数学第一次模考答案

1. 答　应选 C.

解　当 $0<x<1$ 时，$\frac{x^2}{2}<x<1$，此时有 $1<\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)^n+x^n+1\right]^{\frac{1}{n}}<\sqrt[n]{3}$；

当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$\frac{x^2}{2}\leqslant x, 1\leqslant x$，此时有 $x\leqslant\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)^n+x^n+1\right]^{\frac{1}{n}}\leqslant x\sqrt[n]{3}$；

当 $x>2$ 时，$1<x<\frac{x^2}{2}$，此时有 $\frac{x^2}{2}<\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)^n+x^n+1\right]^{\frac{1}{n}}<\frac{x^2}{2}\sqrt[n]{3}$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$，故

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)^n+x^n+1\right]^{\frac{1}{n}}=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ \frac{x^2}{2}, & x>2.\end{cases}$$

显然，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内处处连续. 由于 $f'_-(1)=0, f'_+(1)=1, f'_-(2)=1, f'_+(2)=2$，因此 $f(x)$ 在 $x=1, x=2$ 处不可导.

2. 答　应选 A.

解
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\lim\limits_{x\to 0}f(x)}{ax^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{2}}{ax^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2(e^x-1-x)-x(e^x-1)}{2ax^{k+1}(e^x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(e^x-1-x)-x(e^x-1)}{2ax^{k+2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-xe^x}{2a(k+2)x^{k+1}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-xe^x}{2a(k+2)(k+1)x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2a(k+2)(k+1)x^{k-1}}.$$

由题设知，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-\lim\limits_{x\to 0}f(x)}{ax^k}=1$，所以 $k=1, a=-\frac{1}{12}$.

3. 答　应选 B.

解　此题考查狄利克雷收敛定理. 事实上，在 $[-\pi,\pi]$ 上

$$f(x)\sim S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$
$$=\begin{cases}f(x), & x\text{ 为连续点},\\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x\text{ 为第一类间断点},\\ \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & x\text{ 为端点 }-\pi,\pi.\end{cases}$$

对于 A，$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}\neq 0$，但 $f(\pi)=0$，不成立；

对于 C，$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}\neq 0$，但 $f(-\pi)=0$，不成立；

对于 D，$\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}\neq f(0)$，不成立；

对于 B，$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=f(\pm\pi)=0$，$f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上连续，由狄利克雷收敛定理可知 $f(x)=S(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上处处成立.

4. 答　应选 A.

解
$$a_{n+1}-a_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^{n+1}x-\sin^{n-1}x}{\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^{n-1}x(\sin^2 x-1)}{\cos x}\mathrm{d}x$$
$$=-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^{n-1}x\mathrm{d}(\sin x)=-\frac{\sin^n x}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=-\frac{1}{n\cdot 2^n},$$

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_{n+1}-a_{n-1})=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\overset{(*)}{=\!=}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=-2.$$

【注】（$*$）处来自
$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},\ |x|<1,$$
同时考生还应记住
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),\ -1\leqslant x<1,$$
这都是常考的结论.

5. 答　应选 D.

解　由于 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$, $|\boldsymbol{P}|=1$, 因此 $\boldsymbol{B}^*=(\boldsymbol{PA})^*=|\boldsymbol{PA}|(\boldsymbol{PA})^{-1}=|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}^{-1}$, $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 由初等变换与初等矩阵的关系知 D 选项正确.

【注】　考核点为伴随矩阵以及初等变换与初等矩阵的关系. 关键点是在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的条件下, $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$, 同时注意右乘初等矩阵相当于对矩阵作相应的初等列变换.

6. 答　应选 B.

解　对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换, 得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2&a\\0&1&3&4\\0&0&a&a\\1&0&2&a^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&a\\0&1&3&4\\0&0&a&a\\0&0&0&a^2-a\end{pmatrix}$. 因为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 所以 $|\boldsymbol{A}|=0$, 又 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有 3 阶非零子式, 故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=3$, 因此 $a=1$.

【注】　考核点为矩阵的秩、线性方程组等. 注意 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$ 说明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中存在某个元素的代数余子式不等于零, 即 $\boldsymbol{A}$ 中有 3 阶非零子式.

7. 答　应选 B.

解　因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)$, 所以 $r(\boldsymbol{A})=1$, $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]=2$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,0,2, 而 $\boldsymbol{A}^n$ 的特征值为 $0,0,2^n$, 从而 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^n)=0+0+2^n=2^n$. 于是, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^n)}{2^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+1}=1$.

8. 答　应选 B.

解　由条件 $P(B)=0.8, P(A|B)=P(\overline{A}|\overline{B})=0.2$ 得

$$P(AB)=P(B)P(A|B)=0.8\times 0.2=0.16,$$

$$P(\overline{A\cup B})=P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{B})P(\overline{A}|\overline{B})=[1-P(B)]P(\overline{A}|\overline{B})=(1-0.8)\times 0.2=0.04.$$

于是，
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.96,$$

$$P(A)=P(A\cup B)-P(B)+P(AB)=0.96-0.8+0.16=0.32.$$

故 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.16}{0.32}=0.5.$

9. 答　应选 D.

解　当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{x^2}^{x}6\mathrm{d}y=6(x-x^2)$；

当 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}0\mathrm{d}y=0.$

当 $0<x<1$ 时，$f_X'(x)=6(1-2x)$，令 $f_X'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{1}{2}$. 因为 $f_X''\left(\dfrac{1}{2}\right)=-12<0$，

所以 $f_X(x)$ 的最大值为 $f_X\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}.$

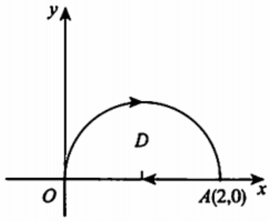
10. 答　应选 B.

解　由于 σ 已知，因此 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $\left(\overline{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$，其中 $n=16$，因为置信度 $1-\alpha=0.95$，所以 $1-\dfrac{\alpha}{2}=0.975$. 由于 $\Phi(1.96)=0.975$，因此 $z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$. 由题设知，$\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=14.52$，$\overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=16.48$，所以 $\overline{x}=\dfrac{1}{2}(14.52+16.48)=15.5$. 于是

$$\sigma=\frac{\sqrt{n}(16.48-\overline{x})}{z_{\frac{\alpha}{2}}}=\frac{\sqrt{16}(16.48-15.5)}{1.96}=2.$$

11. 答　应填 $x^2+\frac{3\pi}{4-2\pi}$.

解　记 $f(x)=x^2+a$,其中 $\int_L[yf(x)+e^xy]dx+(e^x-xy^2)dy=a$,补线段 $\overline{AO}$: $y=0$, x 从 2 到 0,如图所示,则



$$
\begin{aligned}
a&=\oint_{L+\overline{AO}}-\int_{\overline{AO}}\\
&=-\iint_D[e^x-y^2-f(x)-e^x]d\sigma-0\\
&=-\iint_D(e^x-y^2-x^2-a-e^x)d\sigma\\
&=\iint_D(x^2+y^2)d\sigma+a\iint_D d\sigma\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\cdot rdr+a\cdot\frac{\pi}{2}\\
&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta+\frac{\pi}{2}a\\
&=4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}a\\
&=\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{2}a,
\end{aligned}
$$

即 $a=\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{2}a$,解得 $a=\dfrac{\frac{3}{4}\pi}{1-\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{4-2\pi}$. 故 $f(x)=x^2+\frac{3\pi}{4-2\pi}$.

12. 答　应填 $\frac{\sqrt{6}\pi}{6}$.

解　球面与锥面的交线在 xOy 平面上的投影曲线的方程为

$$2x^2+3y^2=1,$$

则相应的投影区域 $D=\{(x,y)\mid 2x^2+3y^2\leqslant 1\}$. 球面(上部分)方程为

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2},$$

则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}d\sigma=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}d\sigma,$$

$$\iint_\Sigma z\,dS=\iint_D d\sigma=S_D(D\text{ 的面积}),$$

D 是个椭圆, $S_D=\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{\sqrt{6}}$. 所以 $\iint_\Sigma z\,dS=\frac{\sqrt{6}\pi}{6}$.

13. 答　应填$\frac{1}{4}\ln 3$.

解　令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n-1}(x>0)$，再令 $x=t^2,0<t<1$，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n-1}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2n-1}=t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-1}}{2n-1}\\&=t\int_0^t\Big(\sum_{n=1}^{\infty}u^{2n-2}\Big)\mathrm{d}u=t\int_0^t\frac{1}{1-u^2}\mathrm{d}u\\&=\frac{t}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}=\frac{\sqrt{x}}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}(0<x<1),\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{2n-1}=S\Big(\frac{1}{4}\Big)=\frac{1}{4}\ln 3.$$

14. 答　应填 $\mathrm{e}^y f(x-y)-\mathrm{e}^y f'(x-y)$.

解
$$F(x,y)=\int_y^x \mathrm{e}^y f(x-t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^y\int_y^x f(x-t)\mathrm{d}t.$$

令 $x-t=u$，则

$$\int_y^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^{x-y}f(u)\mathrm{d}u,$$

从而
$$F(x,y)=\mathrm{e}^y\int_0^{x-y}f(u)\mathrm{d}u.$$

于是，

$$F'_x(x,y)=\mathrm{e}^y f(x-y),F''_{xy}(x,y)=\mathrm{e}^y f(x-y)-\mathrm{e}^y f'(x-y).$$

15. **答** 应填$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

解 由 $\boldsymbol{AB} = 2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 得，$\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E}$，故

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. **答** 应填 0.

解 (X,Y) 关于 X,Y 的边缘概率分布分别为

X	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Y	0	1	2	3
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

XY 的概率分布为

XY	0	1	2	6
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

故

$$E(X) = 1\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{3}{4} = \frac{7}{4},$$

$$E(Y) = 0\times\frac{3}{8} + 1\times\frac{1}{8} + 2\times\frac{1}{8} + 3\times\frac{3}{8} = \frac{3}{2},$$

$$E(XY) = 0\times\frac{3}{8} + 1\times\frac{1}{8} + 2\times\frac{1}{8} + 6\times\frac{3}{8} = \frac{21}{8}.$$

故 $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{21}{8} - \frac{7}{4}\times\frac{3}{2} = 0$.

(17)【解】 令 $x_n = \frac{n^3}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - n^3 + \frac{n^2}{2} - \frac{11}{24}n = n^3\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1} - n^3 + \frac{n^2}{2} - \frac{11}{24}n$,

令 $t = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 = n\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right] - 1$

$= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$，

$t^2 = \left[-\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\left[-\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$

$= \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$,

$t^3 = \left[-\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\left[\frac{1}{4n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] = -\frac{1}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$,

$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$

$= 1 + \left[-\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] + \frac{1}{6}\left[-\frac{1}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2} - \frac{7}{16n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$,

$x_n = n^3\left[1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2} - \frac{7}{16n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] - n^3 + \frac{n^2}{2} - \frac{11}{24}n = -\frac{7}{16} + o(1)$,

由此得所求极限为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = -\frac{7}{16}$.

(18)【解】 (Ⅰ) $\forall x\in[-a,a]$,有

$$g(x)=\int_{-a}^{x}(x-t)f(t)\mathrm{d}t+\int_{x}^{a}(t-x)f(t)\mathrm{d}t$$

$$=x\int_{-a}^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_{-a}^{x}tf(t)\mathrm{d}t+\int_{x}^{a}tf(t)\mathrm{d}t-x\int_{x}^{a}f(t)\mathrm{d}t.$$

已知 $f(x)$ 可导,故 $g(x)$ 可导,则

$$g'(x)=\int_{-a}^{x}f(t)\mathrm{d}t+2xf(x)-2xf(x)-\int_{x}^{a}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-a}^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_{x}^{a}f(t)\mathrm{d}t.$$

$g'(x)$ 仍可导,$g''(x)=2f(x)>0$,所以 $g'(x)$ 单调递增.

(Ⅱ) 因为 $f(x)$ 是偶函数,所以 $g'(0)=\int_{-a}^{0}f(t)\mathrm{d}t-\int_{0}^{a}f(t)\mathrm{d}t=0.$

$x>0$ 时,$g'(x)>g'(0)=0$,$g(x)$ 在$[0,a]$上单调递增;

$x<0$ 时,$g'(x)<g'(0)=0$,$g(x)$ 在$[-a,0]$上单调递减,

因此 $g(x)$ 在$[-a,a]$上的最小值 $m(a)=g(0)=\int_{-a}^{a}|t|f(t)\mathrm{d}t.$

(Ⅲ) 若 $m(a)=\int_{-a}^{a}|t|f(t)\mathrm{d}t=2\int_{0}^{a}tf(t)\mathrm{d}t=f(a)-a^2-1$,

即 $2\int_{0}^{x}tf(t)\mathrm{d}t=f(x)-x^2-1$,取 $x=0$,得 $f(0)=1$.

在等式两端求导,得 $2xf(x)=f'(x)-2x$.

求解初值问题$\begin{cases}y'-2xy=2x\\y(0)=1\end{cases}$,得 $y=f(x)=2\mathrm{e}^{x^2}-1$.

(19)【证明】 切平面 Π 的方程为$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)+\frac{z}{c^2}(Z-z)=0$,即

$$\frac{x}{a^2}X+\frac{y}{b^2}Y+\frac{z}{c^2}Z=1,$$

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{\rho}=\iint_{\Sigma}\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}\mathrm{d}S.$$

Σ 的外侧法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right)$,

其单位向量为 $\boldsymbol{n}^\circ=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{\rho}=\iint_{\Sigma}\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\frac{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\left(\frac{x}{a^2}\cos\alpha+\frac{y}{b^2}\cos\beta+\frac{z}{c^2}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{\Sigma^+}\frac{x}{a^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{b^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{c^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4\pi abc}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{4\pi}{3abc}(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2).$$

20.【证明】 (1) 设 $f_n(x)=\mathrm{e}^x+x^{2n+1}$，$f_n(-1)=\mathrm{e}^{-1}-1<0$，$f(0)=1>0$，则方程 $f_n(x)=0$ 至少有一个实根. 又因为 $f_n'(x)=\mathrm{e}^x+(2n+1)x^{2n}>0$，故方程有唯一实根.

扫码看详解
(20题)

(2) 设实根为 x_n，则 $\mathrm{e}^{x_n}+x_n^{2n+1}=0\Rightarrow x_n=-\mathrm{e}^{\frac{x_n}{2n+1}}$，

则 $A=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{\frac{x_n}{2n+1}}\right)=-\mathrm{e}^0=-1$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-A}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\frac{x_n}{2n+1}}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{n}{2n+1}x_n\right)=\dfrac{1}{2}$，即 x_n-A 与 $\dfrac{1}{n}$ 是同阶无穷小.

21.【解】 (1) 等式 $A-A^{*}-E=O$ 两端左乘 A，注意，$|A|=2$，得 $A^2-A-2E=O$，设 A 的特征值为 λ，则 $\lambda^2-\lambda-2=0$，A 的可能特征值为 $-1,2$. 由 $|A|=2$，A 的特征值为 $-1,-1,2$. 再由 $A^2-A-2E=O$ 知 $(A+E)(A-2E)=O$，故

扫码看详解

(21题)

$$r(A+E)+r(A-2E)\leqslant 3.$$

又 $r(A+E)+r(A-2E)\geqslant r(2E-A+A+E)=r(E)=3$，得

$$r(A+E)+r(A-2E)=3,$$

又特征值 2 为单根，得 $r(A-2E)=3-1=2$，$r(A+E)=1$，特征值 -1 对应两个线性无关的特征向量，所以 A 可以对角化.

(2) 由题意 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是齐次方程组 $(A-2E)x=\mathbf{0}$ 的一个解，即 $\boldsymbol{\xi}$ 为 A 的特征值 2 对应的特征向量.

设 A 的特征值 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 对应的特征向量为 $x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}x=\mathbf{0}$，即 $x_1+x_2-x_3=0$，得基础解系 $\boldsymbol{\beta}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$，单位化 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$，得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3}\right)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0\right)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_3=\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6}\right)^{\mathrm{T}}.$$

令 $Q=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ -\frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，则 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

进而 $A=Q\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}$，

$$A+E=Q\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}=Q\begin{pmatrix}\sqrt3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}Q\begin{pmatrix}\sqrt3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}},$$

取 $B=Q\begin{pmatrix}\sqrt3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$，从而有 $B^2=A+E$.

2.【解】 (1) 设 Z 的分布函数为

扫码看详解
(22题)

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\left\{X \geqslant 0\right\} P\left\{Z \leqslant z \mid X \geqslant 0\right\} + P\left\{X < 0\right\} P\left\{Z \leqslant z \mid X < 0\right\} \\
&= \frac{1}{2}P\left\{|Y| \leqslant z \mid X \geqslant 0\right\} + \frac{1}{2}P\left\{-|Y| \leqslant z \mid X < 0\right\} \\
&= \frac{1}{2}P\left\{|Y| \leqslant z\right\} + \frac{1}{2}P\left\{-|Y| \leqslant z\right\} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[1 - P\{|Y| \leqslant -z\}\right], & z < 0, \\ \dfrac{1}{2}P\left\{|Y| \leqslant z\right\} + \dfrac{1}{2}, & z \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left\{1 - \left[\Phi(-z) - \Phi(z)\right]\right\}, & z < 0, \\ \dfrac{1}{2}\left[\Phi(z) - \Phi(-z)\right] + \dfrac{1}{2}, & z \geqslant 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \Phi(z), & z < 0, \\ \Phi(z), & z \geqslant 0 \end{cases} = \Phi(z),
\end{aligned}
$$

所以 $Z \sim N(0,1)$.

(2) $$
\begin{aligned}
P\left\{Y - Z = 0\right\} &= P\left\{Y - Z = 0, X \geqslant 0\right\} + P\left\{Y - Z = 0, X < 0\right\} \\
&= P\left\{X \geqslant 0\right\} P\left\{Y - Z = 0 \mid X \geqslant 0\right\} + P\left\{X < 0\right\} P\left\{Y - Z = 0 \mid X < 0\right\} \\
&= P\left\{X \geqslant 0\right\} P\left\{Y - |Y| = 0 \mid X \geqslant 0\right\} + P\left\{X < 0\right\} P\left\{Y + |Y| = 0 \mid X < 0\right\} \\
&= \frac{1}{2}P\left\{Y - |Y| = 0\right\} + \frac{1}{2}P\left\{Y + |Y| = 0\right\} = \frac{1}{2}P\left\{Y \geqslant 0\right\} + \frac{1}{2}P\left\{Y \leqslant 0\right\} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

由于 $P\left\{Y - Z = 0\right\} \neq 0$, $Y - Z$ 不是连续型随机变量.

(3) 因为 $Y - Z$ 不是连续型随机变量, $Y - Z$ 不服从正态分布, 所以 (Y, Z) 不服从二维正态分布.

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y<\theta,\\ e^{-(y-\theta)}, & y\geqslant\theta.\end{cases}$$

(2) ① 由 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=E(X)=1-p$ 得 $\hat{p}_M=1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=1-\overline{X}$.

② 似然函数为 $L(p)=\prod_{i=1}^{n}p^{1-x_i}(1-p)^{x_i}=p^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i}$,

$$\ln L(p)=\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\ln p+\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\ln(1-p),$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\frac{1}{p}-\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{1}{1-p},$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=0$ 得 $\hat{p}_L=1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

(3) ① 由 $\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i=E(Y)=\int_{\theta}^{+\infty}ye^{-(y-\theta)}\mathrm{d}y\xlongequal{y-\theta=t}\int_{0}^{+\infty}(\theta+t)e^{-t}\mathrm{d}t=\theta+1$ 得

$\hat{\theta}_M=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i-1$.

② 似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}e^{-(y_i-\theta)}=e^{n\theta-\sum_{i=1}^{n}y_i}$, $y_i\geqslant\theta, i=1,2,\cdots,n$.

$L(\theta)$ 为 θ 的单增函数,且 θ 的取值范围为 $\theta\leqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}y_i$. 当 $\theta=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}y_i$ 时,$L(\theta)$ 取最大值,所以 $\hat{\theta}_L=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}Y_i$.