一、选择题

(1)A.

解 由于

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-(ax+bx^2+cx^3)}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)-ax-bx^2-cx^3}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x-bx^2-\left(\dfrac{1}{3}+c\right)x^3+o(x^3)}{x^3}=0,\end{aligned}$$

故 $a=1,b=0,c=-\dfrac{1}{3}$. A 正确.

(2)B.

解 对于 B,$\ln(1-x^2)$ 在 $x=1$ 处无界. 由于

$$\int_0^1\ln(1-x^2)\mathrm{d}x=\int_0^1[\ln(1-x)+\ln(1+x)]\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^1\ln(1-x)\mathrm{d}x\xlongequal{1-x=t}\int_1^0(-\ln t)\mathrm{d}t=\int_0^1\ln t\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x\xlongequal{1+x=t}\int_1^2\ln t\mathrm{d}t,$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^1\ln(1-x^2)\mathrm{d}x&=\int_0^2\ln t\mathrm{d}t=t\ln t\Big|_0^2-\int_0^2\mathrm{d}t\\&=2\ln 2-2(\text{这里}\lim_{t\to 0^+}t\ln t=0),\end{aligned}$$

由此可知 B 正确.

对于 A,由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{a}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{a}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

其中$\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_a^{+\infty}=+\infty$,发散,故原积分发散.

对于 C,由于$\dfrac{1}{1+x\mid\sin x\mid}\geqslant\dfrac{1}{1+x}>0$,且

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^{+\infty}=+\infty,$$

发散,故由比较判别法,可知原积分发散.

对于 D,由$\displaystyle\lim_{x\to 1^+}(x-1)^3\cdot\frac{1}{(\ln x)^3}=1$,且 $\lambda=3>1$,可知原积分发散.

(3)D.

解 由

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(x^2+y^2)\\&\xlongequal{x^2+y^2=u}\lim_{u\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\cos u=1=f(0,0),\end{aligned}$$

可知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，所以 $f(x,y)$ 在 D 上连续. 由二重积分的中值定理，可知存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi t^2 f(\xi,\eta)$，故

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\pi t^2}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{t\to0^+}f(\xi,\eta)=f(0,0)=1.$$

(4)B.

解　当 $x>0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-x+x\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-x\mathrm{e}^{-nx}+x}{\mathrm{e}^{-nx}+1}=x.$

当 $x=0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-x+x\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}}=0.$

当 $x<0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-x+x\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}}=-x.$

综上可得

$$f(x)=\begin{cases}x, & x>0,\\0, & x=0,\\-x, & x<0.\end{cases}$$

又由 $f(x)$ 是连续的偶函数，知 $F(x)$ 是可导的奇函数. 故 B 正确.

(5)D.

解　对于 D，依题意 $u_n>0$，由单调有界准则，知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n-u_{n+1}}{\sqrt{u_n}}$ 是正项级数. 又由于

$$\begin{aligned}\frac{u_n-u_{n+1}}{\sqrt{u_n}}&=\frac{(\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{n+1}})(\sqrt{u_n}-\sqrt{u_{n+1}})}{\sqrt{u_n}}\\&=\left(1+\sqrt{\frac{u_{n+1}}{u_n}}\right)(\sqrt{u_n}-\sqrt{u_{n+1}})\\&\leqslant 2(\sqrt{u_n}-\sqrt{u_{n+1}})\left(\text{因为}\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant 1\right),\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k-u_{k+1}}{\sqrt{u_k}}\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{u_k}-\sqrt{u_{k+1}})\\&=2(\sqrt{u_1}-\sqrt{u_{n+1}})<2\sqrt{u_1}.\end{aligned}$$

综上，可知 $\{S_n\}$ 有上界. 又 $\{S_n\}$ 单调增加，故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，所以级数收敛. 故 D 正确.

对于 A，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在，但不一定有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，由级数收敛的必要条件，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 不一定收敛.

对于 B，取 $u_n=1+\dfrac{1}{n}$，则 $\{u_n\}$ 是单调减少的正值数列，且 $\dfrac{u_n}{n}=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$ 发散.

对于 C，取 $u_n=\dfrac{1}{n}$，则

$$1-\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 发散，故级数发散.

(6) B.

解 设 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^{2x-z}-f(\pi y-\sqrt{2}z)$，则曲面上任意一点的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)=(2\mathrm{e}^{2x-z},-\pi f',-\mathrm{e}^{2x-z}+\sqrt{2}f').$$

B 中的方向向量为 $\boldsymbol{l}=(\pi,2\sqrt{2},2\pi)$，则

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=\pi\cdot 2\mathrm{e}^{2x-z}+2\sqrt{2}(-\pi f')+2\pi(-\mathrm{e}^{2x-z}+\sqrt{2}f')=0,$$

即 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{l}$ 垂直，故曲面上任意一点的切平面平行于以 $\boldsymbol{l}$ 为方向向量的直线. B 正确.

(7) C.

解 由

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&a&-1\\a&-1&1\\4&5&-5\end{vmatrix}=(a-1)(5a+4)=0,$$

解得 $a=1$ 或 $a=-\dfrac{4}{5}$.

当 $a=1$ 时，由

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&1\\1&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

可知 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=2<3$，方程组有无穷多解，其通解为

$$k\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

当 $a=-\dfrac{4}{5}$ 时，经计算可知 $r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=3$，方程组无解. C 正确.

(8) A.

解 由于

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，且 $\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0$，故 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AP}&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{A\alpha}_1+\boldsymbol{A\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_2,-\boldsymbol{A\alpha}_3)\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\\&=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&-1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

故 A 正确.

(9) D.

解 由于

$$\begin{aligned}\rho_{UV}&=\frac{\mathrm{Cov}(X_1-\overline{X},X_2-\overline{X})}{\sqrt{D(X_1-\overline{X})}\sqrt{D(X_2-\overline{X})}}\\&=\frac{E[(X_1-\overline{X})(X_2-\overline{X})]-E(X_1-\overline{X})E(X_2-\overline{X})}{\sqrt{D(X_1-\overline{X})}\sqrt{D(X_2-\overline{X})}},\end{aligned}$$

$$E(X_1-\overline{X})=EX_1-E\overline{X}=0-0=0,$$

$$E(X_1\overline{X})=E(X_2\overline{X}),\ D(X_1-\overline{X})=D(X_2-\overline{X}),$$

$$\begin{aligned}E[(X_1-\overline{X})(X_2-\overline{X})]&=E(X_1X_2)-E(X_1\overline{X})-E(X_2\overline{X})+E(\overline{X}^2)\\&=EX_1\cdot EX_2-2E\left[X_1\cdot\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right]+E(\overline{X}^2)\\&=0-2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(X_1-\overline{X})&=D\left[X_1-\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right]=D\left(\frac{1}{2}X_1-\frac{1}{2}X_2\right)\\&=\frac{1}{4}DX_1+\frac{1}{4}DX_2=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故 $\rho_{UV}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=-1$. D 正确.

(10) B.

解 由于

$$U=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1),V=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$$

且 U 与 V 独立,故

$$\frac{U}{\sqrt{V/(n-1)}}=\frac{\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}}{\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}=\frac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}\sim t(n-1).$$

故 B 正确.

二、填空题

(11) $(-1)^{n-1}(n-1)!\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$.

解 在 $x=1$ 处将 $f(x)=\ln x-\ln(1+x)$ 展开为幂级数. 由于

$$\ln x=\ln(1+x-1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n},0<x\leqslant 2,$$

$$\begin{aligned}\ln(1+x)&=\ln(2+x-1)=\ln\left[2\left(1+\frac{x-1}{2}\right)\right]\\&=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-1}{2}\right)\\&=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n},-1<\frac{x-1}{2}\leqslant 1,\end{aligned}$$

故 $f(x)=\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)(x-1)^n,0<x\leqslant 2$.

综上可得

$$f^{(n)}(1)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)n!=(-1)^{n-1}(n-1)!\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

(12) $\dfrac{21}{2}$.

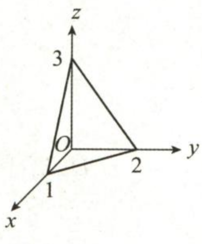

图 2-1

解 S 的图形如图 2-1 所示. 由 $x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$,知 $z=3-3x-\dfrac{3}{2}y$,且 $z_x'=-3$, $z_y'=-\dfrac{3}{2}$,故

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_S\left(3x+\frac{3}{2}y+z\right)\mathrm{d}S=3\iint\limits_S\left(x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}\right)\mathrm{d}S\\&=3\iint\limits_S 1\mathrm{d}S=3\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= 3\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+(-3)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3\cdot\frac{7}{2}\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\times\frac{7}{2}\times\frac{1}{2}\times 2\times 1 = \frac{21}{2}.$$

(13) $8\pi^2$.

解 由于曲线 $(x-2)^2+y^2=1$ 的参数方程为

$$x = 2+\cos t, y = \sin t (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

故旋转体的表面积为

$$S = 2\pi\int_0^{2\pi} x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi}(2+\cos t)\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi}(2+\cos t)\,\mathrm{d}t = 8\pi^2.$$

(14) $-2\sqrt{2}\pi$.

解 将曲线 L 的方程代入积分化简，得

$$\int_L (2x^2+y^2)(|y|\,\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y) = 2\int_L |y|\,\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y.$$

令 L 的参数方程为 $x=\cos t, y=\sqrt{2}\sin t$，其中 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$，则

$$\text{原积分} = 2\int_{2\pi}^{0}\left[\sqrt{2}\,|\sin t|\,(-\sin t)+\cos t\cdot\sqrt{2}\cos t\right]\mathrm{d}t$$

$$= -2\sqrt{2}\left(\int_0^{2\pi} -|\sin t|\sin t\,\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= -2\sqrt{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\sin t|\sin t\,\mathrm{d}t+\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= -2\sqrt{2}\left(0+2\int_0^{\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t\right) = -8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = -2\sqrt{2}\pi.$$

李林老师敲黑板

① 本题将积分限从 $[0,2\pi]$ 转化为 $[-\pi,\pi]$ 是为了利用被积函数的奇偶性.

② 本题也可利用第二类曲线积分的奇偶性与格林公式计算. 曲线 L 关于 x 轴对称，$P(x,y)=(2x^2+y^2)|y|$ 关于 y 是偶函数，则 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = 0$.

$$\text{原积分} = 2\int_L x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{格林公式}} -2\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\sqrt{2}\pi,$$

其中 D 为 L 所围区域.

第二类曲线积分的奇偶性，见《李林考研数学系列高等数学辅导讲义》.

(15) 2.

解 由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, -\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & a\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

及已知条件，可知 $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & a\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 不可逆，故 $\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & a\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = 0$，解得 $a=2$.

(16) $\frac{4}{\ln 3}$.

解　由 $X \sim N(0,\sigma^2)$，可知

$$P\{1 < X < 3\} = P\left\{\frac{1}{\sigma} < \frac{X}{\sigma} < \frac{3}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数. 记 $f(\sigma) = \Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)$，求导得

$$f'(\sigma) = -\frac{3}{\sigma^2}\Phi'\left(\frac{3}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma^2}\Phi'\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}}(1 - 3\mathrm{e}^{-\frac{4}{\sigma^2}}).$$

令 $f'(\sigma) = 0$，得 $\sigma_0 = \frac{2}{\sqrt{\ln 3}}$. 再对 $f'(\sigma)$ 求导，代入 $\sigma = \sigma_0$，得

$$f''(\sigma_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}} \cdot \left(\frac{-24}{\sigma_0^3}\mathrm{e}^{-\frac{4}{\sigma_0^2}}\right) = \frac{-24}{\sqrt{2\pi}\sigma_0^5}\mathrm{e}^{-\frac{9}{2\sigma_0^2}} < 0,$$

故当 $\sigma = \frac{2}{\sqrt{\ln 3}}$ 时，$P\{1 < X < 3\}$ 最大，此时

$$E(X^2) = DX + (EX)^2 = \frac{4}{\ln 3} + 0 = \frac{4}{\ln 3}.$$

三、解答题

(17) 解　令 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$，则

$$\begin{aligned} g(x) &= x\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty}(nx^n)' = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n\right)' = x\left(x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right)' \\ &= x\left[x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'\right]' = x\left[x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)'\right]' = x\left[x \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)'\right]' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \end{aligned}$$

由此可得

$$f(x) = (1-x)^3 g(x) - 2x - 1 = x^2 - x - 1.$$

令 $f'(x) = 2x - 1 = 0$，得 $x = \frac{1}{2}$，且 $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$ 为唯一极小值，也是最小值.

(18) 解　(Ⅰ) $\boldsymbol{l}_1 = (1,1)$ 的方向余弦为 $\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\boldsymbol{l}_2 = (0,-2)$ 的方向余弦为 $\cos\alpha_2 = 0$，$\cos\beta_2 = -1$.

由已知，有

$$\frac{\partial f}{\partial l_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{2}(x - xy^2 + 2y - x^2 y), \quad ①$$

$$\frac{\partial f}{\partial l_2} = 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y - 4y. \quad ②$$

解式 ① 和式 ②，得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2xy^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 2x^2 y.$$

在点 $M(2,1)$ 处，$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$，$\frac{\partial f}{\partial y} = -4$，$f(x,y)$ 在点 $M(2,1)$ 处的最大方向导数为梯度的模，即

$$\|\mathbf{grad}\, f\| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4.$$

（Ⅱ）由（Ⅰ），知 f 的全微分为

$$\begin{aligned}
df(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\
&= (2x - 2xy^2)dx + (4y - 2x^2y)dy \\
&= 2xdx + 4ydy - (2xy^2dx + 2x^2ydy) \\
&= d(x^2) + d(2y^2) - d(x^2y^2) \\
&= d(x^2 + 2y^2 - x^2y^2),
\end{aligned}$$

故 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2 + C$. 由 $f(1,1) = 2$，得 $C = 0$，由此可得

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2.$$

由 $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2xy^2 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y - 2x^2y = 0, \end{cases}$ 解得驻点为 $(0,0)$，$(\pm\sqrt{2},1)$，$(\pm\sqrt{2},-1)$，且

$$A = f''_{xx} = 2 - 2y^2,\ B = f''_{xy} = -4xy,\ C = f''_{yy} = 4 - 2x^2.$$

对于点 $(0,0)$，$A = 2$，$B = 0$，$C = 4$，则

$$AC - B^2 = 2 \times 4 - 0^2 > 0,$$

且 $A > 0$，故 $f(0,0) = 0$ 为极小值.

对于点 $(\pm\sqrt{2},1)$，$(\pm\sqrt{2},-1)$，经计算知 $AC - B^2 < 0$，不取得极值.

综上所述，$f(x,y)$ 的极小值为 0，无极大值.

(19) 解　由于

$$\begin{aligned}
I &= \oint_L [f(x^2 + y^2) + g(x + y)](xdx + ydy) \\
&= \oint_L f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) + \oint_L g(x + y)(xdx + ydy),
\end{aligned}$$

故令

$$I_1 = \oint_L f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = \oint_L f(x^2 + y^2)d\left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right],$$

$$I_2 = \oint_L g(x + y)(xdx + ydy),$$

再令 $x^2 + y^2 = u$，因为 $f(u)$ 连续，所以存在 $F(u) = \int_0^u f(t)dt$，$F'(u) = f(u)$，即

$$d\left[\frac{1}{2}F(u)\right] = \frac{1}{2}F'(u)du = f(x^2 + y^2)(xdx + ydy),$$

故

$$I_1 = \oint_L f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = \oint_L d\left[\frac{1}{2}F(u)\right] = 0.$$

对于 $I_2 = \oint_L g(x + y)(xdx + ydy)$，由于

$$P = g(x + y)x,\ Q = g(x + y)y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = g'(x + y) \cdot y,\ \frac{\partial P}{\partial y} = g'(x + y) \cdot x,$$

故

$$I_2=\oint_L g(x+y)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)\xlongequal{\text{格林公式}}\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D(y-x)g'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于 D 关于直线 $y=x$ 对称，故由轮换性，得

$$\iint_D(y-x)g'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D[(y-x)g'(x+y)+(x-y)g'(x+y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=0.$$

故 $I=I_1+I_2=0+0=0.$

李林老师敲黑板

由于 $f(t)$ 只有连续的条件，故计算 I_1 不能利用格林公式.

(20) 证 （Ⅰ）由于

$$1=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\Big|_0^1-\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f''(x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}[f'(1)+f'(0)]-\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f''(x)\mathrm{d}x$$
$$=-\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f''(x)\mathrm{d}x,$$

故

$$1=\left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f''(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\,|f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

（Ⅱ）用反证法. 假设不存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $|f''(\xi)|\geqslant 4$，则 $|f''(x)|<4$ 在 $(0,1)$ 内处处成立，故

$$\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\,|f''(x)|\,\mathrm{d}x<4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x=1,$$

与 $\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\,|f''(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant 1$ 矛盾，由此可知存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $|f''(\xi)|\geqslant 4$.

(21) 解 （Ⅰ）由于 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 可逆（因为 $|\boldsymbol{C}|=-2\neq 0$），故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同（但不相似），所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$. 而 $r(\boldsymbol{B})=2$，从而 $r(\boldsymbol{A})=2$，故

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{vmatrix}=(1-a)^2(2a+1)=0,$$

解得 $a=1$ 或 $a=-\frac{1}{2}$.

当 $a=1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=1$，故 $a=1$ 舍去. 所以 $a=-\frac{1}{2}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ），得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}.$$

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{3}{2}$，$\lambda_3=0$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{3}{2}$，由 $\left(\frac{3}{2}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，解得特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-2)^{\mathrm{T}}(\text{已正交}).$$

对于 $\lambda_3=0$，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，解得特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

再对 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

令

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{Q}$ 为所求正交矩阵，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\right)$.

（Ⅲ）由 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$，得 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}=(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}$，故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}&=\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Q}\\&=(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}.\end{aligned}$$

于是

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{3\sqrt{2}}{4} & \frac{7\sqrt{6}}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & 0\end{pmatrix}.$$

(22) 解　（Ⅰ）由 $P\{T>b\}=\theta$，知 $P\{T\leqslant b\}=1-\theta$. 由于

$$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{T\leqslant a,T\leqslant b\}=P\{T\leqslant a\}=\theta,$$

$$P\{X=-1,Y=1\}=P\{T\leqslant a,T>b\}=0,$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\{T>a,T\leqslant b\}=P\{a<T\leqslant b\}=1-2\theta,$$

$$P\{X=1,Y=1\}=1-\theta-0-(1-2\theta)=\theta,$$

故 (X,Y) 的概率分布及边缘分布为

X \ Y	-1	1	X 的边缘
-1	θ	0	θ
1	$1-2\theta$	θ	$1-\theta$
Y 的边缘	$1-\theta$	θ	

由上表，可得 $EX=1-2\theta, EY=-1+2\theta, E(X^2)=1, E(Y^2)=1$，从而

$$DX=E(X^2)-(EX)^2=4\theta-4\theta^2,$$
$$DY=E(Y^2)-(EY)^2=4\theta-4\theta^2,$$

故

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)&=\mathrm{Cov}(X,X)-\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(Y,X)-\mathrm{Cov}(Y,Y)\\&=DX-DY=0.\end{aligned}$$

（Ⅱ）由于 $Z=X+Y$ 取值为 $-2,0,2$，且

$$P\{Z=-2\}=P\{X+Y=-2\}=P\{X=-1,Y=-1\}=\theta,$$
$$\begin{aligned}P\{Z=0\}&=P\{X+Y=0\}=P\{X=1,Y=-1\}+P\{X=-1,Y=1\}\\&=1-2\theta+0=1-2\theta,\end{aligned}$$
$$P\{Z=2\}=1-\theta-(1-2\theta)=\theta,$$

故 Z 的概率分布为

Z	-2	0	2
p	θ	$1-2\theta$	θ

（Ⅲ）由于 $EZ=0$，且

$$E(Z^2)=(-2)^2\cdot\theta+0^2\cdot(1-2\theta)+2^2\cdot\theta=8\theta,$$

故

$$8\theta=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}Z_i^2=\frac{(-2)^2+0^2+0^2+0^2+2^2+2^2}{6}=2,$$

由此可得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}$.

似然函数为

$$L(\theta)=\theta\cdot(1-2\theta)^3\cdot\theta^2=\theta^3(1-2\theta)^3.$$

两边同时取对数，得

$$\ln L(\theta)=3\ln\theta+3\ln(1-2\theta).$$

令

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=\frac{3}{\theta}-\frac{6}{1-2\theta}=\frac{3-12\theta}{\theta(1-2\theta)}=0,$$

得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}$.