略不计

△则故障状态就只有  $m + n + 1$  个

- 其中一个是无故障状态
- $m$  个是一条边出故障的状态
- $n$  个是一个端出故障的状态

△这样可大大简化计算

- 使利用 (5-65) 式来计算网的可靠度成为可能
- 这时  $p_{ij}^{(r)}$  的个数已下降到  $(m + n + 1) C_n^2$  个

≡ 设  $R_{ns}$  是第  $s$  个端的可靠度  
 $R_{et}$  是第  $t$  条边的可靠度

△ 则网络无故障的概率为：

$$p_0 = \prod_{s=1}^n R_{ns} \cdot \prod_{t=1}^m R_{et} \quad (5-68-1)$$

△ 网络中有一个端（第  $s$  端）故障的概率为：

$$p_{ns} = \frac{p_0}{R_{ns}} (1 - R_{ns}) \quad (5-68-2)$$

△ 网络中有一条边（第  $t$  边）故障的概率为：

$$p_{et} = \frac{p_0}{R_{et}} (1 - R_{et}) \quad (5-68-3)$$

△ 网络中有两个以上故障的状态的概率为：

$$Q = 1 - p_0 - \sum_{s=1}^n p_{ns} - \sum_{t=1}^m p_{et} \quad (5-69)_{22}$$

## ≡为简化计算

△可设有两个以上故障时，所有呼叫都将形成信息损失

△这样可使计算结果保守一些（实际可靠度会略大一些）

△通常Q很小，尤其是在不太大的网中，

△ ∴ 这种近似是合理的

△于是，可得网的综合可靠度为：

$$R = 1 - Q - \frac{1}{\sum_{i,j} a_{ij}} \cdot \left[ \sum_{s=1}^n p_{ns} \sum_{i,j} a_{ij} p_{ij}^{(s)} + \sum_{t=1}^m p_{et} \sum_{i,j} a_{ij} p_{ij}^{(t)} \right] \quad (5-70)$$

## 5.5 随机图和灾害控制

### 5.5.1 随机图的联结性

#### — 引言

= 前面讨论的图都是确定型的

≡ 也就是说，已给端集 $V$ 和边集 $E$

≡ 而边集 $E$ 是 $V \times V$ 经确定关系 $f$ 而形成的

≡ 或者说，每一条边是与且只与两个端相关联

= 实际通信网也的确如此

≡ 所以，在计算网的联结性、最短径长等等指标时

△ 都假定网的结构是已确知的



= 从前面的计算和讨论可以看出

≡ 当端数 $n$ 很大时，许多问题都成为NP问题

△ 连计算机甚至都无能为力

△ 只好借助经验来简化处理

△ 得到一些近似解

= 本节引入的随机图概念将是完全不同的概念

## — 随机图

= 概念：给定 $n$ 个端的端集后，端间的边是随机的

≡ 这样的图就是随机图

≡ 有不同的方法来描述随机图

## = 吉尔伯特（Gilbert）模型

≡ 设有  $n$  个端

△ 则有  $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$  条可能的边

≡ 令任两个端  $v_i$  和  $v_j$  间有边的概率为  $p$

△ 所有端对间都有同样的概率

△ 且它们是相互独立

≡ 在这种模型中，边数  $m$  也是随机的

△ 当  $n$  很大时，边数  $m$  就接近  $m = p \cdot \frac{n(n-1)}{2}$  (5-71)

△ 每个端的度数就接近  $d = \frac{2m}{n} = p \cdot (n-1)$  (5-72)

- $2m$ : 是全网所有端的度数的总和
- $2m/n$ : 是全网所有端的平均度数

- 二 这种随机图当然不会在实际通信网中出现
  - ≡ 但当 $n$ 很大时，有一大类的网会与随机图的结论相近
  - ≡ 许多由随机图得到的结论，至少定性地会对实际的大网有参考意义
  - ≡ 尤其当只知道端数和边数，而网的具体结构未知时，有其参考意义
  - ≡ 在强破坏下，去估计网的可靠性，这种分析方法更有价值

## — 随机图的联结性

= 一个端与一个端集 $A$ 的联结

≡ 设 $A$ 是随机图 $V$ 的子集，其中有 $a$ 个端

△ 即  $A \subset V$ ,  $|A| = a$

≡ 当另一个不在 $A$ 内的端 $v_i$ 与 $A$ 中的某些端之间有边时

△ 称 $v_i$ 与 $A$ 是联结的

≡ 若  $|A| = 1$ ，即其中只有一个端 $v_0$

△ 则 $v_i$ 与 $A$ 联结就是 $v_i$ 与 $v_0$ 联结

= 随机图的联结

≡ 在 $V$ 中任取一个端 $v_0$ ，若 $v_0$ 与其它 $(n-1)$ 个端都联结

△ 即都存在径

△ 则称 $V$ 是联结图

## 二 随机图联结概率的计算方法

≡ 令  $C_{ab}$  是 B 集中任一端都与 A 集相联结的概率

△ 即 B 集中任一端与 A 集中某些端之间有边的概率

△ B 集中有  $b$  个端，A 集中有  $a$  个端

△ 显然， $C_{1, n-1}$  就是有  $n$  个端的随机图的联结概率

≡ B 集中某一个端与 A 集联结的概率可写为：

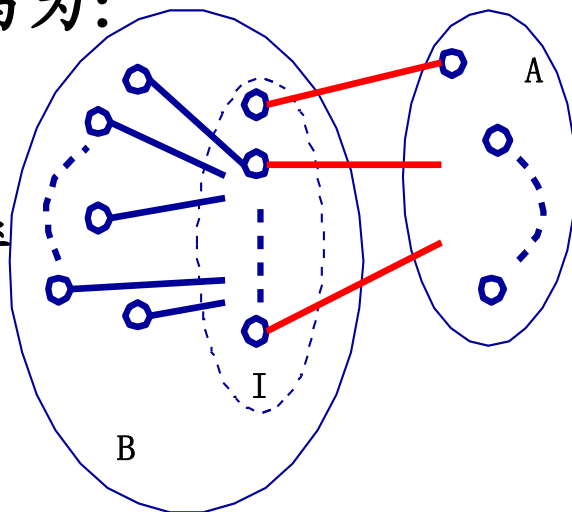
△  $p_a = 1 - q^a = C_{a, 1}$

△ 其中： $q = 1 - p$ ，是两端间无边的概率

△  $q^a$ ：是该端与 A 集中所有端都无边的概率

• 也可将  $q^a$  记为  $q_a$ ，以与  $p_a$  相对应

•  $p_a + q_a = 1$



≡ 若欲使 B 集中所有端都与 A 集联结

△ 则 B 集中的端至少必有一个端与 A 集中的端有联结边

△ 设有  $i$  个端与 A 集中的端有直通边，这  $i$  个端构成集合 I

△ 则只要 B 集中其余  $b - i$  个端都与 I 集联结

• 就可使 B 集中所有端都与 A 集联结

≡ 因此，可推得 $C_{ab}$ 递推公式

$$C_{ab} = \sum_i C_b^i \cdot p_a^i \cdot q_a^{b-i} \cdot C_{i,b-i} \quad (5-74)$$

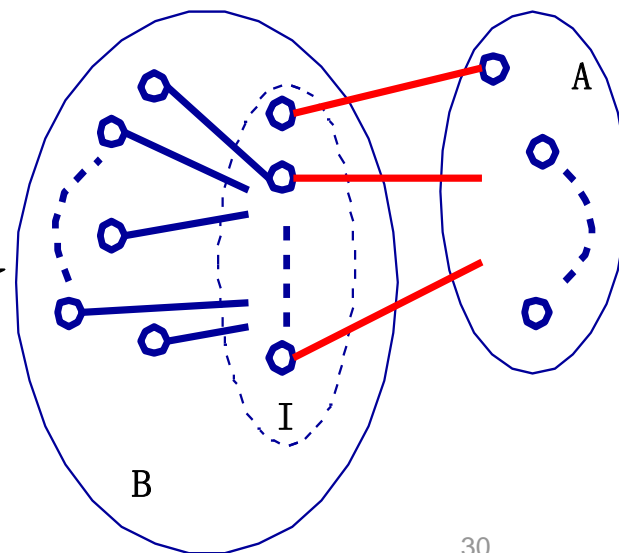
△ 其中， $i$ 取零时，即初始条件 $C_{i,b-i} = C_{0,b} = 0$

- 因为此时I集是空集，B集不可能与A集联结

△ 所以， $i$ 可从1取起，直到  $b$

△ 当 $i = b$ 时， $C_{i,b-i} = C_{b,0} = 1$

- 因为此时I集就是B集
- 即B集中所有端都与A集有直通边
- ∴当然是联结的



= 例：用 (5-74) 式计算  $C_{ab}$

≡ 计算可以从  $C_{a,1} = p_a$  开始，递推进行

$$\equiv C_{a,2} = C_2^1 p_a q_a C_{1,1} + C_2^2 p_a^2 C_{2,0}$$

$$= 2 p_a q_a p + p_a^2 \times 1$$

$$= p_a [2 q_a (1 - q) + p_a]$$

$$= p_a [2 q^a (1 - q) + (1 - q^a)]$$

$$= p_a (1 + q^a - 2 q^{a+1})$$

$$C_{ab} = \sum_i C_b^i \cdot p_a^i \cdot q_a^{b-i} \cdot C_{i,b-i}$$

$$C_{1,1} = C_{a,1} \Big|_{a=1} = p$$

$$\equiv C_{a,3} = C_3^1 p_a q_a^2 C_{1,2} + C_3^2 p_a^2 q_a C_{2,1} + C_3^3 p_a^3 C_{3,0}$$

$$C_{1,2} = C_{a,2} \Big|_{a=1} = p(1 + q - 2q^2) = 3 p_a q_a^2 p (1 + q - 2q^2) + 3 p_a^2 q_a p_2 + p_a^3 \times 1$$

$$\begin{aligned} C_{2,1} = C_{a,1} \Big|_{a=2} = p_2 = 1 - q^2 &= p_a [3 q_a^2 (1 - q) (1 + q - 2q^2) + 3 p_a q_a (1 - q^2) + p_a^2] \\ &= p_a [3 q^{2a} (1 - 3q^2 + 2q^3) + 3(1 - q^a) q^a (1 - q^2) + (1 - q^a)^2] \\ &= p_a [1 + (1 - 3q^2) q^a + (1 - 6q^2 + 6q^3) q^{2a}] \end{aligned}$$

$$\equiv C_{a,4} = C_4^1 p_a q_a^3 C_{1,3} + C_4^2 p_a^2 q_a^2 C_{2,2} + C_4^3 p_a^3 q_a C_{3,1} + C_4^4 p_a^4 C_{4,0}$$

△ 其中， $C_{1,3}$ 可从前面 $C_{a,3}$ 中令 $a = 1$ 得到

△  $C_{2,2}$ 可从前面 $C_{a,2}$ 中令 $a = 2$ 得到

△  $C_{3,1}$ 可从前面 $C_{a,1} = p_a = 1 - q^a$ 得到

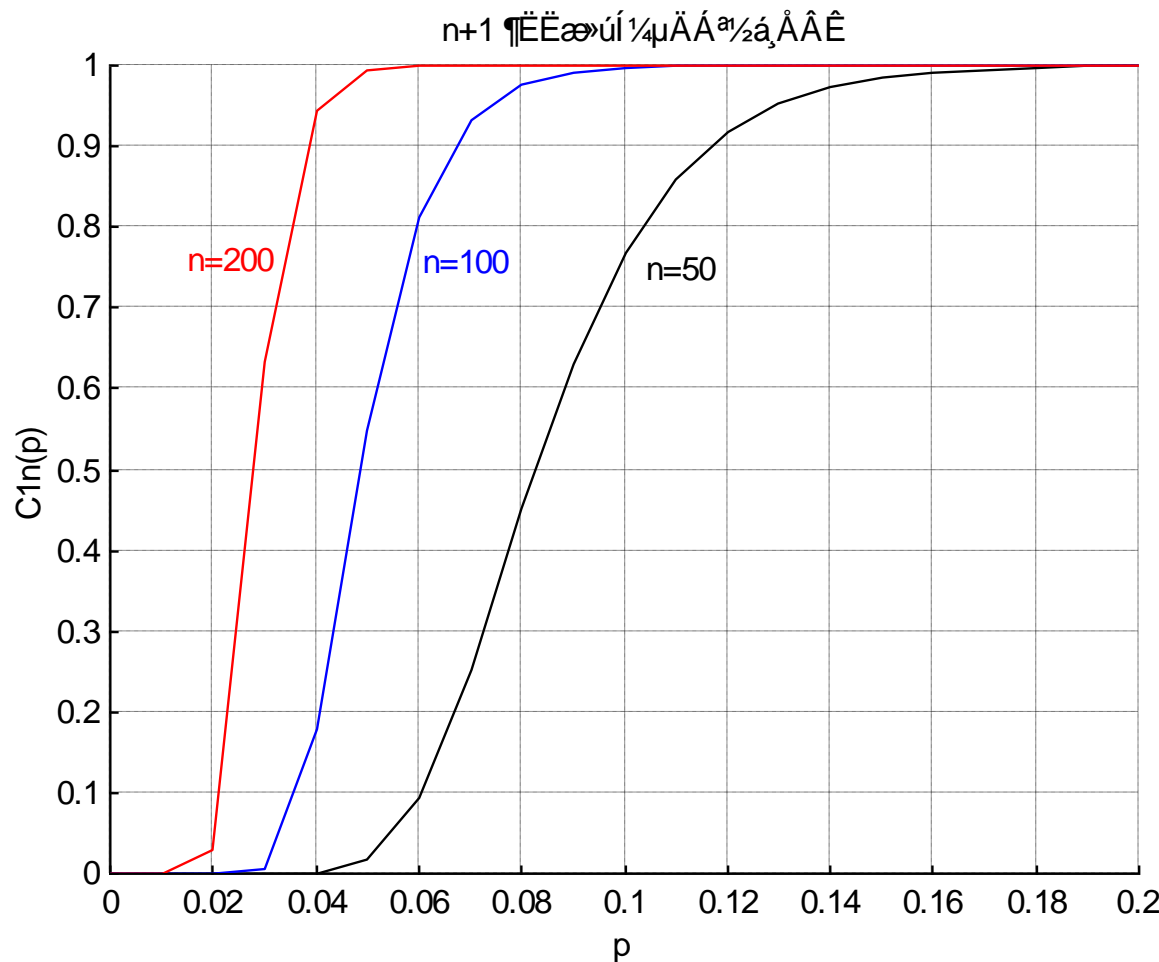
≡ 同理可求得所有 $C_{a,b}$

△ 其中，均可令 $a = 1$ 来求得各 $n + 1$ 端的随机图的联结概率  
 $C_{1,n}$

≡ 这种方法的计算量大约是端数 $n$ 的三次方量级，所以是可行的



≡ 如图所示为  $n = 50, 100, 200$  时  $C_{1,n}$  与概率  $p$  的曲线



△ 从图中可以看出

△ 边存在的概率  $p$  越大，联结概率也越大，这是意料中的

△ 但又可注意到，从低联结概率如  $C_{1,n} = 0.1$  到高联结概率  $C_{1,n} = 0.9$  的过渡是很陡的，且  $n$  越大，就越陡峭



△ 这是一个很有意义的结论

△ 在大型网络中，只要边数超过一定数量，图的联结概率将接近于1

- 而且对边存在概率 $p$ 的值已不再敏感

△ 例如，过渡点的边概率为 $p_0$

- 则当边数  $m > p_0 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$  时

- 图的联结概率就会接近于1

△ 也就是说，当有些边发生故障时，边概率将下降

- 但若起始时图是联结的，则边故障后的可靠度也将很高

△ 可以这样设想，随机图的联结概率本来是 $C_{1,n}(p)$

- 在边发生故障后，边数减少，相应的边概率下降到 $p' < p$
- 则发生边故障后的可靠度将为：

$$R = C_{1,n}(p') / C_{1,n}(p) \quad (5-75)$$

- 在随机图起始时是联结的条件下，由于 $C_{1,n}(p)$ 对 $p$ 已不敏感
- 所以， $R$ 可接近于1

△ 反之，若起始的边数使 $p$ 接近于过渡概率 $p_0$

- 则由于边故障而使边概率下降到 $p'$
- 而此时， $C_{1,n}$ 对 $p$ 很敏感， $p$ 的微小下降都会使 $C_{1,n}$ 急剧下降
- 从而使网的可靠度变得很小

△ 其实这也是可以理解的

- 当边数很大时，冗余度 $2m/n$ 将增大
- 使联结度和结合度增大，从而网的可靠度增大

△ 但是通过随机网的分析，发现一个临界的 $p_0$ ，却是出乎意料的

△ 从图中还可以看出，随着图中端数的增加，临界概率将减小

△ 若用（5-72）式计算端的平均度数 $d$ ，即 $d = 2m/n = p(n-1)$

- 并用 $d$ 作为横坐标重画曲线图，可以发现， $n$ 值越大，过渡的 $d_0$ 值也越大，这与过渡的 $p_0$ 值的变化刚好相反
- 当端度数 $d$ 固定时， $n$ 越大，联结概率将越小

△ 若以联结概率0.9为过渡点

- 对 $n = 200$ 的图，可得相应的 $d$ 值为7，边数 $m$ 在700量级
- 亦即，像 $n = 200$ 这样的大网， $d$ 值在7以上时，已相当可靠
- 而若用全联结网时， $d$ 应为199
- 这差别是很大的

## 5.5.2 平均径长

### — 引言

= 前面讨论网的综合可靠性时曾提到转接次数

≡ 当各边的权值都取1时，转接次数就是径长减1

≡ 转接次数太多对通信是不利的

△ 转接次数多，呼损和其间发生故障的可能性增大

△ 另外，时延和失真都会增大

≡ 在绝大多数通信网中

△ 端间通信总是选取最短径

△ 目的就是为了提高综合可靠度

= 前面曾介绍过一些最短径的算法

≡ 当网内端数很多时，这些计算也都是很复杂的

≡ 本节来讨论随机图中最短径的概率分布及其统计平均

- 一个端  $v_t$  与一个端集  $A$  间的最短径长  
= 定义:  $v_t$  与  $A$  集中离  $v_t$  最近的端之间的最短径长

## — 最短径长的概率分布

= 令  $D_{abk}$  是端  $v_t$  到  $A$  集间最短径长为  $k$  的概率

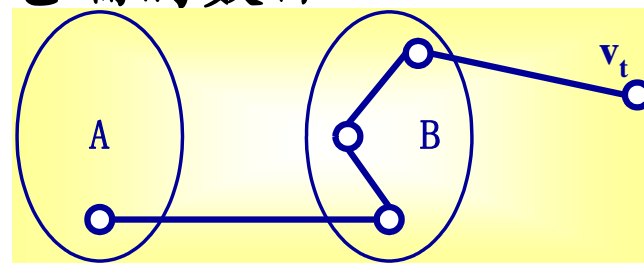
≡  $a$ : 是  $A$  集中的端数

≡  $b$ : 是图中去掉  $A$  集和端  $v_t$  后的其它端的数目

△ 这些剩余端的集合称为 **中间集  $B$**

≡ 当  $k > 1$  时,  $D_{abk}$  的递推公式为:

$$\Delta \quad D_{abk} = q^a \sum_{i=1}^b C_b^i p_a^i q_a^{b-i} D_{i,b-i,k-1} \quad (5-76)$$



≡  $p_a$ : 是端  $v_i$  与  $A$  集联结的概率, 如(5-73)式,  $p_a = 1 - q^a$

≡  $p$ : 是随机图中某两端之间有边的概率

≡  $q$ : 是随机图中某两端之间无边的概率

≡ 这些参数都与前面计算  $C_{ab}$  中的一样

# $= D_{abk}$ 递推公式的证明

$\equiv$  当  $v_t$  与 A 集有径长为  $k$  的最短径时

$\Delta$  则 B 集中必有边联到 A 集

$\equiv$  设 B 集中有  $i$  个端与 A 集间有边

$\Delta$  这种情况出现的概率为  $C_b^i p_a^i q_a^{b-i}$

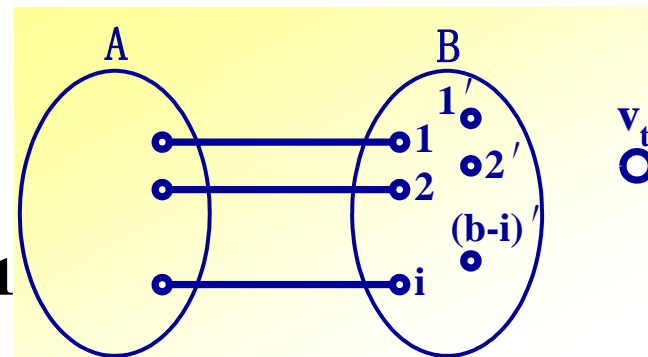
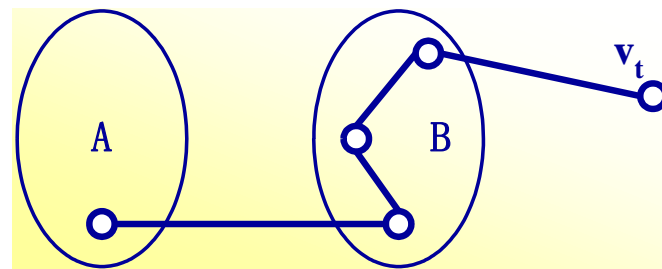
$\Delta$  则  $v_t$  与这  $i$  个端间的最短径长必为  $k-1$

$\Delta$  而中间端的数目降为  $b-i$

- 因为 A 集中的端不可能是中间端

$\Delta v_t$  与这  $i$  个端间最短径长为  $k-1$  的概率就是  $D_{i, b-i, k-1}$

- 即  $v_t$  先与  $\{1', 2', \dots, (b-i)'\}$  集相联，并在其中转接
- 转接至  $k-2$  步时，再与集  $\{1, 2, \dots, (b-i)\}$  相联，此时径长为  $k-1$
- 最后转接至集 A，此时径长为  $k$
- 此概率为  $D_{i, b-i, k-1}$



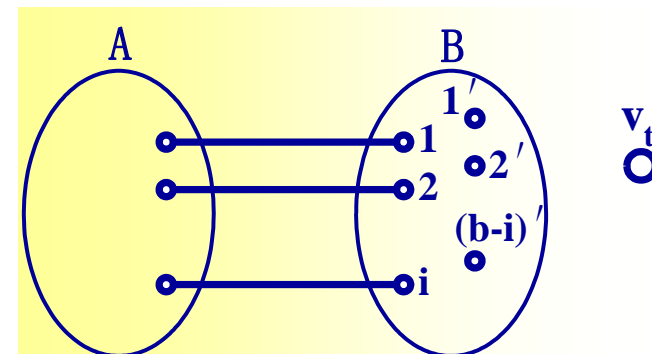
$$D_{abk} = q^a \sum_{i=1}^b C_b^i p_a^i q_a^{b-i} D_{i,b-i,k-1}$$

≡ 当  $k > 1$  时,  $v_t$  与 A 集间必无边

△ 这概率就是式中的  $q^a$  项

≡ 当  $k = 1$  时,  $v_t$  与 A 集间有直通边

△ 这概率就是式中的  $D_{ab1} = p_a = 1 - q^a$



≡ 当 A 集中只有一个端  $v_0$  时

△  $v_t$  到  $v_0$  的最短径长为  $k$  的概率就是  $D_{1bk}$

≡ 计算时可从  $D_{ab1}$  开始, 逐一求得  $D_{ab2}, D_{ab3}, \dots; D_{abk}$



## 二 联结图中最短径长的概率分布

≡ 我们通常对联结图的情况感兴趣

△ 所以应当研究在联结图条件下的最短径长的条件概率分布

≡ 考虑：除 $v_t$ 外，有 $n$ 个端联结的随机图

△ 在联结图条件下，从 $v_t$ 到任一端的最短径长为 $k$ 的条件概率是

$$\Delta \quad p(k) = \frac{D_{1,n-1,k}}{C_{1n}} \quad (5-78)$$

△  $C_{1n}$ ：就是前面导出的 $n$ 个端均与 $v_t$ 相联结的概率

△  $D_{1,n-1,k}$ ：是端 $v_t$ 到任一端间最短径长为 $k$ 的概率，

• 其中的1是“任一端”， $n-1$ 中所减去的1也是“任一端”

≡ 联结图的平均径长为：

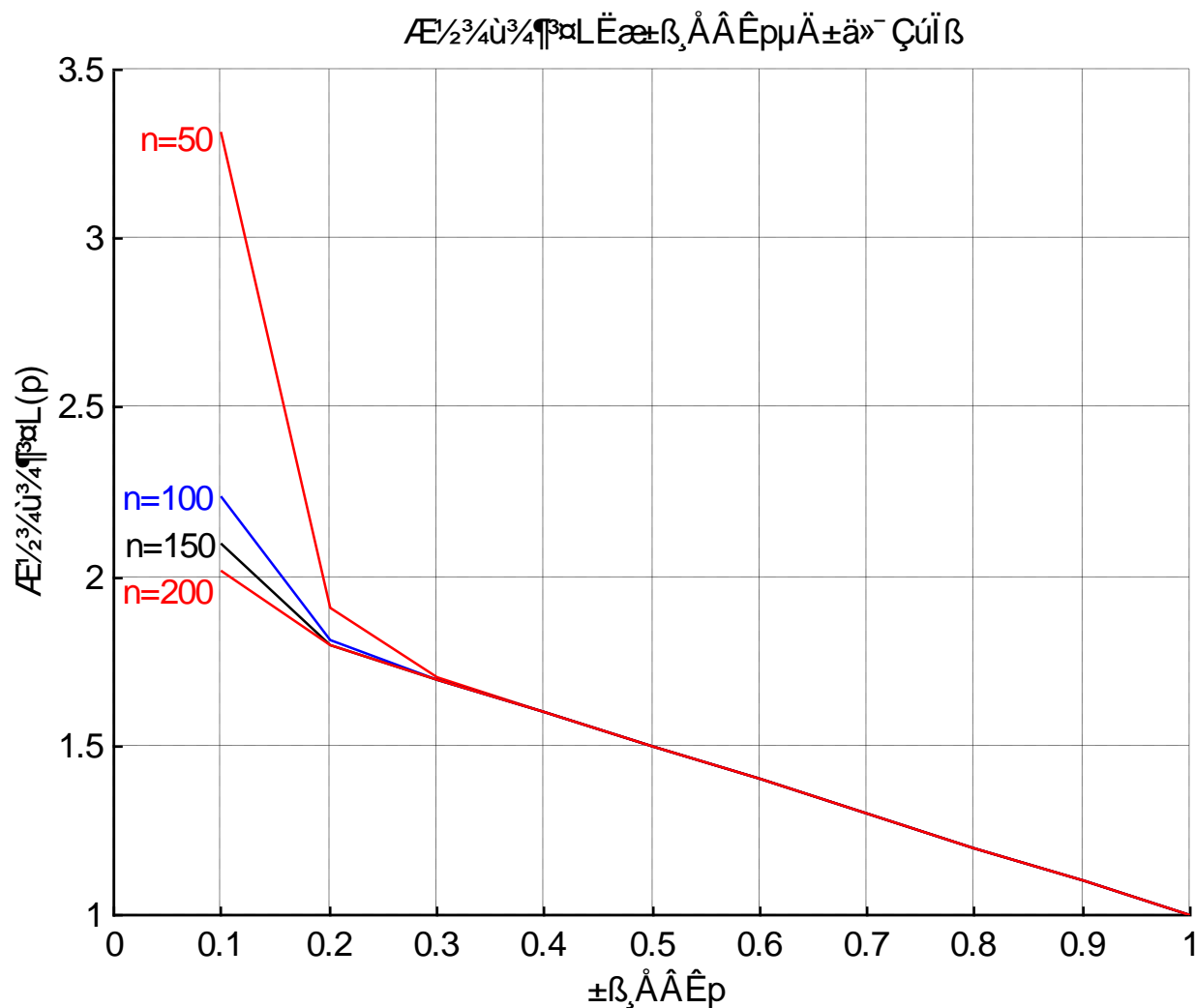
$$\Delta \quad L = \sum_{k=1}^n k \cdot p(k) = \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot D_{1,n-1,k}}{C_{1n}} \quad (5-79)$$

△  $k$ 能取得的最大值为 $n$

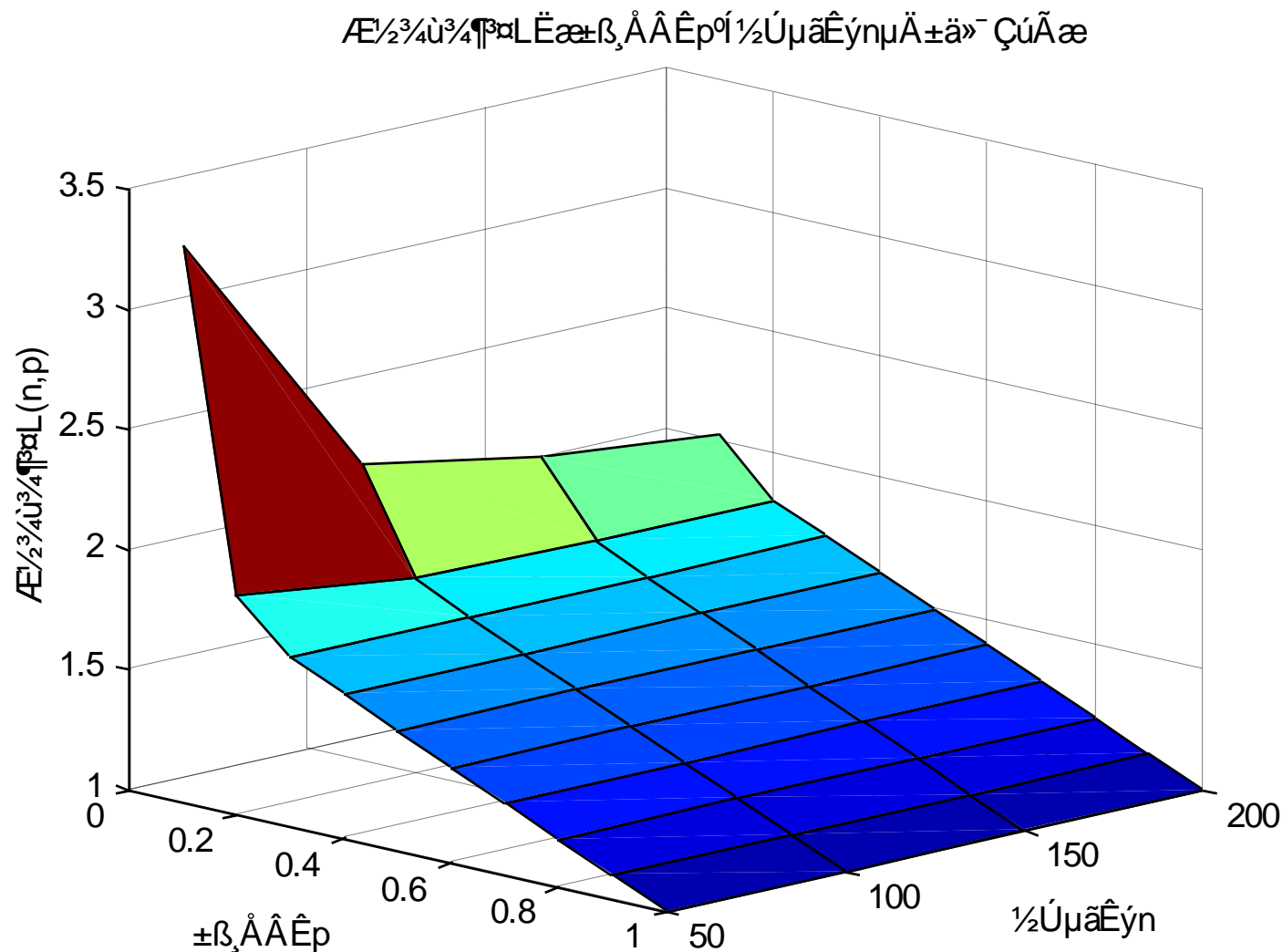
• 因为在 $n+1$ 个端联成线状时，首端和末端间的径长就是 $n$

# — 平均径长L与边存在概率p的关系

≡ 四条曲线分别对应于n = 50, 100, 150, 200



# ≡ 平均径长L与边存在概率p和点数n的关系曲面



# — 平均径长 $L$ 与边存在概率 $p$ 的关系（续）

=  $L$ 与 $p$ 的关系如上页的图所示

≡ 四条曲线分别对应于 $n = 50, 100, 150, 200$

= 随着边存在概率 $p$ 的增大

≡ 平均径长将单调递减，并以1为极限

≡ 这是容易理解的

△ 因为 $p$ 的增加，就是边数和每端度数的增大

△ 两端间可存在多条径，其最短径就会更短些

△ 而当 $p$ 接近1时，意味着任两端间差不多均有边

△ 即已成为全联结网，径长就成为1

≡ 从图中可看到，当 $p$ 大于一定值时，如 $p > 0.2$

△ 平均径长的减小就不明显了

△ 反之，当 $p < 0.1$ 时， $p$ 的减小，使径长显著增加

≡ 这意味着：增加边的投资应适可而止

## 5.5.3 灾害控制

### — 引言

＝在自然灾害和战争的情况下

≡故障会大量发生

△那已经不再是一个端或一条边的损坏问题

≡前面讨论过的关于确定型网络的可靠性计算，基本上已不适用

△所谓的保证网，也已根本无法保证可靠通信

≡但是在灾害发生时，通信往往更为重要

≡所以，通信网的一类十分重要的研究课题就是

△如何估计灾害后网络的可靠性

△如何设计在灾害下仍有一定可靠性的网

≡ 随机网理论在解决这类问题时是很有作为的

≡ 许多结果在灾害控制中有其参考意义，并有一定实用意义

≡ 在这类问题中，

△ 端和边的数目都较大

△ 破坏具有随机性

△ 所以，随机模型对这类问题有一定的适用性

≡ 当然，这样的结果不能认为是很精确的

△ 只能说是一种有效的估计

△ 其实在计算确定型网络时，有许多参数也有其不确定性

• 例如：边的可靠度等

△ 因此计算结果也并不精确，也是一种估计

# — 灾害的数学模型

## = 灾害强度

≡ 单位面积内平均发生的故障数 $\eta$ 称为灾害强度

≡ 它是描述灾害破坏力的一个参数

## = 设灾害带来的故障在某面积内是均匀随机分布的

≡ 而某区域出现一个故障的概率与 $d\eta$ 成正比

≡ 于是端（或局）发生 $k$ 个故障的概率 $f(k, \eta)$ 的方程式为：

$$f(k, \eta + \Delta\eta) = \alpha \cdot \Delta\eta \cdot f(k - 1, \eta) + (1 - \alpha \cdot \Delta\eta) \cdot f(k, \eta)$$

$\Delta \alpha$ : 是比例常数，与端（或局）的区域大小有关

$\Delta \alpha \cdot \Delta\eta$ : 是由于灾害强度增加了 $\Delta\eta$ 而导致一个新故障的概率

$\Delta 1 - \alpha \cdot \Delta\eta$ : 是灾害强度增加 $\Delta\eta$ 而未导致任何故障的概率

$\Delta f(k, \eta + \Delta\eta)$ : 当灾害强度为 $\eta + \Delta\eta$ 时发生 $k$ 个故障的概率

≡ 整理上式：移项，并令  $\Delta\eta \rightarrow 0$

$$\Delta \quad \begin{cases} \frac{df(k, \eta)}{d\eta} = \alpha \cdot f(k-1, \eta) - \alpha f(k, \eta) \quad , & k > 0 \\ \frac{df(0, \eta)}{d\eta} = -\alpha f(0, \eta) \end{cases} \quad (5-80)$$

△ 用递推法可解得：

$$f(k, \eta) = \frac{(\alpha\eta)^k}{k!} \cdot e^{-\alpha\eta} \quad (5-81)$$

△ 其中，使用了起始条件：

- $f(k, 0) = 0$ ， 即：  $\eta = 0$  时， 不出故障
- 亦即出一个或一个以上故障的概率为 0
- $f(0, 0) = 1$ ， 即：  $\eta = 0$  时， 不出故障
- 亦即不出故障的概率为 1

≡ 若边或线路上出现  $k$  个故障的概率为  $g(k, \eta)$

△ 其比例常数为  $\beta$

△ 用同样的假设和推导方法可得：

$$g(k, \eta) = \frac{(\beta\eta)^k}{k!} \cdot e^{-\beta\eta} \quad (5-82)$$



## — 网的耐力 $K_v$ 和 $K_e$

＝要求网在大灾害下有一定的可靠性

≡就必须使线路和局有足够的耐力

≡即每个端不致于出一个故障就不能工作

△线路也是如此

≡亦即每个局内出现 $K_v$ 个以上故障时，才不能工作

△ $K_v$ 越大，其抗灾害的耐力就越大

≡对于边，则用 $K_e$ 来表示耐力

＝提高耐力，就需要有备份，或其它措施

≡实际上是花代价来增加 $K_v$ 和 $K_e$ 值

≡如无特殊措施，则： $K_v = K_e = 1$

= 由此可计算端和边的可靠度及不可靠度

$$\equiv R_v(\eta) = \sum_{k=0}^{k_v-1} f(k, \eta) \quad (5-83-1)$$

$$\equiv F_v(\eta) = \sum_{k=k_v}^{\infty} f(k, \eta) = 1 - R_v(\eta) \quad (5-83-2)$$

$$\equiv R_e(\eta) = \sum_{k=0}^{k_e-1} g(k, \eta) \quad (5-83-3)$$

$$\equiv F_e(\eta) = \sum_{k=k_e}^{\infty} g(k, \eta) = 1 - R_e(\eta) \quad (5-83-4)$$

## — 网的抗灾害性能

= 用图的联结作为可靠集

= 设网有 $n$ 个端

≡ 端间有边的概率为 $p$

≡ 边数近似为: 
$$m = p \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

≡ 通过 $C_{ab}$ 的计算公式可求得 $C_{1n}$

= 若有 $x$ 条边出故障

≡ 则还有 $m - x$ 条边在工作

≡ 相当于边概率为: 
$$p' = \frac{2 \cdot (m - x)}{n \cdot (n-1)}$$

△ 由此可求得相应的联结概率 $C_{1n}'$

≡ 于是残余网的可靠度为：
$$R(x) = \frac{C'_{1n}(p')}{C_{1n}(p)}$$

≡ 设所有边出故障都是相互独立的

△ 每条边出故障的概率是 $F_e(\eta)$ ，如(5-83-4)式所示

△ 则 $x$ 条边出故障的概率是：
$$[F_e(\eta)]^x \cdot [R_e(\eta)]^{m-x}$$

≡ 由此可得到网的可靠度为：

$$\Delta \quad R = \sum_{x=0}^m C_m^x [F_e(\eta)]^x \cdot [R_e(\eta)]^{m-x} \cdot \frac{C'_{1n}(p')}{C_{1n}(p)} \quad (5-84)$$

= 当 $\eta$ 和 $\beta$ 给定时，要达到一定的可靠度 $R$

≡ 就可选择适当的 $p$ 和 $K_e$

≡ 若选用较大的 $p$ 值，即较多的边数 $m$

△ 则边的耐力 $K_e$ 可以小一些

≡ 反之，若选用较小的 $p$ 值，即较少的边数 $m$

△ 则边的耐力 $K_e$ 必须加大

≡ 不论增大 $p$ 还是 $K_e$ ，都要付出较大的代价

△ 尤其是 $\eta$ 较大时

= 以上只考虑了边故障的情况

≡ 端故障的情况以及端和边都有故障的情况也可同样处理

≡ 但应注意

△ 当端出故障时，关联的边虽无故障也等于失效，必须计入

△ 另外，与每个端关联的边数平均为 $d = 2m/n$ ，这样算的结果是比较保守的

## — 另一种随机图模型

— 在大灾害下要保证存留下来的端都联结

≡ 所付出的代价将是巨大的，通常也是不现实的

≡ 为此我们可选用比较易于实现的可靠集

△ 例如：有一定数量的端仍联结，就认为已有一定的可靠性

≡ 于是我们引入另一种随机图模型

### — 定边数模型

≡ 假设已给定端数 $n$ 和边数 $m$

△ 每条边接在哪两端之间是纯随机的

△ 即一条边的一个端是 $v_D$ ，另一端是 $v_i$ 的概率是 $1/(n-1)$

△ 即接到哪一个端是等概率的

△ 各边的接法是相互独立的

≡ 比较

△ 在吉尔伯特模型中，是给定端数 $n$ 和边概率 $p$

△ 边数 $m$ 是随机量，其平均值为 $pn(n-1)/2$

≡ 用此模型来分析灾害发生后仍有 $n\delta$ 个端相联结的概率

≡  $\delta$ 是残余的联结端与原有端数之比

≡ 当灾害发生后，从残存的端中任选一个，如 $v_0$ ，作端集 $S_0 = \{v_0\}$

△ 寻找与 $S_0$ 邻接的端集 $S_1$ :  $S_1 = \{v_i: v_0 \text{ 与 } v_i \text{ 间有边}\}$

△ 再找与 $S_1$ 邻接的端集 $S_2$ :

•  $S_2 = \{v_j: v_i \in S_1, v_j \text{ 与 } v_i \text{ 间有边}, v_j \notin S_0 \cup S_1\}$

△ 如此下去，直到 $S_a$ 为止

△ 此后，再已无新的可用端与 $S_a$ 邻接，或 $S_{a+1}$ 为空集

≡ 这样就已知了能与 $v_0$ 联结的端集（包括 $v_0$ ）为：

$$S = \bigcup_{i=0}^a S_i$$

≡ 则残余的能相互联结的端数就是S集的元素数  $|S|$

△ 对于确定型的图，这个  $|S|$  将与  $v_0$  的选择有关

- 即应当选择使  $|S|$  取得最大的那个  $v_0$

△ 但在随机图中，由于  $v_0$  也是随机的

- 所以，  $|S|$  就可作为能联结的端数，即  $\delta_n$



## — 本章结束语

= 可靠性是个广义的概念

≡ 这里只讨论了物理性故障和网络资源不足而引起性能下降所造成的失效

≡ 这里没有研究安全通信问题

= 在某些情况下，通信网的保密性也被认为是可靠通信的一部分内容

≡ (本章结束)