2025 考研第三次模拟 数学（一）

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 5 分，满分 50 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选选项前的字母填在题后括号内.）

(1) 当 $x \to 0$ 时，$\arctan x - (ax + bx^2 + cx^3)$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则 a,b,c 依次为 （　　）

A. $1,0,-\dfrac{1}{3}$.　　B. $0,1,\dfrac{1}{3}$.

C. $1,\dfrac{1}{3},0$.　　D. $-1,0,\dfrac{1}{3}$.

(2) 下列积分收敛的是 （　　）

A. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.　　B. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-x^2)\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x\,|\sin x|}$.　　D. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^3}$.

(3) 设 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(x^2+y^2), & x^2+y^2 \neq 0, \\ 1, & x^2+y^2=0, \end{cases}$ $D: x^2+y^2 \leqslant t^2$，

则 $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\pi t^2}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ （　　）

A. π.　　B. 2π.　　C. 2.　　D. 1.

(4) 设 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{-x+x\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}}$，则 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 （　　）

A. 可导的偶函数.　　B. 可导的奇函数.

C. 连续但不可导的偶函数.　　D. 连续但不可导的奇函数.

(5) 设 $\{u_n\}$ 是单调减少的正值数列，则下列级数中收敛的是 （　　）

A. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$.　　B. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$.

C. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.　　D. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n-u_{n+1}}{\sqrt{u_n}}$.

(6) 设 f 可微，曲面 $\mathrm{e}^{2x-z}=f(\pi y-\sqrt{2}z)$ 上任意一点的切平面都平行于直线（　　）

A. $\dfrac{x}{\sqrt{2}}=\dfrac{y}{\pi}=\dfrac{z}{2\sqrt{2}}$.　　B. $\dfrac{x}{\pi}=\dfrac{y}{2\sqrt{2}}=\dfrac{z}{2\pi}$.

C. $\dfrac{x}{2\pi}=\dfrac{y}{\pi}=\dfrac{z}{\sqrt{2}}$.　　D. $\dfrac{x}{2\sqrt{2}}=\dfrac{y}{\sqrt{2}}=\dfrac{z}{\pi}$.

(7) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & a & -1\\ a & -1 & 1\\ 4 & 5 & -5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则该方程组的通解为 ( )

A. $k\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.　　B. $k\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

C. $k\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.　　D. $k\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，3 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$，记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=$ ( )

A. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$.　　B. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.　　D. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(9) 设 X_1 与 X_2 相互独立，且均服从 $N(0,1)$，$\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，$U=X_1-\overline{X}$，$V=X_2-\overline{X}$，则 U 与 V ( )

A. 相互独立.　　B. 不相关.

C. 正相关.　　D. 负相关.

(10) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，记 $S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\frac{n-1}{n}S_1^2$，$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$，$S_4^2=\frac{n-1}{n}S_3^2$，则服从 $t(n-1)$ 的是 ( )

A. $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$.　　B. $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$.

C. $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$.　　D. $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分. 把答案填在题中横线上.）

(11) 设 $f(x)=\ln\dfrac{x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(1)=$ ________.

(12) 设 S 是平面 $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ 在第一卦限部分，则 $I=\iint\limits_{S}\left(3x+\frac{3}{2}y+z\right)\mathrm{d}S=$ ________.

(13) 曲线 $(x-2)^2+y^2=1$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的表面积为________.

(14) 设曲线 $L: x^2+\frac{y^2}{2}=1$，取顺时针方向，则 $\int_L (2x^2+y^2)(|y|\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=$ ________.

(15) 设 3 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则 $a=$ ________.

(16) 设随机变量 $X\sim N(0,\sigma^2)(\sigma>0)$，若概率 $P\{1<X<3\}$ 达到最大值，则 $E(X^2)=$ ________.

三、解答题（17 ～ 22 小题，满分 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(17)（本题满分 9 分）

设 $f(x)=(1-x)^3\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n-2x-1, x\in(-1,1)$，求 $f(x)$ 的最小值.

(18)（本题满分 10 分）

设可微函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处沿 $\boldsymbol{l}_1=(1,1)$ 的方向导数为 $\sqrt{2}(x-xy^2+2y-x^2y)$，沿 $\boldsymbol{l}_2=(0,-2)$ 的方向导数为 $2x^2y-4y$.

（Ⅰ）求 $f(x,y)$ 在点 $M(2,1)$ 处的最大方向导数；

（Ⅱ）若 $f(1,1)=2$，求 $f(x,y)$ 的极值.

(19)（本题满分 11 分）

设 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|+|y|\leqslant 1\right\}$，$L$ 为 D 的边界，取逆时针方向. $f(t)$ 连续，$g(t)$ 有一阶连续导数. 计算积分 $I=\oint_L[f(x^2+y^2)+g(x+y)](x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$.

(20)（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，且 $f'(0)+f'(1)=0, \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=1$.

（Ⅰ）证明：$\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f''(x)|\mathrm{d}x\geqslant 1$；

（Ⅱ）证明：存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $|f''(\xi)|\geqslant 4$.

(21)（本题满分 15 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&1&0\end{pmatrix}$ 满足 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$；

（Ⅲ）对（Ⅱ）中的 $\boldsymbol{\Lambda}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(22)（本题满分 15 分）

设 T 是连续型随机变量，且 $P\{T\leqslant a\}=\theta$，$P\{T>b\}=\theta\left(0<\theta<\dfrac{1}{2},a<b\right)$. 令

$$X=\begin{cases}-1, & T\leqslant a,\\ 1, & T>a,\end{cases}\quad Y=\begin{cases}-1, & T\leqslant b,\\ 1, & T>b.\end{cases}$$

（Ⅰ）求 (X,Y) 的概率分布及 $\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)$；

（Ⅱ）求 $Z=X+Y$ 的概率分布；

（Ⅲ）若 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{1}{2}\right)$ 为未知参数，利用总体 Z 的样本值 $-2,0,0,0,2,2$，求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.