森哥考研数学5套卷. 数学一(模拟一)

答案解析

一、选择题

1.【答案】 D.

【解】 选项 A 的反例：$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 选项 B 的反例：$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，令 $g(x)=\begin{cases}f(x), & x\neq 0,\\ \lim\limits_{x\to 0}f(x), & x=0,\end{cases}$ 则 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，所以

$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，进而 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ 在点 $x=0$ 处可导. 选 D.

2.【答案】 C.

【解】 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取到极值，则必有 $f'(x_0)=0, f''(x_0)+q(x_0)f(x_0)=0$, $q(x)<0$，知 $f''(x_0)$ 和 $f(x_0)$ 同号，由一元函数极值的第二充分条件知，$f''(x_0)>0$ 时，则 $f(x_0)$ 为正的极小值；$f''(x_0)<0$ 时，则 $f(x_0)$ 为负的极大值；选 C.

3.【答案】 B.

【解】 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续. ① 正确.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$ ② 正确.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y\sin\dfrac{1}{(\Delta y)^2}}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\sin\frac{1}{(\Delta y)^2}$$ 不存在，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处关于 y 的偏导数不存在，因而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微，③④ 错误. 应选 B.

4.【答案】 C.

【解】 由对称性 $\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}V$，$\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}V=0$，所以

$$I=(2a+b+b-2c+c-2b)\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}V=(2a-c)\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}V,$$

因此 I 与 a,c,R 有关，但与 b 无关. 选 C.

5.【答案】 A.

【解】 由条件知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^*$，$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2$，从而 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或者 $|\boldsymbol{A}|=1$，由于 $|\boldsymbol{A}|=a_{11}^2+a_{12}^2+$

$a_{13}^2>0$,故$|\boldsymbol{A}|=1$.故

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|&=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{*}|=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\\&=|\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|,\end{aligned}$$

于是$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$,$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$不可逆.取$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$知B,C不成立!取$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$知D不成立.

6.【答案】 A.

【解】 解法1 由$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-\boldsymbol{A}r_1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{O}&-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$,知$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$行等价,且$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$同解,知$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$与$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$同解,A成立.

解法2 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=n+r(\boldsymbol{A})$,

$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=n+r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=n+r(\boldsymbol{A})$,

$r\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}=n+r(\boldsymbol{A})$,知$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$与$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$同解.

取$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$,知选项B不成立.取$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,知选项C,D不成立.

7.【答案】 A.

【解】 由条件知$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$.又$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$,

再由$|\boldsymbol{A}|=2$知$\boldsymbol{A}^*=2\boldsymbol{A}^{-1}$,故$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix},$$

选A.

或者用赋值法，取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$，可以排除选项 B 和 D，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

8.**【答案】** C.

【解】 $p_1=P\{X>a\}=\mathrm{e}^{-\lambda a}$，$p_2=P\{X>b\}=\mathrm{e}^{-\lambda b}$，$p_3=P\{X>b-a\}=\mathrm{e}^{-\lambda(b-a)}$，因为 $b-a<a<b$，所以 $p_3>p_1>p_2$. 选 C.

9.**【答案】** D.

【解】 $E(Z)=2E(X)-E(Y)+1=0$，$D(Z)=4D(X)+D(Y)=2$，$Z\sim N(0,2)$，Z 的密度函数

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}},\ -\infty<z<+\infty.$$

$$D|Z|=E(|Z|^2)-(E|Z|)^2=E(Z^2)-(E|Z|)^2,$$

其中

$$E(Z^2)=D(Z)+[E(Z)]^2=2+0=2;$$

$$E|Z|=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\mathrm{d}z=2\int_0^{+\infty}z\,\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\mathrm{d}z=\frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

$$(E|Z|)^2=\frac{4}{\pi},\ D|Z|=2-\frac{4}{\pi}.$$

10.**【答案】** D.

【解】 似然函数

$$\begin{aligned}L(\theta)&=P\{X_1=1,X_2=2,X_3=3,X_4=1,X_5=3\}\\&=(\theta^2)^2\times2\theta(1-\theta)\times[(1-\theta)^2]^2\\&=2\theta^5(1-\theta)^5,\end{aligned}$$

$$\ln L(\theta)=\ln 2+5\ln\theta+5\ln(1-\theta),$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{5}{\theta}-\dfrac{5}{1-\theta}=0$，得 $\hat{\theta}_L=\dfrac{1}{2}$.

二、填空题

11.**【答案】** $\dfrac{1}{2}$.

【解】 **解法 1** $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^n\frac{x}{n^2+x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\left[n-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}+n^2\cdot o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{1}{2}$.

解法 2 由于 $\displaystyle\int_0^n\frac{x}{n^2+n}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^n\frac{x}{n^2+x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^n\frac{x}{n^2}\mathrm{d}x$，得 $\dfrac{n}{2(n+1)}\leqslant\displaystyle\int_0^n\frac{x}{n^2+x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}$，且

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2(n+1)}=\dfrac{1}{2}$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n\dfrac{x}{n^2+x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$.

解法 3 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n\dfrac{x}{n^2+x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\dfrac{x}{n^2+x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\xi_k}{n^2+\xi_k}$,$k-1\leqslant\xi_k\leqslant k$.

由于$\dfrac{n}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\xi_k}{n}\cdot\dfrac{1}{n}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\xi_k}{n^2+\xi_k}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\xi_k}{n}\cdot\dfrac{1}{n}$,且

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{x}{n^2+x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{n^2+\xi_k}=\frac{1}{2}.$$

12.**【答案】** 0.

解法 1 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x-1}{x^3+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{x-1}{x^3+1}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\dfrac{x-1}{x^3+1}\mathrm{d}x$.

令 $x=\dfrac{1}{t}$,则

$$\int_1^{+\infty}\frac{x-1}{x^3+1}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\int_1^0\frac{\frac{1}{t}-1}{\frac{1}{t^3}+1}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\frac{1}{t}-1}{\frac{1}{t^3}+1}\cdot\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1-t}{1+t^3}\mathrm{d}t=-\int_0^1\frac{x-1}{x^3+1}\mathrm{d}x$$

为定积分,故$\int_1^{+\infty}\dfrac{x-1}{x^3+1}\mathrm{d}x$ 收敛,进而$\int_0^{+\infty}\dfrac{x-1}{x^3+1}\mathrm{d}x$ 收敛,且$\int_0^{+\infty}\dfrac{x-1}{x^3+1}\mathrm{d}x=0$.

解法 2 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x-1}{x^3+1}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{-\frac{2}{3}}{x+1}+\dfrac{\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x^2-x+1}{(x+1)^2}\Bigg|_0^{+\infty}=0$.

13.**【答案】** $\dfrac{\pi}{2}$.

【解】 由 $x^2+y^2=y$ 知 $I=\int_L(y^2+x^2)\mathrm{d}s=\int_L y\,\mathrm{d}s$.

由 $x^2+y^2=y$ 知 $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$,其参数式方程为

$$x=\frac{1}{2}\cos t,y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin t,$$

由于 $\mathrm{d}s=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\sin t\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\cos t\right)^2}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$,

所以 $I=\int_0^{2\pi}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin t\right)\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{2}$.

14.【答案】 $\frac{4}{3}\pi^2$.

【解】 设 $f(x)=x^2, x\in[-\pi,\pi]$是偶函数,将 $f(x)$ 延拓为 $T=2\pi$ 的周期函数,则 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

其中 $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2, a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x, n=1,2,\cdots$,令 $x=\pi$,得

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=\frac{2}{3}\pi^2$,

进而 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=\frac{4}{3}\pi^2$.

15.【答案】 2.

【解】 二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 0 & 1\\ 0 & a & -1\\ 1 & -1 & a-1\end{pmatrix}$ 的特征值为 $a-2, a, a+1$,注意到 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}$,故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值两正一个零,所以 $a-2=0$,得 $a=2$.

16.【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解】 由题意知 $\ln X_1, \ln X_2, \cdots, \ln X_{100}$ 相互独立,且 $E(\ln X_i)=1.6, D(\ln X_i)\xlongequal{记}\sigma^2$, $i=1,2,\cdots,100$,则由中心极限定理

$$\sum_{i=1}^{100}\ln X_i=\ln(X_1X_2\cdots X_{100})\overset{近似}{\sim}N(160,100\sigma^2),$$

所以 $P\{X_1X_2\cdots X_{100}<\mathrm{e}^{160}\}=P\{\ln(X_1X_2\cdots X_{100})<160\}\approx\Phi\left(\frac{160-160}{10\sigma}\right)=\Phi(0)=\frac{1}{2}$.

三、解答题

17.【解】 当 $x=0$ 时, $y=1$,原式两边对 x 求导得

$$3x^2+3y^2y'+y+xy'=0\Rightarrow y'(0)=-\frac{1}{3}.$$

两边再对 x 求导得

$$6x+6y(y')^2+3y^2y''+2y'+xy''=0\Rightarrow y''(0)=0,$$

同理继续对 x 求导,可得 $y'''(0)=-\dfrac{52}{27}$,于是

$$\lim_{x\to0}\frac{3y+x-3}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{3y'+1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3y''}{6x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}y'''=-\frac{26}{27}.$$

18.【解】 令 $u=\dfrac{y}{x}$,$z=xf(u)+y$,$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f(u)-\dfrac{y}{x}f'(u)$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)+1$,代入到 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$ 可得 $xf(u)-2yf'(u)-y=2xf(u)+2y$,整理后得 $f'(u)+\dfrac{1}{2u}f(u)=-\dfrac{3}{2}$,

上述方程的通解为 $f(u)=-u+\dfrac{C}{\sqrt{u}}$. 由 $f(1)=1$ 可得 $C=2$,所以 $f(u)=-u+\dfrac{2}{\sqrt{u}}$.

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)=\infty$,所以 $x=0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线. 又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}}{x}=-1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0,$$

所以 $y=-x$ 为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

19.【解】 线段 AB 所在的直线方程为 $\begin{cases}x=1,\\ y=z.\end{cases}$ 设 $M(x,y,z)$ 是曲面 Σ 上任意一点,过 $M(x,y,z)$ 的纬圆交直线 AB 于点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,则

$$\begin{cases}x^2+y^2=x_1^2+y_1^2,\\ x_1=1,\\ y_1=z_1,\\ z=z_1.\end{cases}$$

消去 x_1,y_1,z_1,可得曲面 Σ 的方程为

$$z=\sqrt{x^2+y^2-1},0\leqslant z\leqslant1.$$

补充 $\Sigma_1:z=0,x^2+y^2\leqslant1$,取下侧. 补充 $\Sigma_2:z=1,x^2+y^2\leqslant2$,取上侧.

设由 Σ,Σ_1 与 Σ_2 围成的立体区域为 Ω. 则有

$$\begin{aligned}I&=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2}\\&=\iiint\limits_{\Omega}[f(xy)+xyf'(xy)+2x-f(xy)-xyf'(xy)-\\&\quad 2+2(z+1)]\,\mathrm{d}V-\iint\limits_{\Sigma_1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_2}4\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2z)\mathrm{d}V+\pi-8\pi.$$

因 Ω 关于 yOz 面对称，所以 $\iiint\limits_{\Omega}2x\,\mathrm{d}V=0$. 得

$$\iiint\limits_{\Omega}2z\,\mathrm{d}V=2\int_0^1 z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2+1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi\int_0^1 z(z^2+1)\mathrm{d}z=\frac{3\pi}{2},$$

所以 $I=\dfrac{3\pi}{2}-7\pi=-\dfrac{11\pi}{2}$.

20.【解】 (1) 令 $F(x)=(b-x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,x\in[a,b]$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，且 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔中值定理知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=(b-\xi)f(\xi)-\int_a^{\xi}f(t)\mathrm{d}t=0$，

即 $\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x=(b-\xi)f(\xi)$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M、最小值为 m，故存在 $x_M,x_m\in(a,b)$，使得 $f(x_M)=M,f(x_m)=m$.

如果 $M=m$，则 $f(x)\equiv$ 常数，故对任意的 $\eta\in(a,b)$，均有 $\int_a^{\eta}f(x)\mathrm{d}x=(\eta-a)f(\eta)$.

如果 $M>m$，则 $x_M\neq x_m$. 令 $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-(x-a)f(x),x\in[a,b]$，则

$$G(x_M)=\int_a^{x_M}f(t)\mathrm{d}t-(x_M-a)f(x_M)\leqslant\int_a^{x_M}M\mathrm{d}t-(x_M-a)M=0,$$

$$G(x_m)=\int_a^{x_m}f(t)\mathrm{d}t-(x_m-a)f(x_m)\geqslant\int_a^{x_m}m\,\mathrm{d}t-(x_m-a)m=0,$$

由介值定理，存在 $\eta\in[x_M,x_m]$ 或 $[x_m,x_M]\subset(a,b)$，使得 $G(\eta)=0$，即 $\int_a^{\eta}f(x)\mathrm{d}x=(\eta-a)f(\eta)$.

21.【解】 (1) 方程组的增广矩阵 $\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&3\\2&a+4&-5&6\\-1&-2&a&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&3\\0&a&-7&0\\0&0&a+1&0\end{array}\right)$，由线性方程组有无穷多个解可知 $a=-1$ 或 $a=0$.

若 $a=-1$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-3,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，矛盾！故 $a=0$. 此时 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

易知 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}$，故

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&3&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&3&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&3&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&4&-6\\-1&1&-1\\-3&2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&4&-6\\3&-3&3\\7&-6&8\end{pmatrix}$$

(2)$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,0$，$\boldsymbol{A}^{2024}$ 的特征值为 $1,1,0$，$\boldsymbol{A}^{2024}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $3,3,2$，

$$|\boldsymbol{A}^{2024}+2\boldsymbol{E}|=3\times3\times2=18.$$

22.**【解】** (1)$F\left(\frac{1}{2},1\right)=P\left\{X\leqslant\frac{1}{2},Y\leqslant1\right\}=\frac{3}{4}$；

(2) 当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0\leqslant z<\frac{1}{2}$ 时，$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{Z=0\}=P\{X+Y\leqslant\frac{1}{2}\}=\frac{1}{4}$；

当$\frac{1}{2}\leqslant z<1$ 时，$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{0\leqslant X\leqslant z,0\leqslant Y\leqslant z-x\}=z^2$；

当 $1\leqslant z$ 时，$F_Z(z)=1$.

所以 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant z<\frac{1}{2},\\ z^2, & \frac{1}{2}\leqslant z<1,\\ 1, & 1\leqslant z.\end{cases}$

$P\{Z=0\}=F_Z(0)-F_Z(0-0)=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$. 由于 $P\{Z=0\}\neq0$，所以 Z 不是连续型随机变量.

(3)$E(U+V)=E(X+Y)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}2(x+y)\mathrm{d}y=\int_0^1(1-x^2)\mathrm{d}x=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.