通信网理论基础

第五章 通信网的可靠性

第一节 可靠性理论概要

北京邮电大学 通信网络综合技术研究所
授课教师：武穆清
电子信箱：wumuqing@bupt.edu.cn

本章内容

– 可靠性问题是近代工程技术中一个十分重要的问题
  - 任何设备，不管性能有多好，只要不可靠，就毫无应用价值
  - 这不仅是大型工程中大家所关心的事
    - 甚至在家用消费品中也是如此
  - 可靠性问题与经济价值直接有关
    - 不可靠的设备，其价格再便宜也是没有意义的
    - 因为经常的维修会使价格急剧上升
    - 报废更是变相的增值
    - 如果因此再耽误了正常的生产，损失就更大了

- 保证可靠性，在技术上是最困难的问题
  - 要求设备绝对不出故障是不现实的
  - 但经常出现故障也是不能容忍的
  - 出故障的原因非常复杂，牵涉到许多因素
    - 原材料是重要的因素
    - 生产环境，加工工艺，运输，储藏等等
    - 都会影响产品质量和寿命
  - 在现代社会中，通信网的可靠性更显著
    - 第一次南极考察
    - 神舟五、六号载人飞行
    - 军事通信中更为突出

– 本章内容安排:
  - 首先介绍可靠性的基础理论
  - 然后研究通信网中的可靠性计算
  - 最后介绍可靠网的设计

5.1 可靠性理论概要

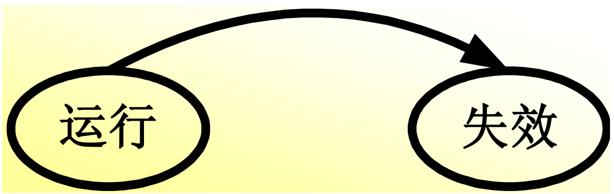
一 可靠性
- 可靠：不经常出故障→随机事件，需要随机性的描述，只能使用概率
  可靠性的概念要在概率意义上来定义。
- 不可靠：经常出故障→随机事件，需要随机性的描述，只能使用概率
  可靠性的概念要在概率意义上来定义。

＝ 不出故障→正常运行
- 性能正常
- 性能下降

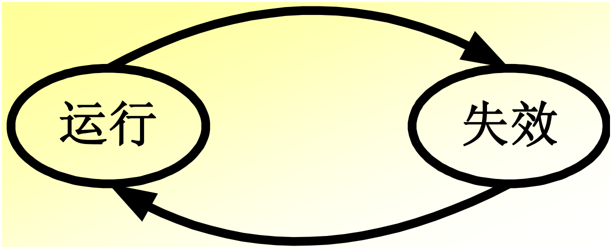
＝ 故障→不能正常运行
- 缺失一种功能
- 缺失全部功能

＝要确切定义可靠性还是很困难的

- 研究可靠性的对象
  - 不可修复系统
    - 系统一旦启用，直至损坏或失效为止
    - 这种系统只有两种状态
      - 运行
      - 失效
    - 系统只有从运行状态向失效状态转移这一种可能:
      - 一旦失效，就不会再回到运行状态



  - 可修复系统
    - 系统出故障后，可以修复后再次使用
    - 这种系统仍可规定两种状态
      - 运行
      - 失效
    - 但两种状态之间可以相互转移



5.1.1. 不可修复系统的可靠度

- 不可修复系统
  - 是关于可靠性最基本也是最简单的研究对象
  - 一般的元器件、集成电路都属于此类系统
  - 当前个人计算机中的网卡、显卡、调制解调器卡、鼠标、键盘等，以及程控交换机中的电路板等也属此类系统
    - 人们不愿再修理这些设备或电路板
    - 维修的价格与更换的价格差距不大
  - 更大的系统，如卫星，也属此类系统
    - 卫星一旦发射升空，人们就不易再维修
    - 尽管美国航天飞机可以送人上去维修
      - 但价格异常昂贵

– 可靠度定义

- 令R(t)表示系统运行了时间t时仍在正常工作的概率
  - R(t) = P[运行：t时刻]
- 定义：系统在 t 时的可靠度为R(t)
  - 显然有：R(0) = 1
    - 即起始运行时，系统应为正常
    - 或起始运行后，立即失效的概率应接近于零
  - 由概率的归一性，令F(t) = 1 − R(t)
    - F(t)是t时刻系统失效的概率
    - 我们称之为：系统在t时刻的不可靠度
  - 可靠度和不可靠度都可用来描述系统的可靠性

– 可靠度的计算

- 失效率α
  - 定义：在 t 时刻系统正常运行的条件下
    - 在 t 到 t + Δt内，系统失效的条件概率为$\alpha\cdot\Delta t$
    - 即：
      P[在(t, t+Δt)内系统失效 | 在t时刻系统正常] = $\alpha\cdot\Delta t$
    - 一般来说，α是 t 的函数，即$\alpha(t)$
  - 推论：
    - P[在(t, t+Δt)内系统正常 | 在t时刻系统正常] = 1 − $\alpha\cdot\Delta t$

- 可靠度的计算
  - 可靠度R(t) 的公式推导
    - 利用条件概率公式：$R(t+\Delta t) = R(t)\,(1-\alpha\cdot\Delta t)$
      - 即在 t 时刻系统正常的条件下
      - 到 $t+\Delta t$ 时系统仍正常的概率，必须是在 Δt 内不出故障
      - 在 Δt 内不出故障的概率是：$1-\alpha\cdot\Delta t$
      - 亦即：$P(t+\Delta t$ 时刻系统仍正常 $\mid$ t时刻系统正常$) = 1-\alpha\cdot\Delta t$
      - =P[在(t, t+Δt)内系统正常，在t时刻系统正常] / P[在t时刻系统正常]
      - $= R(t+\Delta t)/R(t) = 1-\alpha\cdot\Delta t$
    - 令 $\Delta t\to 0$，于是有：
      - $R'(t) = -\alpha R(t)$
      - 这是可靠度的微分方程

≡在R(0) = 1的初始条件下，可解得:

Δ $$R(t) = e^{-\int_0^t \alpha \cdot dt}$$

Δ若α是与t无关的常量，则有：**R(t) = e** $^{-\alpha t}$

≡这是以t为参量（自变量），

Δ以系统状态（运行/失效）为因变量（二元随机变量）

Δ而求得的状态概率

≡也可以反过来，使系统状态作自变量

Δ把 t 作为因变量（连续随机变量）

Δ于是可定义系统的寿命

– 系统寿命的计算

- t 时刻系统仍在运行的概率R(t) 就是寿命T大于t的概率，即:
  - R(t) = P[运行： t时刻] = P[寿命T > t]
    = 1−P(T ⩽ t) = 1−F(t)
  - 注：此处F(t) 是寿命T的概率分布函数
- 所以，寿命T的概率密度函数为:
  - $f(t) = -R'(t) = \alpha R(t)$

$$R(t) = e^{-\alpha t}$$

- 系统的平均寿命为:
  - $$T = \int_0^{\infty} t \cdot f(t)dt = \int_0^{\infty} R(t)dt$$
  - 若α为常数，则 T = 1/α

- 平均寿命T是表征系统可靠性的重要参量
  - 定性地说，T越大，系统越可靠
  - 若失效率α为常量，则寿命$T = 1/\alpha$
    - 说明T和α一样，都可以用来充分描述系统的可靠性
    - 即都可以用来计算系统的可靠度
  - 系统在平均寿命到达时，仍能运行的概率是 $e^{-1} = 0.368$
    - 说明有些系统可能在平均寿命到达前就失效了
    - 即寿命短于平均寿命
    - 而另一些相同的系统，寿命可以大于平均寿命

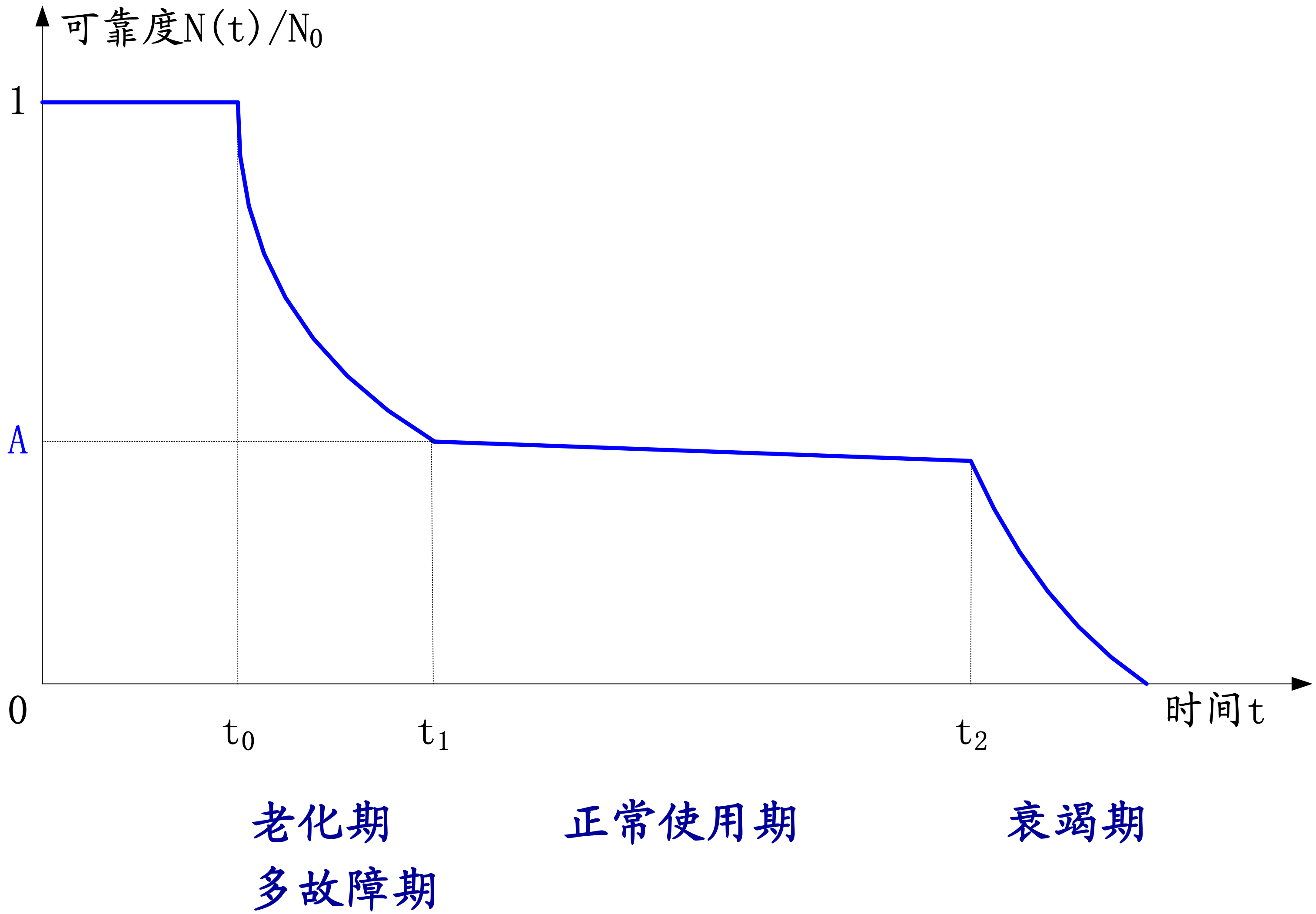
- **R(t)和α(t)的实际测量和估计**
  - 设有N_0个系统同时开动
    - 随着时间的推移，有些系统必将失效
    - 若到t时刻仍有N(t)个系统在运行，
      - 则N(t)/ N_0可作为R(t)的估计值 $\hat{R}(t)$
      - 若N_0足够大，则此估计值就接近实际的R(t)
    - α(t)的估计值 $\hat{\alpha}(t)$ 可由下式求出

$$\hat{\alpha}(t)=-\frac{d}{dt}ln\,\hat{R}(t)=-\frac{\hat{R}'(t)}{\hat{R}(t)}$$

≡下图是某种元件可靠性的实测情况

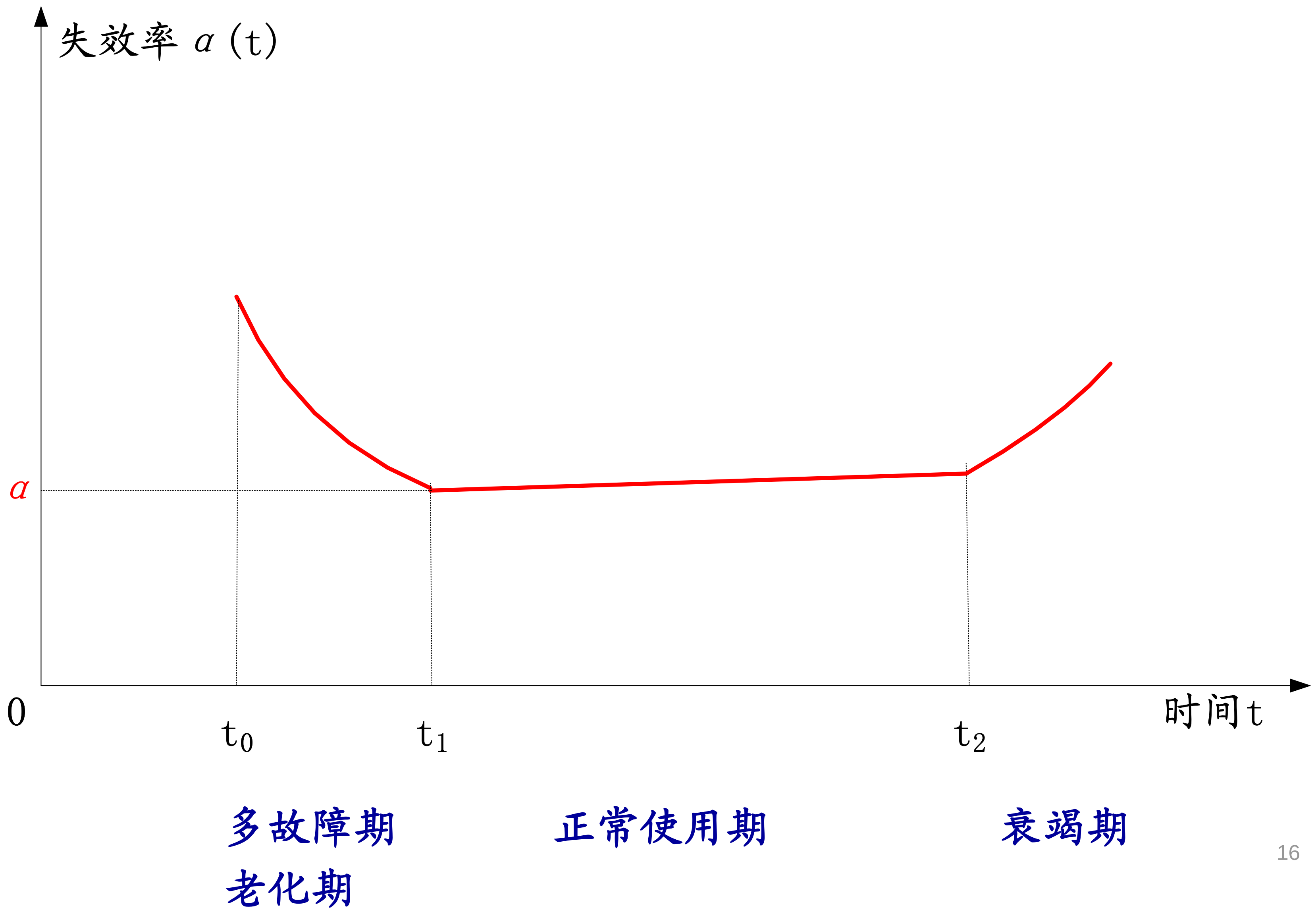
Δ下图即 元件可靠度实测曲线

Δ它是N（t）/ N_0与时间 t 的关系



Δ下图是 元件失效率实测曲线

Δ它是$\alpha(t)$ 的估计值 $\hat{\alpha}(t)$与时间 t 的关系



Δ 图（a）是N（t）/ N_0与时间t的关系

Δ 图（b）是α（t）的估计值 $\hat{\alpha}(t)$与时间t的关系

Δ 在$t = 0\sim t_0$之间：无元件失效，即失效率 $\hat{\alpha}=0$，可靠度 $\hat{R}=1$

Δ 在$t = t_0\sim t_1$之间：元件失效的较多，称为多故障期

- 期间，$\hat{\alpha}(t)$和$\hat{R}(t)$ 均急剧下降
- 实践中，称之为试用期或老化期，以便筛选合格产品

Δ 在$t = t_1\sim t_2$之间：元件失效的较少，$\hat{\alpha}(t)$接近常量

- 实践中，称之为正常使用期

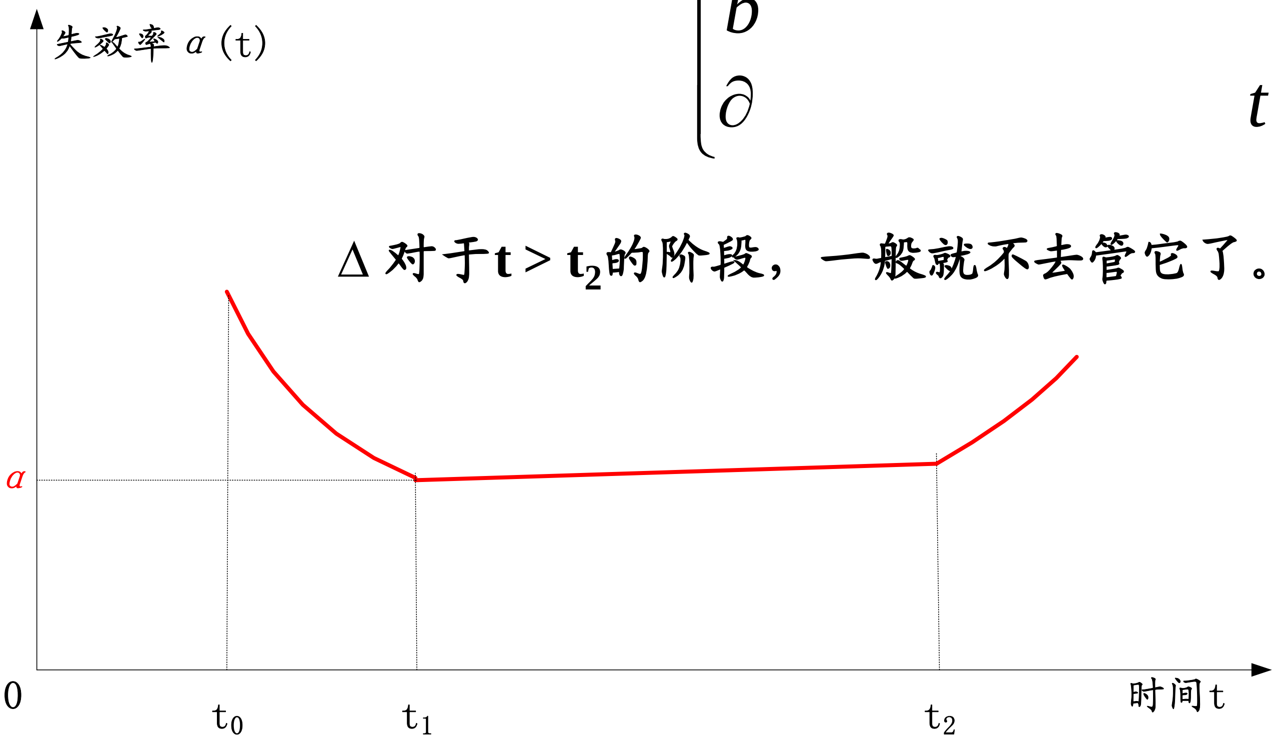
Δ 在$t = t_2$以后：失效的元件又开始增多，$\hat{\alpha}(t)$上扬，称为衰竭期

- 在实践中，此时元件已超过了正常寿命，应该更换元件了，以保证质量

- 为便于理论分析，常用公式来表示失效率α(t)
  - 即用下图的曲线，作为α（t）的近似
  - 韦布尔（Weibull）函数

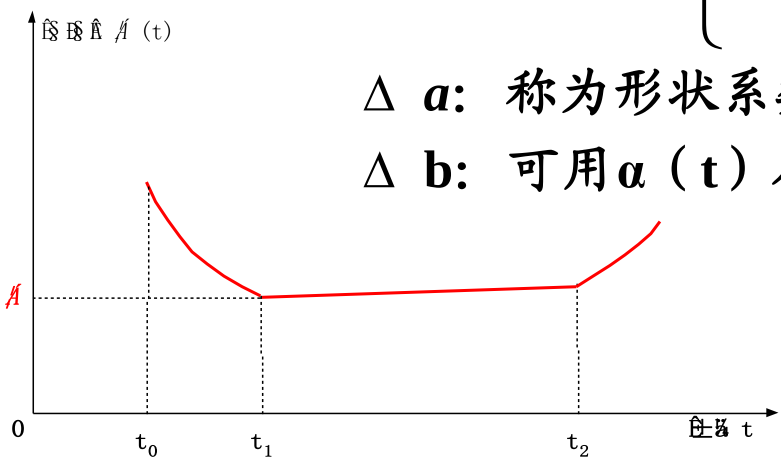
Δ $$\partial(t)=\begin{cases}0 & 0\le t\le t_0\\ \frac{a}{b}(t-t_0)^a & t_0\le t\le t_1\\ \partial & t\ge t_1\end{cases} \quad \textbf{(5-7)}$$

Δ 对于t > t_2的阶段，一般就不去管它了。



≡ 由韦布尔函数得到相应的可靠度R（t）的近似式:

$$\Delta \quad R(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le t_0\\ e^{-\frac{(t-t_0)^a}{b}} & t_0\le t\le t_1\\ Ae^{-\partial(t-t_1)} & t\ge t_1\end{cases} \qquad \text{(5-8)}$$

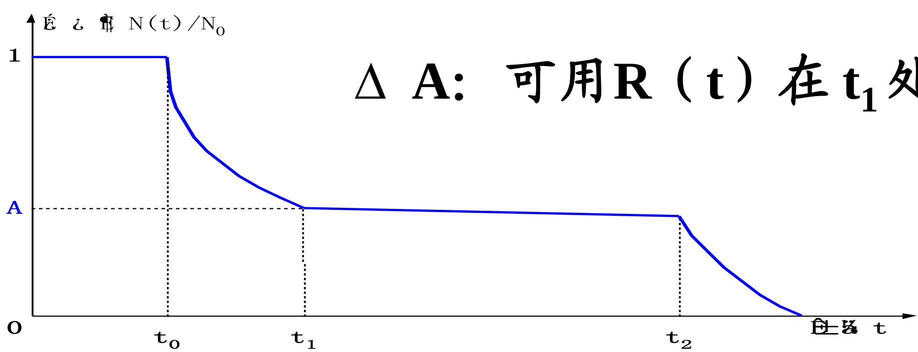


Δ *a*: 称为形状系数，对可靠性的影响较大

Δ b: 可用α（t）在t_1处的连续性求得，即

$$\partial=\frac{a}{b}(t_1-t_0)^a$$

$$\text{或} \quad b=\frac{a}{\partial}(t_1-t_0)^a \qquad \text{(5-9)}$$



Δ A: 可用R（t）在t_1处的连续性求得:

$$A=e^{-\frac{(t_1-t_0)^a}{b}} \qquad \text{(5-10)}$$

≡ 在实践中获得理论曲线（公式）

Δ 可选定t_0，t_1，a及α，使与实际曲线逼近

Δ 其它参数可用前式求得

Δ 有了这些参数，以后的计算就可用公式进行了

= 一般元件经过筛选后，已进入正常使用期

≡ 可用α作为可靠性参数

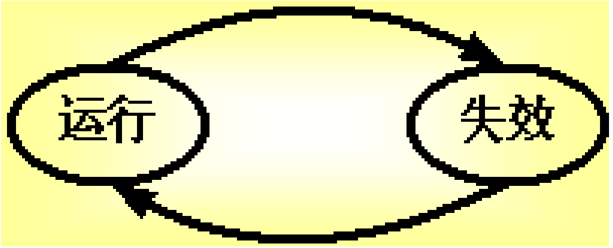
≡ 此时取t_1作为起始点，且$R(t_1)=1$

= 实践中，还使用α值来规定各种元件的等级

等级	α值（1/小时）
S 或 10	10^{-10}
J 或 9	10^{-9}
B 或 8	10^{-8}
Q 或 7	10^{-7}
R 或 6	10^{-6}
W 或 5	10^{-5}
Y 或亚 5	3×10^{-5}
等外品	$>3\times10^{-5}$

5.1.2. 可修复系统的可靠度

– 可修复系统
  - 对于大型设备，不能一出故障就丢弃
    - 通常是要把它修复后再使用
    - 这是与前面不可修复系统不同之处
  - 可修复系统的状态
    - 仍可规定为两种状态
      - Δ 正常运行状态
      - Δ 故障状态，或失效状态
    - 但这两种状态之间可相互转移
      - Δ 这也是与上面不可修复系统不同之处
    - 从运行状态到失效状态仍采用失效率α来表示转移概率
    - 从失效状态到运行状态
      - Δ 我们可以相仿地定义修复率β来表示转移概率



- 修复率β
  - 在t时刻系统处于失效状态的条件下
  - 在 t 到 t + Δt时间内系统被修复的概率为β·Δt
  - 修复也是随机性的
    - 故障是多种多样的，出现哪一种是随机的
    - 维修人员找出故障所需的时间也有随机性
    - 所以，用概率来描述修复过程是恰当的
  - 修复率β与多种因素有关
    - 设备越复杂，维修人员越不熟练，β值就越小
    - 一般情况下，修复率β也与时间 t 有关

– 可修复系统可靠度的计算

= 假设：α和β都是与时间t无关的常量

≡ R（t + Δt）是在t + Δt 时刻系统正常运行的概率

= 有两种情况可达到运行状态

≡ t时刻正常，t到t + Δt内不出故障

≡ t时刻失效，t到t + Δt内修复

Δ 即：R（t + Δt）= R（t）（1 − αΔt）+ [1 − R（t）] βΔt

= 可靠度的微分方程

Δ 令Δt→0，整理后得到可靠度的微分方程

$$R'(t) = \beta - (\alpha + \beta) \cdot R(t)$$

≡ 当 α 和β为常数时，此一阶微分方程容易求解

Δ 其解与初始条件有关

≡当初始条件为：R（0）＝1 时

Δ $$R(t)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot e^{-(\alpha+\beta)t}$$

≡当初始条件为：R（0）＝0 时

Δ $$R(t)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}-\frac{\beta}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t}$$

≡当 t →∞时，上面两式均成为

Δ $$R(t)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

Δ这就是稳态下可修复系统的可靠度

Δ它与α和β有关

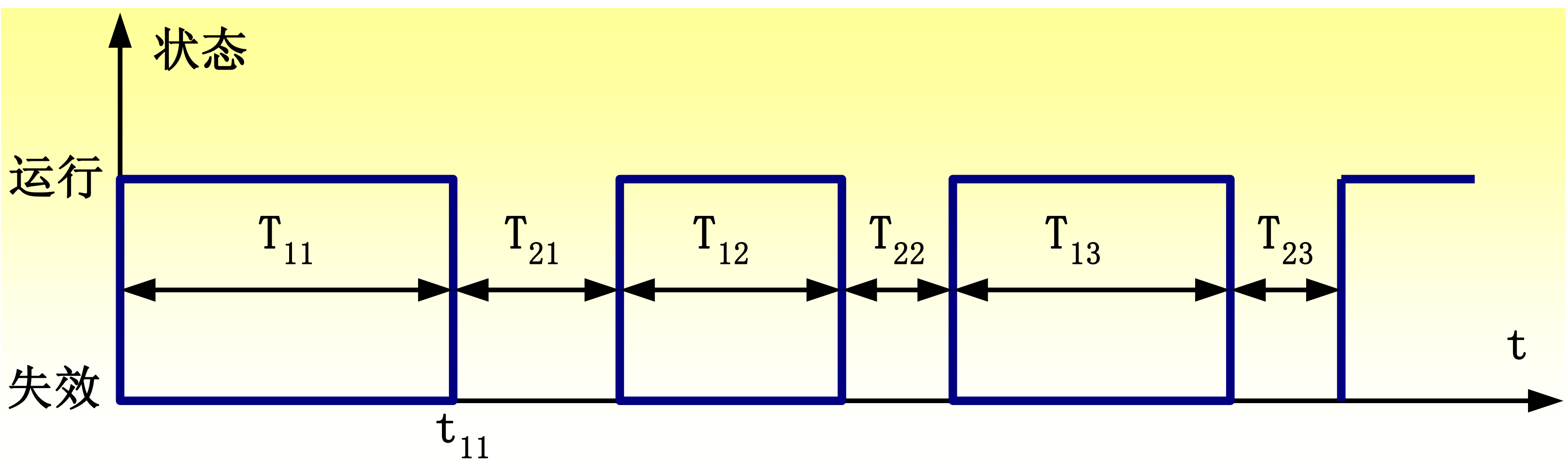
= 系统的不可靠度

≡瞬态下：$$F(t)=1-R(t)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t}$$

$$F(t)=1-R(t)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t}$$

≡稳态下：$$F=1-R=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

– 可修复系统的寿命
  - 在可修复系统中，该系统运行一段时间后
    - 第一次出故障的时间t_1是随机的
  - 当α为常量时，与不可修复系统一样
    - t_1的平均值也是： $T_1 = 1/\alpha$
    - 称之为：**平均故障间隔时间（MTBF）**
      - Δ **M**ean **T**ime **B**etween **F**ailures
      - Δ它是两个相邻故障间的平均时间



- 平均故障间隔时间（MTBF）
  - 有时也称之为设备的平均运行寿命
  - 但，已与不可修复系统中的寿命的含义不同
  - 它也同样表示出设备的质量

- 在可修复系统中
  - R（t）已不能称为寿命大于t的概率
  - R（t）只是表示在t时刻系统运行的概率
    - 这种运行可以是从t = 0时一直在正常运行
    - 也可以是经过故障而修复后的运行
  - $-R'(t)$也不代表寿命的概率密度函数

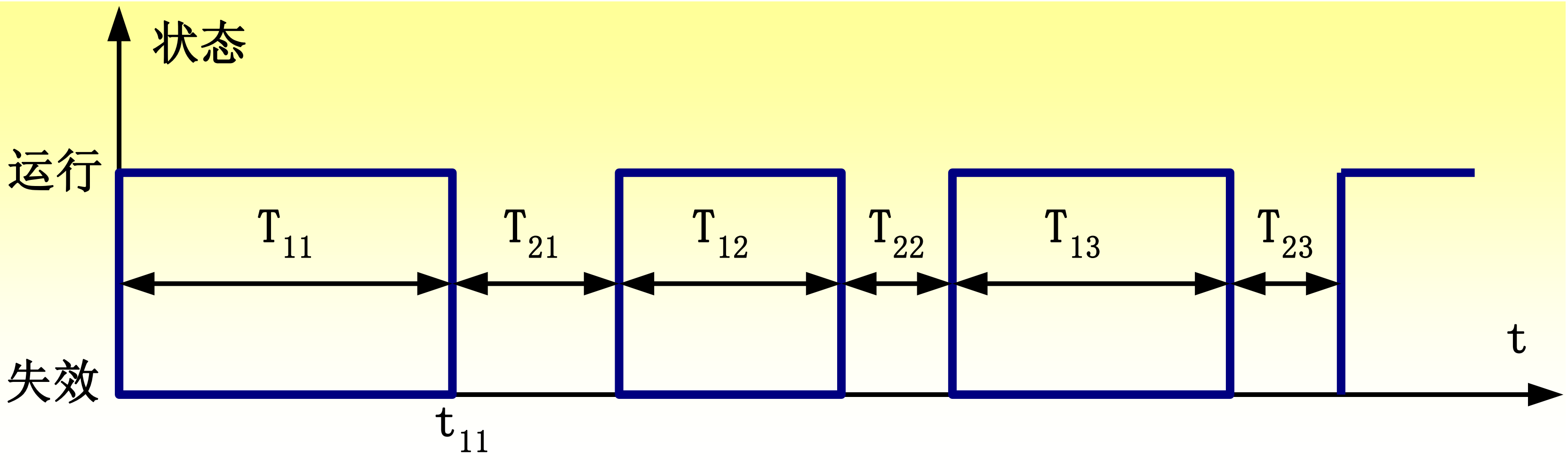
- 平均修复时间（MTTR）

  ≡ **Mean Time To Repair**

  = 定义：$T_2 = 1/\beta$

  ≡称之为：平均修复时间（MTTR）

  ≡它表示出维修能力



– 用平均故障间隔时间（MTBF）和平均修复时间（MTTR）表示的可靠度

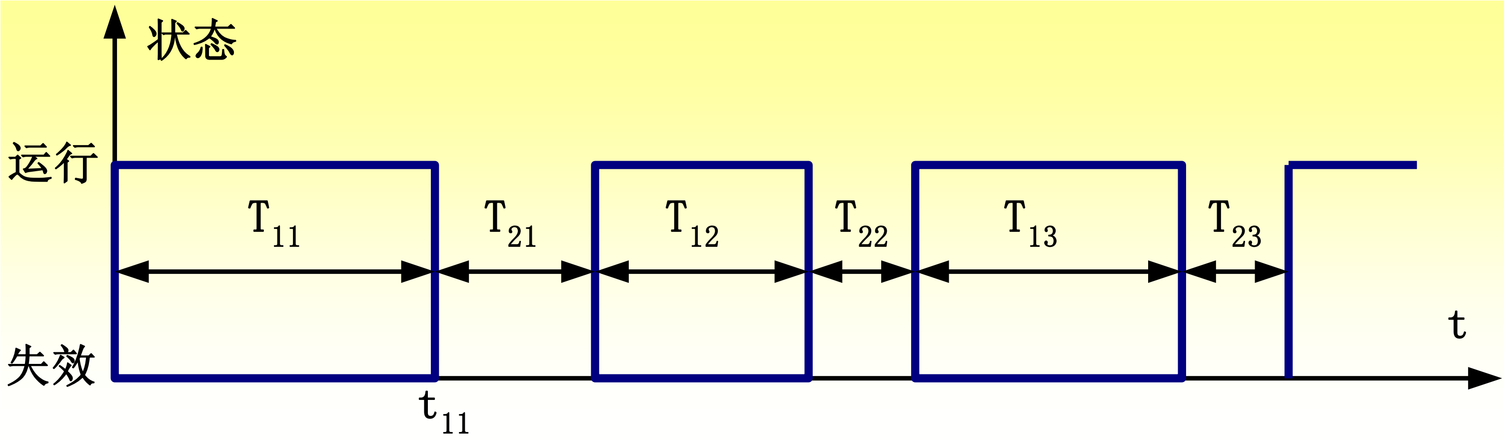
- 可靠度:

$$R = \frac{T_1}{T_1 + T_2} = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR}$$

- 不可靠度可表示为:

$$F = \frac{T_2}{T_1 + T_2} = \frac{MTTR}{MTBF + MTTR}$$

- α和β（或MTBF和MTTR）的实测
  - 当样机投入运行以后
    - 一出故障就修理，修复后再投入运行
    - 于是系统就在运行和失效两状态间转移，如图
      - 若运行状态用“1”表示，失效用“0”表示，
      - 则系统状态的随机过程可用函数 f(t)表示
      - 或运行状态用“0”表示，失效用“1”表示
    - 故障间隔时间是随机的，其样值分别为：T_{11}，T_{12}，…
    - 修复时间也是随机的，其样值分别为：T_{21}，T_{22}，…



- 若试验时间足够长，或周期数N足够大
  - 则可计算得到MTBF和MTTR的估计值
    - $$\hat{MTBF}=\frac{\sum_{i=1}^{N}T_{1i}}{N}$$
    - $$\hat{MTTR}=\frac{\sum_{i=1}^{N}T_{2i}}{N}$$
  - 进而可得到α和β的估值
    - $$\hat{\alpha}=\frac{1}{\hat{MTBF}}$$
    - $$\hat{\beta}=\frac{1}{\hat{MTTR}}$$

≡稳态可靠度为：

Δ

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{N} T_{1i}}{\sum_{i=1}^{N} T_{1i} + \sum_{i=1}^{N} T_{2i}}$$

Δ可见，稳态可靠度R实际上是运行时间所占的百分比

Δ所以，有时也称 R为运行率

- 增大可修复系统的可靠度的措施
  - 一个重要的方面是降低故障率 α，或增加**MTBF**
    - 这是设备出厂时的重要指标
  - 另一个方面是要增加修复率 β，或减小平均修复时间**MTTR**
    - 当**β→∞**，或 **MTTR→0**时
      - 不管α是多少，只要为有限值
      - 可靠度就可接近于**1**
    - 增加 β 值的方法
      - 加强维修力量
      - 提高维修人员素质
      - 当发生故障时，能够按模块更换，或成块电路板更换
      - 这是系统设计人员应考虑的问题

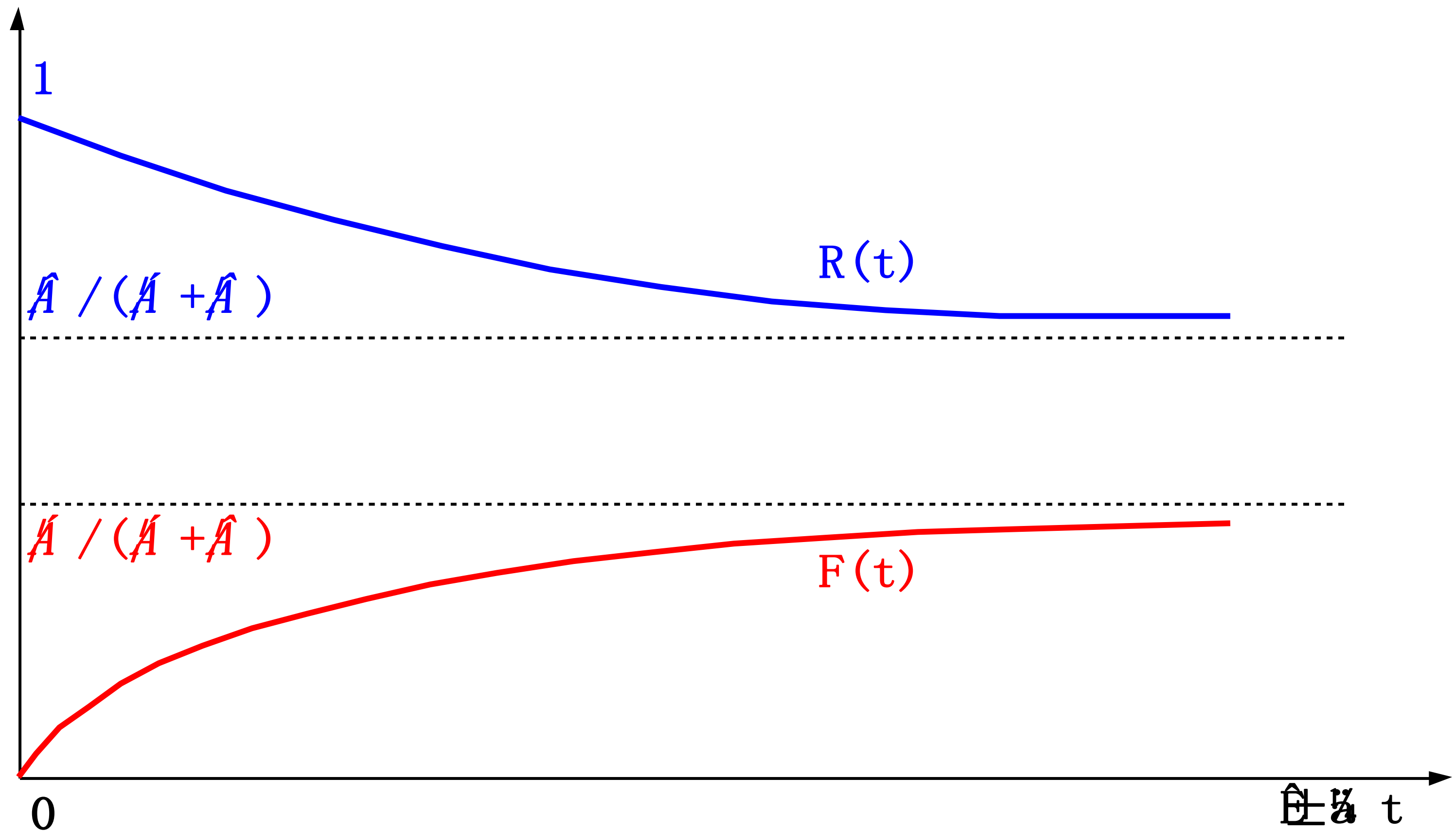
$$R(t)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

$$R=\frac{T_1}{T_1+T_2}=\frac{MTBF}{MTBF+MTTR}$$

– 可修复系统与不可修复系统的比较

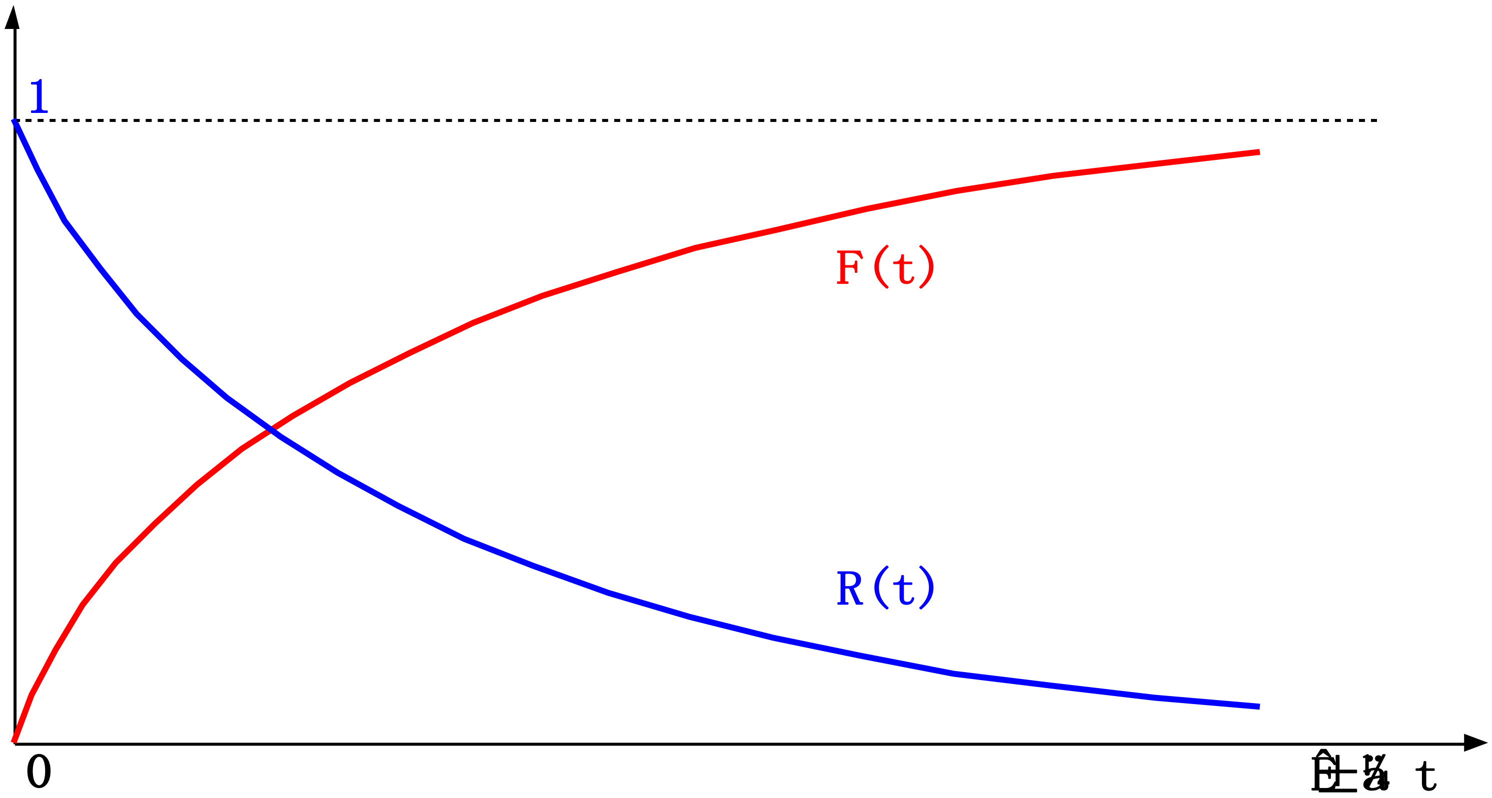
= 可靠度的比较

≡ 可修复系统: $\lim\limits_{t\to\infty} R(t)$ 和 $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)$ 都是非零常数



≡不可修复系统:

Δ曲线形状随失效率α而变化



5.1.3. 复杂系统的分解

- 复杂的系统通常可以分解为较简单的子系统
  - 如果子系统的失效率 α 和修复率 β 是已知的
    - 则可以通过计算来求复杂系统的可靠度
    - 而不一定需要直接测试
    - 这是很有意义的
      - 一方面这样可以省去费时、费力、费钱的试验测试工作
      - 另一方面这也是设计可靠系统的依据
  - 复杂系统的运行依赖于子系统的正常运行
    - 这种依赖关系与系统的结构有关

– 复杂系统的结构

= 串接系统

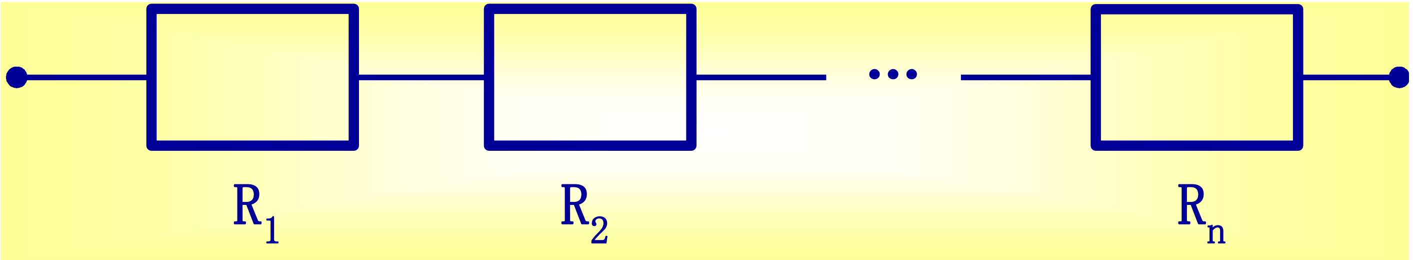
≡系统的运行是以各子系统全部正常运行为充要条件的

≡即：只要有一个子系统失效，本系统就失效

≡这相当于电路中的串联电路

Δ只要有一个串联元件断开，电路就不再连通

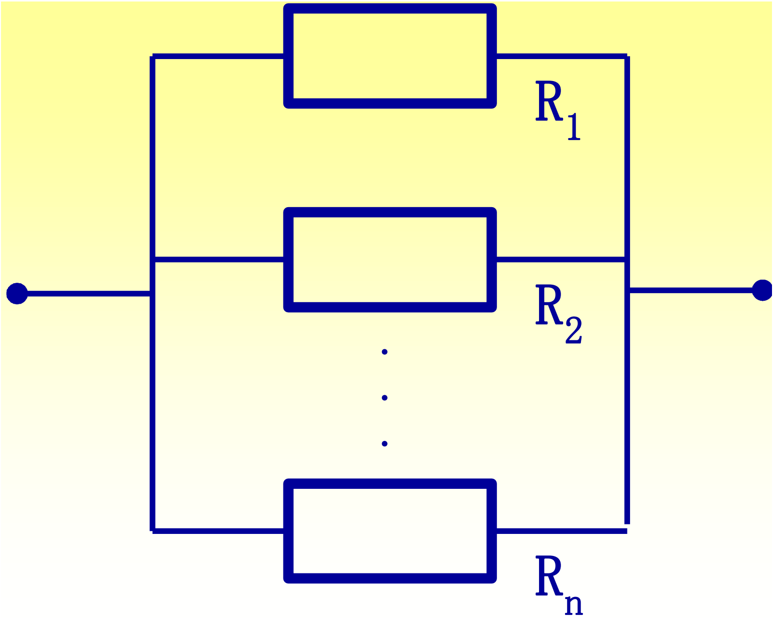
≡系统的分解形式



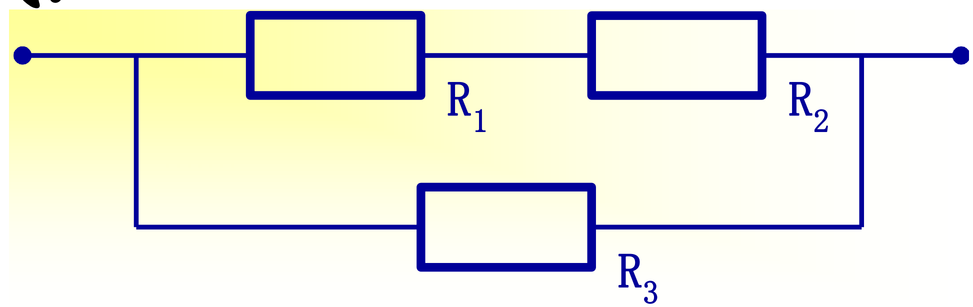
Δ各子系统的可靠度分别为：R_1，R_2，…，R_n

并接系统

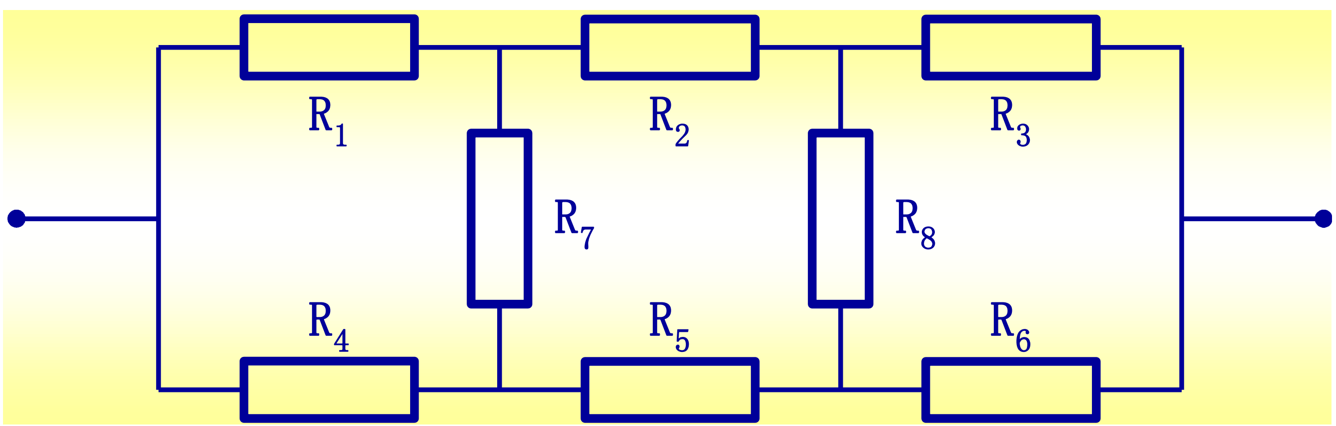
- 系统失效的充要条件是各子系统全部失效
- 即：只要有一个子系统能运行，本系统就能正常运行
- 这相当于电路中的并联电路
  - 只要有一个并联元件正常连通
  - 即使其它元件均已断开，电路还是连通的
- 系统的分解形式
  - 各子系统的可靠度分别为：
    R_1，R_2，…；R_n



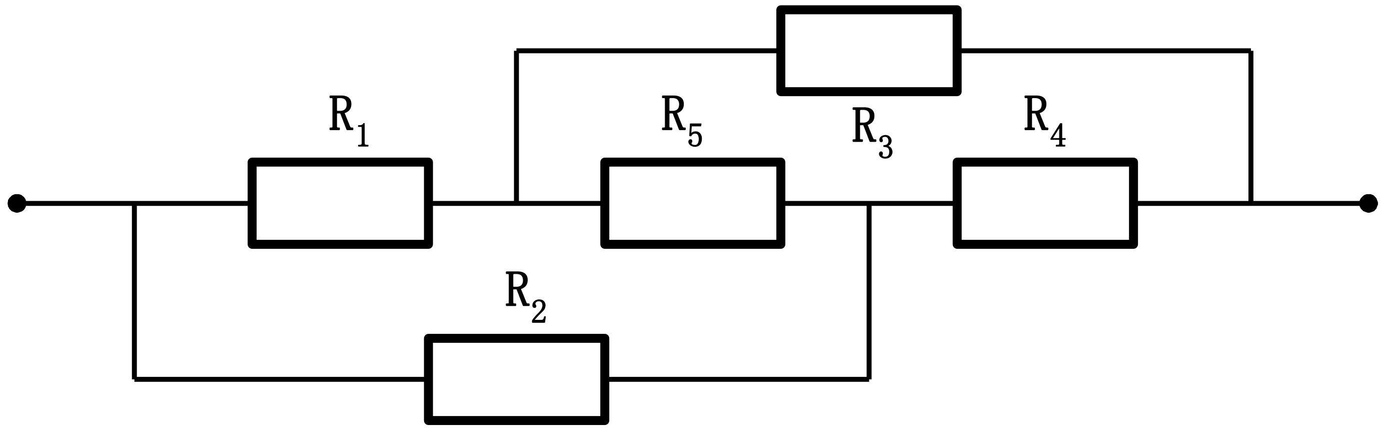
- 串并混合系统
  - 系统中即有串接的部分，也有并接的部分
  - 系统的分解形式:

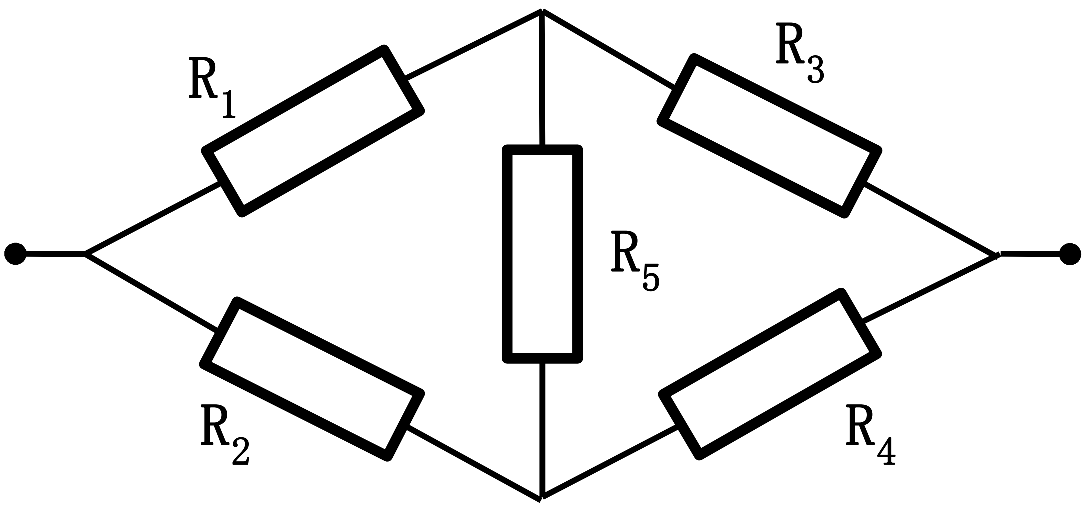


- 其它结构
  - 不能用串接和并接来表示的情况
  - 梯形结构



≡再如：桥式结构





– 各种复杂系统的可靠度的计算方法

= 假设:

≡ 各子系统是相互独立的

≡ 即某一子系统是否正常进行，并不影响其它子系统的可靠度

≡ 对于不可修复子系统，可靠度**R**就是前述 **R（t）**

Δ $R_i = e^{-\alpha_i t}$

Δ $F_i = 1 - R_i = 1 - e^{-\alpha_i t}$

≡ 对于可修复子系统，可靠度**R**就是稳态可靠度

Δ $R_i = \dfrac{\beta_i}{\alpha_i + \beta_i}$

Δ $F_i = \dfrac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} = 1 - R_i$

= 串接系统可靠度计算方法

≡ 串接系统的可靠度就是各子系统可靠度 R_i 之乘积

Δ $$R=\prod_{i=1}^{n} R_i \qquad (5-18)$$

≡ 串接系统的不可靠度为:

Δ $$F=1-R=1-\prod_{i=1}^{n} R_i=1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_i) \qquad (5-19)$$

≡ 串接系统的可靠度R必小于任一子系统的可靠度R_i

Δ 因为各子系统的可靠度R_i（$i=1，2，\cdots；n$）均小于1

Δ 所以一定有：$R<R_i$（ $i=1，2，\cdots；n$）

≡ 串接的子系统越多，系统的可靠度也就越小

≡例1 一个系统由 n 个不可修复子系统串接而成

- Δ各子系统失效率均为**α** $R_i(t) = e^{-\alpha t}$
- Δ或平均寿命均为**1/** α
- Δ则此系统的可靠度为: $R(t) = e^{-n\alpha t}$
- Δ此系统的平均寿命为: $T = \int_0^\infty R(t)dt$

- $T = \dfrac{1}{n\alpha}$ 即缩短到1/n

≡例2 一块由10万个元件构成的集成电路

- Δ若各元件的寿命均为最高可靠级:10^{10}小时（≈114,1552年）
- Δ则该集成电路的平均寿命将只有：**10^5小时**
- Δ接近最低可靠级了

- ≡大系统的设计原则
  - Δ尽量避免大量的串接系统的存在
  - Δ这也是设计工作中最简单的原理
  - Δ为的是保证可靠性
  - Δ一个系统，不宜为了稍稍提高一些性能而使设计复杂化
    - 这样反而会带来不良后果
  - Δ如果常出故障，则高性能是无意义的

- ≡若各子系统的可靠度相差悬殊
  - Δ则可作近似计算
  - Δ即高可靠度的子系统的α_i较小，可忽略不计
  - Δ只选几个低可靠度的子系统，即薄弱环节来计算
  - Δ从而简化计算工作

≡若各子系统均为不可修复系统

Δ各子系统的失效率为**α_i**（***i*** **= 1, 2, …, n**）

Δ则全系统的可靠度为：

- $$R = e^{-t\cdot\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}$$ **（5－20）**

Δ全系统的平均寿命为：

- $$T = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T_i}}$$ **（5－21－1）**

Δ系统的等效失效率为：

- $$\alpha = \frac{1}{T} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$ **（5－21－2）**

≡若各子系统都是可修复系统

Δ则总失效率与不可修复系统的情况一样：$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

Δ全系统的平均故障间隔时间为

- $$MTBF = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{MTBF_i}}$$ （5－22）

Δ由可修复系统可靠度公式（5－16）可求得平均修复时间为：

- （5－23）

$$MTTR = MTBF \cdot \frac{1-R}{R} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \cdot \frac{1 - \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\alpha_i + \beta_i}}{\prod_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\alpha_i + \beta_i}} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{\alpha_i}{\beta_i}\right) - 1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

- 当一个子系统失效，进行维修时，其它子系统也停止运行的情况
  - Δ 这样做可以节省运行的损耗和费用
  - Δ 但是这样一来，各子系统就不再是独立的了
  - Δ 假设正常运行中，第r个子系统失效
  - Δ 其平均修复时间为$1/\beta_r$
  - Δ 各子系统的失效概率应与它们各自的失效率α_i成正比
  - Δ 即第r个子系统失效的概率为：
    - $$p_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$
  - Δ 加权平均，可得全系统的平均修复时间：
    - $$MTTR = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\beta_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\beta_i}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

Δ 当该子系统修复后，开启所有子系统，

Δ 直到又一个子系统失效，这与以前各子系统独立情况一样，

Δ 平均故障间隔时间仍为：

- $$MTBF = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

Δ 这种情况下，全系统的可靠度是： $R' = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\beta_i}}$

≡与各子系统独立时的可靠度相比较： $R = \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\alpha_i + \beta_i} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)}$

- 由于： $$\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{\alpha_i}{\beta_i}\right) > 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\beta_i}$$

- 所以： $\mathbf{R}' > \mathbf{R}$

Δ 这是容易理解的，因为许多子系统停止了不必要的运行

Δ 这种情况下，修复过程不会有另一个和多个子系统出故障

Δ 即任一时刻，最多只可能有一个子系统处于失效状态

≡若系统由可修复子系统和不可修复子系统混合构成

Δ 只要各子系统相互独立，则可靠度仍然是:

- $$R = \prod_{i=1}^{n} R_i$$

Δ 而系统寿命则有些差别

Δ 设n个子系统中

- 有m个是不可修复的，失效率分别为：α_1，α_2，…；α_m
- 其余$n-m$个是可修复的，失效率分别为$\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots,\alpha_n$
- 修复率分别为$\beta_{m+1},\beta_{m+2},\cdots,\beta_n$

Δ 由于串接系统中，一个子系统失效就使全系统失效

Δ 所以系统平均寿命与所有子系统都是不可修复系统的情况是一样的

- $$T = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

Δ若失效的子系统是一个可修复系统

- 修复后仍可使系统运行
- 此时，系统再运行的时间已不是一般意义上的寿命了

Δ假设可修复子系统已进入稳态，则全系统平均运行时间为

- $$T' = \frac{\prod_{i=m+1}^{n} \frac{\beta_i}{\alpha_i + \beta_i}}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i} \cdot \prod_{i=m+1}^{n} \frac{\beta_i}{\alpha_i + \beta_i} \qquad (5-25)$$

- 前面一项是各不可修复系统串接时的平均寿命
- 后面的乘积项是各可修复系统串接时的运行率

- 并接系统可靠度计算方法
  - 并接系统失效，必须所有子系统均失效
  - 所以，全系统的不可靠度等于各子系统的不可靠度的乘积
    - $$F=\prod_{i=1}^{n}F_i=\prod_{i=1}^{n}(1-R_i)$$
  - 进而得到并接系统的可靠度:
    - $$R=1-F=1-\prod_{i=1}^{n}F_i=1-\prod_{i=1}^{n}(1-R_i)$$
    - 可见，并接系统中，子系统越多，可靠性越高
    - 实际上，并接系统就是备用系统
    - 备用系统越多，当然可靠性越高

≡各子系统均为不可修复系统的情况

Δ全系统的可靠度为

$$R(t)=1-\prod_{r=1}^{n}\left[1-R_r(t)\right] \; =1-\prod_{r=1}^{n}\left(1-e^{-\alpha_r t}\right)$$

$$=\sum_{r=1}^{n}e^{-\alpha_r t}-\sum_{r_1\neq r_2}e^{-(\alpha_{r1}+\alpha_{r2})t}+\sum_{r_1\neq r_2\neq r_3}e^{-(\alpha_{r1}+\alpha_{r2}+\alpha_{r3})t}-\cdots\cdots \quad (5-27)$$

Δ全系统的平均寿命为

$$T=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\alpha_r}-\sum_{r_1\neq r_2}\frac{1}{\alpha_{r1}+\alpha_{r2}}+\sum_{r_1\neq r_2\neq r_3}\frac{1}{\alpha_{r1}+\alpha_{r2}+\alpha_{r3}}-\cdots\cdots \quad (5-28)$$

Δ 若各子系统的失效率均相同，均为 α，则

$$T = \frac{n}{\alpha} - \frac{C_n^2}{2\cdot\alpha} + \frac{C_n^3}{3\cdot\alpha} - \cdots\cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n\cdot\alpha}$$

n	2	3	4	5	6
αT	1.5	1.83	2.08	2.28	2.45
αT /n	0.75	0.61	0.52	0.46	0.41

- αT是系统平均寿命T与子系统平均寿命T_i之比

Δ 通过计算可以看出：

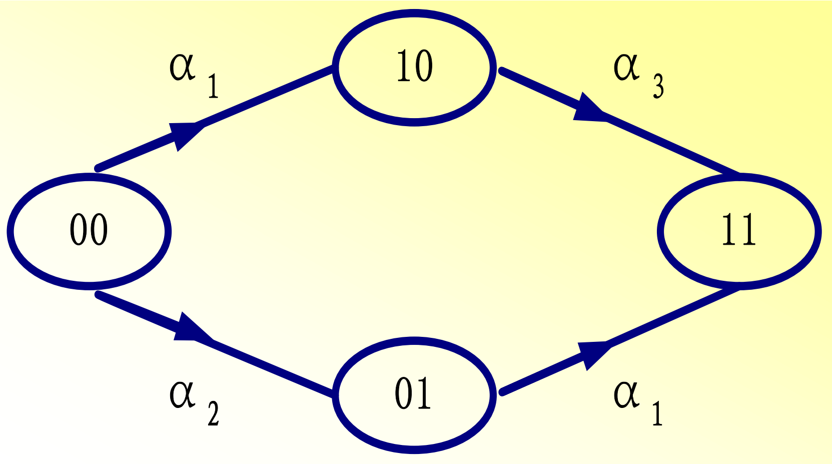
- 子系统增多时，系统平均寿命并不按正比例增大
- αT /n是效率，此效率是逐渐下降的（系统寿命随子系统数增加的效率）
- 这是因为各子系统相互独立，且从开始就一直在工作，都在消耗各自的寿命
- 这相当于热备份工作系统

Δ要提高效率，可以使用冷备份工作方式

- 即系统中只有一个子系统处于运行状态
- 当它失效时，才启动另一个子系统
- 这样一来，当有n个子系统时，平均寿命将增加到n倍，上述效率 $\alpha T/n$ 将成为1
- 在这种方式下，各子系统已不再是相互独立的
- 在子系统转换工作时，会出现系统的短时失效
- 因为启动一个子系统往往是需要一定的时间
- 这种短时失效在很多实际应用中是不能容忍的

Δ 折衷方式----半热备份工作方式（温备份）

- 一个子系统在运行
- 另一个子系统处于半工作状态（如预热而未加工作电压，如复印机）
- 这样可以大大缩短失效时间，达到可以容忍的程度
- 由于处于半热状态，所以故障率比正常工作时要低，可延长寿命
- 以n = 2的情况为例来分析:
- 子系统1在运行，故障率为 α_1
- 子系统2半热备份，故障率为 α_2
- 子系统2在正常工作时，故障率为 α_3，且 $\alpha_3 > \alpha_2$
- 这样的系统有四种状态:



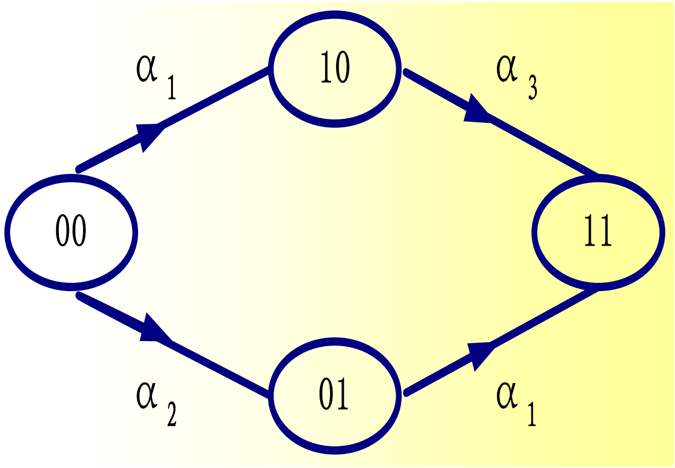
00：表示子系统1在运行，子系统2处于半热状态

01：表示子系统1在运行，子系统2已失效

10：表示子系统1失效，子系统2正常运行

11：表示两个子系统均已失效

- 令各状态在t时刻的概率分别为$P_{00}(t)$，$P_{01}(t)$，$P_{10}(t)$，$P_{11}(t)$
- 则可得微分方程:



$$\begin{cases} P'_{00}(t) = -(\alpha_1+\alpha_2)P_{00}(t) \\ P'_{01}(t) = \alpha_2 P_{00}(t) - \alpha_1 P_{01}(t) \\ P'_{10}(t) = \alpha_1 P_{00}(t) - \alpha_3 P_{10}(t) \\ P'_{11}(t) = \alpha_1 P_{01}(t) + \alpha_3 P_{10}(t) \end{cases} \quad (5-29)$$

- 初始条件：系统从00状态开始运转，所以：

$P_{00}(0) = 1$

$P_{01}(0) = P_{10}(0) = P_{11}(0) = 0$

- 从（5－29）式的第一式和初始条件可解得：

$$P_{00}(t) = e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}$$

- **从其余各式及初始条件可解得:**

$$P_{01}(t)=e^{-\alpha_1 t}-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}$$

$$P_{10}(t)=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3}\cdot\left[e^{-\alpha_3 t}-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}\right]$$

$$P_{11}(t)=1-e^{-\alpha_1 t}-\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3}\cdot e^{-\alpha_3 t}+\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3}\cdot e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}$$

- **状态11就是整个系统失效，所以系统可靠度为:**

$$\begin{aligned}R(t)&=1-P_{11}(t)\\&=e^{-\alpha_1 t}+\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3}\cdot\left[e^{-\alpha_3 t}-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}\right]\end{aligned} \qquad (5-30)$$

- **系统平均寿命为:**

$$T=\int_0^\infty R(t)dt=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{\alpha_1}{\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2)} \qquad (5-31)$$

- 若$\alpha_2=0$，就成为冷备份方式，其平均寿命为：

$$T=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{\alpha_1}{\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$T_1=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_3}$$

- 若$\alpha_3=\alpha_2$，就成为热备份方式，其平均寿命为：

$$T_2=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_3}-\frac{1}{\alpha_1+\alpha_3}$$

- 显然有：$\mathbf{T}_1>\mathbf{T}>\mathbf{T}_2$
- 即：半热备份方式的平均寿命短于冷备份方式
- 长于热备份方式

≡各子系统均为可修复系统的情况

∆ 设各子系统的修复率分别为β_i，（i = 1，2，⋯，n）

∆ 则平均修复时间为：

$$MTTR = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \beta_i} \qquad (5-32)$$

∆ 由可修复系统可靠度公式（5－16）式和并联系统可靠度公式（5－26）式可得平均故障间隔时间：

$$MTBF = \frac{R}{1-R} \cdot MTTR = \frac{1-\prod_{i=1}^{n}(1-R_i)}{\prod_{i=1}^{n}(1-R_i)} \cdot MTTR = \frac{\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{\beta_i}{\alpha_i})-1}{\sum_{i=1}^{n}\beta_i} \qquad (5-33)$$

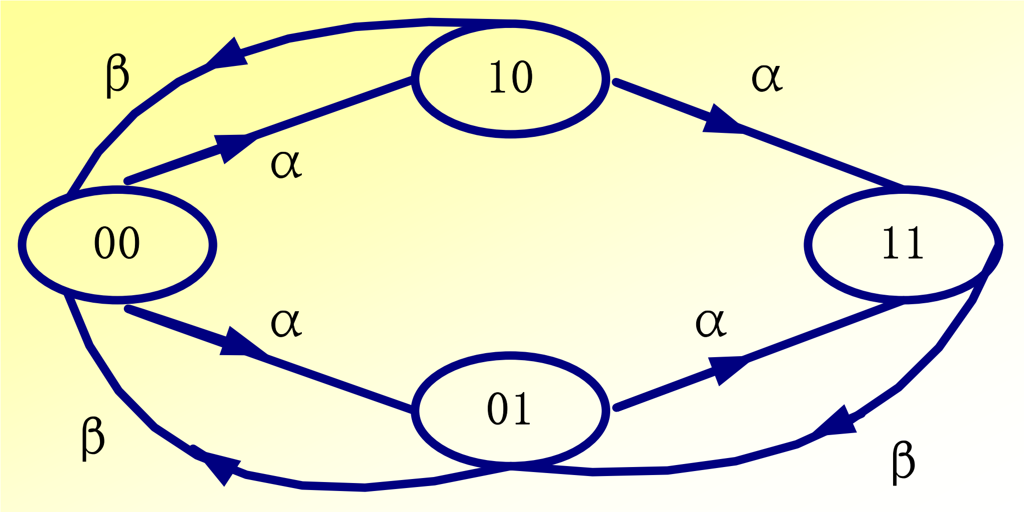
∆ 其中：

$$R_i(t) = \frac{\beta_i}{\alpha_i + \beta_i}$$

Δ 维修能力受限的情况

- 实际工作中，各子系统有故障时，就进行维修
- 当一个子系统还未修复时，另一个子系统又出故障
- 修复能力受限时，就需要等前一个修复后才能进行修复
- 这时，各子系统不再相互独立，需另行分析，不能直接引用前面的公式
- 现以 **n = 2** 个子系统的情况为例来说明计算方法
- 设两个子系统的故障率都是α，修复率都是β
- 并规定当两个子系统均出故障时，先修复第一个子系统
- 令（00），（01），（10），（11）是系统的四种状态

  "0"代表运行　　　　"1"代表失效
- 状态转移图：

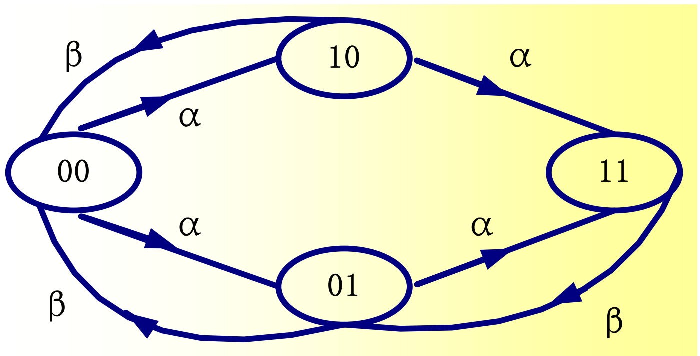


状态（11）只能转移到（01）状态

而不会转移到（10）状态

这是因为规定先修复第一子系统

- 稳态状态方程:



$$\begin{cases} 2\alpha \cdot p_{00} = \beta \cdot (p_{10} + p_{01}) \\ (\alpha + \beta) \cdot p_{10} = \alpha \cdot p_{00} \\ (\alpha + \beta) \cdot p_{01} = \alpha \cdot p_{00} + \beta \cdot p_{11} \\ \beta \cdot p_{11} = \alpha \cdot (p_{01} + p_{10}) \end{cases}$$

- 归一条件: $p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1$

- 可解得: $$p_{11} = \frac{2 \cdot \alpha^2}{2 \cdot \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2}$$

- $\mathbf{p_{11}}$就是系统的不可靠度，即: $\mathbf{F = p_{11}}$
- 所以系统的可靠度为:

$$R = 1 - p_{11} = \frac{(2 \cdot \alpha + \beta) \cdot \beta}{2 \cdot \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2}$$

- 若维修能力无限制，即两个子系统可以同时维修，则它们是相互独立的，于是可靠度变为：

$$R' = 1 - \left(1 - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 = \frac{(2\cdot\alpha+\beta)\cdot\beta}{\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\beta+\beta^2}$$

- 其中： $R_i(t) = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$

$$R = 1 - p_{11} = \frac{(2\cdot\alpha+\beta)\cdot\beta}{2\cdot\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\beta+\beta^2}$$

- 可见，有 **R** $<$ **R**′
- 这是维修能力受限的代价
- 但是，当**α** << β 时，即子系统都是高可靠时，
- **R**与**R**′ 的差别就不大了

串并混合系统可靠度计算方法

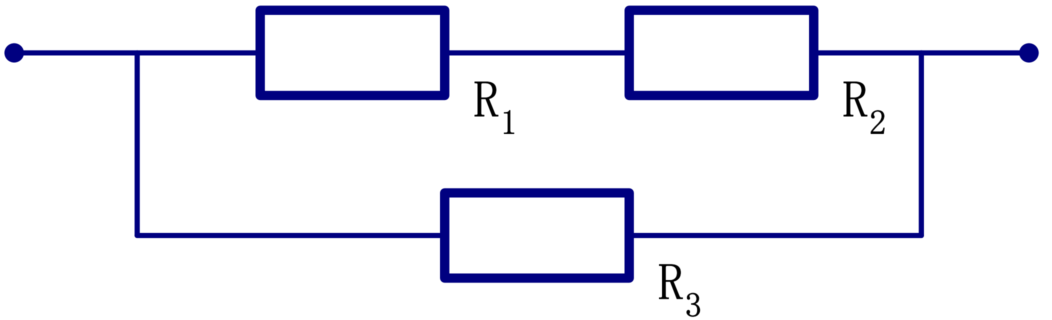
- 一般方法
  - 先把串联支路用等效系统取代
  - 再把并联支路用等效系统取代
  - 依此下去，可求得全系统的可靠度和不可靠度

- 要点
  - 串接时：可靠度相乘
  - 并接时：不可靠度相乘
  - 归一性：可靠度和不可靠度之和为1

- 注意：
  - 这些方法都是在各子系统相互独立时才适用

≡例

Δ如图



Δ上面一个分支是串接系统

- 其可靠度是：R_1R_2
- 不可靠度是：$1-R_1R_2$

Δ再与下面一条支路并接

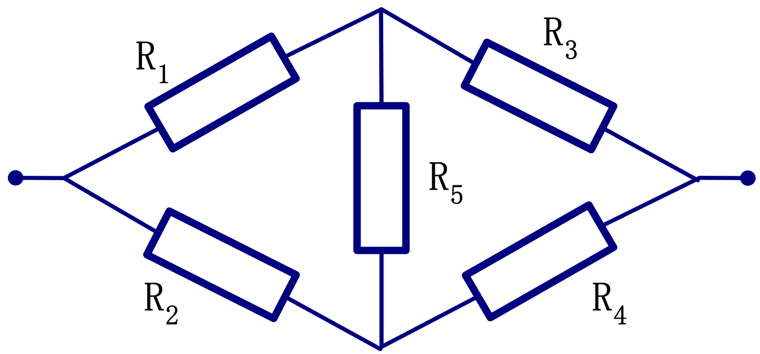
- 其不可靠度为：$F=(1-R_1R_2)(1-R_3)$
- 全系统可靠度为：$R=1-F$

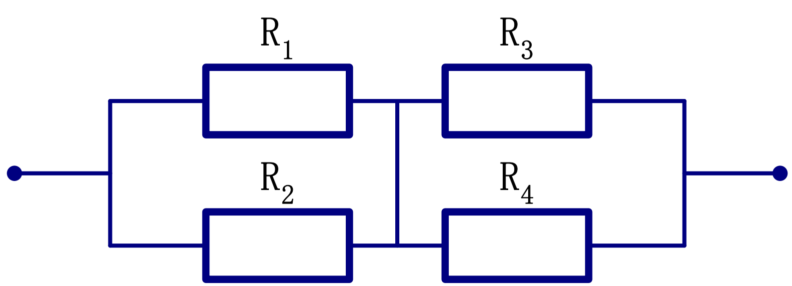
$$=R_1R_2+R_3-R_1R_2R_3$$

桥式系统可靠度计算方法

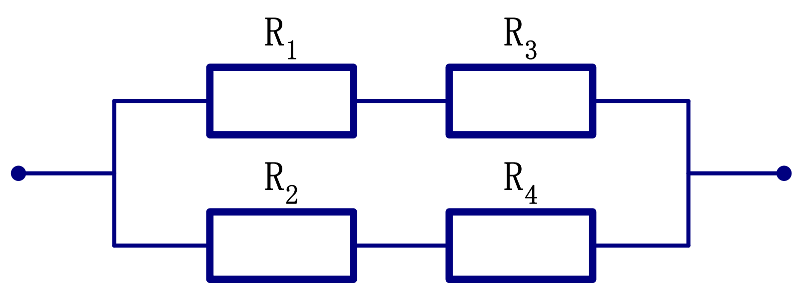
可分别考虑桥的两个状态

- 当桥上子系统运行时，概率为R_5，
  - 此时相当于短路
  - 如下图A
- 当桥上子系统失效时
  - 概率为$1-R_5$
  - 此时相当于断路
  - 如下图B





图A

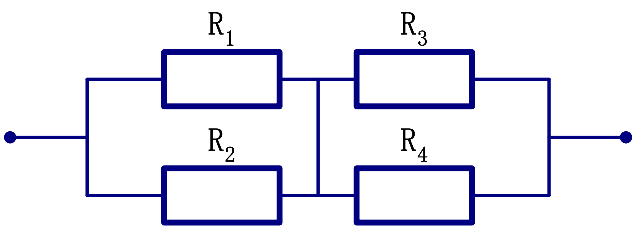


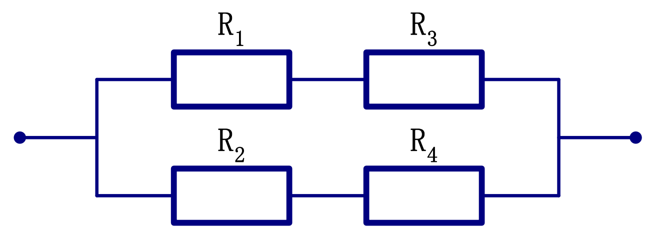
图B

≡ 于是，分别转化为串并系统

≡ 分别求出可靠度，并合成全系统可靠度

- Δ $\mathbf{R_1 || R_2}$并联支路可靠度：$\mathbf{1 - F_1F_2 = 1 - (1 - R_1)(1 - R_2)}$
- Δ $\mathbf{R_3 || R_4}$并联支路可靠度：$\mathbf{1 - F_3F_4 = 1 - (1 - R_3)(1 - R_4)}$
- Δ $\mathbf{R_1 || R_2}$与$\mathbf{R_3 || R_4}$串联的可靠度：$\mathbf{(1 - F_1F_2)(1 - F_3F_4)}$
- Δ $\mathbf{R_1 - R_3}$串联支路可靠度：$\mathbf{R_1 R_3}$，不可靠度：$\mathbf{1 - R_1 R_3}$
- Δ $\mathbf{R_2 - R_4}$串联支路可靠度：$\mathbf{R_2 R_4}$，不可靠度：$\mathbf{1 - R_2 R_4}$
- Δ $\mathbf{(R_1 - R_3)}$串联支路$\mathbf{||(R_2 - R_4)}$串联支路的可靠度:
  - $\mathbf{1 - (1 - R_1 R_3)(1 - R_2 R_4)}$





Δ 所以，全系统可靠度为:

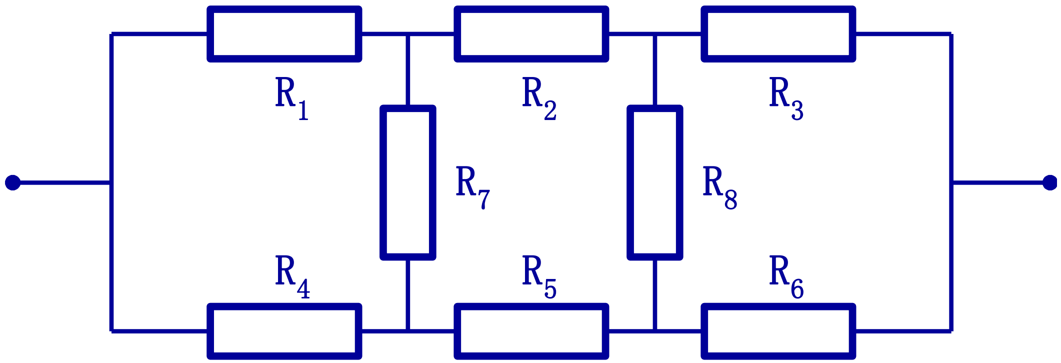
$$R = R_5 \cdot (1 - F_1F_2) \cdot (1 - F_3F_4) + (1 - R_5) \cdot [1 - (1 - R_1R_3) \cdot (1 - R_2R_4)]$$

$$= R_5 \cdot [1 - (1 - R_1) \cdot (1 - R_2)] \cdot [1 - (1 - R_3) \cdot (1 - R_4)] + (1 - R_5) \cdot [1 - (1 - R_1R_3) \cdot (1 - R_2R_4)]$$

$$= R_5 \cdot (R_1 + R_2 - R_1R_2) \cdot (R_3 + R_4 - R_3R_4) + (1 - R_5) \cdot (R_1R_3 + R_2R_4 - R_1R_2R_3R_4)$$

梯式系统可靠度计算方法

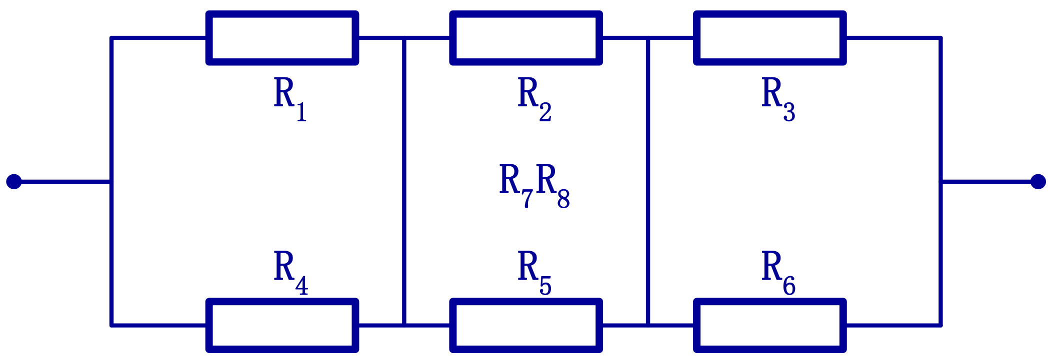
- 基本思路：与桥式系统相同
- 以下图梯式系统为例



Δ 有两个桥，可靠度分别为：**R_7，R_8**

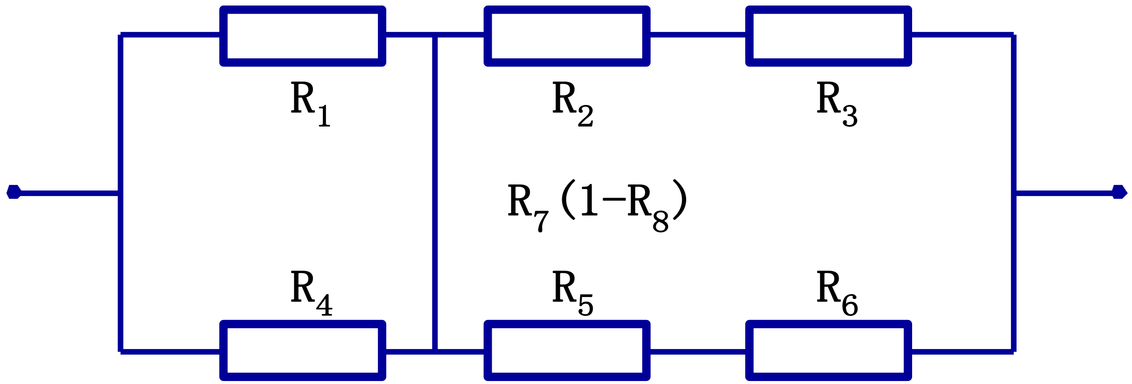
Δ 可分为四种状态来考虑：

- **R_7，R_8**均正常运行，概率为：**R_7R_8**



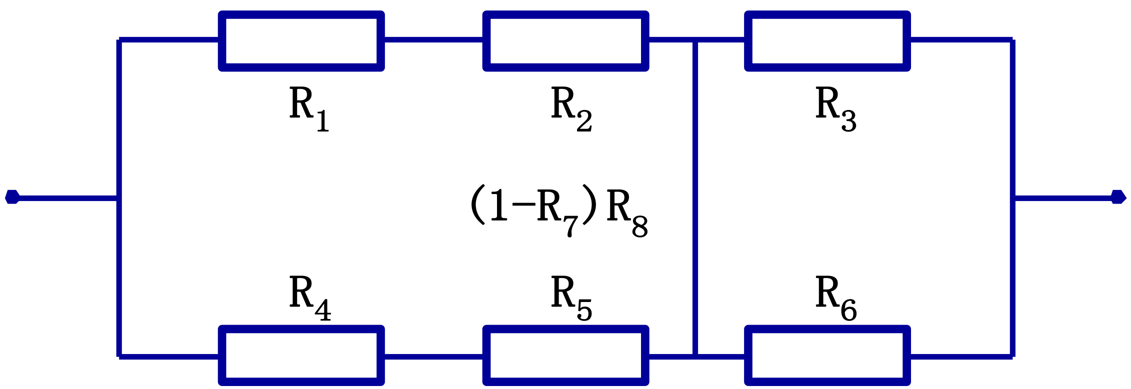
$$R_{00} = R_7R_8 \cdot (1 - F_1F_4) \cdot (1 - F_2F_5) \cdot (1 - F_3F_6)$$

- **R_7正常运行，R_8失效，概率为：$R_7（1-R_8）$**



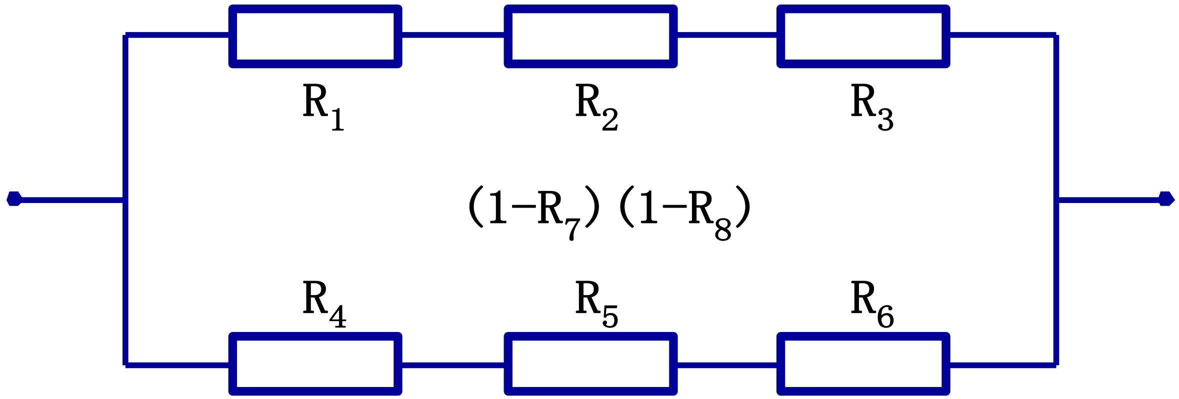
$$R_{01}=R_7(1-R_8)\cdot(1-F_1F_4)\cdot\left[1-(1-R_2R_3)\cdot(1-R_5R_6)\right]$$

- **R_7失效，R_8正常运行，概率为：（$1-R_7$）R_8**



$$R_{10}=(1-R_7)\cdot R_8\cdot\left[1-(1-R_1R_2)\cdot(1-R_4R_5)\right]\cdot(1-F_3F_6)$$

- **R_7，R_8均失效，概率为：$(1-R_7)(1-R_8)$**



$$R_{11}=(1-R_7)\cdot(1-R_8)\cdot\left[1-(1-R_1R_2R_3)\cdot(1-R_4R_5R_6)\right]$$

Δ 于是，按分别转化出来的串并系统求出可靠度

Δ 然后合成系统可靠度

≡合成系统可靠度:

$$
\begin{aligned}
R = {} & R_7 R_8 \cdot (1 - F_1 F_4) \cdot (1 - F_2 F_5) \cdot (1 - F_3 F_6) \\
& + R_7 (1 - R_8) \cdot (1 - F_1 F_4) \cdot \left[1 - (1 - R_2 R_3) \cdot (1 - R_5 R_6)\right] \\
& + (1 - R_7) \cdot R_8 \cdot \left[1 - (1 - R_1 R_2) \cdot (1 - R_4 R_5)\right] \cdot (1 - F_3 F_6) \\
& + (1 - R_7) \cdot (1 - R_8) \cdot \left[1 - (1 - R_1 R_2 R_3) \cdot (1 - R_4 R_5 R_6)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= {} & R_7 R_8 \cdot \left(R_1 + R_4 - R_1 R_4\right) \cdot \left(R_2 + R_5 - R_2 R_5\right) \cdot \left(R_3 + R_6 - R_3 R_6\right) \\
& + R_7 (1 - R_8) \cdot \left(R_1 + R_4 - R_1 R_4\right) \cdot \left(R_2 R_3 + R_5 R_6 - R_2 R_3 R_5 R_6\right) \\
& + (1 - R_7) \cdot R_8 \cdot \left(R_1 R_2 + R_4 R_5 - R_1 R_2 R_4 R_5\right) \cdot \left(R_3 + R_6 - R_3 R_6\right) \\
& + (1 - R_7) \cdot (1 - R_8) \cdot \left(R_1 R_2 R_3 + R_4 R_5 R_6 - R_1 R_2 R_3 R_4 R_5 R_6\right)
\end{aligned}
$$

5.1.4. 综合可靠度

– 回顾
  - 在前面的讨论中，均认为系统只有两种状态
    - 正常运行
    - 失效
  - 可靠度就是正常运行的概率
  - 状态变量为两状态的情况是一种最简单的情况

– 实际中
  - 在实际问题中，往往会有中间状态

- 例:
  - 系统还能运行，但性能已下降到不可容忍的程度
  - 这种情况算不算失效呢?
  - 又：性能下降到何种程度就算失效呢?
- 这需要定义更广泛意义上的可靠度
- 当考虑运行性能或其它要求时
  - 就可能会有多个参量必须考虑，即多个随机变量
  - 有些可能是离散变量
  - 有些可能是连续变量
  - 其中，离散变量也不一定是两状态的，可以是多状态的

- 综合可靠度的定义
  - 设有n个参量x_1，x_2，…，x_n影响系统的可靠性
    - 这些参量一般都是随机变量
    - 其联合概率密度函数为$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$
    - 若有些变量是离散的，则f中将含有δ函数
    - 这些变量的取值范围集W为：$W = x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$
  - 根据可靠性的要求来定义可靠集U和不可靠集V
    - $$U = \{x_1, x_2, \cdots, x_n : x_1, x_2, \cdots, x_n \text{满足可靠性要求}\} \quad (5\text{-}37\text{-}1)$$
    - $$V = \{x_1, x_2, \cdots, x_n : x_1, x_2, \cdots, x_n \text{不满足可靠性要求}\} \quad (5\text{-}37\text{-}2)$$
    - $U + V = W$

- 进而可定义可靠度和不可靠度
  - 可靠度： $$\mathrm{R}=\int\cdots\int_{U} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n \qquad \textbf{(5-38)}$$
  - 不可靠度： $$\mathrm{F}=\int\cdots\int_{V} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n \qquad \textbf{(5-39)}$$
  - 有关系式：
    - Δ **R + F = 1 = P（w）**
    - Δ **V = W − U**
  - 这样的可靠度还可用示性函数来计算
    - Δ 示性函数： $$I(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}1, & (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in U\\ 0, & (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in V\end{cases}$$
    - Δ 可靠度R就是 I（x_1，x_2， ··x_n）的数学期望：

- $$\mathrm{R}=E[I]=\int\cdots\int_{W} I\cdot f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n \qquad \textbf{(5-40)}$$

- 这种综合可靠度一般已能较好地反映实际情况了
  - 当然在规定可靠集时还会碰到困难
    - 也还会带有一定的随意性
  - 要定义得越确切，变量就会越多，计算也越复杂
  - 对于离散变量，上述积分就转化成求和

- 用加权平均法定义的综合可靠度
  - 当有较多因素影响可靠性时
  - 可分别计算每个因素的可靠度，设为R_i，$i = 1, 2, \cdots; n$
  - 然后用适当的加权系数，求加权和，
  - 而得到综合可靠度：$$R = \sum_{i=1}^{n} C_i R_i \qquad \textbf{(5-41)}$$
    - 其中：$0 < C_i < 1$，$\sum_{i=1}^{n} C_i = 1$，是加权系数
  - 这种方法中所用到的积分都是一维的（用于求出R_i）
    - 所以，计算上会简单一些
    - 但是也要为每个因素规定可靠集，另外还要规定加权系数
    - 加权系数实际上是明确每个R_i在综合可靠性中的地位和作用
    - 这在实际中是很难做准确的

5.1.5. 可靠性设计

- 可靠性设计的基本原则
  - 避免串接的子系统过多
    - 尽量简化系统构成
    - 减少元器件和部件的数目
    - 接口尽量标准化，以减少转换设备
    - 在电路转接网中，表现为：应尽量减少转接次数

- 必要时采用备份，以形成并接系统
  - 可采用冷备份、半热备份、热备份方式
  - 也可采用变相的备用设施
    - 如在通信网中，若把呼损看作是不可靠的因素之一
    - 则采用迂回路由，或大群化效应等，等效于增加了备用电路
  - 在一个大系统中
    - 对薄弱环节，即可靠度较低的部分
    - 或对核心部分，关键部分（如主控模块等）
    - 作备份是非常重要的

- 尽量减小各子系统和部件的故障率α
  - 元器件的选择、老化、筛选
  - 生产和安装工艺的提高
  - 精心设计和测试
- 尽量提高修复率β
  - 增加维护力量，提高维护人员素质
  - 采用故障诊断技术，以便于快速置换电路板、模块、或子系统

- 最佳可靠性设计
  - 上述可靠性设计都是要付出代价的
    - 简化系统可能会影响性能
    - 多设置备份要增加投资
    - 减小α和提高β会增加成本

  - 最佳可靠性设计就是对这些矛盾因素取得妥协
    - 即合理分配各子系统的可靠度
    - 以使在保证总可靠度的前提下
    - 付出最少的费用

- 一般方法
  - 设一个系统由n个子系统组成
    - Δ各子系统的可靠度分别为：R_1，R_2，…，R_n
    - Δ为此所需的费用分别为：x_1，x_2，…，x_n
    - Δ这些费用与可靠度有关：
      - $R_i = R_i(x_i) \quad i = 1, 2, \cdots, n$ (5-42)
    - Δ全系统的可靠度是这些R_i的函数
      - $R = f(R_1, R_2, \cdots, R_n)$ (5-43)
    - Δ总费用为：
      - $$X = \sum_{i=1}^{n} x_i$$ (5-44)

≡最佳可靠性设计

Δ就是保证**R**达到要求的情况下

Δ以总费用**X**最小为准则

Δ来分配各子系统的$\mathbf{R_i}$

≡求解方法:

Δ（拉氏乘子法）拉格朗日乘子法

$$\frac{\partial X}{\partial R_i}+\lambda\cdot\frac{\partial R}{\partial R_i}=0$$

= 例

≡设子系统的可靠性R_i与费用x_i有如下关系：

Δ

$$R_i(x_i) = C_i(1 - e^{-\frac{x_i - b_i}{a_i}}) \qquad (5\text{-}45)$$

Δ b_i：最低代价，当$x_i = b_i$时，可靠性$R_i = 0$

Δ a_i：是增加可靠度所付费用的增长率

- a_i越大，要增加可靠度所付的代价就越大

Δ c_i：最大可靠度，要在代价趋向无限大时才能达到

≡设一个系统由三个这样的子系统串接而成

Δ $a_1 = 1$， $a_2 = 2$， $a_3 = 3$

Δ $b_1 = 1$， $b_2 = 2$， $b_3 = 3$

Δ $c_1 = c_2 = c_3 = 1$

≡要求：总可靠度达到0.9

≡求：最小代价和相应的各子系统的可靠度R_i

≡ **解:**

Δ 由（5－45）式可得到 x_i 的表达式

• $$x_i = -a_i \ln\left(1-\frac{R_i}{C_i}\right)+b_i \qquad \textbf{(5-46)}$$

Δ 总代价为:

$$X = x_1 + x_2 + x_3 = 6 - \ln(1-R_1) - 2\ln(1-R_2) - 3\ln(1-R_3)$$

Δ 限制条件为: **$R = R_1R_2R_3 = 0.9$**

Δ 应用拉格朗日乘子法得: $$\frac{d}{dR_i}(X+\lambda R)=0$$

$$\frac{1}{1-R_1}+\lambda R_2R_3=0 \qquad \text{亦即:} \qquad \frac{1}{1-R_1}+\lambda\cdot\frac{0.9}{R_1}=0$$

$$\frac{2}{1-R_2}+\lambda R_1R_3=0 \qquad \frac{2}{1-R_2}+\lambda\cdot\frac{0.9}{R_2}=0$$

$$\frac{3}{1-R_3}+\lambda R_1R_2=0 \qquad \frac{3}{1-R_3}+\lambda\cdot\frac{0.9}{R_3}=0$$

Δ 则:

$$R_1=\frac{0.9\lambda}{0.9\lambda-1}$$

$$R_2=\frac{0.9\lambda}{0.9\lambda-2}$$

$$R_3=\frac{0.9\lambda}{0.9\lambda-3}$$

Δ利用限制条件可求出λ:

$$R_1R_2R_3=\frac{(0.9\lambda)^3}{(0.9\lambda-1)(0.9\lambda-2)(0.9\lambda-3)}=0.9$$

$$0.9\lambda=-56$$

Δ则:

$$R_1=0.983$$

$$R_2=0.965$$

$$R_3=0.949$$

总代价: X = 25.7

≡说明

Δ本例中，$C_i = 1$，意味着:

- 只要不顾一切地付出代价，就可以达到任意高的可靠度

Δ但实际中不是这样，通常$C_i < 1$

- (这里是指单一系统)
- 如果采用备份，应另当别论

Δ是否需要使用备份，或用几个备份最合算，也可用类似方法求得

Δ在实际问题中，最困难的是确定（5－45）式中的参数a，b和c

- 这要基于大量的经验数据，还不易做得精确

- 作业:
  - 周先生教材
  - 书上第335页：　5.2，5.3，5.4，5.6
  - 张琳教材
  - 书上第214页：　6.5

(本节结束)