七大基础类型行列式之解法

i)（箭型/爪型行列式）

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} \quad (x_i \neq 0)$$

解：将第一列元素依次减去第 i 列的$\frac{1}{x_i}$倍，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-\frac{1}{x_2}-\cdots-\frac{1}{x_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

所以，$D_n=\prod_{i=2}^{n} x_i\left(x_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x_i}\right)$

ii)（两三角型行列式）

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解：使用拆行法，注意到

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x - z + z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & 0 \\ z & x & y & \cdots & 0 \\ z & z & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x - z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z & z & z & \cdots & z \end{vmatrix}$$

其中，将前者按最后一列展开，后者中第 i 列依次减去第 n 列，再按照最后一行展开，得$D_n = (x - z)D_{n-1} + z(x - y)^{n-1}$

由行列式的转置不变性又可得$D_n = (x - y)D_{n-1} + y(x - z)^{n-1}$

解这个方程组得$D_n = \frac{z(x-y)^n - y(x-z)^n}{z-y}$

iii)（两条线型行列式）

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

解：按照第一列两个非零元展开，即得

$$D_n = \prod_{i=2}^{n} a_i + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n} b_i$$

iv)（三对角型行列式）

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解：按第一列展开，使用递推法，得

$$D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}$$

由特征根法解特征方程得：

$$x_1=\frac{\mathrm{a}+\sqrt{a^2-4bc}}{2}$$
$$x_2=\frac{\mathrm{a}-\sqrt{a^2-4bc}}{2}$$

即得

$$D_n=\frac{{x_1}^{n+1}-{x_2}^{n+1}}{x_1-x_2}$$

注：求形如 $D_n=aD_{n-1}+bD_{n-2}$ 的递推式通项的方法：特征根法

设 x_1与x_2 是方程 $x^2-ax-b=0$ 的两个复数根（这个方程被称为特征方程），则由 *Vieta* 定理有：$\begin{cases} x_1+x_2=a \\ x_1x_2=-b \end{cases}$，那么原递推式可以化为 $D_n-(x_1+x_2)D_{n-1}+x_1x_2D_{n-2}=0$

即有 $\begin{cases} D_n-x_1D_{n-1}=x_2(D_{n-1}-x_1D_{n-2}) \\ D_n-x_2D_{n-1}=x_1(D_{n-1}-x_2D_{n-2}) \end{cases}$，定义 $D_0=1$

记 $\begin{cases} A_n=D_n-x_1D_{n-1} \\ B_n=D_n-x_2D_{n-1} \end{cases}$，则 $\begin{cases} A_n=x_2A_{n-1}=\cdots=x_2^{n-1}A_1=x_2^{n-1}(D_1-x_1D_0)=x_2^n \\ B_n=x_1B_{n-1}=\cdots=x_1^{n-1}B_1=x_1^{n-1}(D_1-x_2D_0)=x_1^n \end{cases}$

解这个方程组即可以得到

$$D_n=\frac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_1-x_2}$$

v)（元素和相等行列式）

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1 & x_1 & \cdots & x_1\\ x_2 & 1+x_2 & \cdots & x_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n & x_n & \cdots & 1+x_n\end{vmatrix}$$

解：将第 i 行都加到第一行，得：

$$D_n=\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n}x_i & 1+\sum_{i=1}^{n}x_i & \cdots & 1+\sum_{i=1}^{n}x_i\\ x_2 & 1+x_2 & \cdots & x_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n & x_n & \cdots & 1+x_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2 & 1+x_2 & \cdots & x_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n & x_n & \cdots & 1+x_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ x_2 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

故$D_n=1+\sum_{i=1}^{n}x_i$

vi)（范德蒙德行列式变体）

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

解：采用升阶法，置

$$D'_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 & y^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}$$

知其为范德蒙德行列式，故$D'_n = \prod_{k=1}^{n}(y - x_k)\prod_{1<i<j<n}(x_i - x_j)$

注意到D_n为D'_n的一个余子式，则对比系数得

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \prod_{1<i<j<n} (x_i - x_j)$$

vii)（加边法行列式）

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n\\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2\end{vmatrix}$$

解：采用升阶法，知

$$D_n^{'}=D_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n\\ 0 & x_2x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & x_2x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_nx_1 & x_nx_1 & \cdots & 1+x_n^2\end{vmatrix}$$

将第一行乘以$-x_{i-1}$加到第 i 行（i=2,3, ⋯,n+1）,得

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

此为箭型行列式，因此由 i)得$D_n=1+\sum_{i=1}^{n}x_i^2$