一、选择题：1～10小题，每小题5分，共50分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的.

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，分别在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内具有一阶连续的导数，点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，则必有（　　）.

A. 点 $x=0$ 是 $f'(x)$ 的可去间断点

B. 点 $x=0$ 不是 $f'(x)$ 的可去间断点

C. $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在点 $x=0$ 处不可导

D. $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在点 $x=0$ 处可导

2. 设 $p(x),q(x)$ 为连续函数且 $q(x)<0$，若 $y=f(x)$ 为微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解，则函数 $y=f(x)$（　　）.

A. 不可能有负的极大值　　　　B. 不可能有正的极小值

C. 不可能有负的极小值或正的极大值　　　　D. 一定没有极值点

3. 关于函数 $f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$ 给出下列结论：

①$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续；

②$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0$；

③$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$；

④$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微；

其中正确的个数为（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 设 $a,b,c,R(R>0)$ 均为常数，$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$，则三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}[(2a+b)x^2+(b-2c)y^2+(c-2b)z^2+(c-2a)xy]\mathrm{d}V$ 的值（　　）.

A. 与 a,b,R 有关，但与 c 无关　　　　B. 与 b,c,R 有关，但与 a 无关

C. 与 a,c,R 有关，但与 b 无关　　　　D. 与 a,b,c 有关，但与 R 无关

5. 设 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为三阶非零实矩阵，A_{ij} 是 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式. 若 $A_{ij}=a_{ij}, i,j=1,2,3$，则（　　）.

A. 矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 不可逆　　　　B. 矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆

C. 矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 不可逆　　　　D. 矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，则（　　）.

A. 线性方程组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解

B. 线性方程组$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$与$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$同解

C. 线性方程组$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$与$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$同解

D. 线性方程组$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$与$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$同解

7. 设$\boldsymbol{A}$为3阶实方阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{A}$的分别对应于特征值$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$的线性无关的特征向量,$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵. 令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=$(　　).

A. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

8. 设随机变量X服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的指数分布,$0<a<b<2a$,记$p_1=P\{X>a\}$,$p_2=P\{X>b\}$,$p_3=P\{X>b\mid X>a\}$,则(　　).

A. $p_1>p_2>p_3$　　B. $p_2>p_1>p_3$

C. $p_3>p_1>p_2$　　D. $p_3>p_2>p_1$

9. 设随机变量X与Y相互独立,$X\sim N\left(1,\frac{1}{4}\right)$,$Y\sim N(3,1)$,令$Z=2X-Y+1$,则$D|Z|=$(　　).

A. 2　　B. 3　　C. $1-\frac{2}{\pi}$　　D. $2-\frac{4}{\pi}$

10. 设总体$X\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2 \end{pmatrix}$,其中$\theta(0<\theta<1)$为未知参数,利用总体$X$的如下样本值

1, 2, 3, 1, 3,

得θ的最大似然估计值$\hat{\theta}_L=$(　　).

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

二、填空题:11～16小题,每小题5分,共30分.把答案填在题中的横线上.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x}{n^2+x}\mathrm{d}x=$________.

12. $\int_0^{+\infty}\frac{x-1}{x^3+1}\mathrm{d}x=$________.

13. 设曲线L为:$x^2+y^2=y$,则$I=\int_L[(x^2+y^2)^2+x^2]\mathrm{d}s=$________.

14. 设$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x$,$n=0,1,2,\cdots$,则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n=$________.

15. 若三元实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$的规范形为

$y_1^2+y_2^2$,则 $a=$ ________.

16. 已知随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 相互独立,$X_i\sim\begin{pmatrix}e & e^2\\0.4 & 0.6\end{pmatrix}$,$i=1,2,\cdots,100$,则由中心极限定理,$P\{X_1X_2\cdots X_{100}<e^{160}\}\approx$ ______.

三、解答题:17 ~ 22 小题,共 70 分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(本题满分 10 分)

若函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^3+y^3+xy-1=0$ 确定,求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3y+x-3}{x^3}$.

18.(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导,$z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+y$ 满足关系式 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$,且 $f(1)=1$,求曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

19.(本题满分 12 分)

已知点 $A(1,0,0)$ 与点 $B(1,1,1)$,Σ 是由线段 AB 绕 z 轴旋转一周而成的旋转曲面,Σ 取外侧,函数 $f(u)$ 具有连续导数,计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}[xf(xy)+x^2]\mathrm{d}y\mathrm{d}z-[yf(xy)+2y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

20.(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续.

(1) 证明存在 $\xi \in (a,b)$,使得$\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=(b-\xi)f(\xi)$;

(2) 如果 $f(x)$ 在(a,b)内取得最大值和最小值,证明存在 $\eta \in (a,b)$,使得$\int_a^{\eta} f(x)\mathrm{d}x=(\eta-a)f(\eta)$.

21.(本题满分 12 分)

已知线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ 2x_1+(a+4)x_2-5x_3=6, \\ -x_1-2x_2+ax_3=-3 \end{cases}$有无穷多个解.$\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实矩阵,且 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2a,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(a,a+3,a+2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(a-2,-1,a+1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别对应于特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$ 的特征向量,

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 求行列式 $|\boldsymbol{A}^{2024}+2\boldsymbol{E}|$.

22.(本题满分 12 分)

二维随机变量设(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1-x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad \text{令 } Z=\begin{cases} 0, & X+Y \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ X+Y, & X+Y>\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

(1) 求(X,Y)的分布函数 $F(x,y)$ 在点$\left(\frac{1}{2},1\right)$处的值;

(2) 求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$,由此求 $P\{Z=0\}$,并问 Z 是否是连续型随机变量?

(3) 记 $U=\max\{X,Y\}$,$V=\min\{X,Y\}$,求 $E(U+V)$.