2.2 求 M/M/m（n）中，等待时间 w 的概率密度函数。
解：

M/M/m（n）的概率分布为：

$$p_0=\left[\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(m\rho)^k}{k!}p_0+\frac{(m\rho)^m}{m!}\frac{1-\rho^{n-m-1}}{1-\rho}\right]^{-1}$$

$$p_k=\begin{cases}\dfrac{(m\rho)^k}{k!}p_0 & 0\le k\le m-1\\ \dfrac{m^m}{k!}\rho^k p_0 & m\le k\le n\\ 0 & k>n\end{cases}$$

假定 n>m，n≥0，现在来计算概率 P{w>x}，既等待时间大于 x 的概率。

$$P\{w>x\}=\sum_{j=0}^{n}p_j\bullet P_j\{w>x\}$$

其中，P_j\{w>x\}的概率为：

$$P_j\{w>x\}=0\qquad 0\le j\le m-1$$

$$P_j\{w>x\}=\sum_{i=0}^{j-m}e^{-m\mu x}\cdot\frac{(m\mu x)^i}{i!}\qquad m\le j\le n-1$$

$$P_j\{w>x\}=1\qquad m\le j\le n$$

可得：

$$\begin{aligned}P\{w>x\}&=\sum_{j=m}^{n-1}P_j\cdot\sum_{i=0}^{j-m}e^{-m\mu x}\cdot\frac{(m\mu x)^i}{i!}+P_n\\&=\frac{m^m}{m!}P_0\left[\sum_{j=m}^{n-1}\rho^j\cdot\sum_{i=0}^{j-m}e^{-m\mu x}\cdot\frac{(m\mu x)^i}{i!}+\rho^n\right]\\&=\frac{m^m}{m!}P_0\sum_{i=0}^{n-m-1}e^{-m\mu x}\cdot\frac{(m\mu x)^i}{i!}\frac{\rho^{m+i}-\rho^n}{1-\rho}+P_n\end{aligned}$$

$$\text{若}n\to\infty\text{则}\qquad P\{w>x\}=\frac{P_0}{1-\rho}\cdot\frac{(\rho m)^m}{m!}e^{-(m\mu-\lambda)x}$$

特别的，新到顾客需等待的概率为：

$$P\{W>0\}=\frac{P_0}{1-\rho}\cdot\frac{(\rho m)^m}{m!}$$

而
$$f_w(x)=\frac{m^m P_0}{m!(1-\rho)}e^{-m\mu x}[\rho^m(m\mu-\lambda)\sum_{i=0}^{n-m-2}\frac{(\lambda x)^i}{i!}-m\mu\rho^m\frac{(\lambda x)^{n-m-1}}{(n-m-1)!}$$
$$-m\mu\rho^n\frac{(m\mu\lambda)^{n-m-1}}{(n-m-1)!}]$$

在n $\to \infty \qquad f_w(x)=\dfrac{m^m P_0}{m!(1-\rho)}\rho^m\,(m\mu-\lambda)e^{-(m\mu-\lambda)x}$

注： $P\{w=0\}=\sum_{k=0}^{m-1}P_k \qquad P\{w=\infty\}=P_n$

2.4 求M/D/1 排队问题中等待时间W的一、二、三阶矩m_1、m_2、m_3，D表示服务时间为定值b，到达率为λ。

解：

$$G(s)=\frac{s(1-\rho)}{s-\lambda+\lambda B(S)} \qquad \text{其中} \quad B(s)=\int_0^\infty \delta(t-b)e^{-st}dt=e^{-sb}$$

$$\text{从而} \quad G(s)=\frac{s(1-\rho)}{s-\lambda+\lambda e^{-sb}} \quad \text{又} \quad G(s)=\sum_{i=0}^\infty g_i s^i$$

$$\therefore\left(\sum_{i=0}^\infty g_i s^i\right)\left(s-\lambda+\lambda\cdot\sum_{j=0}^\infty\frac{(-sb)^j}{j!}\right)=s(1-\rho)$$

$$g_0=\frac{1-\rho}{1-\lambda b} \quad g_1=\frac{-\lambda b^2(1-\rho)}{2(1-\lambda b)^2} \quad g_2=\frac{(1-\rho)(2\lambda b^3+\lambda^2 b^4)}{12(1-\lambda b)^3}$$

$$g_3=\frac{-(1+2\lambda b)(1-\rho)\lambda b^4}{24(1-\lambda b)^4}\cdots \qquad (\lambda b=\rho)$$

$$m_1=-G'(0)=-g_1=\frac{\lambda b^2}{2(1-\rho)}$$

$$m_2=G''(0)=g_2\times 2=\frac{(2+\rho)\lambda b^3}{6(1-\rho)^2}$$

$$m_3=-G'''(0)=g_3\times 6=\frac{(1+2\rho)\lambda b^4}{4(1-\rho)^3}$$

2.5 求 M/B/1，B/M/1 和 B/B/1 排队问题的平均等待时间$\overline{W}$，其中 B 是二阶指数分布：

$$f(t)=\alpha\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}+(1-\alpha)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \qquad \lambda_1,\lambda_2>0 \qquad 0<\alpha<1$$

解：M/B/1

$$B(S)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\frac{\alpha\lambda_1}{\lambda_1+s}+\frac{(1-\alpha)\lambda_2}{\lambda_2+s}$$

$$w_1=-B'(0)=\frac{\alpha}{\lambda_1}+\frac{1-\alpha}{\lambda_2} \qquad w_2=B''(0)=\frac{2\alpha}{\lambda_1{}^2}+\frac{2(1-\alpha)}{\lambda_2{}^2} \qquad \rho=\lambda w_1=\lambda\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}+\frac{1-\alpha}{\lambda_2}\right)$$

$$\overline{w}=\frac{\lambda m_2}{(1-\rho)}=\frac{\lambda\left[(1-\alpha)\lambda_1{}^2+\alpha\lambda_2{}^2\right]}{\lambda_1{}^2\lambda_2{}^2-\alpha\lambda\lambda_1\lambda_2{}^2-(1-\alpha)\lambda\lambda_1{}^2\lambda_2}$$

B/M/1

$\sigma = B(\mu - \mu\sigma)$ 令 $\lambda_1 / \mu = \rho_1$ $\lambda_2 / \mu = \rho_2$

$$\sigma = \frac{\alpha\lambda_1}{\mu - \mu\sigma + \lambda_1} + \frac{(1-\alpha)\lambda_2}{\mu - \mu\sigma + \lambda_2}$$

取$0 < \alpha < 1$的根

$$\sigma = \frac{1 + \rho_1 + \rho_2 - \sqrt{1 + (\rho_1 - \rho_2)^2 + 2(1-2\alpha)(\rho_1 - \rho_2)}}{2}$$

$$\overline{w} = \frac{\sigma}{\mu(1-\sigma)} = \frac{1 + \rho_1 + \rho_2 - \sqrt{1 + (\rho_1 - \rho_2)^2 + 2(1-2\alpha)(\rho_1 - \rho_2)}}{\mu(1 - \rho_1 - \rho_2 + \sqrt{1 + (\rho_1 - \rho_2)^2 + 2(1-2\alpha)(\rho_1 - \rho_2)})}$$

B/B/1

设到达的概率密度函数为 $f(t) = \alpha\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-\alpha)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$

设离去的概率密度函数为 $f(t) = \alpha\lambda_3 e^{-\lambda_3 t} + (1-\alpha)\lambda_4 e^{-\lambda_4 t}$

假设 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ $\lambda_1 = \lambda_3$ $\lambda_2 = \lambda_4$

$$A(s) = B(s) = \frac{\alpha\lambda_1}{\lambda_1 + s} + \frac{(1-\alpha)\lambda_2}{\lambda_2 + s}$$

$$A(-s)B(s) - 1 = \left(\frac{\alpha\lambda_1}{\lambda_1 - s} + \frac{(1-\alpha)\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right)\left(\frac{\alpha\lambda_1}{\lambda_1 + s} + \frac{(1-\alpha)\lambda_2}{\lambda_2 + s}\right) - 1$$

$$= \frac{\left[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - (\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2)^2\right]s^2 - s^4}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)} = \frac{t^2 s^2 - s^4}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)}$$

取 $\Phi_+(s) = \dfrac{s(t+s)}{(\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)}$ $\Phi_-(s) = \dfrac{s(t-s)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)}$

$$k = \lim_{s \to 0} \frac{\Phi_+(s)}{s} = \frac{t}{\lambda_1\lambda_2} \qquad w(s) = \frac{k}{\Phi_+(s)}$$

$$S_w(s) = \frac{k(\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)}{(t+s)} \qquad \overline{w} = -\left[S_w(s)\right]_{s=0} = \frac{\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)t}{\lambda_1\lambda_2 t}$$

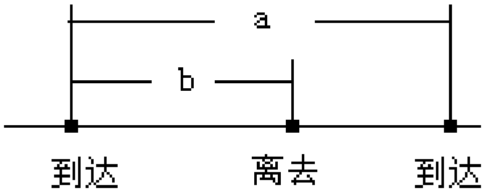
其中 $t = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - (\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2)^2} = \sqrt{(1-\alpha^2)\lambda_1^2 + (2\alpha - \alpha^2)\lambda_2^2 - 2\alpha(1-\alpha)\lambda_1\lambda_2}$

2.6 在 D/D/1 排队问题中，顾客到达的时间间隔为 a，服务时间为 b，均为恒定值，且 a>b，求：稳定状态时系统的队列长度为k的概率p_k，顾客到达时队列的长度为k的概率v_k，顾客离去时队列的长度d_k,以及平均等待时间,并用G/G/1 上界公式求出此时的平均等待时间，评论计算结果，并讨论a≤b的情况。

解：

由于是 D/D/1 问题，故子系统运行情况完全确定，第一个顾客到达后，系统无顾客，

经过 b 后，服务完毕，顾客离去，再经过 a-b 后，下一个顾客到达。



此时有：

$$p_k=\begin{cases} b/a & k=1 \\ (a-b)/a & k=0 \end{cases}$$

$$r_k=d_k=\begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k\neq 0 \end{cases}$$

顾客不等待时 $\overline{w}=0$

G/G/1 上界公式

$$\overline{w}\le\frac{\sigma_r^{\ 2}+\sigma_t^{\ 2}}{2\bar{t}(1-\rho)}\qquad \because p(\tau)=\delta(\tau-a)\qquad p(t)=\delta(t-b)\qquad \therefore \sigma_\tau^{\ 2}=\sigma_t^{\ 2}=0$$

$$\therefore \overline{w}\le\frac{\sigma_\tau^{\ 2}+\sigma_t^{\ 2}}{2\bar{t}(1-\rho)}=0\qquad \therefore \overline{w}=0$$

当 a<b 时系统将不稳定,以恒定的速率增加顾客,即每隔 $\dfrac{ab}{a-b}$ 时间后,系统队列长度增长 1。

2.7 求M/E$_2$/1 即时拒绝系统的呼损，其中E2 是二阶爱尔兰分布，$b(\tau)=(2\mu)^2\tau e^{-2\mu\tau}$

解：

设相邻呼叫到达间隔为 t，如果服务时间 $\tau>t$，将造成呼损，$\tau\le t$ 时无呼损。

$$\therefore p_c(t)=\int_t^\infty b(\tau)d\tau \qquad 则$$

$$p_c=\int_0^\infty a(t)\cdot\int_t^\infty b(\tau)d\tau dt=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\cdot\int_t^\infty (2\mu)^2\tau e^{-2\mu\tau}d\tau dt=\frac{\lambda^2+4\lambda\mu}{(\lambda+2\mu)^2}$$

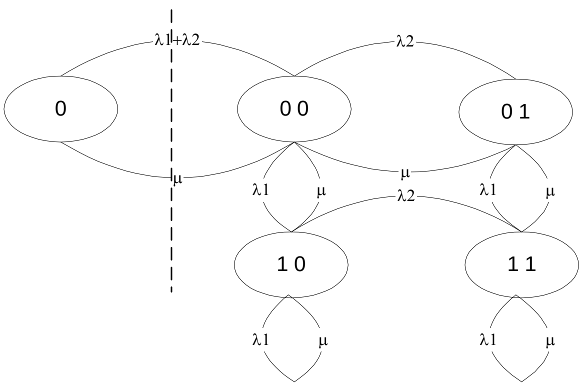
2.8 在优先级别队列中，A 队为优先级，不拒绝，B 队为非优先级，只准一人排队等待（不计在服务中的），且当 A 队无人时才能被服务，求各状态概率，A 队的平均等待时间和 B 队的拒绝概率。

解：

说明：

0 状态代表系统中无顾客状态；

i，j 状态代表系统中正在服务且 A 队中有 i 个顾客，B 队列中有 j 个顾客排队的状态。



状态转移图如右，A 队到达率为 λ_1，B 队到达率为 λ_2，服务率 μ，系统稳定时，应有 $\rho_1=\lambda_1/\mu<1$

可得到特征方程如下:

$$\begin{cases}(\lambda_1+\lambda_2)P_0=\mu P_{00} & \cdots 1\\ (\mu+\lambda_1+\lambda_2)P_{00}=\mu(P_{01}+P_{10})+(\lambda_1+\lambda_2)P_0 & \cdots 2\\ (\mu+\lambda_1)P_{01}=\lambda_2 P_{00}+\mu P_{11} & \cdots 3\\ (\mu+\lambda_1+\lambda_2)P_{i,0}=\lambda_1 P_{i-1,0}+\mu P_{i+1,0} \quad i>0 & \cdots 4\\ (\mu+\lambda_1)P_{i,1}=\lambda_1 P_{i-1,1}+\mu P_{i+1,1}+\lambda_2 P_{i,0} \quad i>0 & \cdots 5\end{cases}$$

由于 4 是差分方程，不妨设其通解为： $p_{i0}=p_{00}x^i$ 代入有：

$$(1+\rho_1+\rho_2)p_{00}x^i=\rho_1 p_{00}x^{i-1}+p_{00}x^{i+1}\Rightarrow x^2-(1+\rho_1+\rho_2)x+\rho_1=0$$

$$\because 0<x<1 \qquad \therefore x_0=\frac{1+\rho_1+\rho_2-\sqrt{1+\rho_1{}^2+\rho_2{}^2-2\rho_1+2\rho_2+2\rho_1\rho_2}}{2}$$

由于 5 是非齐次差分方程：

$$p_{i+1,1}-(1+p_1)p_{i,1}+\rho_1 p_{i-1,1}+\rho_2 p_{i,0}=0 \quad \text{其特征根为：} a=\rho_1$$

假设其通解为： $p_{i,1}=A\rho_1{}^i+Bx_0{}^i$ 代入前式得：

$$B\cdot x_0^{i+1}-(1+\rho_1)B\cdot x_0^i+\rho_1 B\cdot x_0^{i-1}+\rho_2 p_{00}\cdot x_0^i=0$$

解之，得： $B=-p_{00}$ $\quad \because p_{i,1}=A\rho_1^i-p_{00}x_0{}^i$

代入 3 式得：$(1+\rho_1)p_{01}=\rho_2 p_{00}+p_{11}$ 即：

$$A=p_{00}(1+\rho_1+\rho_2-x_0)$$

$$\begin{cases}p_{i,1}=p_{00}\left[(1+\rho_1+\rho_2-x_0)\rho_1{}^i-x^i\right]\\ p_{i,0}=p_{00}x^i\\ p_{00}=(\rho_1+\rho_2)p_0\end{cases}$$

由正则条件：

$$p_0+(\rho_1+\rho_2)p_0(1+\rho_1+\rho_2-x_0)\sum_{i=0}^{\infty}\rho_1^i=1$$

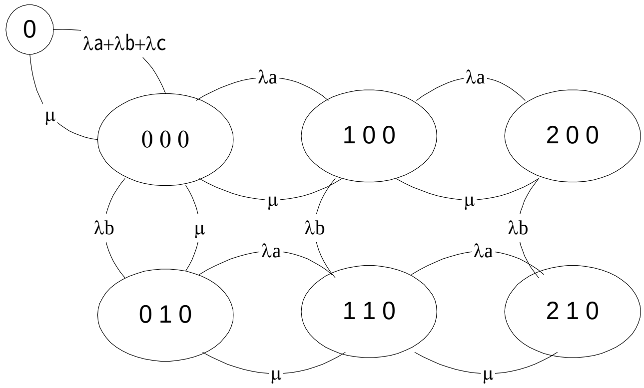
$$\therefore \quad p_0=\frac{1-\rho_1}{1-\rho_1+(\rho_1+\rho_2)(1+\rho_1+\rho_2-x_0)}$$

$$\therefore \quad \overline{w}_A=\frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)\left[p_{r,0}+p_{r,1}\right]=\frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)p_{00}(1+\rho_1+\rho_2-x_0)\rho_1{}^r$$

$$=\frac{p_{00}(1+\rho_1+\rho_2-x_0)}{\mu(1-\rho_1)^2}$$

$$P_{CB}=\sum_{r=0}^{\infty}p_{r,1}=p_{00}\sum_{r=0}^{\infty}\left[\left(1+\rho_1+\rho_2-x_0\right)\rho_1{}^{r}-x_0^{r}\right]$$
$$=\frac{p_{00}\left(1+\rho_1+\rho_2-x_0\right)}{\left(1-\rho_1\right)}-\frac{p_{00}}{1-x_0}$$

2.9 排队系统中有三个队列,其到达率分别为 $\lambda_a,\lambda_b,\lambda_c$ 公用同一出线路，其中a类最优先，即线路有空闲就发送；b类次之，即a无排队时可以发送，c类最低，即a，b类均无排队时可以发送，不计正在传送的业务，各个队列的截至队长为n_a＝2，n_b=1，n_c＝0，试列出稳定状态下的状态方程，并计算 $\lambda_a=\lambda_b=\lambda_c$ 时，各状态的概率和三类呼叫的呼损。



解：

r，s，k 分别表示 a，b，c 三队中等待的呼叫数，状态以（r，s，k）表示。

稳态方程：

$$(\lambda_a+\lambda_b+\lambda_c)p_0=\mu p_{000}$$
$$(\lambda_a+\lambda_b+\mu)p_{000}=\mu(p_{010}+p_{100})+(\lambda_a+\lambda_b+\lambda_c)p_0$$
$$(\lambda_a+\lambda_b+\mu)p_{100}=\mu p_{200}+\lambda_a p_{000}$$
$$(\lambda_b+\mu)p_{200}=\lambda_a p_{100}$$
$$(\lambda_a+\mu)p_{010}=\lambda_b p_{000}+\mu p_{110}$$
$$\mu p_{210}=\lambda_a p_{110}+\lambda_b p_{200}$$
$$(\lambda_a+\mu)p_{110}=\lambda_b p_{100}+\lambda_a p_{010}+\mu p_{210}$$

归一条件 $p_0+\sum p_{i,j,k}=1$ 若 $\lambda_a=\lambda_b=\lambda_c$ 令 $\rho=\lambda_a/\mu$

$$p_{000}=3\rho p_0 \qquad p_{010}=\frac{3\rho^2+9\rho^3+12\rho^4}{2\rho^2+2\rho+1}p_0$$

$$p_{100}=\frac{3\rho^2+3\rho^3}{2\rho^2+2\rho+1}p_0 \qquad p_{110}=\frac{6\rho^3+15\rho^4+12\rho^5}{2\rho^2+2\rho+1}p_0$$

$$p_{200}=\frac{3\rho^3}{2\rho^2+2\rho+1}p_0 \qquad p_{210}=\frac{6\rho^4+15\rho^5+12\rho^6}{2\rho^2+2\rho+1}p_0$$

$$p_0=\frac{2\rho^2+2\rho+1}{12\rho^6+27\rho^5+36\rho^4+27\rho^3+14\rho^2+5\rho+1}$$

C 类呼损为：$p_c=1-p_0=\cdots$

B 类呼损为：$p_B=p_{010}+p_{110}+p_{210}$

A 类呼损为：$p_A = p_{210} + p_{200}$

2.10 有一个三端网络，端点为v_1, v_2, v_3，边为$e_1(v_1, v_2)$及$e_2(v_2, v_3)$，v1 到 v3 的业务由 v2 转接，设所有的端之间的业务到达率为λ，线路的服务率为μ的 M|M|1(1)问题，当采用即时拒绝的方式时，求：

1) 各个端的业务呼损。
2) 网络的总通过量。
3) 线路的利用率。

解：

令：00 表示 e1,e2 均空闲。

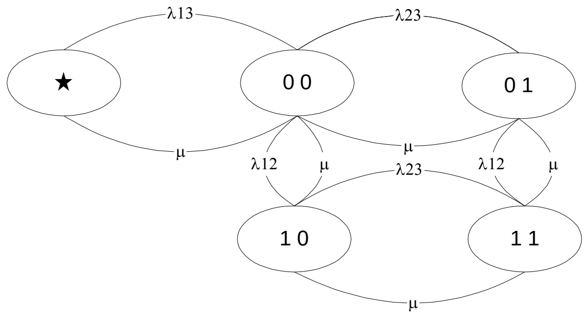
10 表示 e1 忙,e2 闲（即 e1 由 v1,v2 间业务占用）。

01 表示 e1 闲,e2 忙（即 e2 由 v2,v3 间业务占用）。

11 表示 e1,e2 均忙，且分别由 v1v2,v2v3 间业务占用。

★表示 e1,e2 均忙，且由 v1，v3 间业务占用。

状态转移图如右：



当$\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = \lambda$时

有下列关系:

$$\begin{cases} \mu p_t = \lambda p_{00} \\ 3\lambda p_{00} = \mu(p_{01} + p_{10} + p_*) \\ (\lambda + \mu)p_{10} = \lambda p_{00} + \mu p_{11} \\ (\lambda + \mu)p_{01} = \lambda p_{00} + \mu p_{11} \\ 2\mu p_{11} = \lambda(p_{01} + p_{10}) \end{cases}$$

又$\sum p = 1$ 解之得: $\begin{cases} p_* = p_{01} = p_{10} = \rho p_{00} \\ p_{11} = \rho^2 p_{00} \end{cases}$ *这里* $p_{00} = \dfrac{1}{1 + 3\rho + \rho^2}$

呼损 $p_{13} = 1 - p_{00} = \dfrac{3\rho + \rho^2}{1 + 3\rho + \rho^2}$ 而 $p_{23} = p_{12} = 1 - p_{00} - p_{01} = \dfrac{2\rho + \rho^2}{1 + 3\rho + \rho^2}$

通过量$T = \rho(1 - p_{12}) + \rho(1 - p_{13}) + \rho(1 - p_{23}) = \dfrac{3\rho + 2\rho^2}{1 + 3\rho + \rho^2}$

线路利用率$\eta = p_* + p_{11} + (p_{10} + p_{01})/2 = \dfrac{2\rho + \rho^2}{1 + 3\rho + \rho^2}$

2.11 上题中的网若用于传送数据包,到达率仍为 每秒 平均包长为 b 比特,边的容量为 c 比特/秒,采用不拒绝的方式,并设各端的存储容量足够大,求:

(1)稳定条件。

(2)网络的平均时延。

(3)总的通过量。

(4)线路的平均利用率。
解：这是一个无损但有时延的系统。

两条线路上到达率为：2 ，而服务率为：c/b 的 M/M/1 系统。

(1)稳定条件为： 2 b/c<1。

(2)网络的平均时延：

对 v1v2 和 v2v3 间的业务：$\overline{w}_1 = \dfrac{1}{\mu(1-\rho)} = \dfrac{1}{{}^{c}\!/\!{}_{b} - 2\lambda}$

对 v1v3 间的业务：$\overline{w}_2 = 2\overline{w}_1 = \dfrac{2}{{}^{c}\!/\!{}_{b} - 2\lambda}$

(3)系统稳定时，总的通过量为：3 b/c。

(4)线路的平均利用率 = =2 b/c。

一般来说，通过率与利用率均有增加，这是以稳定性和时延为代价换来的。

2.12 在分组交换系统中，设信息包以泊松率到达，平均到达率为 ，但信息包的长度为固定 b 比特，信道容量为 c 比特/秒。由于端内存储量的限制，设除了在传送的包外，只允许有两个信息包等待传送，试：

(1)列出关于d_r(顾客离去时的队长)的系统方程

(2)解出个d_r.

(3)求平均时延。

(4)求信息包被拒绝的概率。

解：

$$\begin{cases} d_0 = d_0 q_0 + d_1 q_0 \\ d_1 = d_0 q_1 + d_1 q_1 + d_2 q_0 \\ d_2 = d_0 q_2 + d_1 q_2 + d_2 q_1 + d_3 p_0 \\ d_3 = d_0 q_3 + d_1 q_3 + d_2 q_2 + d_3 (1 - p_0) \\ \sum_{i=0}^{3} d_i = 1 \end{cases}$$

其中 p0 是第 4 个顾客被拒绝离去之后，第 3 个顾客的残余寿命中无顾客到达的概率。

这里到达是随机的，可知：$p_0 = \int_0^{b/c} \dfrac{c}{b} \cdot e^{-\lambda t} dt = \left(1 - e^{-{}^{\lambda b}\!/\!{}_{c}}\right) \dfrac{c}{\lambda b}$

设 ${}^{\lambda b}\!/\!{}_{c} = \rho$

则

$$q_0 = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} b(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} \delta\left(\tau - {}^{b}\!/\!{}_{c}\right) d\tau = e^{-\rho}$$

$$q_1 = \int_b^{\infty} \lambda\tau e^{-\lambda\tau} b(\tau) d\tau = \rho e^{-\rho}$$

$$q_2 = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^2}{2} e^{-\lambda\tau} b(\tau) d\tau = \frac{\rho^2}{2} e^{-\rho}$$

$$\therefore \quad d_1 = \frac{1 - q_0}{q_0} d_0 \qquad d_2 = \left[e^{2\rho} - (1+\rho) e^{\rho}\right] d_0$$

$$d_3=\frac{\rho\left[e^{3\rho}-(1+2\rho)e^{2\rho}+\frac{(2\rho+\rho^2)}{2}e^{\rho}\right]d_0}{e^{\rho}-1}$$

$$\because\quad \sum d_i=1\qquad d_0=\frac{e^{\rho}-1}{(1+\rho)e^{3\rho}-(1+2\rho+2\rho^2)e^{2\rho}+\frac{(4\rho+\rho^2)}{2}e^{\rho}}$$

平均时延：

$$\bar{s}=\bar{w}+b/c=\left[\frac{m_v}{2m_1}d_1+\left(\frac{m_v}{2m_1}+m_1\right)d_2\right]+b\!\!\diagup\!\! c=\left[\frac{3}{2}e^{2\rho}-\left(2+\frac{3}{2}\rho\right)e^{\rho}+\frac{1}{2}\right]\frac{b}{c}d_0$$

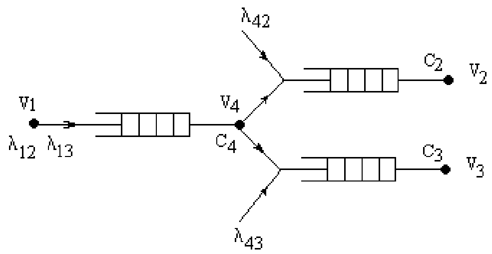
拒绝概率： $p_C=d_3$

2.13 有四个端三条边组成的数据网，如图所示。端间的信息包分别为和每秒，信息包长度为负指数分布，平均包长为k比特，各信道容量分别为c_1，c_2和c_3，和一起排队，和一起排队，和一起排队，均不拒绝，求

(1)各种业务的平均时延。

(2)网络的平均时延。

(3)各信道的平均利用率。



解:

由于均不拒绝且到达和离去均随机，故 3 个信道均等效于 3 个 M/M/1 系统，其中：

C_1：到达为 $\lambda_{12}+\lambda_{13}$。服务为：$c_1/b$

C_2：到达为 $\lambda_{12}+\lambda_{42}$。服务为：$c_2/b$

C_3：到达为 $\lambda_{13}+\lambda_{43}$。服务为：$c_3/b$

C1 的平均迟延为 $\dfrac{1}{\mu_1(1-\rho_1)}=\dfrac{1}{\frac{c_1}{b}-\lambda_{12}-\lambda_{13}}$

C1 的平均迟延为 $\dfrac{1}{\mu_2(1-\rho_2)}=\dfrac{1}{\frac{c_2}{b}-\lambda_{12}-\lambda_{42}}$

C1 的平均迟延为 $\dfrac{1}{\mu_3(1-\rho_3)}=\dfrac{1}{\frac{c_3}{b}-\lambda_{13}-\lambda_{43}}$

$$s_{12}=s_{c1}+s_{c2}=\frac{1}{\frac{c_1}{b}-\lambda_{12}-\lambda_{13}}+\frac{1}{\frac{c_2}{b}-\lambda_{12}-\lambda_{42}}$$

$$s_{13}=s_{c1}+s_{c3}=\frac{1}{\frac{c_1}{b}-\lambda_{12}-\lambda_{13}}+\frac{1}{\frac{c_3}{b}-\lambda_{13}-\lambda_{43}}$$

$$s_{42}=s_{c2}=\frac{1}{\frac{c_2}{b}-\lambda_{12}-\lambda_{42}} \qquad s_{43}=s_{c3}=\frac{1}{\frac{c_1}{b}-\lambda_{13}-\lambda_{43}}$$

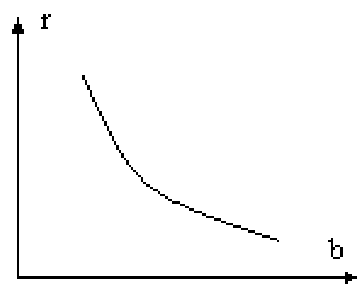
网络的平均时延为：$s=\frac{\lambda_{12}s_{12}+\lambda_{13}s_{13}+\lambda_{42}s_{42}+\lambda_{43}s_{43}}{\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{42}+\lambda_{43}}$

各信道利用率为：

$$\eta_{c1}=\rho_1=(\lambda_{12}+\lambda_{13})b/c_1$$
$$\eta_{c2}=\rho_2=(\lambda_{12}+\lambda_{42})b/c_2$$
$$\eta_{c3}=\rho_3=(\lambda_{13}+\lambda_{43})b/c_3$$

2.14 总线上有 4 个用户 v1,v2,v3 和 v4，它们之间以 Alopha 方式互相通信，信包到达率均为每秒，信息包的长度为 b 比特；总线上的传输速率为 c 比特/秒，试求通过率 r，并大致画出 r 与 b 的曲线关系。

解：r 与 b 的曲线关系如右图，从直观上来看，这也是显然的。



总线上一个包的服务时间 $\tau=b/c$ 秒，

总的呼叫量为：$a=12\lambda\, b/c$，

通过量为：$\bar{r}=a\cdot e^{-2a}$

通过率：$r=\bar{r}\big/ (b/c)=12\lambda e^{-2a}$

3.2 设在一个纯 ALOHA 系统中，分组长度 $\tau=20\,\text{ms}$，总业务到达率 $\lambda_t=10$ pkt/s，试求一个消息成功传输的概率。若为 S-ALOHA 系统，试求这时消息成功传输的概率，并求一个消息分组传输时和另一个分组碰撞的概率。

解：由题意，$\tau=20\,\text{ms}$，$\lambda_t=10\,\text{pkt/s}$，则系统的总业务量为

$$P=\lambda_t\tau=10\times20\times10^{-3}=0.2$$

纯 ALOHA 系统吞吐量满足 $p=Pe^{-2P}$，一个消息成功传输的概率为

$$P_s=p/P=e^{-2P}=e^{-2\times0.2}=e^{-0.4}=0.67$$

S-ALOHA 系统的吞吐量满足 $p = Pe^{-P}$，这时消息成功传输的概率为

$$P_s = p/P = e^{-P} = e^{-0.2} \approx 0.82$$

一个消息分组传输时和另一个分组碰撞的概率为：

$1 - P_s = 1 - 0.82 = 0.18$。

3.3　设在一个 S-ALOHA 系统中每秒共发送 120 次，其中包括原始发送和重发。每次发送需占用一个 12.5 ms 的时隙。试问：

(1)　系统的归一化总业务量等于多少？
(2)　第一次发送就成功的概率等于多少？
(3)　在一次成功发送前，刚好有两次碰撞的概率等于多少？

解：由题意，λ_t =120 次/秒，　τ =12.5 ms。

(1)　$P = \lambda_t \tau = 120 \times 12.5 \times 10^{-3} = 1.5$。

(2)　$P(0) = e^{-\lambda_t \tau} = e^{-1.5} = 0.223$。

(3)　$p_3 = \left(1 - e^{-P}\right)^2 e^{-P} = (1 - 0.223)^2 \times 0.223 = 0.135$。

3.4 设一条长度为 10 km 的同轴电缆上，接有 1000 个站，信号在电缆上传输速度为 200 m/us，信号发送速率为 10 Mb/s，分组长度为 5000 b。试问：

(1)　若用纯 ALOHA 系统，每个站最大可能发送分组速率等于多少？
(2)　若用 CSMA/CD 系统，每个站最大可能发送分组速率等于多少？

解：(1) 纯 ALOHA 中，发送分组不用等待。理想情况下，各站一个接一个发送分组，互不干扰，发送分组的最大速率为

$$10M/(5000 \times 1000) = 2 \text{ pkt/s}$$

(2) 对于 CSMA/CD 系统，信号传输速率为 200 m/s，对于 10 km 电缆，单程传播时间为

$$t = 10 \times 10^3 / 200 = 50\ \mu s$$

CSMA/CD 系统发送一个分组必须等待的时间为：2t=100 us=0.1 ms。

故每个站的最大可能发送分组速率为：$10M \times 0.1\,\text{ms}/5000 = 0.2\,\text{pkt/s}$。

4.4 有一个 n 端的全连接图。试证：

(1) 无重复端的环数为 $\sum_{k=3}^{n} C_n^k \frac{(k-1)!}{2}$

(2) 经过某一固定边 e 的环数为 $\sum_{k=3}^{n} k! C_{n-2}^k$

（3）两个固定端之间的径数位$1+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{(n-2)!}{(n-k-2)!}$

⑴环上有 k 个端（3≤k≤n），此 k 个端的选择方式有C_n^k种；对于某固定的 k 端来说，考虑可以生成的环，任指定一个端，下个端的选取方法公有 k-1 种，再下端的选法有 k-2 种，等等,注意,这样生成的环可按两种试图顺序取得,故有$\frac{(k-1)!}{2}$种,总的环数为$\sum_{k=3}^{n}C_n^k\frac{(k-1)!}{2}$

⑵某一固定边 e 确定了两个端，经过 e 的环数按其过余下端进行分类，若环再过 k 个端（1≤k≤n-2），有选法C_{n-2}^k种；对于某固定端来说，自然可以生成 k!个环，从而总的环数为

$\sum_{k=3}^{n}C_{n-2}^k k!$个。

⑶两个固定端之间的径按其经过端数分类，其中有一条不经过其他端的径，若经过 k 个端，（1≤k≤n-2），则对于第一个端有（n-2）种选择，第二个端有（n-3）种选择，第 k 个端有（n-k-1）种选择，共有$\frac{(n-2)!}{(n-k-2)!}$ 总的径数为 $1+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{(n-2)!}{(n-k-2)!}$

4.5 试求图 4-44 中图的主树数目，并列举所有的主树。

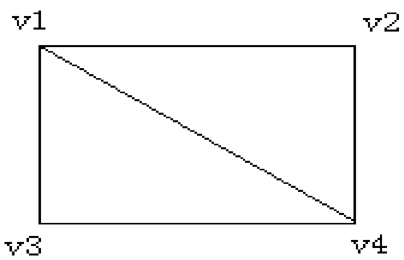


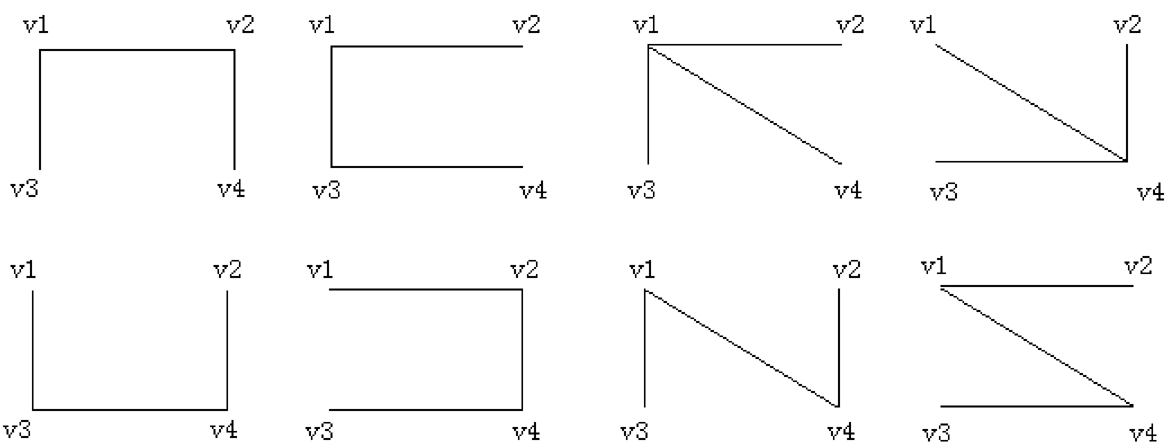
图 4-44

解：为图的端编号为 v1,v2,v3,v4。

取 v3 为参考点，有：

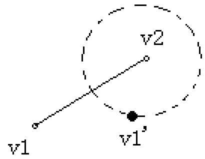
$$S=\begin{vmatrix}3&-1&-1\\-1&2&0\\-1&0&2\end{vmatrix}=8$$

所得主树见下:

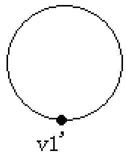


4.6 试证明端数 n 大于 4 的连接图都是非平面图，并求 n=2，3，4 的全连接图为对偶图。

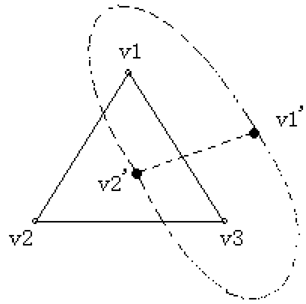
证明：设有n个端的全联接图为K_n因为K_5是非平面图，而当n>5 时K_5是K_n的子图，从而K_n（n>5）均不是平面图。一下是对偶图（注意K_4为自对偶图）。



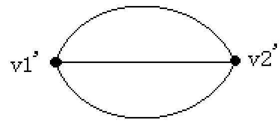
K_2图



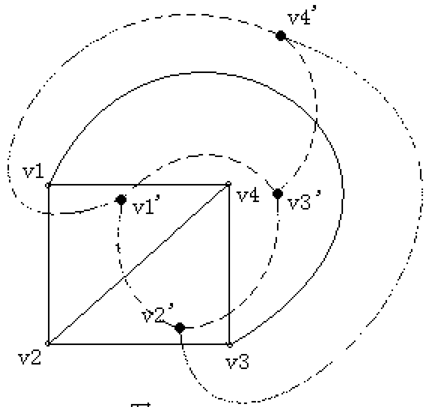
K_2对偶图



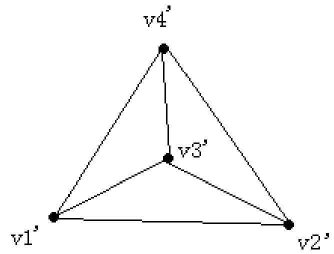
K_3图



K_3对偶图



K_4图



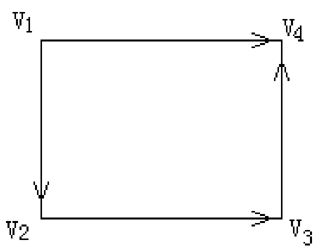
K_4对偶图

4.7

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

已知一个图的邻接矩阵如左，画出此图，并求各端之间的最小有向径长。

解：首先作出图形：



对所绘制图形的端点进行编号，得邻接矩阵。

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

经计算：

$$C^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad C^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因而有

$d(v_1,v_2)=1\qquad d(v_1,v_3)=2\qquad d(v_1,v_4)=1$

$d(v_2,v_3)=1\qquad d(v_2,v_4)=2$

$d(v_3,v_4)=1$

其余有向径长均为 ∞，或不存在。

4.8 图有六个端，其无向距离矩阵如下：

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6 \end{array} & \begin{bmatrix}0&1&2&3&2&1\\1&0&1&2&3&2\\2&1&0&1&2&3\\3&2&1&0&1&2\\2&3&2&1&0&1\\1&2&3&1&2&0\end{bmatrix}
\end{array}$$

用 P 算法，求出最短树。

用 K 算法，求出最短树。

限制条件为两端间通信的转接次数不超过 2 的最短树。

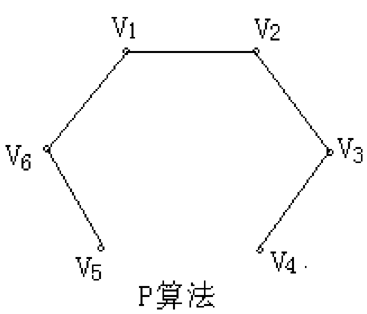
解：

(1)P 算法求解：

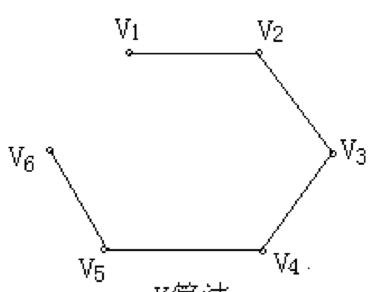
$$\{v_1\}\xrightarrow{e_{12}}\{v_1,v_2\}\xrightarrow{e_{23}}\{v_1,v_2,v_3\}\xrightarrow{e_{16}}\{v_1,v_2,v_3,v_6\}\xrightarrow{e_{65}}\{v_1,v_2,v_3,v_6,v_5\}$$
$$\xrightarrow{e_{34}}\{v_1,v_2,v_3,v_6,v_5,v_4\}$$

(2)K 算法求解：

按最小边长顺序取得： $e_{12}=e_{23}=e_{34}=e_{45}=e_{56}=1$ 此结果意味着最短树不唯一。

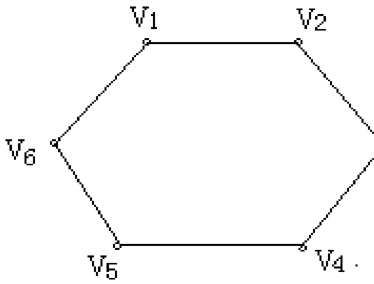


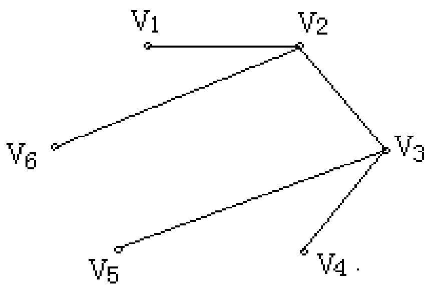
P算法



K算法

(3)原图有一个边长全为 1 的基本子图G_1，要求转接次数小于等于 2，若选取G_1的任何 4 个连续顶点，$v_i\ v_{i+1}\ v_{i+2}\ v_{i+3}$,作为基础，然后再按要求增加边，例如以$v_1\ v_2\ v_3\ v_4$为基础，增加$v_5\ v_6$，得到一个树长为 7 转接次数小于等于 2 的树T1，事实上，以任何 4 个连续顶点均可得到树长为 7 的转接次数小于等于 2 的树





4.9 图有六个端，端点之间的有向距离矩阵如下：

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 9 & 1 & 3 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 4 & \infty & 7 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 5 & 0 & 2 & 7 \\ \infty & 6 & 2 & 8 & 0 & 5 \\ 7 & \infty & 2 & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(1)用 D 算法求 V1 到所有其他端的最短径长及其路径。
(2)用 F 算法求最短径矩阵和路由矩阵，并找到 V2 至 V4 和 V1 至 V5 的最短径长及路由。
(3)求图的中心和中点。

解：
(1)D 算法

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	指定	最短径长
0	∞	∞	∞	∞	∞	V_1	W_1＝0
	9	$\underline{1}$	3	∞	∞	V_3	W_{13}＝0
	9		3	$\underline{2}$	∞	V_5	W_{15}＝0
	8		$\underline{3}$		7	V_4	W_{14}＝0
	8				$\underline{7}$	V_3	W_{16}＝0
	$\underline{8}$					V_2	W_{12}＝0

(2)F 算法
最短路径矩阵及最短路由阵为W_5，R_5

$v_2 \to v_1 \to v_4$有向距离为 4

$v_1 \to v_3 \to v_5$有向距离为 2

$$W_0\begin{bmatrix}0&9&1&3&\infty&\infty\\1&0&4&\infty&7&\infty\\2&\infty&0&\infty&1&\infty\\\infty&\infty&5&0&2&7\\\infty&6&2&8&0&5\\7&\infty&2&\infty&2&0\end{bmatrix}\qquad R_0\begin{bmatrix}0&2&3&4&0&0\\1&0&3&0&5&0\\1&0&0&0&5&0\\0&0&3&0&5&6\\0&2&3&4&0&6\\1&0&3&4&5&0\end{bmatrix}$$

$$W_1\begin{bmatrix}0&9&1&3&\infty&\infty\\1&0&2&4&7&\infty\\2&11&0&5&1&\infty\\\infty&\infty&5&0&2&7\\\infty&6&2&8&0&5\\7&16&2&10&2&0\end{bmatrix}\qquad R_1\begin{bmatrix}0&2&3&4&0&0\\1&0&1&1&5&0\\1&1&0&1&5&0\\0&0&3&0&5&6\\0&2&3&4&0&6\\1&1&3&1&5&0\end{bmatrix}$$

$$W_2\begin{bmatrix}0&9&1&3&16&\infty\\1&0&2&4&7&\infty\\2&11&0&5&1&\infty\\\infty&\infty&5&0&2&7\\7&6&2&8&0&5\\7&16&2&10&2&0\end{bmatrix}\qquad R_2\begin{bmatrix}0&2&3&4&2&0\\1&0&1&1&5&0\\1&1&0&1&5&0\\0&0&3&0&5&6\\2&2&3&4&0&6\\1&1&3&1&5&0\end{bmatrix}$$

$$W_3\begin{bmatrix}0&9&1&3&2&\infty\\1&0&2&4&3&\infty\\2&11&0&5&1&\infty\\7&16&5&0&2&7\\4&6&2&8&0&5\\4&13&2&7&2&0\end{bmatrix}\qquad R_3\begin{bmatrix}0&2&3&4&3&0\\1&0&1&1&3&0\\1&1&0&1&5&0\\3&3&3&0&5&6\\3&2&3&3&0&6\\3&1&3&3&5&0\end{bmatrix}$$

$$W_4\begin{bmatrix}0&9&1&3&2&10\\1&0&2&4&3&11\\2&11&0&5&1&12\\7&16&5&0&2&7\\4&6&2&7&0&5\\4&13&2&7&2&0\end{bmatrix}\qquad R_4\begin{bmatrix}0&2&3&4&3&4\\1&0&1&1&3&4\\1&1&0&1&5&4\\3&3&3&0&5&6\\3&2&3&3&0&6\\3&1&3&3&5&0\end{bmatrix}$$

$$W_5\begin{bmatrix}0&8&1&3&2&7\\1&0&2&4&3&8\\2&7&0&5&1&6\\6&8&4&0&2&7\\4&6&2&7&0&5\\4&8&2&7&2&0\end{bmatrix}\qquad R_5\begin{bmatrix}0&5&3&4&3&5\\1&0&1&1&3&5\\1&5&0&1&5&5\\5&5&5&0&5&6\\3&2&3&3&0&6\\3&5&3&3&5&0\end{bmatrix}$$

(3) $\underset{j}{Max} W_{ij}^{5} = (8,8,7,8,7,8)$ 中心为V_3或V_5

$\sum_{j} W_{ij}^{5} = (21,18,21,27,24,23)$ 中心为V_2

补充习题：试计算完全图 Kn 的主树的数目。

解：设 A 为 Kn 的关联阵，那么主树的数目为：

$$N = dct\left|A \cdot A^{T}\right| = dct\begin{vmatrix} n-1 & & & & -1 \\ & n-1 & & -1 & \\ & & \ddots & & \\ & -1 & & \ddots & \\ -1 & & & & n-1 \end{vmatrix} = dct\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & n-1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & -1 & & \ddots & \\ 1 & & & & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= dct\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & n & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & 0 & & \ddots & \\ 1 & & & & n \end{vmatrix} = dct\begin{vmatrix} 1-\dfrac{n-1}{n} & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & n & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & 0 & & \ddots & \\ 0 & & & & n \end{vmatrix} = n^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = n^{n-2}$$

证毕。

5.1 求下图中V_s到V_t的最大流量f_{st},图中编上的数字是该边的容量。

解：

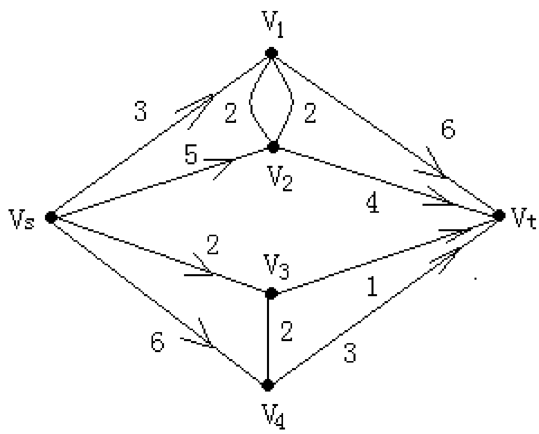
本题可以利用 M 算法，也可以使用最大流－最小割简单计算可知：

$X = \{v_s, v_3, v_4\}$

$\overline{X} = \{v_1, v_2, v_t\}$

$C(X, \overline{X}) = 3+5+1+3 = 12$

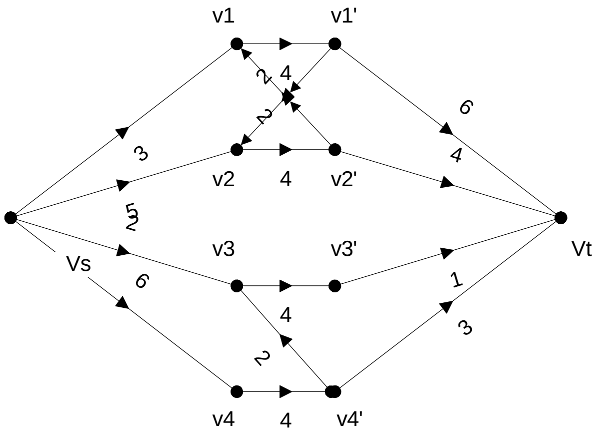
可知 :最大流为 12,可以安排为f_{s1} = 3,,f_{s2} =5,f_{12}=1,f_{2t}=4，f_{1t}=4，f_{s3}=1，f_{s4}=3，f_{3t}=1，f_{4t}=3。



5. 2 试移动上图中的一条边，保持其容量不变，是否能增大 fst？如果可以，求此时的最大值，但若所有转接端 v1v2v3 和 v4 的转接容量限制在 4，则情况将如何？

解：

依然按照最大流－最小割定理，若能依一边从X找到 $\overline{X}$ 内部至割 $(X,\overline{X})$ 中，自然可以增大流量，可以将e_{34}移去，改为：e_{41} 或者e_{42}均可，使总流量增至12＋2＝14。



当 vi(i = 1,...4)的转接容量限制到 4 时，等效图为右图，对于 3.11 中的流量分配，在本题限制下，若将 fs2 由 5 改为 4 即得到一个流量为 11 的可行流。

但 若 $X^*=\{v_S,v_3,v_3^{'}v_4,v_4^{'},v_2\}$ ，$\overline{X}^*=\{v_1,v_1^{'},v_2^{'},v_t\}$ 则

$C(X^*,\overline{X}^*)=1+3+4+3=11$，换句话说就是 11 已是最大流。

5.3 图 5-12 中的V_s和V_t间要求有总流量f_{st}＝6，求最佳流量分配，图中边旁的两个数字前者为容量，后者为费用。

解：

本题可以任选一个容量为 6 的可行流，然后采用负价环法，但也可用贪心算法，从 Vs 出发的两条线路费用一样，但进入 Vt 的两条路径费用为 7 和 2，故尽可能选用费用为 2 的线路，得下图 1。

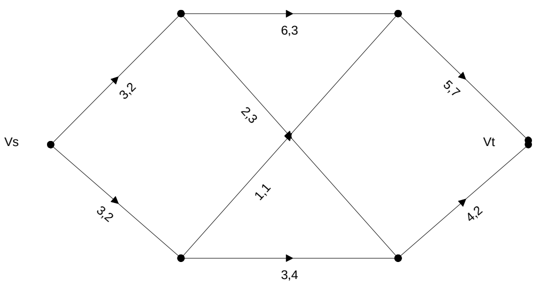


图 1

再考虑 V0，进入 V0 的两条路径中优先满足费用为 3 的路径，得：图 2，很容易得到最后一个流量为 fst=6 的图 3，边上的数字为流量安排。总的费用为

$$L=3\times2+3\times2+1\times3+2\times4+1\times1$$
$$+2\times3+4\times2+2\times7=52$$

易用负价环验证图 4 的流量分配为最佳流量分配。

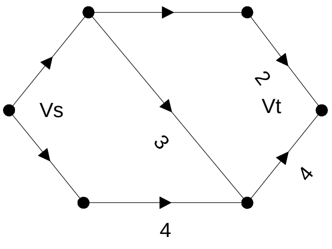


图 2

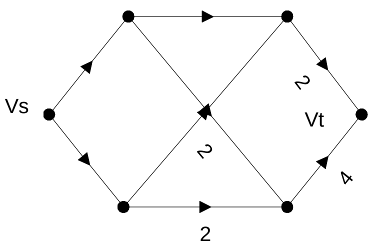


图 3

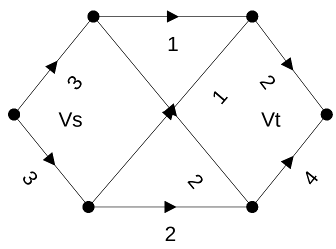
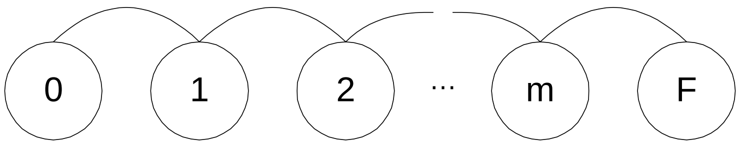


图 4

6.1 由 n 个元件构成的一个系统，各元件的平均寿命都是 T。当一个元件失效据使得系统失效的情况下，已知系统的平均寿命将下降至 T/n，如果采取容错措施，当 m 个以上元件失效才使系统失效，求证此系统的平均寿命为：$T_m = T\sum_{r=0}^{m}\frac{1}{n-r}$

可见比未采取措施前提高至少 m 倍。当 m=n-1 时，这一系统实际上即是 n 个元件的并接系统，试证上式即转化成并连系统的寿命公式。

证：以 i 状态代表有 i 个元件失效的状态，此时系统的状态转移框图如下：



那么状态 i 的平均寿命为：$S_i = \frac{T}{n-i} \quad 0 \le i \le m$

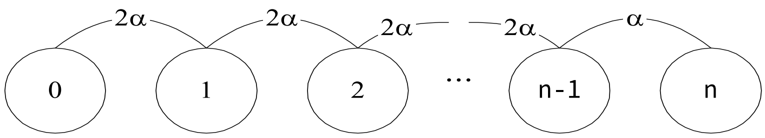
从而系统的平均寿命为：$S = S_0 + S_1 + \cdots + S_m = T\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{n-i}$

当 m=n-1 时 $S = T\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}$

而利用数学归纳法易知：$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k} = C_n^1 - \frac{1}{2}C_n^2 + \frac{1}{3}C_n^3 - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n}C_n^n$

6.3 有 n 个不可修复系统，它们的平均寿命都是 T。先取两个作为并接，即互为热备份运行；当有一个损坏时，启用第三个作为热备份；再损坏一个是起用第四个，已知下去，直到 n 个系统均损坏。忽略起用冷备份期间另一系统损坏的可能性；试计算这样运行下的平均寿命；并与全冷备份和全热备份是的平均寿命相比较。

解：状态图如下：i 表示有 i 个系统损坏，失效在图中标出。



由上图有：$S_i = \frac{T}{2} \quad 0 \le i \le n-2 \quad S_{n-1} = T$

从而，平均寿命：

$$S = S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1} = \frac{T}{2}\times(n-1) + T = \frac{n+1}{2}T$$

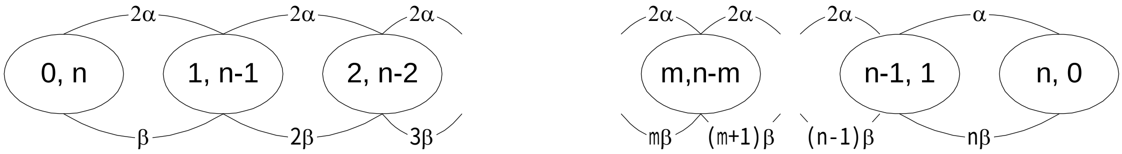
$$S_{冷} = nT \qquad S_{热} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)T$$

$$S_{热} < S < S_{冷}$$

6.4 上题目中 n 个子系统都是可修复系统，可靠度都是 R。仍用上述方式运行，一损坏系统修复后作为最后一个系统排队等候再起用，求稳态可靠度。

解：

m，n-m 表示 n 个系统中有 m 个失效，状态转移图及失效率与修复率如图：



用 Pm 表示状态 m,n-m 的概率（稳态），状态方程如下：

$$\begin{cases} 2\alpha p_0 = \beta p_1 \\ \quad\vdots \\ (2\alpha + m\beta) p_m = 2\alpha p_{m-1} + (m+1)\beta p_{m+1} \qquad 0 < m < n-1 \\ \quad\vdots \\ (2\alpha + n\beta) p_{n-1} = 2\alpha p_{n-2} + n\beta p_n \\ \alpha p_{n-1} = n\beta p_n \\ \sum_{i=0}^{n} p_i = 1 \end{cases}$$

解状态方程如下：有：

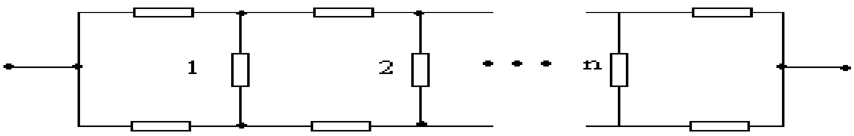
$$\begin{cases} p_m = \dfrac{(2\alpha)^m}{m!\,\beta^m} p_0 \qquad 0 \le m < n \\ p_n = \dfrac{(2\alpha)^n}{2n!\,\beta^n} p_0 \end{cases}$$

由归一性：$p_0 = \left[\sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!} \left(\frac{2\alpha}{\beta} \right)^m + \frac{2^{n-1}\alpha^n}{n!\,\beta^n} \right]^{-1}$

稳态可靠度：$R_s = 1 - p_n = \dfrac{\sum \frac{1}{m!}\left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^m}{\sum \frac{1}{m!}\left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^m + \frac{2^{n-1}\alpha^n}{n!\,\beta^n}}$

其中，$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{1-R}{R}$　　R 是单一系统的可靠度。

6.5 一个复杂系统有 n 级梯形结构组成如图所示。其中有 n 个子系统作为桥，2(n+1)个子系统作为梯边，它们都是可靠度为 R 的可以修复系统。求这个复杂系统的可靠度递推公式，假定所有子系统都互相独立。



解：

依次考虑 1，2，3，… n。依照各个桥的情况可以分类，根据 1，2，3，… n 的好坏情况可以得到以下结果：

情况	概率	可靠度
I	R	$[1-(1-R)^2]R_{n-1}$
II	R(1-R)	$[1-(1-R^2)^2]R_{n-2}$
III	$R(1-R)^2$	$[1-(1-R^3)^2]R_{n-3}$
⋮		
N	$R(1-R)^{n-1}$	$[1-(1-R^n)^2]R_0$
N+1	$(1-R)^n$	$1-(1-R^{n+1})^2$

$$\therefore \quad R_n = R\left(2R-R^2\right)R_{n-1} + R(1-R)\left(2R^2-R^4\right)R_{n-2} + \cdots$$
$$+ R(1-R)^{n-1}\left(2R^n - R^{2n}\right)R_0 + (1-R)^n\left(2R^{n+1}-R^{2n+2}\right)$$

其中：$R_0 = 2R - R^2 \quad n \geq 0$

6.6 有一个故障率为 α 的系统，为了考虑是否使之成为可修复系统而配备维修力量，分别计算两类可靠度，试证明作为不可修复系统在时间 T 以内的可靠度大于作为可修复系统的稳态可靠度的条件是：$\beta T < 0.995 \qquad \alpha T = 0.01$

解：故障率为的不可修复系统在 T（$\alpha T = 0.01$）内的可靠度为：

$$R(T) = e^{-\alpha T} = e^{-0.01}$$

$\alpha \qquad \beta$ 的可修复系统的稳定可靠度为 $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

现： $R(T) > \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ 或 $e^{-0.01} > \dfrac{\alpha T}{\alpha T + \beta T} = \dfrac{\alpha T}{0.01 + \beta T}$

$$\therefore \quad \beta T < 0.995$$

6.7 有一故障率为 α，修复率为的系统 β，已知此系统的费用是 $C = A\alpha^{-r} + B\beta^{s}$

其中 A，B，r，s 为已知的非负常量，求可靠度为 0.99 时的最小费用。

解：

$$\because \quad \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = 0.99 \qquad \therefore \beta = 99\alpha \qquad C = \frac{A}{\alpha^r} + B\cdot 99^s \cdot s\alpha^{s-1}$$

令：$\dfrac{dc}{d\alpha} = 0$ 有 $-\dfrac{A}{\alpha^r} + B\cdot 99^s \cdot s\alpha^{s-1} = 0 \qquad \therefore \alpha = \left(\dfrac{rA}{Bs\cdot 99^s}\right)^{\frac{1}{r+s}}$

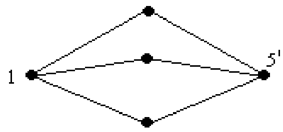
$$C_{\min} = A\left(\frac{rA}{Bs\cdot 99^s}\right)^{\frac{-r}{r+s}} + B\left(\frac{rA}{Bs\cdot 99^s}\right)^{\frac{s}{r+s}} 99^s$$

6.8 用流量法求图 5－9(b)中的二分网的联接度α和结合度β，只考虑端故障，且各端的可靠度均为 R，求 1 端和 5'端间的联接概率。

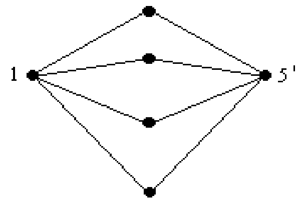
解：图 5－9(b)中的二分图，任意一端度数均为 4，$\delta=4$ 容易知道：

$\alpha=\beta=\delta=4$

一知考虑端故障，故中有一，二，三失效和无失效是等价图入右：



1',2',3',4'中有三个失效时



1',2',3',4'中有三个无失效时

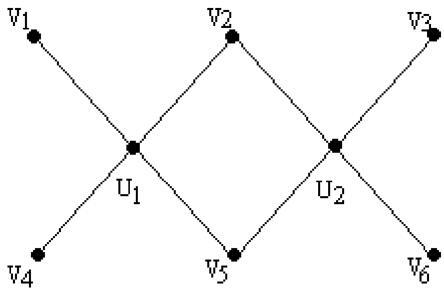
可靠度分别为：

$$\left[1-(1-R)^3\right]\cdot C_4^1\cdot R(1-R)^3$$
$$\left[1-(1-R)^4\right]\left\{C_4^2\cdot R^2(1-R)^2+C_4^3\cdot R^3(1-R)+C_4^4\cdot R^4\right\}$$

1 和 5'之间联接概率为：

$$R_{1,5'}=C_4^1\cdot R(1-R)^3\left[1-(1-R)^3\right]+\left\{C_4^2\cdot R^2(1-R)^2+C_4^3\cdot R^3(1-R)+C_4^4\cdot R^4\right\}\cdot\left[1-(1-R)^4\right]$$

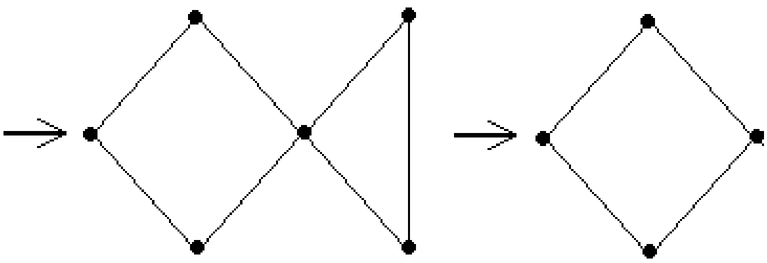
6.9 有一网络结构如图：



1. 验证网络是否为保证网。
2. 求联接度α和结合度β。
3. 若每边的可靠度都是 Re，每端的可靠度 Rn,求线路故障下网络的可靠度和局故障的网络的可靠度。
4. 求v_1和v_2间联接的概率。
5. 要使α和β都为 2，如何添加一条边来满足。

解：

1. 原网收缩为：



从而是保证图。

2. 去掉 U1,U2 可使网中断，故α=1， β=2。
3. 局故障下网的可靠度：

端的不可靠度为$F_n=1-R_n$

网络的可靠度 $R_1=1-\sum_{i=\alpha}^{n}C_i F_n^i(1-F_n)^{n-i}=1-\sum_{i=1}^{n}C_i F_n^i R_n^{n-i}$

当 $F_n<<1 \quad R_1\approx 1-C_\alpha F_n^\alpha=1-2F_n$

边故障下：

边的不可靠度为 $F_e=1-R_e$：

网的可靠度 $R_2=1-\sum_{i=p}^{m}B_i F_e^i(1-F_e)^{m-i}=1-\sum_{i=2}^{m}C_i F_e^i R_e^{m-i}$

当 $F_e<<1 \quad R_1\approx 1-B_\beta F_e^m=1-12F_n^{\ 2}$

4.

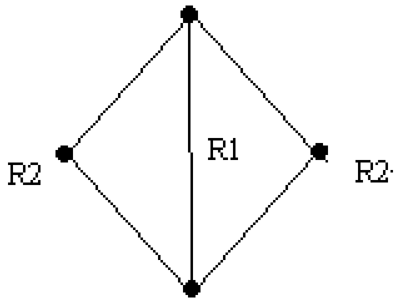
$$R_{1,6}=\left[1-(1-R_eR_n)(1-R_e^{\ 2}R_n^{\ 2})\right]\left[1-(1-R_e^{\ 2}R_n^{\ 2})^2\right]\left[1-(1-R_e)(1-R_e^{\ 2}R_n)\right]$$
$$R_{1,6}=R_n^2\left[1-(1-R_e)(1-R_e^{\ 2}R_n)\right]^2\left[1-(1-R_e^{\ 2}R_n)^2\right]$$

5. 在 V_1 和 V_3 之间连一条边，就使 $\alpha=\beta=2$

6.11 有一个四端全联接的网络，各边的容量都为 1，可靠度均为 0.999，若网络内部只有两个端之间有业务，呼叫量为 0.1 爱尔兰，不可靠集定义为转接次数大于 1，或呼损大于 0.01，设所有端均不出故障，求此两端之间通信的综合可靠度。

解：

考虑到转接此时小于等于 1，那么某两端见的等效网络为右图：



有三条独立的线路可靠度为：R2，R1，R2。

其中：R1＝0.999 R2＝0.999^2

呼叫量为 0.1 个爱尔兰，又因为必有呼损率小于 0.01，那么有爱尔兰公式一可知，在可靠集中应至少有两条线路是正常的，

设 x 为不正常线路个数：

x=0 的概率：$R_1R_2^{\ 2}$

x=1 的概率：$2R_1(1-R_2)R_2+(1-R_2)R_2^{\ 2}$

综合可靠度：$2R_1(1-R_2)R_2+(1-R_2)R_2^{\ 2}+R_1R_2^2$

6.12 有m条边n个端的随机图有 $C_{\frac{n(n-1)}{2}}^m$ 种，即每条边可在任两端之间，在这许多图中，有多少在某两端 v_i 和 v_j 间有边？已知某边的一端是 v_i，另一端是 v_j 的占多少？若m=n-1，联接图占总数的百分之几。

解：

v_i和v_j之间有边$C_{\frac{n(n-1)}{2}-1}^{m-1}$种，

若某边的一端是v_i，另一端是v_j的概率：

$$C_{\frac{n(n-1)}{2}-1}^{m-1} \Big/ C_{\frac{n(n-1)}{2}}^{m} = \frac{m}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2m}{n(n-1)}$$

数的总数是n^{n-2}，从而联接图占：$\dfrac{n^{n-2}}{C_{\frac{n(n-1)}{2}}^{n-1}}$