通信网理论基础

第四章　　网内业务分析

第二节　通信网的业务模型与分析

北京邮电大学　　信息与通信工程学院
授课教师：武穆清
电子信箱：wumuqing@bupt.edu.cn
实验室主页：www.bupt-bcnl.cn

本章内容

4.1 排队论基础
4.2 通信网的业务模型与分析
4.3 提高网络效率的一些措施
4.4 多址接入系统

4.2 通信网的业务模型与分析

4.2.1. 各种测度和指标

– 业务量（话务量）

= 定义：在指定时间内，线路被占用的总时间

= 例：

≡ 若某线路有m条信道

≡ 在观察时间T内

Δ 第r条信道被占用 Qr 秒

≡ 则该线路上（m条信道上）的业务量（话务量）为：

$$Q = \sum_{r=1}^{m} Qr$$

≡业务量的另一种表达形式为:

$$Q = Q(t,T) = \int_{t}^{t+T} R(t)dt$$

∆其中，R(t)是在时刻t被占用的信道数

∆ T是观察时间

∆R(t)是时刻 t 的一个随机变量

∆Q是R(t)在t 到t + T内的累计值，也是一个随机变量

∆并且是起始时刻t 和观察时间T的函数

- 量纲
  - 业务量的量纲是时间
  - 例：若一个信道代表一个电话话路
    - 则业务量（话务量）的单位是：秒 话路、秒 呼
    - 小时 话路、小时 呼
      天 话路
- 业务量的另几种表达式
  - $$Q = \lambda \bar{t} T$$
    - λ ：呼叫强度，即单位时间内到达到呼叫数
      单位：呼/小时
    - $\bar{t}$ ：每一呼叫平均占用时长，单位：分钟
    - T ：观察时间，单位：分钟
    - Q ：业务量，　单位：分钟 呼

≡ $$Q = \sum_i C_i t_i = \sum_i t_i$$

Δ $C_i = \begin{cases} 1 & \text{当第 i个呼叫进入时} \\ 0 & \text{当第 i个呼叫离开时} \end{cases}$

Δ t_i ：第*i*个呼叫占用的时长

≡ $$Q = C\bar{t}$$

$$C = \sum_i C_i$$

Δ C ：在观察时间T内到达的呼叫次数

Δ $\bar{t}$ ：每一呼叫平均占用时长，单位：小时

= 业务量三要素

≡时间范围

≡呼叫强度

≡呼叫占用时长

– 业务强度（话务量强度）（呼叫量）
  - 定义
    - 线路占用时间与观察时间之比
    - 业务强度 $a = \dfrac{\text{业务量}}{\text{观察时间}} = \dfrac{Q}{T}$ （爱尔朗Erlang ）
    - 亦即：线路占用率，在观察时间T内，线路被占用的百分比
  - 量纲
    - 业务强度：无量纲
    - 业务强度的单位是：爱尔朗Erlang

- 一些结论
  - 具有m条信道的线路中，实际能承载的业务强度不大于m
  - 若用户发出的实际业务强度超过此限制
    - 则肯定有些呼叫被拒绝
  - 实际上，即使业务强度小于m，有时也可能有呼叫被拒绝

- 业务强度（话务量强度）的另外几种表达式
  - $$a = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} R(t)dt$$
  - $$a = \frac{Q}{T} = \lambda \bar{t}$$
    - 单位时间内的话务量

– 与排队论中的参数相对应

= 信道数m相当于服务窗口数

= 单位时间内平均呼叫数相当于顾客到达率 λ

= 每次呼叫占用线路的平均时间相当于平均服务时间 $\frac{1}{\mu}$

≡ 所以，业务量强度 $a = \lambda \bar{t} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$

= 当业务量强度 $a \geq m$ 时

≡相当于:

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} \geq 1$$

≡此时不拒绝系统将是不稳定的

≡对于拒绝系统，当然还是稳定的

Δ 只是有拒绝现象而已

- 纯随机呼叫
  - 用户数为无限多
  - 用户间相互独立
  - 若每个用户的呼叫率为 λ_0，而且趋于零

    - 则总呼叫率为: $\lambda = \lim\limits_{N\to\infty} N\lambda_0$

    - N为用户数

    - 此时，Δt 内出现一个呼叫的概率为:

$$\lambda \cdot \Delta t$$

- 准随机呼叫
  - 在实际通信网中，不存在严格的纯随机呼叫
    - 因为，用户数总是有限的
  - 设用户数N为有限值，用户间相互独立
    - λ_0 ：单位时间内每用户平均呼叫次数
    - γ ：已被接受服务的用户数
    - 则呼叫到达率为：$(N-\gamma)\cdot\lambda_0$
    - 此时，在Δt内到达一个呼叫的概率为：

$$(N-\gamma)\cdot\lambda_0\cdot\Delta t$$

  - 当N较大时，准随机呼叫可近似地作为纯随机呼叫处理
    - N愈大，这种近似愈合理

- 拒绝系统
  - 重复呼叫
    - 若用户的某次呼叫被拒绝
    - 则该用户通常会继续呼叫，甚至连续呼叫
    - 称之为重复呼叫
  - 重复呼叫增加了原有呼叫的复杂性
    - 在用户足够多的情况下，且重复呼叫不严重时
    - 可以将重复呼叫视为新的用户呼叫
    - 仍作为纯随机呼叫处理
    - 只是增加了呼叫率
    - 拒绝越多，重复呼叫越频繁，增加也越甚
    - （纯随机模型也将越不切合实际）
    - 也就越偏离纯随机模型

– 阻塞率和呼损

  = 截止型排队系统

    ≡ 实际的通信网及其子系统中

      Δ 为了工作的稳定，多采用截止型排队系统

    ≡ 截止型排队系统会导致阻塞和呼损

      Δ 系统处于拒绝状态时，系统是阻塞的

      Δ 从用户的角度看，如果再有呼叫到达，就将产生呼损

      Δ 阻塞率和呼损都是指拒绝状态占全部状态的百分比

- 阻塞率
  - 时间阻塞率
    - 总观察时间内，阻塞时间所占的百分比:

$$TC = p_N = \frac{\text{阻塞时间}}{\text{总观察时间}}$$

    - TC：Time Congestion
    - 时间阻塞率p_N就是排队论中截止队长为N时的概率
    - 也就是系统处于N状态的时间占总时间的百分比
    - 或者说，系统队列已满，不允许再排入的状态的时间占总时间的百分比

≡呼叫阻塞率（呼损）

Δ被拒绝的呼叫次数占总呼叫次数的百分比

$$CC = p_c = \frac{\text{被拒绝的呼叫次数}}{\text{总呼叫次数}}$$

Δ**CC：Call Congestion**

Δ呼损：呼叫损失率，就是指的这个呼叫阻塞率

≡辨异

Δp_N相当于在随机（任意）时刻观察系统处于状态**N**的概率

Δp_c相当于在顾客到达时刻系统处于状态**N**的概率

Δ一般来说，由于阻塞期间可能没有顾客到达

Δ所以：$p_c \le p_n$

Δ纯随机呼叫情况下，顾客以泊松流到达，则有

$$p_c = p_n$$

= 呼损与转接次数的关系

≡转接次数越多，呼损越大

≡设网内的源宿端间，某有向径上，有 γ 条边

Δ各边上的呼损为： p_{ci} $\quad (i=1,2,\cdots\gamma)$

Δ则该径上源宿端间的呼损为：

$$p_c = 1 - \prod_{i=1}^{\gamma}(1 - p_{ci})$$

- 时延
  - 时延是通信网中的另一重要指标
  - 时延是指消息进入通信网后，直到利用完网络资源所需的时间
    - 包括：等待时间、服务时间、传输时延、处理时间
  - 传输时延：
    - 在电信网中，传输时延一般是较小的
    - 只有在卫星电路中，会带来较大的传输时延

- 处理时延:
  - 与消息的内容有关，一般可从技术上缩短处理时间
  - 这部分时间往往是恒定的。
- 等待时间:
  - 在延迟拒绝系统中，延迟主要来自等待时间
  - 如数据传输系统和计算机通信系统等非实时性业务
    - 通常采用这种方式
    - 只要节点的存储量足够大，几乎可以做到不拒绝
    - 即近似于非截止型的排队系统
  - 对于实时业务，如电话业务，通常采用即时拒绝方式
    - 则等待时间几乎为零，但呼损就会出现较多
    - 为了减少呼损，电话业务也可采用延迟拒绝方式
    - 当前电话网中采用“呼叫等待”的补充业务来实现延迟拒绝
    - 不过，一旦接通，则电话业务不再容许大的延迟
    - 所以，在实时业务中，时延就不包括服务时间
- 可见，不同的业务，对时延的要求是不同的

– 通过量和信道利用率

- 在所有的呼叫中，
  - 有一部分是被拒绝的，
  - 另一部分是实际通过网络的
- 通过量
  - 单位时间内通过网络的业务量称为通过量
  - $T_r = a(1-p_c)$ 爱尔朗

    Δ$\boldsymbol{a}$：业务量强度，即 λ/μ

    Δ$\boldsymbol{p_c}$：呼损
  - 有时，也用单位时间内通过网络的呼叫次数作为通过量 T_r
  - $T_r' = \lambda(1-p_c)$ （呼/秒）
  - 通常使用前者

- 信道利用率
  - 若线路的容量为***Cr***
  - 则 $\eta = \dfrac{T_r}{C_r}$
  - 例:
    - Δ若某条线路可通***m***路电话，其容量为***m***爱尔朗
    - Δ则信道利用率相当于排队模型中的窗口占用率或系统效率
    - Δ即: $\eta = \dfrac{a(1-p_n)}{m}$ 来自于 **M/M/*m*(*n*)** 的公式
    - Δ这与上面的定义是完全一致的

- 全网通过量和全网效率
  - 若通信网中有M条边，相当于M条线路
  - 全网通过量
    - 是从各端进入网内，且能到达宿端的业务量
    - 即：$$T=\sum_{r=1}^{n} a_r(1-p_c)$$
    - a_r ： 是从第 r 端进入网络的业务量强度
    - p_c ： 是这些业务量强度在网中被阻塞的百分比
  - 全网效率
    - 是各线路的通过量T_r之和与各线路的容量之和的比值
    - $$\eta=\frac{\sum_{r=1}^{M} T_r}{\sum_{r=1}^{M} C_r}$$
    - 注意：各线路的通过量之和 $\sum_{r=1}^{M} T_r$ 并不是全网通过量
    - 因为有些信息流要经过几条边才能从源端到达宿端

4.2.2. 业务分析举例

– 用排队论分析通信网中业务问题的步骤
  – 先确定模型
    – 常用的模型有
      – M / M / c（n）
      – M / D / 1
      – M / Er / 1
  – 第二步是定义状态变量
    – 这关系到求解的难易程度
      – 选择状态变量要便于计算
      – 并使结果具有可用性
      – 有些情况下，还要选用多维的变量
      – 维数越多，计算就越复杂

- 常用的状态变量有
  - 队列长度
  - 占用线数
- 通信网中的业务分析一般只限于稳态
  - 很少涉及暂态
  - 暂态也不易得到简洁的结果

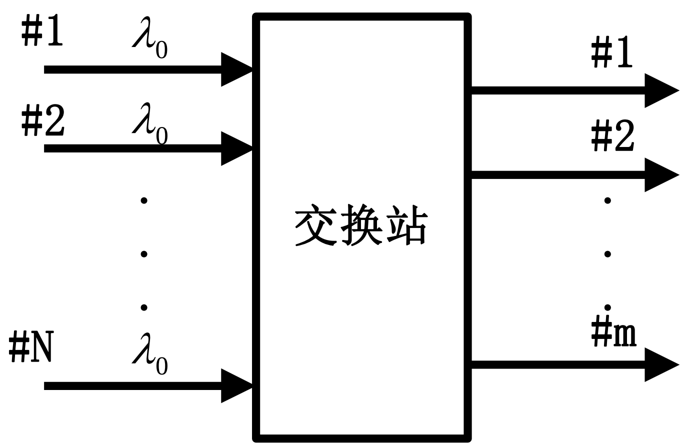
- 第三步是列出状态方程
  - 对于**M / M**问题
    - 可先画出状态转移图
    - 列出稳态方程:

      进入某状态的概率 = 离开该状态的概率

- 第四步是求解状态方程
  - 并计算所需的目标参量
  - 计算网络的质量指标和性能指标

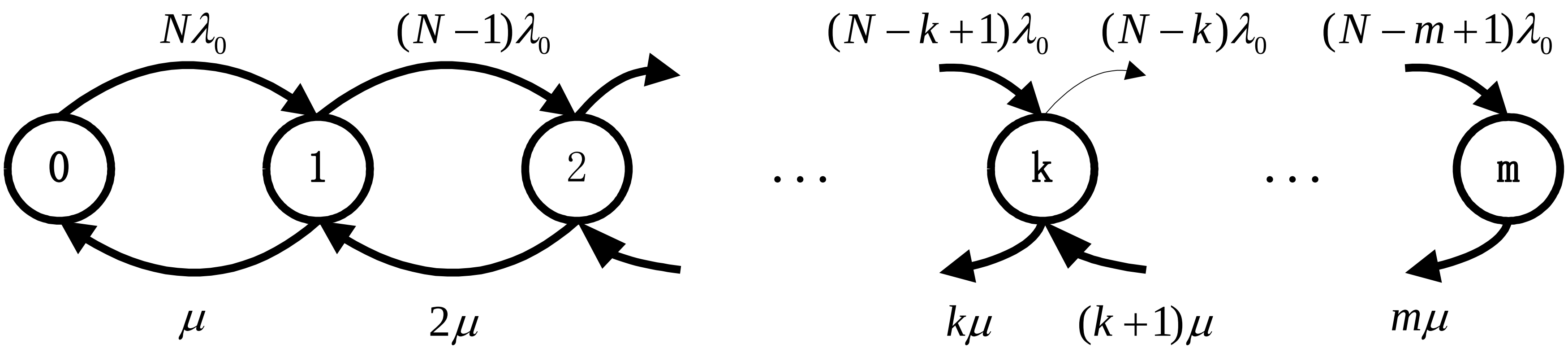
– 例1：有限用户即时拒绝系统的分析

- 交换站有N个用户
  - 每个用户的呼叫率为 λ_0
  - 有m条中继线
  - 用户占线时间服从均值为 $\frac{1}{\mu}$ 的负指数分布
  - 截止队长 $n = m$
  - 若用户之间相互独立
    - 则总呼叫率为 $N\lambda_0$



- 电路交换的电话系统属于此类服务系统
  - 相当于 **M / M / *m* / *n* (= *m*) / *N* / FCFS**

- 选用占线数 k 作为状态变量
- 状态转移关系
  - 状态转移图:



  - 根据状态转移图列出系统方程:

$$\begin{cases} [(N-k)\lambda_0 + k\mu]p_k = (N-k+1)\lambda_0 p_{k-1} + (k+1)\mu \cdot p_{k+1} \qquad (0<k<m) \text{ 即}m-1\text{个方程} \\ N\lambda_0 p_0 = \mu \cdot p_1 \\ m\mu \ p_m = (N-m+1)\lambda_0 p_{m-1} \end{cases}$$

  - 归一条件: $\sum_{r=0}^{m} p_r = 1$

求解方程组

- 令 $\rho = \dfrac{\lambda_0}{\mu}$ ，用递推法可解出:

$$p_1 = N\rho \cdot p_0 = C_N^1 \rho \cdot p_0$$

$$p_2 = \frac{[(N-1)\rho + 1]p_1 - N\rho \cdot p_0}{2} = C_N^2 \rho^2 p_0$$

- 通解为: $p_k = C_N^k \rho^k p_0$

- 利用归一条件，可解出:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m} C_N^k \rho^k}$$

≡ 时间阻塞率 或 拒绝概率 为

$$\Delta \qquad p_m = C_N^m \rho^m p_0 = \frac{C_N^m \rho^m}{\sum_{r=0}^{m} C_N^r \rho^r}$$

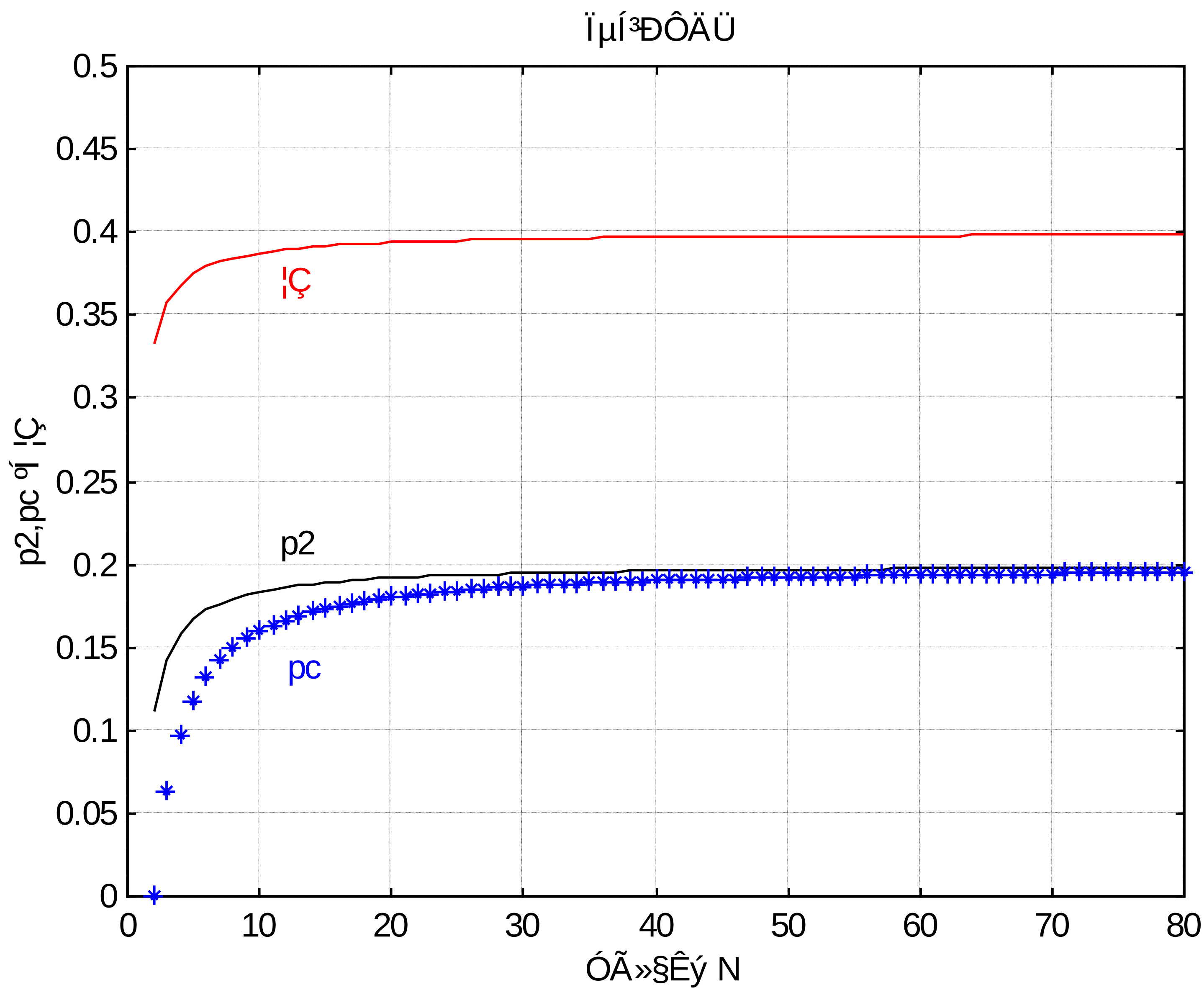
≡ 呼叫阻塞率 或 呼损 为

$$\Delta \qquad p_c = \frac{(N-m)\lambda_0 p_m}{\sum_{r=0}^{m}(N-r)\lambda_0 p_r} = \frac{C_{N-1}^m \rho^m}{\sum_{r=0}^{m} C_{N-1}^r \rho^r}$$

≡ 线路利用率

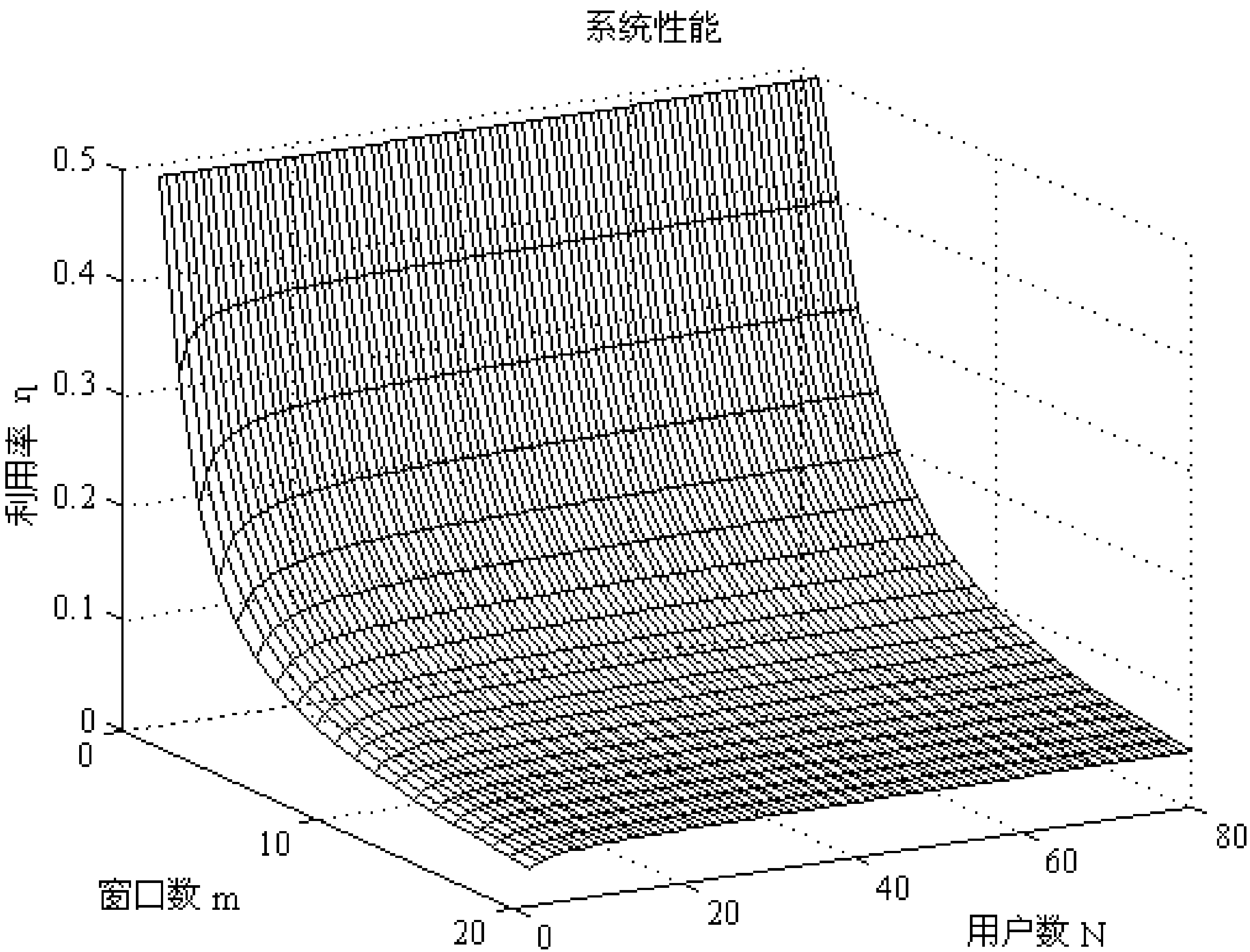
$$\Delta \qquad \eta = \sum_{k=0}^{m} \frac{k}{m} p_k = \frac{p_0}{m} \sum_{k=0}^{m} C_N^k k \rho^k = \frac{N\rho}{m} \cdot \frac{\sum_{k=0}^{m-1} C_{N-1}^k \rho^k}{\sum_{k=0}^{m} C_N^k \rho^k}$$

≡现以m=2、$N\rho=1$ 为例作数值计算p_2、p_c、η



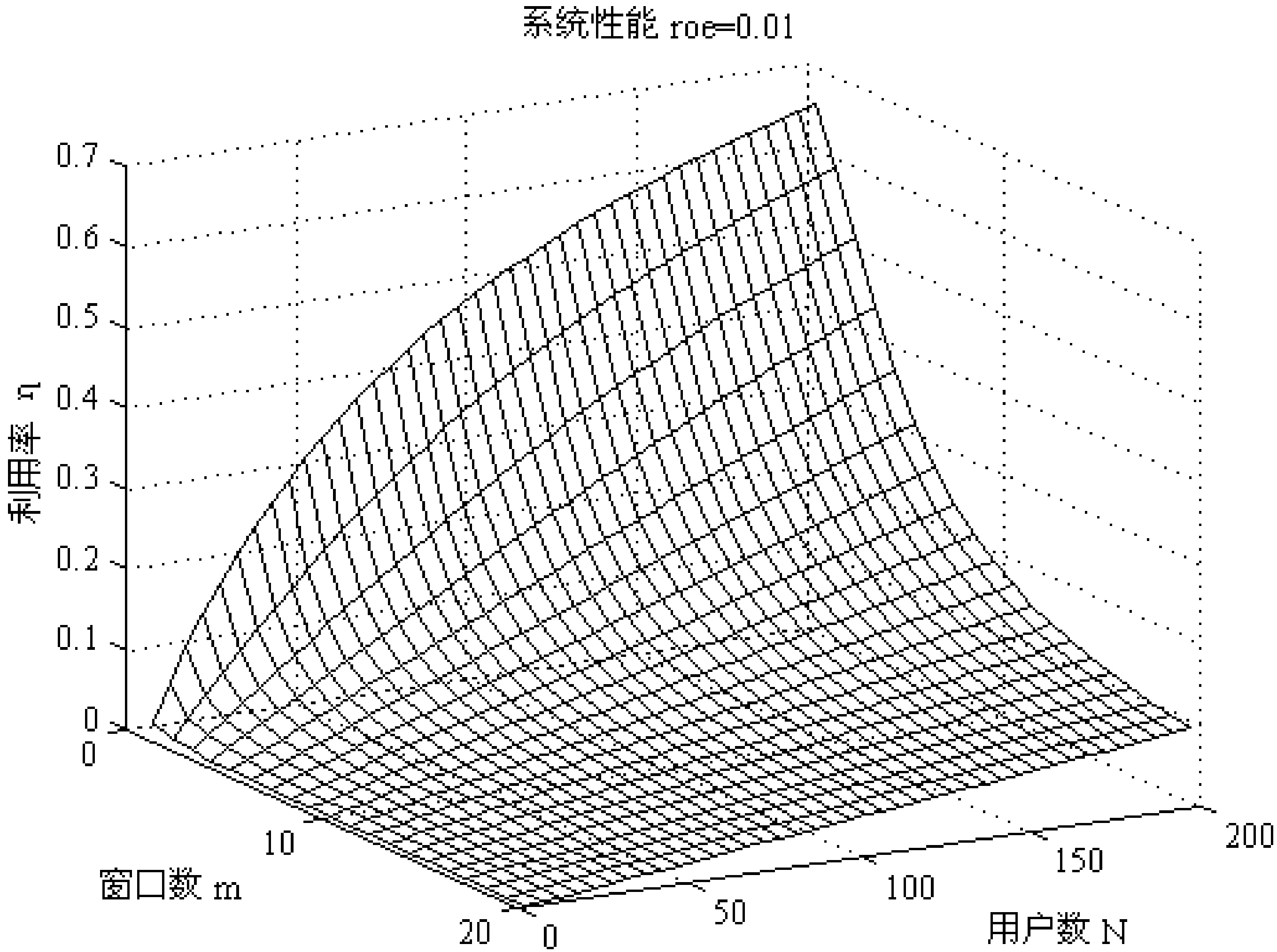
≡现以m=1~20，N=2~80, $N\rho=1$ 为例

Δ作利用率 η 的数值计算:



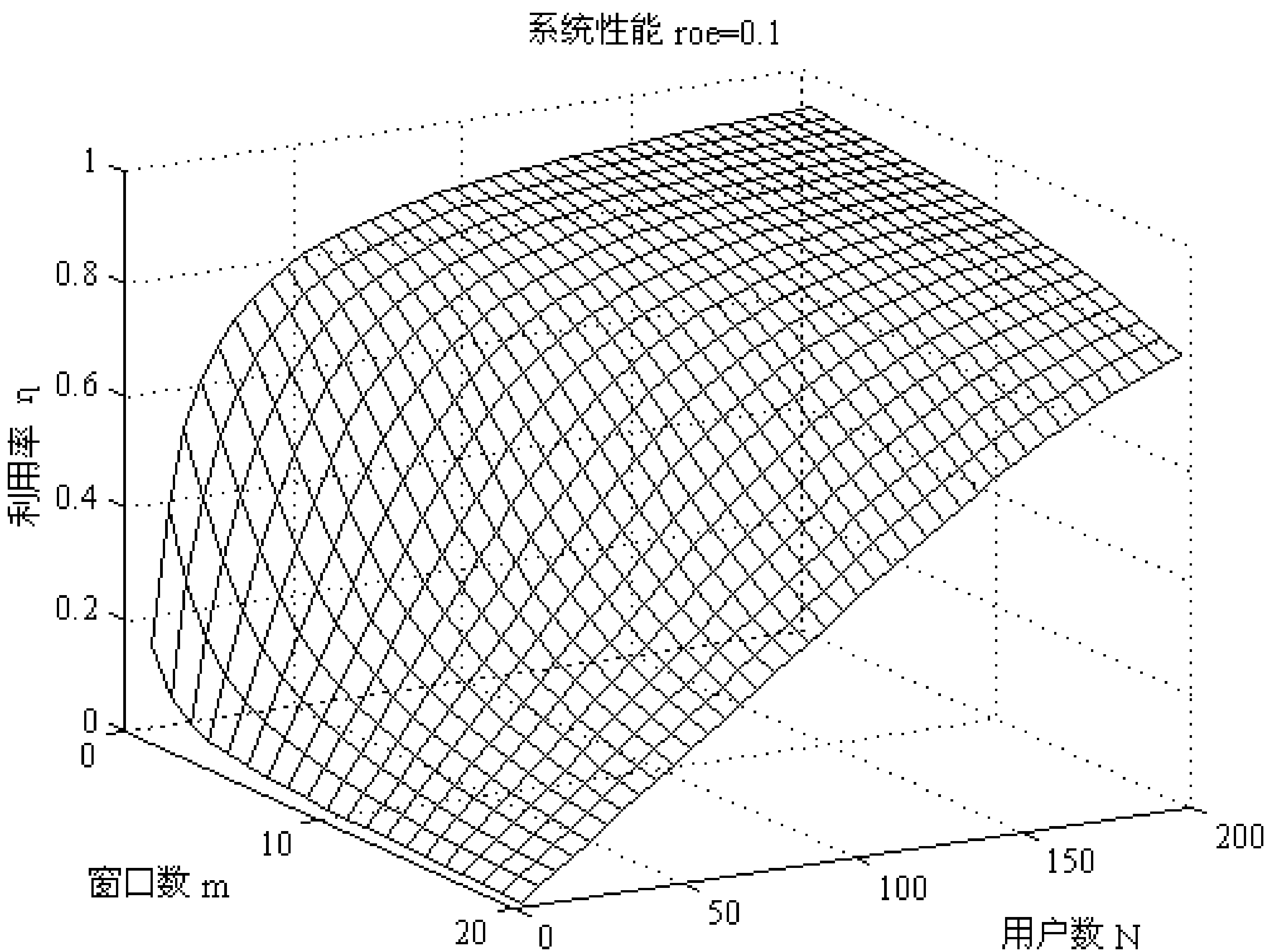
≡现以m=1~20，N=2~200，$\rho=0.01$ 为例

Δ作利用率 η 的数值计算:



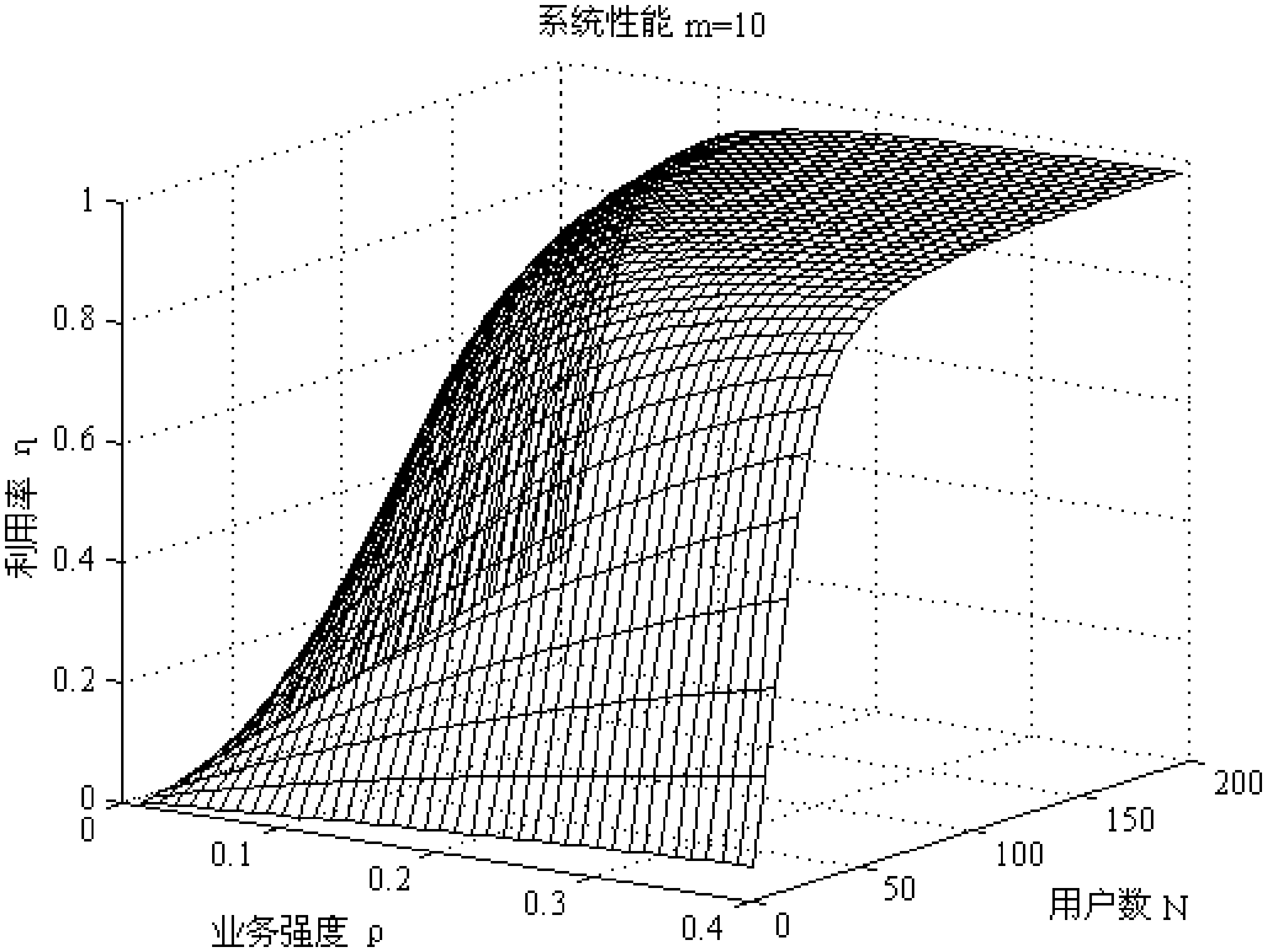
≡现以m=1~20，N=2~200，$\rho = 0.1$ 为例

Δ作利用率 η 的数值计算：



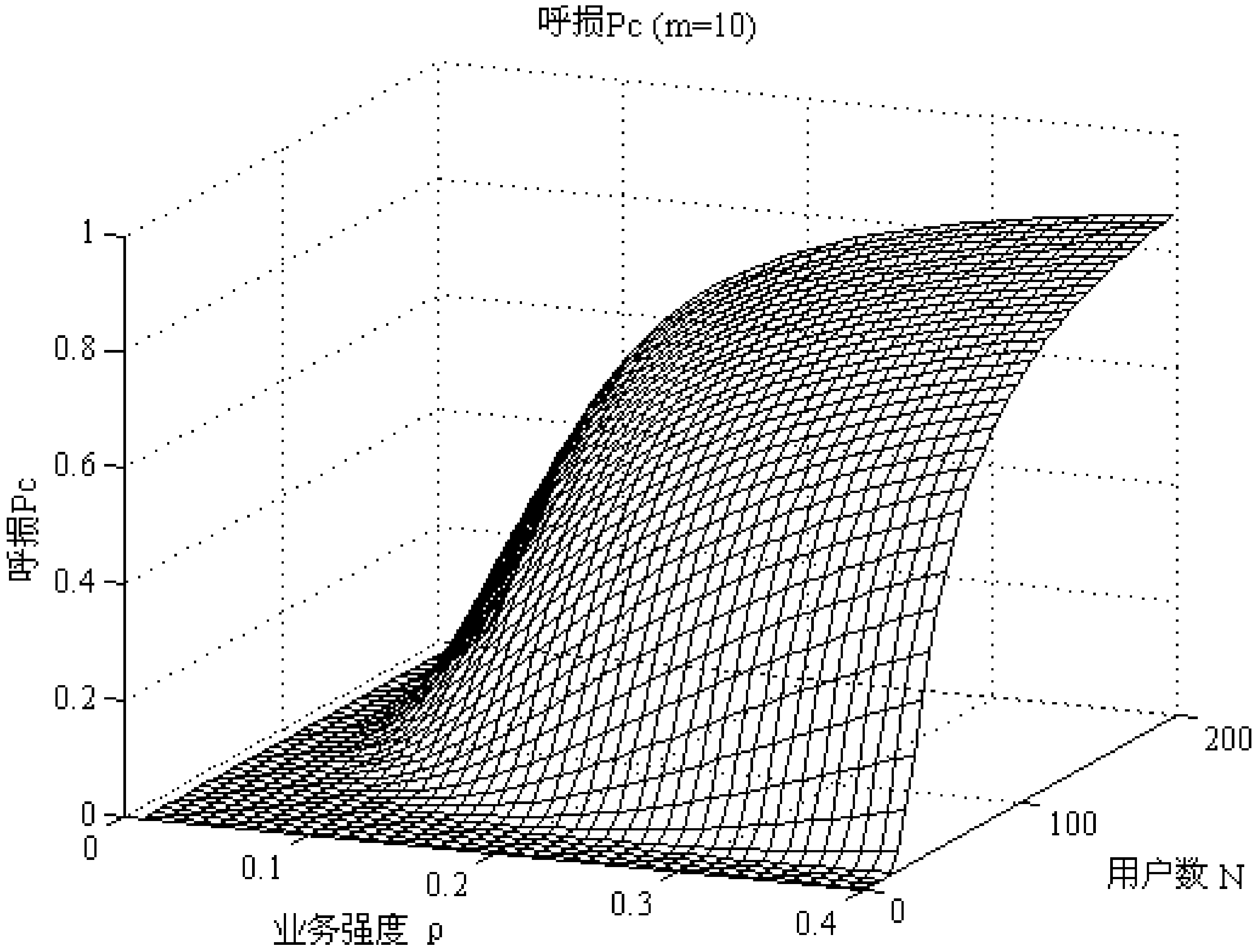
≡现以m=10，N=2~200, ρ =0.01~0.4 为例

Δ作利用率 η 的数值计算:



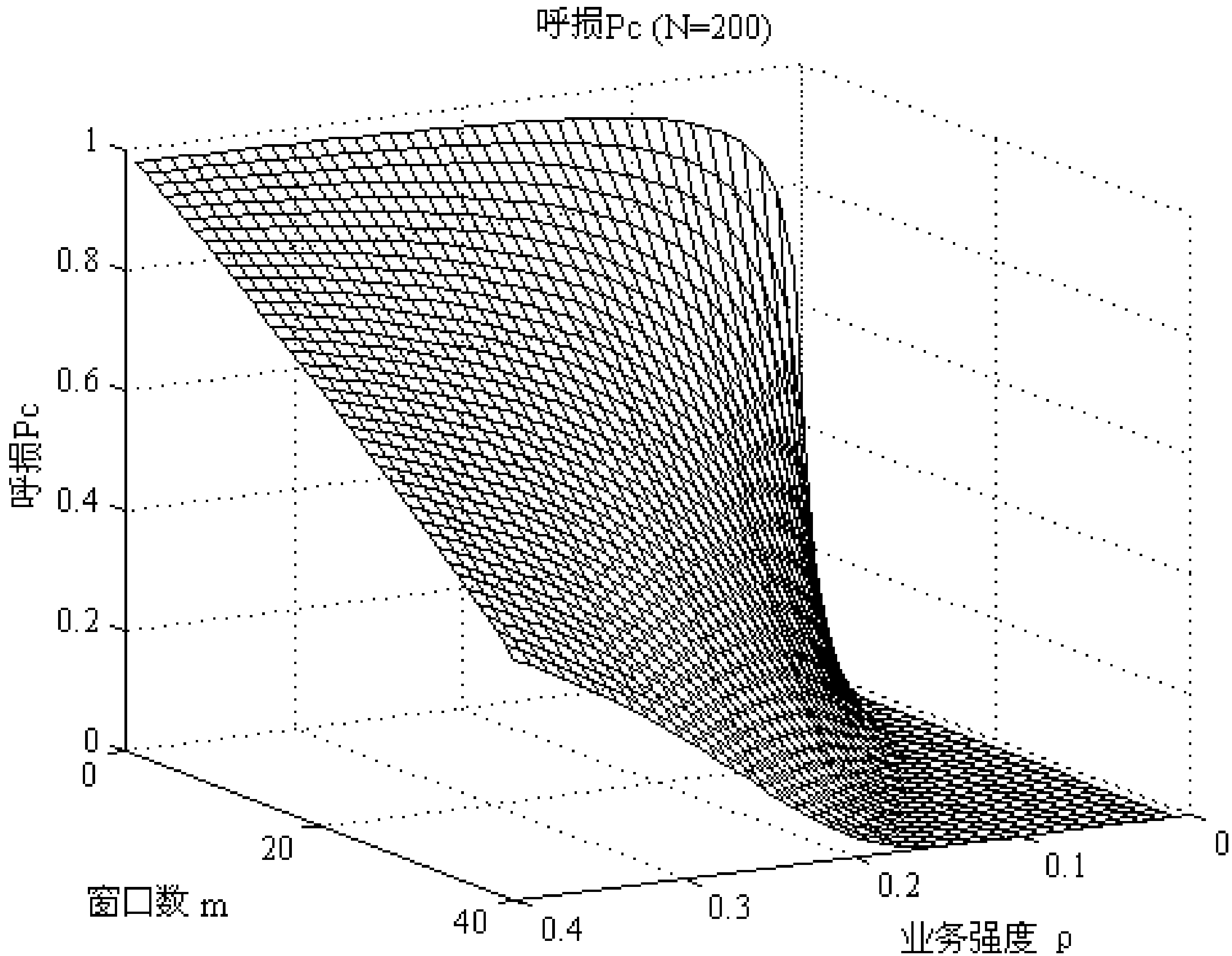
≡现以m=10，N=2~200, ρ =0.01~0.4 为例

Δ作呼损 p_c 的数值计算:

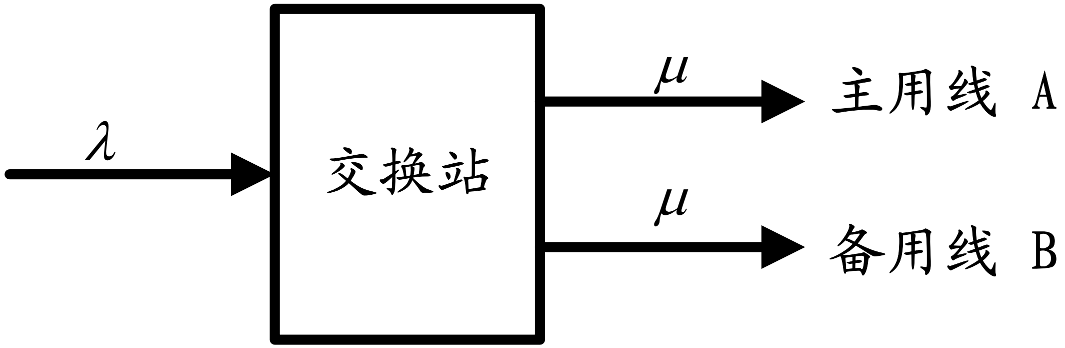


≡现以m=1~40，N=200, ρ=0.01~0.4为例

Δ作呼损 p_c 的数值计算:

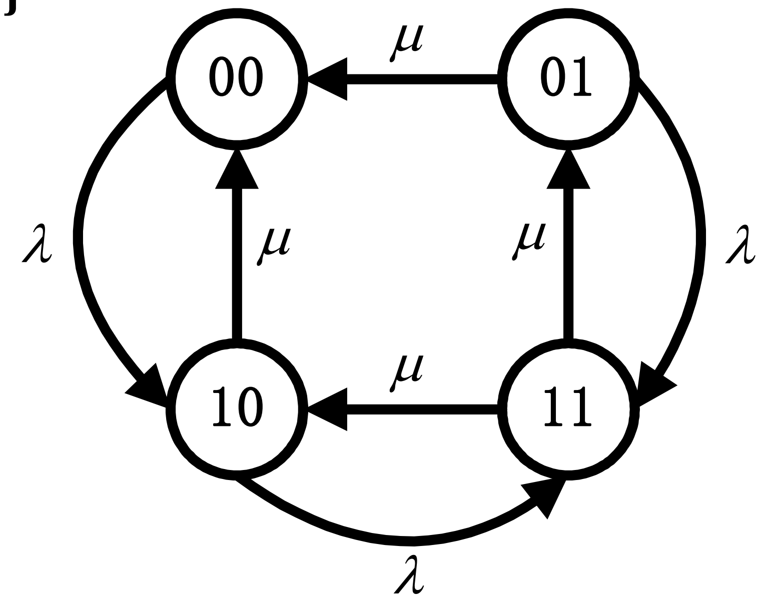


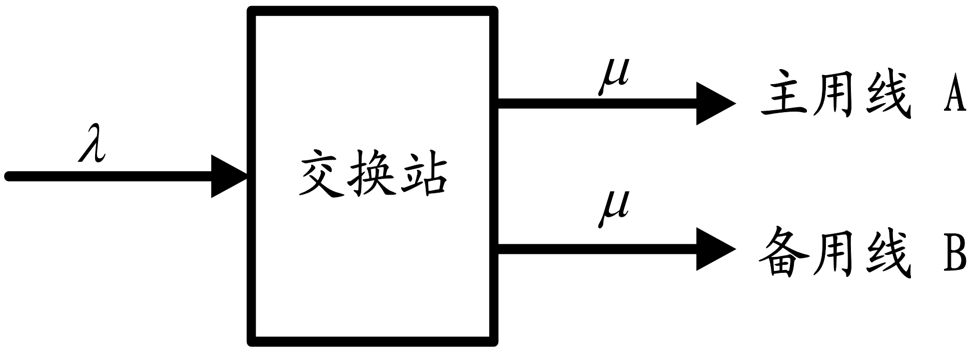
- 例2：主备线即时拒绝系统
  - 交换站有两种输出线
    - A是主用线
    - B是备用线
      - 当A线被占用时，再有呼叫到来就占用B线来传输
    - 当两条线路都忙时，新呼叫则损失
    - 模型：



      - 到达率：服从均值为 λ 的负指数分布
      - 服务率：服从均值为 μ 的负指数分布
      - 这不是一个标准的M/M/2，因为两个窗口之间有优先级

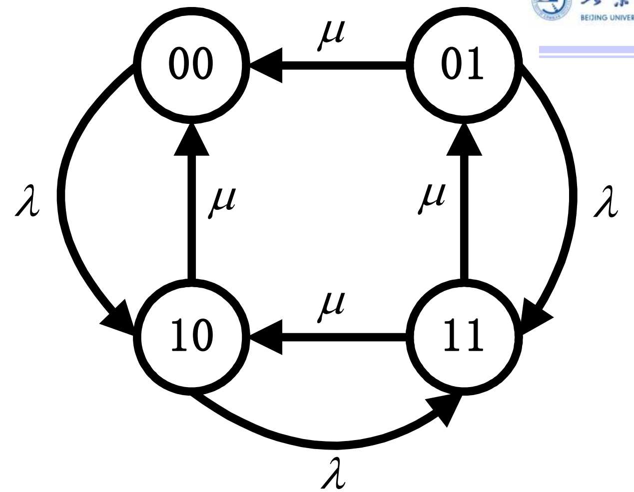
- 选择状态变量
  - 此处，一个状态变量已不能表达系统的状态
  - 令二维矢量（x，y）为系统状态
    - x：表示主用线A的状态
    - y：表示备用线B的状态
    - 0：表示“空闲”
    - 1：表示“占线”
  - 状态集为：{ 00，01，10，11}
- 系统的状态转移图为：





稳态的状态方程

- $$\begin{cases} \lambda p_{00} = \mu(p_{01} + p_{10}) \\ (\lambda + \mu) p_{01} = \mu \cdot p_{11} \\ 2\mu \cdot p_{11} = \lambda(p_{01} + p_{10}) \end{cases}$$



- 以上四个方程中，只有三个是独立的
- 所以需附加概率归一条件:

$$p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1$$

求解方程组

- 设: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$
- 解得:
  - $p_{00} = \dfrac{2}{2 + 2\rho + \rho^2}$ $\qquad$ $p_{10} = \dfrac{\rho(2+\rho)}{(1+\rho)(2+2\rho+\rho^2)}$
  - $p_{01} = \dfrac{\rho^2}{(1+\rho)(2+2\rho+\rho^2)}$ $\qquad$ $p_{11} = \dfrac{\rho^2}{2 + 2\rho + \rho^2}$

- P_{10}：是主用线A的阻塞概率
- P_{01}：是备用线B的阻塞概率
- P_{11}：是系统的阻塞概率，也就是呼损
- 系统的线路利用率为：

$$\eta = \frac{1}{2}(p_{01} + p_{10}) + p_{11} = \frac{\rho(1+\rho)}{2+2\rho+\rho^2}$$

$$= 50\% \cdot (p_{01} + p_{10}) + 100\% p_{11}$$

- 若系统中的A线和B线不分主备
  - Δ 则成为标准的M/M/2(2) 问题
  - Δ M/M/2(2)中的P_0对应于该系统中的P_{00}
  - Δ P_1等于$P_{10} + P_{01}$
  - Δ P_2等于P_{11}，即呼损
  - Δ 线路利用率与本系统一致
  - Δ 可见，在本例的条件下，若不分主备，系统的性能并无变化
  - Δ 但是，若备用线可以另作它用，则情况就不同了
  - Δ 请见下例

– 例3：公用备线即时拒绝系统

= 两个业务流分别送到系统的A和B两个处理单元

≡ 两个输入可认为是两组独立用户

Δ 也可以认为是两种不同性质的业务

≡ 系统有三个输出

Δ A线和B线为各自的专用线

Δ C线为共用的备用线，可接受A、B两种业务

Δ 当专用线忙时，都可使用C线

≡ 假设：指数分布的情况

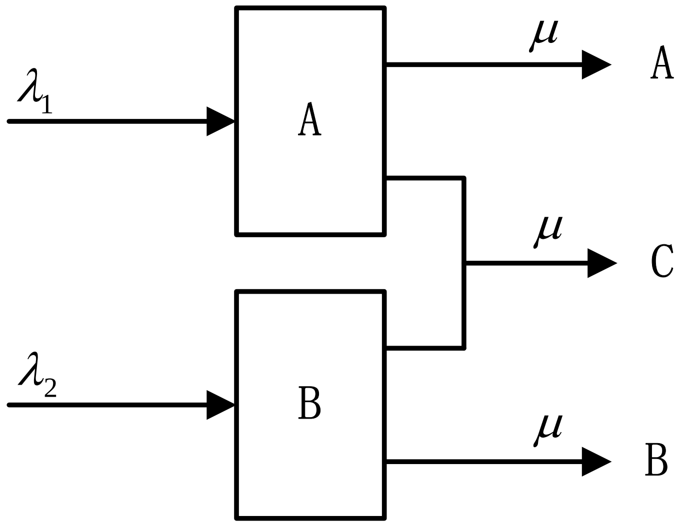
Δ 两个到达率分别为 λ_1 和 λ_2

Δ 三线的服务率均为 μ

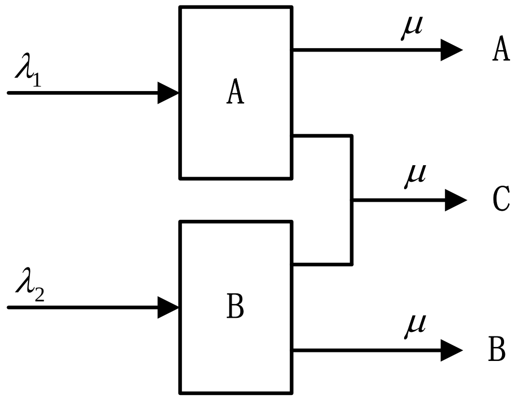
≡ 这是一种三窗口的排队系统

Δ 但不是标准的

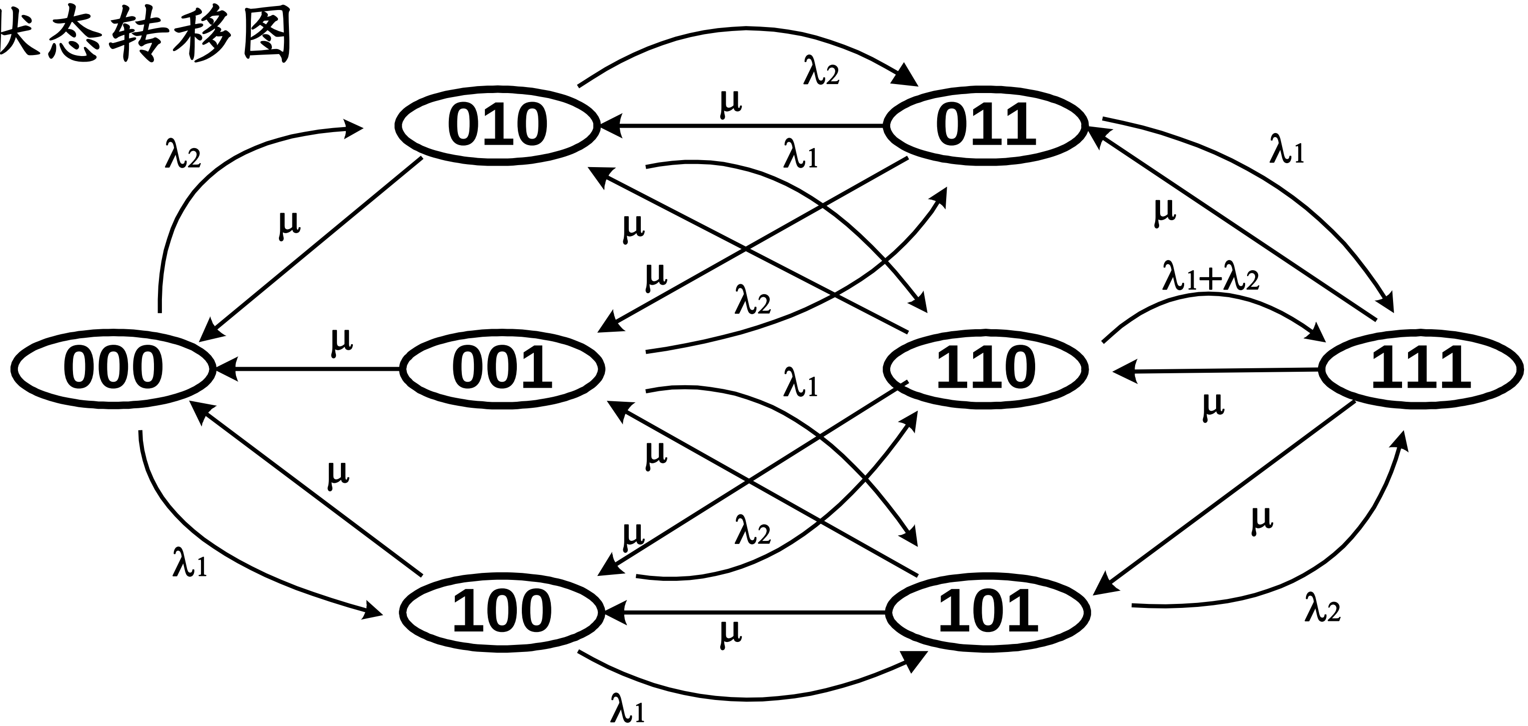
Δ 无法使用前面的公式



- 选择状态变量
  - 取（x，y，z）作为系统的状态变量
    - x，y，z分别表示A、B、C三线的忙闲
    - 以“1”代表占用
    - 以“0”代表空闲
  - 对于即时拒绝系统，状态矢量集为：
    - {000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111}



- 状态转移图



= 稳态的状态方程

$$(\lambda_1+\lambda_2)p_{000}=\mu(p_{010}+p_{001}+p_{100})$$

$$(\lambda_1+\lambda_2+\mu)p_{001}=\mu(p_{011}+p_{101})$$

$$(\lambda_1+\lambda_2+\mu)p_{010}=\lambda_2 p_{000}+\mu(p_{011}+p_{110})$$

$$(\lambda_1+\lambda_2+\mu)p_{100}=\lambda_1 p_{000}+\mu(p_{110}+p_{101})$$

$$(\lambda_1+2\mu)p_{011}=\lambda_2(p_{010}+p_{001})+\mu p_{111}$$

$$(\lambda_1+\lambda_2+2\mu)p_{110}=\lambda_1 p_{010}+\lambda_2 p_{100}+\mu p_{111}$$

$$(\lambda_2+2\mu)p_{101}=\lambda_1(p_{001}+p_{100})+\mu p_{111}$$

$$3\mu p_{111}=\lambda_1 p_{011}+(\lambda_1+\lambda_2)p_{110}+\lambda_2 p_{101}$$

= 归一条件:

$$p_{000}+p_{001}+p_{010}+p_{011}+p_{100}+p_{101}+p_{110}+p_{111}=1$$

- 求解方程组
  - 为简化起见，令 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \quad \rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$
  - 可解得:

$$p_{000} = \frac{3+7\rho+5\rho^2}{\Delta} \qquad p_{001} = \frac{\rho^2(4\rho+3)}{\Delta}$$

$$p_{010} = p_{100} = \frac{\rho(3+5.5\rho+3\rho^2)}{\Delta}$$

$$p_{011} = p_{101} = \frac{\rho^2(4\rho+3)(0.5+\rho)}{\Delta}$$

$$p_{110} = \frac{\rho^2(2\rho+4\rho+3)}{\Delta} \qquad p_{111} = \frac{\rho^3(4\rho^2+6\rho+3)}{\Delta}$$

Δ其中: $\Delta = (1+\rho)(3+10\rho+15\rho^2+12\rho^3+4\rho^4)$

≡ A端用户的呼损: $p_{CA} = p_{101} + p_{111}$

≡ B端用户的呼损: $p_{CB} = p_{011} + p_{111}$

Δ 可见: $p_{CA} = p_{CB} = \dfrac{\rho^2(3+16\rho+20\rho^2+8\rho^3)}{2\Delta}$

≡ 线路利用率为: $\eta = \dfrac{1}{3}(p_{001}+p_{010}+p_{100}) + \dfrac{2}{3}(p_{011}+p_{101}+p_{110}) + 100\% \cdot p_{111}$

$$= \frac{\rho}{3\Delta}(6+26\rho+47\rho^2+38\rho^3+12\rho^4)$$

= 公用备线系统与自用备线系统的比较

≡ 即本例的公用备线系统（三线系统）代替前例两个自用备线系统的情况

≡ 信道利用率的比较:

Δ 两个自用备线系统将配备四条信道

Δ 而本例的公用备线系统仅配备三条信道

Δ 所以，信道利用率必然会提高 $\eta_{自备} = 40\%$

$$\eta_{公备} = 48.5\%$$

Δ 计算过程

$$\eta_{\text{自备}} = \frac{\rho(1+\rho)}{2+2\rho+\rho^2} = \frac{1\times(1+1)}{2+2+1} = \frac{2}{5} = 40\%$$

$$\eta_{\text{公备}} = \frac{\rho}{3\Delta}\cdot(6+26\rho+47\rho^2+38\rho^3+12\rho^4)$$

$$= \frac{\rho(6+26\rho+47\rho^2+38\rho^3+12\rho^4)}{3(1+\rho)(3+10\rho+15\rho^2+12\rho^3+4\rho^4)}$$

$$= \frac{1\times(6+26+47+38+12)}{3\times(1+1)(3+10+15+12+4)}$$

$$= \frac{129}{3\times 2\times 44}$$

$$= \frac{3\times 43}{3\times 2\times 44}$$

$$= 48.5\%$$

≡ 呼损的比较:

Δ 令 $\rho = 1$

Δ 自用备线系统的呼损: $\boldsymbol{p_{11}} = \mathbf{0.2}$

Δ 公用备线系统的呼损: $\boldsymbol{p_c} = \mathbf{0.26}$

Δ 可见，呼损有所增加，是节省一条备用线的代价

Δ 若 $\rho << 1$ ，则可得近似式:

$$p_{11} \approx \frac{\rho^2}{2}(1-\rho) \qquad p_C \approx \frac{\rho^2}{2}(1+\rho)$$

Δ 此时，二者的差别不大

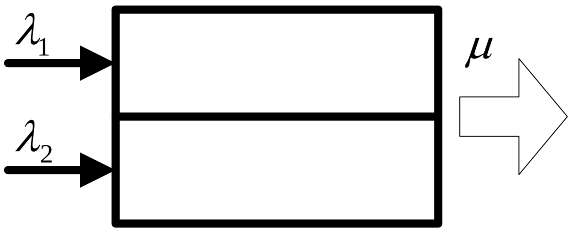
≡ 结论

Δ 在业务量不太大的情况下，采用公用备线系统是很合算的

Δ 但在业务量较大时，采用这种方式就要考虑呼损指标

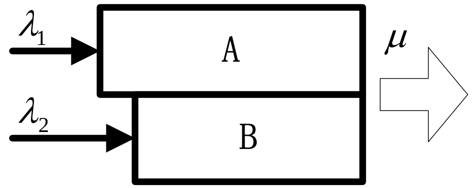
– 例4：优先制排队系统

- 前面三例都是即时拒绝系统
  - 下面考虑允许排队等待的优先制服务方式
- 系统描述
  - 有n个业务流共用一条线路
    - 事先规定各自的优先级
  - 优先级最高的队，只要线路有空即可占用
  - 优先级较低的队
    - 必须在优先级高的队无呼叫等待时
    - 且线路有空的情况下
    - 才能占用线路



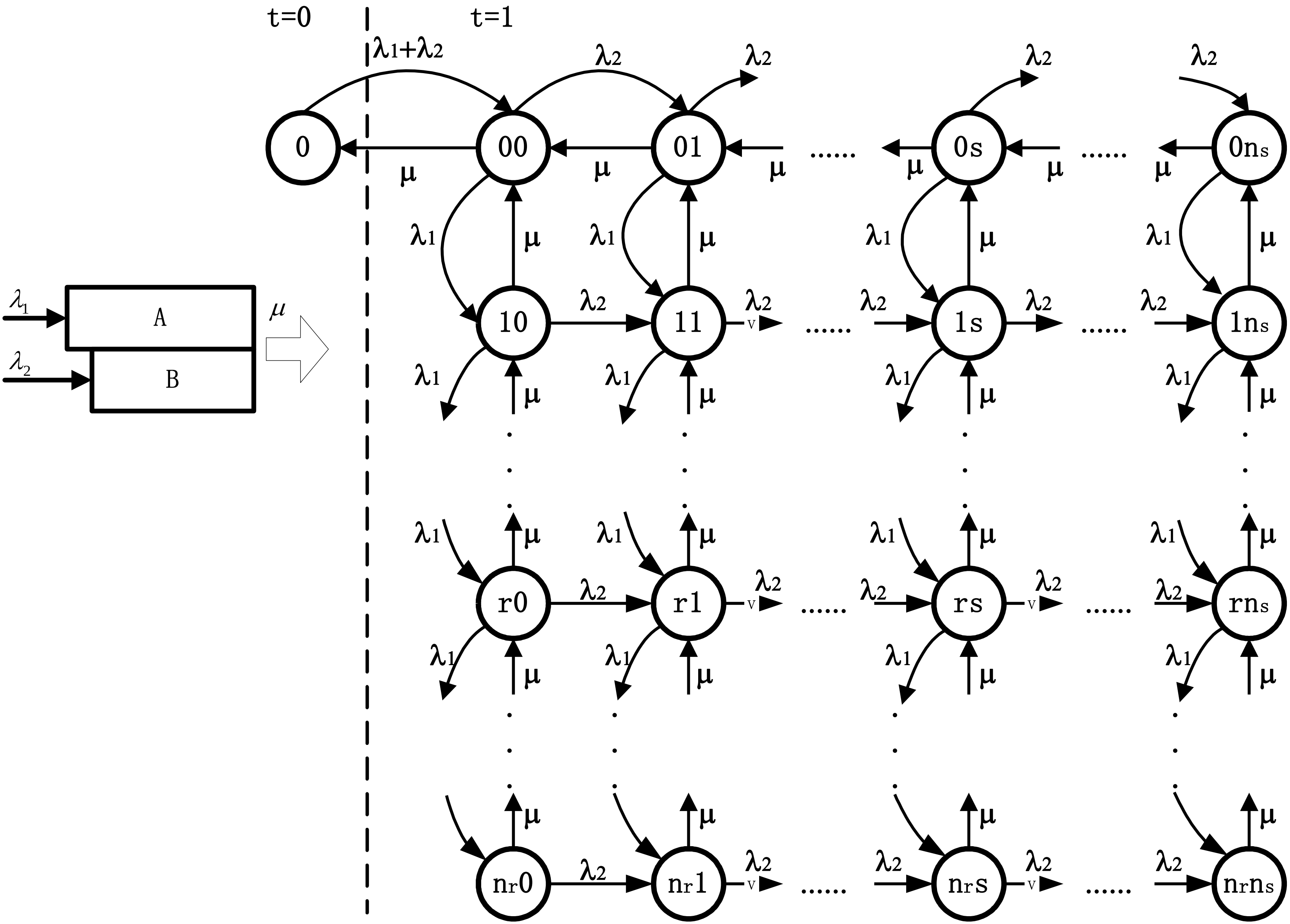
  - 优先级高的呼叫
    - 甚至可以强行中断正在占用线路的优先级低的业务流
    - 这称为强折
    - 半自动接续的电话网就曾采用这种机制

- 以两队输入，一条输出线的情况为例
  - A队有优先权
  - B队只能在A队无呼叫等待时才能占用输出线
  - 但占用后，不因A队有呼叫到达而被强拆
  - A、B两队的呼叫到达率分别为 λ_1 和 λ_2 ，服务率为 μ



- 选择状态变量
  - 系统的状态取决于
    - 线路的忙闲
    - A、B两队待处理的呼叫数
  - 令t为线路状态
    - $t = 1$ 表示占用
    - $t = 0$ 表示空闲
  - 令r与s分别表示A、B两队中等待的呼叫数
    - r和s中不包括正在传输的呼叫
    - n_r和n_s分别为两队的截止队长
  - 当t = 0时
    - r与s必然也是零
    - 这是系统空闲状态，称之为“0”状态
  - 当t = 1时
    - 需用一个二维矢量（r、s）来代表系统状态

＝状态转移图



t=0
t=1
λ1+λ2
0
00
01
0s
0ns
10
11
1s
1ns
r0
r1
rs
rns
nr0
nr1
nrs
nrns
A
B
μ
λ1
λ2

= 稳态下的系统状态方程

- ≡ **t = 0，r = s = 0 :** $(\lambda_1 + \lambda_2) p_0 = \mu p_{00}$
- ≡ **t = 1，r = s = 0 :** $(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) p_{00} = (\lambda_1 + \lambda_2) p_0 + \mu(p_{01} + p_{10})$
- ≡ **t = 1，r = 0，0 <s < n_s :** $(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) p_{0S} = \lambda_2 p_{0,S-1} + \mu(p_{1S} + p_{0,S+1})$
- ≡ **t = 1，0 <r < n_r，s = 0 :** $(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) p_{r0} = \lambda_1 p_{r-1,0} + \mu p_{r+1,0}$
- ≡ **t = 1，0 <r < n_r，0 <s < n_s :** $(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) p_{rs} = \lambda_1 p_{r-1,s} + \lambda_2 p_{r,s-1} + \mu p_{r+1,s}$
- ≡ **t = 1， r = n_r ， s < n_s :** $(\lambda_2 + \mu) p_{n_r s} = \lambda_1 p_{n_r-1,s} + \lambda_2 p_{n_r,s-1}$
- ≡ **t = 1， r < n_r ， s = n_s :** $(\lambda_1 + \mu) p_{r n_s} = \lambda_1 p_{r-1,n_s} + \lambda_2 p_{r,n_s-1} + \mu p_{r+1,n_s}$
- ≡ **t = 1， r = n_r ， s = n_s :** $\mu p_{n_r n_s} = \lambda_1 p_{n_r-1,n_s} + \lambda_2 p_{n_r,n_s-1}$
- ≡ **概率归一化条件:** $$p_0 + \sum_{s=0}^{n_s} \sum_{r=0}^{n_r} p_{r,s} = 1$$

≡ 在以上方程中

△ 当r或s出现负值时，p_{rs}=0

△ 这些方程构成一个二维的差分方程

△ 求通解相当困难

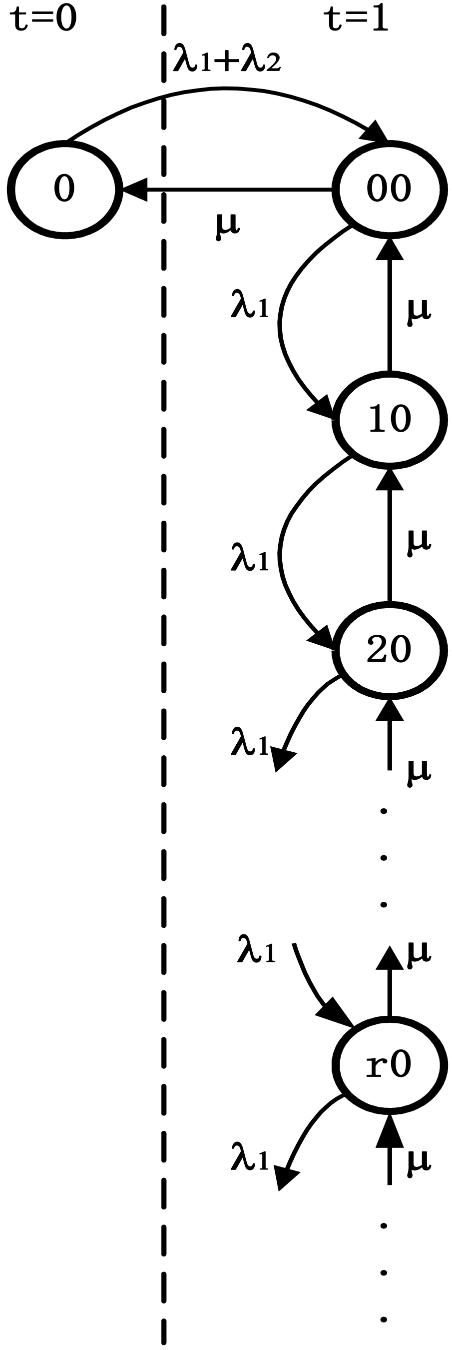
= 求解一个特例

≡ 设A队为不拒绝型的，即 $n_r = \infty$

△ 当B队为即时拒绝的，

△ 即n_s=0， 亦即s=0

≡ 这样，状态转移图就只剩下“0”状态和最左一列：



- 系统状态方程也简化为:

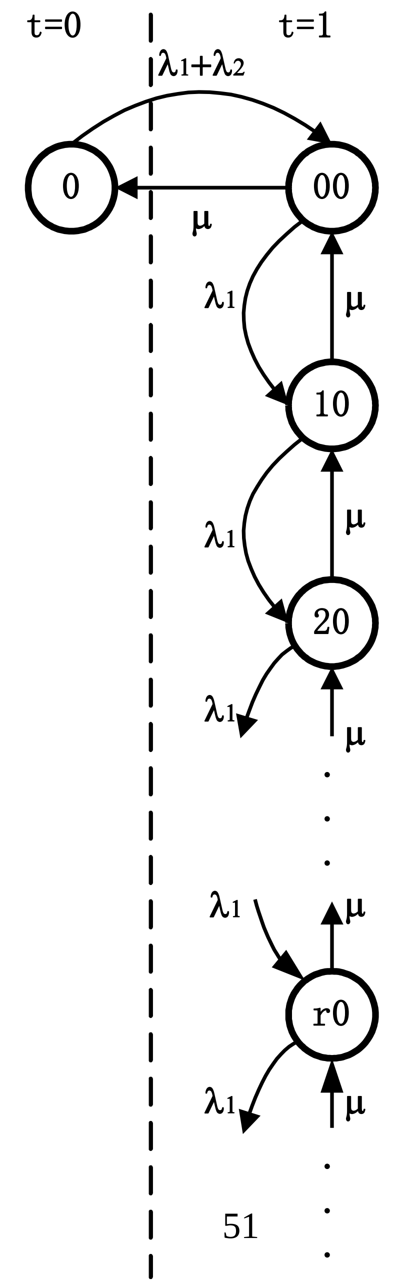
$$(\lambda_1+\lambda_2)p_0=\mu p_{00}$$

$$(\lambda_1+\mu)p_{00}=(\lambda_1+\lambda_2)p_0+\mu p_{10}$$

$$(\lambda_1+\mu)p_{r0}=\lambda_1 p_{r-1,0}+\mu p_{r+1,0} \qquad (r>0)$$

- 归一条件: $p_0+\sum_{r=0}^{\infty}p_{r,0}=1$

- 此系统相当于**M / M / 1 + “0”**态



≡ 上面方程组中的最后一式为齐次一维差分方程

$$\mu p_{r+1,0}-(\lambda_1+\mu)p_{r0}+\lambda_1 p_{r-1,0}=0$$

Δ 可令通解为： $p_{r0}=p_{00}=x^r$

Δ 代入后可解得： $x=\dfrac{\lambda_1}{\mu}$ 或 1

Δ 由于 r 可以趋于无限大，故应舍去 $x=1$ 解

Δ 而保留下 $x=\rho_1=\dfrac{\lambda_1}{\mu}$ 解

Δ 并要求 $\rho_1<1$

Δ 再代入前两式的任一式，可求得： $p_{00}=(\rho_1+\rho_2)p_0$

Δ 再利用归一条件求 p_0：

$$p_0+(\rho_1+\rho_2)p_0\sum_{r=0}^{\infty}\rho_1^r=1 \qquad p_0=\frac{1-\rho_1}{1+\rho_2}$$

Δ 于是，得通解：

$$p_{r0}=\frac{(1-\rho_1)(\rho_1+\rho_2)\rho_1^r}{(1+\rho_2)}$$

≡ **B队的拒绝概率（呼损）为:** $P_C = 1 - p_0 = \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{1 + \rho_2}$

Δ 信道利用率将为: $\eta = 1 - p_0 = \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{1 + \rho_2}$

≡ **A队的平均等待时间为:**

$$\overline{w} = \frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)P_{r0} = \frac{1}{\mu}E[r+1] = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{\rho_1 + \rho_2}{(1+\rho_2)(1-\rho_1)}$$

≡ **若B队不存在，则此系统成为标准的M / M / 1 系统**

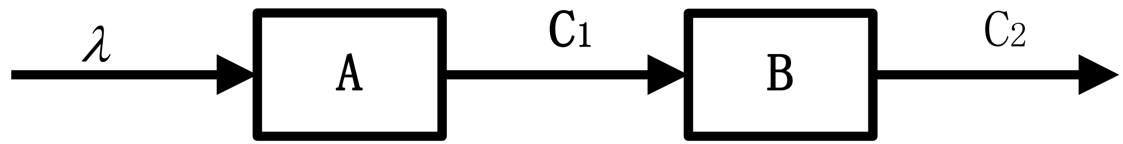
Δ 此时，平均等待时间将为: $\overline{w_0} = \dfrac{1}{\mu}\cdot\dfrac{\rho_1}{(1-\rho_1)}$

Δ 信道利用率将为: $\eta_0 = \rho_1$

- 可见，加上了B队，即使利用优先制，A队的平均等待时间也会有所增加
  - 但信道的利用率也有所提高，实际上：$\frac{\overline{w}}{\overline{\overline{w_0}}} = \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1(1+\rho_2)} = \frac{\eta}{\eta_0} \geq 1$
  - 这表明，信道利用率的提高是以优先队的等待时间增大为代价的
- **B**队的呼损与信道利用率相等
  - 这样的呼损是相当高的
  - 要降低**B**队的呼损，可容许**B**队有一个呼叫排队等待
  - 这时，**s = 0**或**s = 1**，可先求解 **s = 0**时的一维差分方程
  - 只是它的特征解已不再是 $x = \rho_1$，因为一维差分方程中将出现 λ_2
  - 解出后，再求解**s =1**的方程
  - 当然，计算过程要比举例复杂得多
- 如果系统有**m**条信道
  - 则系统性能会进一步提高
  - 就像前面曾研究的**M/M/m**系统比**M/M/1**系统要好一样
  - 当然，求解就会更加困难

– 例5：两次排队问题

= 系统描述



≡ 在这种系统中，信息包首先送入队列A

≡ 再由容量为C_1bit/s的信道送到队列B

≡ 最后再由容量为C_2bit/s的信道送出系统

≡ 假设

Δ 输入信息流为泊松流

Δ 到达率为 λ 包/秒

Δ 每包的平均比特数为*a*

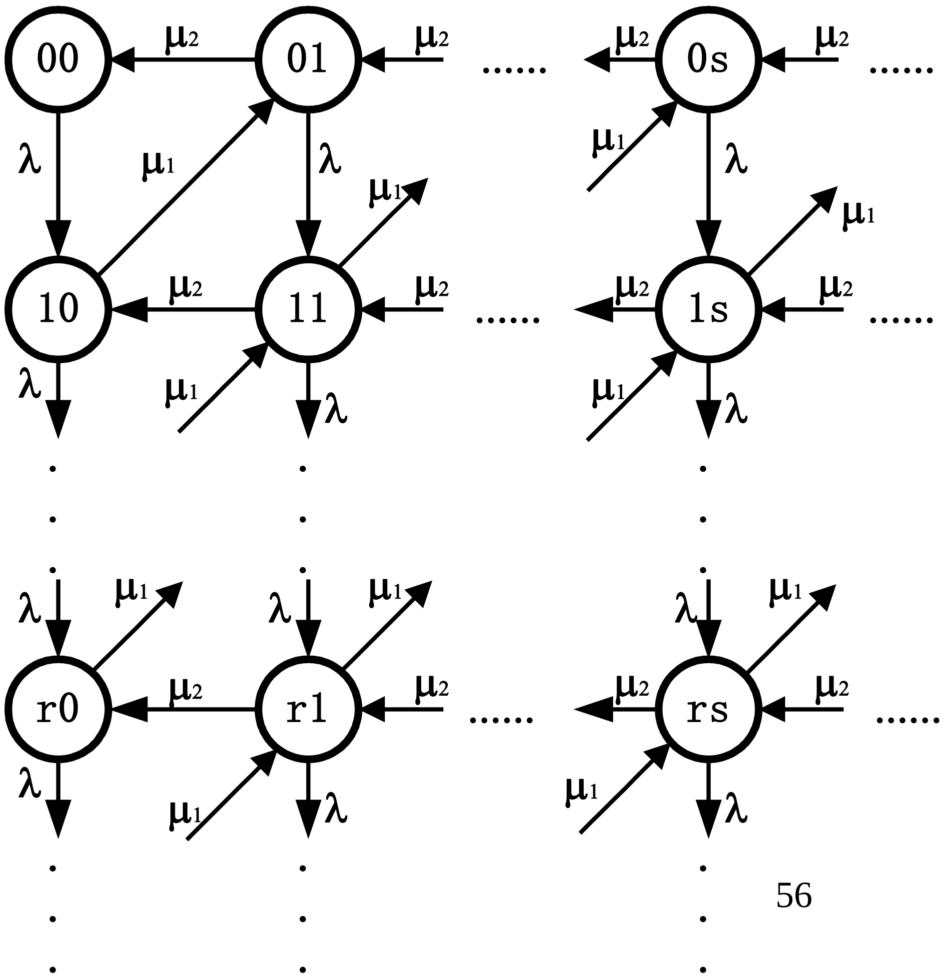
Δ 且信息包长服从负指数分布

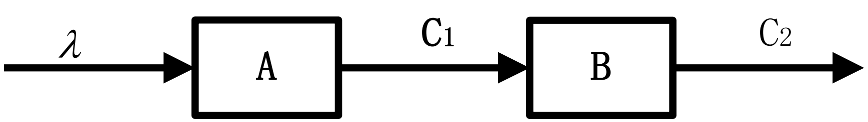
Δ 队列A和B不限制队长，即构成不拒绝系统

≡ 信道C_1的服务率 $\mu_1 = C_1 / a$ （包/秒）

≡ 信道C_2的服务率 $\mu_2 = C_2 / a$ （包/秒）

- 选择状态变量
  - 设r和s分别为队列A和B的队列长度（包括正在传送的信息包）
  - 选择（r，s）为状态变量
- 状态转移图





= 稳态下系统状态方程

Δ r = s = 0: $$\lambda p_{00} = \mu_2 p_{01}$$

Δ s = 0 : $$(\lambda + \mu_1) p_{r0} = \lambda p_{r-1,0} + \mu_2 p_{r1}$$

Δ r = 0 : $$(\lambda + \mu_2) p_{0S} = \mu_1 p_{1,S-1} + \mu_2 p_{0,S+1}$$

Δ r > 0，s > 0 : $$(\lambda + \mu_1 + \mu_2) p_{rs} = \lambda p_{r-1,s} + \mu_1 p_{r+1,s-1} + \mu_2 p_{r,s+1}$$

Δ 归一条件: $$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} p_{rs} = 1$$

= 求解方程组

- ≡ 试用解: $p_{rs} = p_{00} x^r y^s$
- ≡ 代入第一式，可得: $y = \dfrac{\lambda}{\mu_2} = \rho_2$
- ≡ 代入第二式，可得: $x = \dfrac{\lambda}{\mu_1} = \rho_1$
- ≡ 再代入其它各式，验证这样的x，y均满足方程

≡ 所以得到联合概率p_{rs}的通式： $p_{rs} = p_{00} \cdot \rho_1^r \cdot \rho_2^s$

≡ 利用归一条件求出p_{00}:

Δ $$p_{00}\sum_r\sum_s \rho_1^r \rho_2^s = p_{00} \cdot \frac{1}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)} = 1$$

Δ $$p_{00} = (1-\rho_1)(1-\rho_2)$$

≡ 所以：

$$p_{rs} = (1-\rho_1)(1-\rho_2)\rho_1^r \rho_2^s$$

≡ 从这个解可以看出，一个重要结论

Δ r和s是两个相互独立的随机变量

Δ 也就是说，在这样的系统中，两个排队过程是相互独立的

- 系统的性能指标
  - 信息包在系统中的总时间：（或者说，平均时延）

$$\bar{s} = \overline{s_1} + \overline{s_2} = \frac{1}{\mu_1(1-\rho_1)} + \frac{1}{\mu_2(1-\rho_2)} = \frac{1}{\frac{c_1}{a} - \lambda} + \frac{1}{\frac{c_2}{a} - \lambda}$$

  - 信道利用率
    - 信道C_1的利用率：$\eta_1 = \rho_1$
    - 信道C_2的利用率：$\eta_2 = \rho_2$
    - 总的信道利用率：$\eta = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$
    - 可见，只有 $\rho_1 < 1$ 且 $\rho_2 < 1$时，系统才能稳定工作

- 从本例可以看出一个重要结论
  - 对于 M / M 排队系统，其输出过程，即顾客离去的规律仍是一个以输入到达率 λ 为平均值的泊松流

≡ **[证明]:**

- Δ 为更具普遍性，现以M/M/m为例
- Δ 来计算 Δt 内有顾客离去的概率
- Δ 当队长为k时，设有顾客离去的概率为 $a_k \cdot \Delta t$
- Δ 则：$$a_k = \begin{cases} 0\ , & k = 0 \\ k\mu\ , & 0 \le k \le m \\ m\mu\ , & k \ge m \end{cases}$$
- Δ 则离去率为：$$\lambda' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p_k$$
- Δ 用M/M/m中得到的p_k代入，得到：

$$\lambda' = \sum_{k=0}^{m} k\mu \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} p_0 + \sum_{k=m+1}^{\infty} m\mu \cdot \frac{m^m}{m!} (\frac{\lambda}{m\mu})^k p_0$$

$$= \lambda p_0 \left[\sum_{r=0}^{m-1} \frac{(\lambda/\mu)^r}{r!} + \frac{(\lambda/\mu)^m}{m!} \cdot \frac{1}{1 - \lambda/m\mu} \right]$$

$$= \lambda$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k + \frac{1}{c!} \cdot \frac{1}{1-\rho} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \cdot P_0 & (n < c) \\ \frac{1}{c! \cdot c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \cdot P_0 & (n \ge c) \end{cases}$$

- Δ 因为：方括号内值的倒数恰好为p_0
- Δ 这就证明了：输出过程与输入过程有同样的规律
- Δ 这个结论与前面的独立性结论合在一起，称为输出定理

$$\lambda' = \sum_{k=0}^{m} k\mu \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} p_0 + \sum_{k=m+1}^{\infty} m\mu \cdot \frac{m^m}{m!} (\frac{\lambda}{m\mu})^k p_0$$

$$= \mu p_0 \left[\sum_{k=1}^{m} k \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} + \frac{(\lambda/\mu)^m}{m!} \sum_{k=m+1}^{\infty} m \cdot \frac{m^m}{m^k} (\frac{\lambda}{\mu})^{k-m} \right]$$

$$= \mu p_0 \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{(\lambda/\mu)^k}{(k-1)!} + \frac{(\lambda/\mu)^m}{m!} \sum_{k=m+1}^{\infty} m \cdot (\frac{\lambda}{m\mu})^{k-m} \right]$$

$$= \mu p_0 \left[\sum_{r=0}^{m-1} \frac{(\lambda/\mu)^{r+1}}{r!} + \frac{(\lambda/\mu)^{m+1}}{m!} \sum_{k=m+1}^{\infty} (\frac{\lambda}{m\mu})^{k-m-1} \right]$$

$$= \mu p_0 \left[\sum_{r=0}^{m-1} \frac{(\lambda/\mu)^{r+1}}{r!} + \frac{(\lambda/\mu)^{m+1}}{m!} \sum_{r=0}^{\infty} (\frac{\lambda}{m\mu})^{r} \right]$$

$$= \lambda p_0 \left[\sum_{r=0}^{m-1} \frac{(\lambda/\mu)^{r}}{r!} + \frac{(\lambda/\mu)^{m}}{m!} \cdot \frac{1}{1-\lambda/m\mu} \right]$$

$$= \lambda$$

- 从本例引出的定理－－输出定理
  - **M/M/m**不拒绝排队系统的输出过程与输入过程相互独立
  - 并具有同样的分布规律
  - 即都是以输入到达率 λ 为均值的泊松流
  - 这个定理在信息转接的计算中应用很广
    - Δ 它使多次排队系统简化为各自独立的排队问题
    - Δ 并从各分系统的性能来计算总性能
  - 但是，若各排队系统的截止队长等参数有限制时
    - Δ 输出过程就不具有此性质了
    - Δ 就需要像前面那样去求联合概率了
    - Δ 并且**r**和**s**也不会相互独立了
  - 对于非**M/M/m**系统
    - Δ 如**M/D/1**等系统，也不具备此性质
    - Δ 所以，限制了输出定理的使用范围
  - 对于多次排队系统
    - Δ 一旦有一个子系统不是**M/M/m**类型的
    - Δ 则此子系统之前的各排队过程仍然是相互独立的
    - Δ 但在它以后就不成立了

– 作业:

= （周先生著）第266页：　4.8，　4.9

= （周先生著）第267页：　4.10，　4.11

= （张琳著）第79页：　2.10，　2.11

（本节结束）