

分类号: O242.1  
U.D.C.: 519.6

密级: 公开  
编号: 82817

# 中国工程物理研究院

## 学位论文

基于环流的大偏差理论和涨落定理的研究

姜瑜浩

指导教师姓名 贾晨 助理教授

申请学位级别 硕士 专业名称 应用数学

论文提交日期 2022 年 4 月 论文答辩日期 2022 年 6 月

授予学位单位和日期 中国工程物理研究

答辩委员会主席

评阅人

2022 年 4 月 2 日



Classified Index: O242.1  
U.D.C.: 519.6  
Secret State: Public  
Number: 82817

# China Academy of Engineering Physics

## Dissertation for the Master Degree in Engineering

Large deviations and fluctuation theorems for cycle currents

Yuhao Jiang

Supervisor: Prof. Chen Jia

Academic Degree Applied for: Master of Science

Specialty: Applied Mathematics

Date of Submitting: April, 2022 Date of Defence: June, 2022

Degree-Confering-Institution: China Academy of Engineering Physics

Chairman of defence committee

Paper Reviewers

2th 4, 2022



## 独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得中国工程物理研究院或其他教育机构的学位或证书使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：

签字日期： 年 月 日

## 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解并接受中国工程物理研究院研究生部有关保存、使用学位论文的规定，允许论文被查阅、借阅和送交国家有关部门或机构，同时授权中国工程物理研究院研究生部可以将学位论文全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

学位论文作者签名：

导师签名：

签字日期： 年 月 日

签字日期： 年 月 日



## 摘 要

环流理论一直是随机热力学理论的关键内容。马氏系统中的环流和净环流可以由两种方式定义，即环擦除和生成树。该研究针对两种研究下的大偏差理论和涨落定理进行比较研究。首先研究环拓扑结构系统，并计算出环擦除定义下大偏差速率函数的隐式表达式，然后研究生成树定义下的大偏差速率函数，并阐明两者之间的关系。进一步，检验两个定义下的结论和涨落定理的相容性。经过严格对照，生成树定义下的环流不满足涨落定理，然而生成树的结果满足涨落定理的弱形式。

**关键词：**环流；大偏差；涨落定理

## Abstract

The cycle current is a crucial quantity in stochastic thermodynamics. The absolute and net cycle currents of a Markovian system can be defined in the loop-erased (LE) or the spanning tree (ST) manner. Here we make a comparative study between the large deviations and fluctuation theorems for the LE and ST currents, i.e. cycle currents defined in the LE and ST manners. First, we give the explicit expression of the large deviation rate functions for the LE currents of a system with a cyclic topology and for the ST currents of a general system. The relationship between the rate functions for the LE and ST currents are clarified. Furthermore, we examine various types of fluctuation theorems satisfied by the LE and ST currents. We show that both the absolute and net LE currents satisfy the strong form of all types of fluctuation theorems. In contrast, the absolute ST currents do not satisfy fluctuation theorems, while the net ST currents only satisfy the weak form of fluctuation theorems.

Keywords: cycle currents, large deviations, fluctuation theorems



# 目录



# 第一章 绪论

## 1.1 问题的背景和研究现状

本文中研究的椭圆方程具有如下的一般形式。在  $d$  维空间中的求解区域  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  上, 椭圆方程表示为

$$\begin{cases} -\nabla(a(x)\nabla u(x)) + c(x)u(x) = f(x) & \text{for } x \in \Omega \\ u(x) = u_0(x) & \text{for } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1-1)$$

其中  $a(x) > a_0 > 0, c(x) \geq 0, f(x), u_0(x)$  是已知函数,  $u(x)$  是方程的解。

椭圆特征值问题表示为

$$\begin{cases} -\nabla(a(x)\nabla u(x)) + c(x)u(x) = \lambda u(x) & \text{for } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{for } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1-2)$$

其中,  $u(x)$  是待求解的特征函数,  $\lambda$  是对应的特征值。

椭圆方程是应用很广泛的一类方程, 例如: 描述溶液中蛋白质电势分布的 Poisson-Boltzmann 方程 [? ], 描述量子效应的 Schrodinger 方程等, 都可以看作是椭圆方程。目前已经有很多传统方法 (如: 有限差分法, 有限元方法, 有限体积方法, 谱方法等) 可以高效且高精度地求解椭圆方程。在本文中, 我们主要关注用深度学习方法求解椭圆方程。

深度学习方法是当前研究的热点问题。在许多领域内 (如: 图像处理, 语音识别等) 深度学习方法已经被广泛应用, 并且取得了超越传统方法的效果。在科学计算问题中, 深度学习方法也已经取得了一定的进展。由于神经网络的逼近性质和维数的关系不大, 深度学习方法能够一定程度上缓解维数灾难, 在求解高维方程时有很好的效果。此外, 由于深度学习方法不需要像传统的有限元或有限差分法那样使用结构化网格, 因此它可以轻易处理复杂的求解区域。文献 [???] 中讨论了深度学习方法在求解微分方程中的应用。文献 [??] 中讨论了如何通过深度学习方法模拟物理模型。文献 [??] 中讨论了深度神经网络和传统有限元方法的联系, 从数学角度解释了深度神经网络的逼近性质。

对于深度学习方法在求解椭圆方程上的具体应用, 文献 [??] 中提出了 Deep-Ritz 方法, 通过极小化能量泛函的方式求解方程。同时, 文献 [?] 中提出了 PINN 方法, 通过极小化残量的方式求解方程。

然而, 要将常用的深度神经网络应用于计算科学和工程问题, 我们面临着一些挑战。其中最突出的问题是, 深度学习方法通常只适合于处理低频数据。文献 [???] 中提出了频率准则。频率准则指出, 许多深度神经网络学习低频数据的速度很快, 效果很好, 但当处理高频数据时, 它们就失去了这些优势。文献 [????] 在理论上严格地论证了频率准则。因此, 对于解具有高震荡的问题, 我们需要采取特殊的处理。

---

目前用深度学习方法求解偏微分方程的工作已经有许多，但从频域的角度探索深度学习方法的研究还不完善。文献 [?] 中提出了 Phase-DNN。它通过在频域上平移的方式求解带有高震荡的方程，取得了很好的效果。但美中不足的是，Phase-DNN 在求解过程中需要事先知道精确解的频率，因此无法求解频率未知的方程。

神经网络在不同频率下的表现不同，利用这种差异设计神经网络结构可以有利于提高网络的性能。在计算机视觉领域，已经有一系列的工作，如：图像恢复 [?]、超分辨率 [?]、分类问题 [?] 等，通过利用不同图像频率的学习差异，提高了学习性能（包括泛化性能和训练速度）。在多尺度变换方面，文献 [?] 和文献 [?] 中分别基于快速多极算法和小波变换的思想设计了多尺度网络，使网络性能得到了很大提升。

## 1.2 本文主要研究内容

本文主要研究内容可以分为以下三个方面：

首先，在实际问题中，我们通常希望模型和输入数据的尺度无关。例如在图像处理中，我们希望输入的灰度值无论是在  $[0, 255]$  还是  $[0, 1]$  之间，得到的结果应该类似。很多机器学习方法（如：简单的线性模型，SVM 等）都有这种性质，但是并没有理论保证深度学习具有类似的性质。本文论述了尺度变换（在输入数据或者输出数据上）对网络的影响，得到了一些初步的结论。

其次，深度学习是基于优化算法的方法，它把方程求解的问题转化成一个优化问题。但是由于神经网络本身的复杂性，这样的优化问题通常是非凸且病态的。想要高效求解这样的优化问题并不容易，一般来说，我们只能找到问题中靠近初始点的局部极小值。因此，在这样的问題中，初值的选取十分关键，好的初值可以提高网络的精度（使训练过程收敛到误差更小的局部最优值），也可以加速训练过程（使初始值离局部最优值更近）。本文基于尺度变换，提出了一种有效的初值选取方式，同时基于这种初值选取方式提出了多尺度网络结构。

最后，本文实验了多尺度网络在求解椭圆方程和分子计算模拟问题中的效果，同时指出了深度学习方法在求解椭圆特征值问题中的潜力。经过各方面的实验，我们可以验证，相比于传统的全连接网络，多尺度网络求解椭圆方程的速度更快，误差也更小。这些实验清楚地表明，多尺度网络是一种高效且易于实现的无网格椭圆方程求解器。

## 第二章 模型介绍

在此考虑基于离散时间马氏链  $\xi = (\xi_n)_{n \geq 0}$  建模的随机热力学系统，该模型的状态空间是  $S = \{1, \dots, N\}$  转移概率矩阵是  $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ ，其中  $p_{ij}$  表示从状态  $i$  到状态  $j$  的转移概率。该马氏链的转移图表示为  $G = (S, E)$ ，其中顶点集合  $S$  是状态空间， $E$  是转移概率有向连接边的集合。在这篇论文里，用  $\langle i, j \rangle$  表示状态  $i$  到状态  $j$  的有向边，所以有  $E = \{\langle i, j \rangle \in S \times S : p_{ij} > 0\}$ ，并且令  $M = |E|$ ，其中  $|E|$  表示集合  $E$  中元素的数量。本文中假设马氏链是不可约的，也就是有向图  $G$  是连通的。因此对某个状态，图  $G$  不仅包含其他状态到其的边，还包括它到其自身的边，也就是自循环。

本文首先研究只有一个多于两状态的环的图  $G$ ，如图 1(a) 所示，并称具有这种图结构的马氏链为单环。也就是说，如果马氏链的转移概率矩阵满足， $p_{ij} = 0$  且  $|\text{mod}(i-j, N)| \geq 2$  ( $\text{mod}(*, N)$  表示模  $N$  同余)。生化反应中的很多物理过程也都用单环马氏链建模，比如酶的构象变化，磷酸化-脱磷酸化环，染色体重塑引起的启动子激活等。本文会过多关注单环系统，很多结论也会延展到一般系统中。

### 2.1 环擦除定义下的环流

本文研究马氏链中两种类型的环流，该章节回顾环擦除定义下的环流。马氏链中的回路是用路径定义的，比如路径  $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_s \rightarrow i_1$  ( $i_1, i_2, \dots, i_s$  是顶点集合  $S$  中不同点) 的环流为  $p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3} \dots p_{i_s i_1} > 0$ 。令  $j_1 \rightarrow j_2 \rightarrow \dots \rightarrow j_r \rightarrow j_1$  为另一个环，若上述两个环满足存在一个整数  $k$  使得

$$j_1 = i_{k+1}, j_2 = i_{k+2}, \dots, j_n = i_{k+s},$$

且  $r = s$  则称两个回路是等价的，其中指标  $k+1, k+2, \dots, k+s$  被视为模  $n$  同余的。环流  $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_s \rightarrow i_1$  在上述等价关系下所属的等价类被表示为  $(i_1, i_2, \dots, i_s)$ 。例如， $(1, 2, 3)$ ,  $(2, 3, 1)$  和  $(3, 1, 2)$  表示相同的环。环  $(i_1, i_2, \dots, i_s)$  的反环被定义为  $(i_1, i_s, \dots, i_2)$ 。通常称马氏链中所用环的集合为环空间  $C$ 。

马氏链的一条轨迹会形成各种环。直观看，如果我们抛弃马氏链  $\xi$  中环，并且在该过程中，始终关注轨迹中剩余状态形成的轨道，那么称剩余的轨迹为导出链  $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_n)_{n \geq 0}$ 。例如，如果马氏链  $\xi$  的轨迹为  $\{1, 2, 3, 3, 2, 3, 4, 1, 4, \dots\}$ ，那么相应的导出链  $\tilde{\xi}$  的轨迹和环形成表 1 所示

特别地，导出链的状态用  $S$  的中状态组成的有限序列表示，即  $[i_1, i_2, \dots, i_s]$ 。假设  $\tilde{\xi}_{n-1} = [i_1, i_2, \dots, i_s]$  且  $\xi_n = i_{s+1}$ 。若  $i_{s+1}$  不同于  $i_1, i_2, \dots, i_s$ ，那么  $\tilde{\xi}_n$  被定义为  $\tilde{\xi}_n = [i_1, i_2, \dots, i_s, i_{s+1}]$ 。其次，若  $i_{n+1} = i_r$ ，那么  $\tilde{\xi}_n$  被定义为  $\tilde{\xi}_n = [i_1, i_2, \dots, i_r]$ 。对于这种情况，称马氏链在时间  $n$  形成环  $(i_r, i_{r+1}, \dots, i_s)$ 。令  $N_n^c$  为环  $c$  在时间  $n$  时形成的次数。那

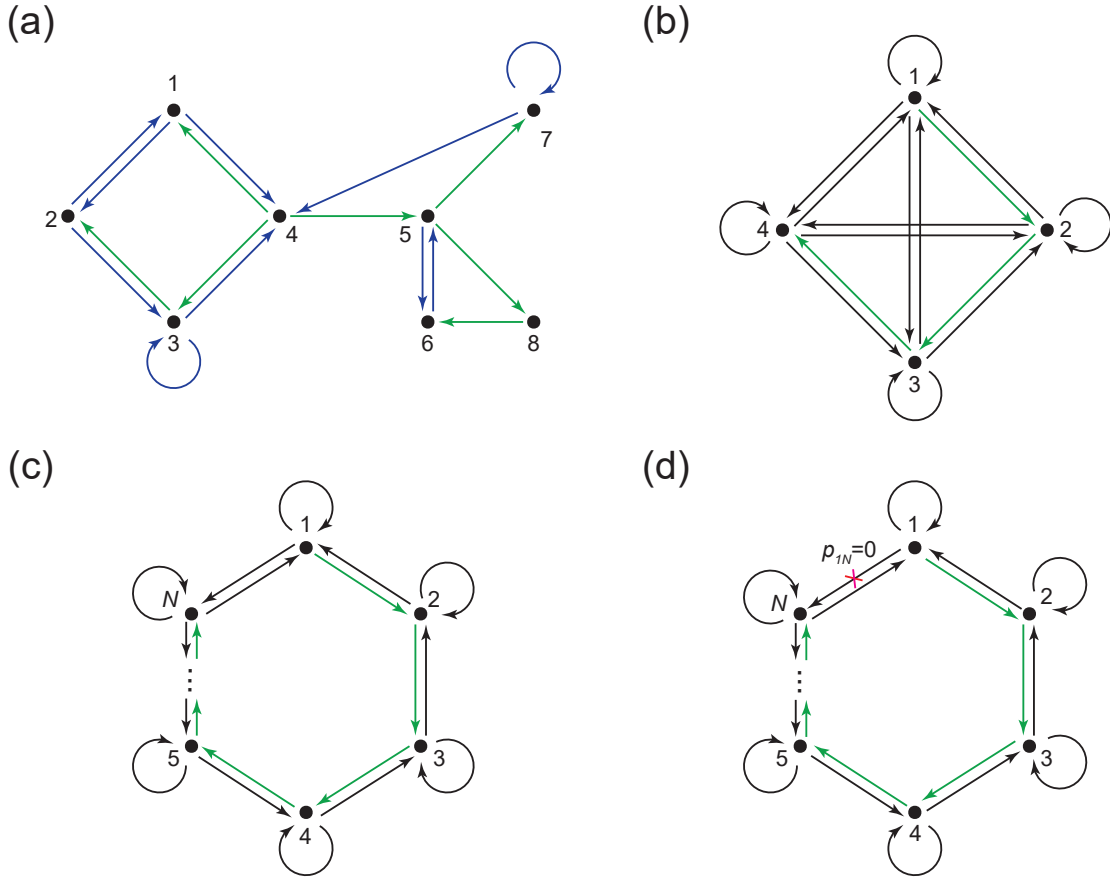


Figure 2.1 不同马氏链的转移图 (a) 一般马氏链的转移图，绿色线表示生成树  $T$ ，并且蓝色线表示  $T$  的弦. (b) 转移概率矩阵满足  $p_{ij} > 0, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq 4$  的马氏链。绿色线表示生成树  $T = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ . (c)  $N$  状态单环马氏链。绿线表示生成树  $T = 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow N$ . (d) 转移概率矩阵有  $p_{1N} = 0$  的单环马氏链，绿色线表示生成树  $T = 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow N$ .

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\xi_n$	1	2	3	3	2	3	4	1	4
$\tilde{\xi}_n$	[1]	[1,2]	[1,2,3]	[1,2,3]	[1,2]	[1,2,3]	[1,2,3,4]	[1]	[1,4]
环				(3)	(2,3)			(1,2,3,4)	

Table 2.1 导出链和形成的环

么在时间  $n$  时，环  $c$  的经验环流可以被定义为：

$$J_n^c = \frac{1}{n} N_n^c,$$

并且在时间  $n$  时，经验净环流可以定义为：

$$\tilde{J}_n^c = J_n^c - J_n^{c-}.$$

用更直观的表述， $J_n^c$  表示环  $c$  平均每个单位时间形成的数量， $\tilde{J}_n^c$  表示环  $c$  平均每个单

位时间形成的净数量。若令  $n \rightarrow \infty$ ，则有经验环流  $J_n^c$  和经验净环流  $\tilde{J}^c$  分别以概率为 1 趋近于  $J^c$  和  $\tilde{J}^c$ 。极限  $J^c$  和  $\tilde{J}^c$  分别被视为环  $c$  的环流和净环流。关于  $J_n^c$  和  $\tilde{J}^c$  更为细致的描述，可以参考文献 [1]。著名的环流分解定理可以用上述定义表示为：

$$\pi_i p_{ij} = \sum_{c \ni \langle i, j \rangle} J^c, \quad (2-1)$$

其中  $c \ni \langle i, j \rangle$  表示环  $c$  中有边  $\langle i, j \rangle$ 。

## 2.2 生成树定义下的环流

环的环流可以用生成树的方式定义。令  $T$  为  $G$  的一个有向子图，也就是说  $T$  的所有边也是  $G$  的边，再令  $\hat{T}$  表示  $\bar{T}$  表示与  $T$  有关的无向图。满足下列三个条件的  $T$  被称为图  $G$  的生成树：

- $T$  是  $G$  的覆盖子图，也就是说  $T$  包含  $G$  的所有顶点。
- $\bar{T}$  是连通的。
- $\bar{T}$  没有回路，其中无向图的回路是顶点到自身的无向路径。

易知生成树  $T$  包含  $G$  的所有顶点，并且  $|T| = N - 1$ 。接下来，会通过  $T$  表示生成树和它的边集合。图的生成树并不唯一，一个图可以有很多完全不同的生成树。

若有向边  $l \notin T$ ，则被称为  $T$  的弦。(图 1 a)。因为  $|T| = N - 1$ ，生成树  $T$  有  $M - N + 1$  个弦，也就是说明图  $G$  中有  $M - N + 1$  条边不会在  $T$  中出现。同时  $\bar{T}$  是连通的，并且没有环的，如果添加一根弦  $l$  到  $T$ ，则导出的子图  $\overline{T \cup \{l\}}$  会恰巧有一个回路，表示其为  $C_l$ 。记  $c_l$  是从回路  $C_l$  中获得的环，并且和  $l$  保持同样的指向。由弦生成的环的集合  $\mathcal{L} = \{c_l : l \in E \setminus T\}$  被称为基本集。很明显，弦和基本集之间没有一一对应的关系，可以用  $c_l$  形成的次数定义通过弦  $l$  的次数。那么经验时间  $n$  时刻， $c_l$  的经验环流可以被定义为：

$$Q_n^{c_l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\langle \xi_{i-1}, \xi_i \rangle = l\}}.$$

$Q_n^{c_l}$  表示单位时间通过弦  $l$  的次数。生成树方式和环擦除方式有很大的不同，环擦除可以很便捷的定义环流，生成树只能定义基本集的环流。

类似的，也可以用生成树定义净环流。最终，假设转移概率满足  $p_{ij} > 0$ ，当且仅当  $p_{ji} > 0$ ，这个条件可以保障熵增量是有限的。【1】考虑  $l$ ，在时间步  $n$ ， $c_l$  的净环流定义为：

$$\tilde{Q}_n^{c_l} = Q_n^{c_l} - Q_n^{c_l^-}.$$

如果  $c_l$  中只有一个或两个状态，那么易知  $c_l = c_{l^-}$ ，因此  $\tilde{Q}_n^{c_l} = 0$ 。对于弦  $l = \langle i, j \rangle$ ，如果  $c_l$  中有三个以上的状态，那么  $l^-$  也是一个弦，并且  $c_{l^-}$  是由弦  $l^-$  生成的环。在文献 [3-6]，净环流的定义只是考虑有三个及以上状态的环，本文参考文献【2】中的定义，

使得净环流的定义也可以包含只有一个或两个状态的环。

若  $n \rightarrow \infty$ , 则经验环流  $Q_n^{c_l}$  和经验净环流  $\tilde{Q}_n^{c_l}$  将会分别以概率为 1 趋于  $Q^{c_l}$  和  $\tilde{Q}^{c_l}$ 。极限  $Q^{c_l}$  和  $\tilde{Q}^{c_l}$  分别被当做环  $c$  的环流与净环流。根据马氏链的遍历性, 有  $Q^{c_l} = \pi_i p_{ij}$ 。

## 2.3 两种类型环流的比较

下面将简述两种类型环流的差异。为叙述简便, 由环擦除方式定义的环流称为  $LE$  环流, 由生成树方式定义的环流称为  $ST$  环流。 $LE$  环流是对环空间  $C$  中所有环定义的, 然而  $ST$  环流仅是针对基本集  $\mathcal{L}$  定义的。因此, 对于马氏链的环动态性,  $LE$  环流相较于  $ST$  环流给出了更完整的描述。而且, 由于生成树不具有唯一性, 不同的生成树选择会对应不同的  $ST$  环流。对比之下,  $LE$  环流并不依赖生成树的选择。

经过上述的比对, 自然会问到基本集  $\mathcal{L}$  和环空间  $C$  的差距会有多大。因为每根弦对应集合  $\mathcal{L}$  唯一一个元素, 即  $|\mathcal{L}| = |E \setminus T| = M - N + 1$ , 所以很难对  $|C|$  给出一般性的表述。下面将主要考虑几个重要的特例。首先考虑转移图是全连接的马氏链 (图 1b), 也就是  $p_{ij} > 0, \forall i, j \in S$ 。有  $k$  个状态的环的数量是  $\frac{N(N-1)\cdots(N-K+2)(N-k+1)}{k}$ , 因此

$$|C| = \sum_{k=1}^N \frac{N \cdots (N-k+1)}{k}.$$

特别地, 若  $N = 4$ , 可得  $|C| = 24$ , 环空间为:

$$\begin{aligned} C = \{ & (1), (2), (3), (4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), \\ & (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 2), (1, 3, 4), (1, 4, 2), (1, 4, 3), (2, 3, 4), (2, 4, 3), \\ & (1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 2, 4), (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2) \}. \end{aligned}$$

若选择  $T = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  作为生成树, 那么有基本集  $|\mathcal{L}| = 13$ , 且可以表示为:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \{ & (1), (2), (3), (4), (1, 2), (2, 3), (3, 4) \\ & (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 4), (2, 4, 3), (1, 2, 3, 4), (1, 4, 3, 2) \}. \end{aligned}$$

这也说明了  $LE$  环流的值可能会和  $ST$  的值差很多。

接下来考虑单环马氏链【图 1 c】。为了叙述方便, 假设任意一对相邻状态  $i$  和  $j$  满足  $p_{ii} > 0$  和  $p_{ij} > 0$ 。对于这种情况,  $|C| = 2N + 2$ , 并且环空间为:

其中前  $N$  个环是只包含一个状态的环, 也就是自循环的。中间  $N$  个环是两状态的环, 最后两个环是  $N$  个状态的环。如果选择  $T = 1 \rightarrow 2 \rightarrow \cdots \rightarrow N$  作为生成树, 那么  $|\mathcal{L}| = 2N + 1$ , 并且基本集是:

$$\mathcal{L} = \{ (1), \cdots, (N), (1, 2), \cdots, (N-1, N), (1, 2, \cdots, N), (1, N, \cdots, 2) \}.$$

对于这种情况, 只有一个环  $(N, 1)$  在环空间  $C$  中出现, 而没有在基本集  $\mathcal{L}$  中出现。

最后考虑单环马氏链 [图 1d]。从状态 1 到状态  $N$  的转移概率为 0。为了叙述方便, 假设  $p_{1N} = 0$ , 且对于其他相邻状态  $i, j$ , 马氏链满足  $p_{ii} > 0$  并且  $p_{ij} > 0$ 。易知  $|C| = 2N$ ,



---

环空间为：

$$C = \{(1), \dots, (N), (1, 2), \dots, (N-1, N), (1, \dots, N)\}.$$

若令  $T = 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow N$  为生成树，那么有  $\mathcal{L} = C$ ，也就是说环空间和基本集是一致的。而且，很容易验证两种类型的环流也是一致的，也就是：

$$Q_n^{c_l} = J_n^{c_l}, \quad c_l \in \mathcal{L}. \quad (2-2)$$

为了进一步理解经验  $LE$  环流  $J_n^c$  和经验  $ST$  环流  $Q_n^c$  的关系。下面使用周期边界条件假设，也就是  $\xi_0 = \xi_1$ ，这是文献 [7] 中标准的假设条件。基于这个假设，对任意弦  $l$ ，易得：

$$Q_n^{c_l} = \sum_{c \in C} J_n^c 1_{\{l \in c\}}. \quad (2-3)$$

注意到上述方程两边都表示弦  $l$  形成的速度。这表、说明经验  $ST$  环流可以表示为经验  $LE$  环流的线性组合。

### 第三章 环流的大偏差原理

在概率论的研究中，大偏差是与稀有事件发生概率有关的物理量。本文在此考察了经验环流的大偏差。注意到单环马氏链的经验  $LE$  环流  $(J_n^c)_{c \in C}$  定义在空间：

$$\mathcal{V} = \left\{ (v^c)_{c \in C} : v^c \geq 0, \sum_{c \in C} |c| v^c = 1 \right\},$$

其中  $|c|$  表示环  $c$  的长度，也就是环  $c$  包含的状态数量。若满足下列三个条件，则称经验环流  $(J_n^c)_{c \in C}$  满足速率为  $n$  的大偏差原则：

- 对  $\forall \alpha \geq 0$ ，水平集  $\{x \in \mathcal{V} : I_J(x) \leq \alpha\}$  是紧的。
- 对任意开集  $U \subset \mathcal{V}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}((J_n^c)_{c \in C} \in U) \geq - \inf_{x \in U} I_J(x). \quad (3-1)$$

- 对任意闭集  $F \subset \mathcal{V}$ ,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}((J_n^c)_{c \in C} \in F) \leq - \inf_{x \in F} I_J(x). \quad (3-2)$$

同样地，也可以定义经验  $ST$  环流的大偏差，和经验  $LE/ST$  净环流的大偏差。从上述条件中可以看出，(ii) 和 (iii) 表明了上述定义对  $\forall (v^c)_{c \in C} \in \mathcal{V}$ ，满足：

$$\mathbb{P}(J_n^c = v^c, \forall c \in C) \propto e^{-n I_J(v)}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3-3)$$

在此考虑的是所有环的大偏差，而不是单个环的大偏差。

#### 3.1 单环马氏链 $LE$ 环流的大偏差

一般的马氏链中，经验环流  $LE$  的速率函数很难求出。本文将证明经验  $LE$  环流的大偏差原理，并给出【图 1c】单环系统速率函数的表达式。单环系统中所有可能形成的环都在 (2) 中列出。

为简化叙述推导过程，假设系统从状态 1 出发，这并不会降低命题的一般性。为了计算经验环流的速率函数，下面将证明 (7) 对某些离散值  $v$  成立。若环  $c$  形成的速度是  $k^c$ ，那么环  $c$  的经验环流是  $v^c = k^c/n$ 。为书写方便，记  $k^i$  替代  $k^c$  表示包含一个状态的环  $c = (i)$  的形成速度。类似的，记  $k^{i,i+1}$  表示环  $c = (i, i+1)$  形成的速度，记  $k^+$  表示环  $c = (1, 2, \dots, N)$  形成的速度， $k^-$  表示环  $c = (1, N, \dots, 2)$  形成的速度（图 1c）。类似地，本文用  $v^i, v^{i,i+1}, v^+, v^-$  表示相应的经验环流，用  $J^i, J^{i,i+1}, J^+, J^-$  表示相应的经验净环流。因为上述假设周期边界条件，对于某些  $k = (k^c)_{c \in C} \in \mathbb{N}^{2N+2}$ ，容易得到：

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(J_n^c = v^c, \forall c \in C) &= \mathbb{P}(N_n^c = k^c, \forall c \in C) \\ &= |G_n(k)| \prod_{c \in C} (\gamma^c)^{k^c}, \end{aligned} \quad (3-4)$$

其中  $\gamma^c = p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3} \cdots p_{i_s i_1}$  是沿着环  $c$  产生的所有转移概率的乘积。 $G_n(k)$  是  $n$  时刻可能形成的轨迹的集合，该集合中的轨迹满足  $c \in C$  出现恰好  $k^c$  次，并称这样的轨迹为容许轨迹。例如，若  $N = 3, n = 8, k^3 = k^{12} = k^{23} = k^- = 1, k^1 = k^2 = k^{13} = k^+ = 0$ ，那么有 8 个容许轨迹，在表 (2) 中已经列出。从这个例子中，可看到容许轨迹可以通过重拍环的顺序互相转化。

$m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\xi_m$	1	3	3	2	3	2	1	2	1
$\xi_m$	1	3	2	3	3	2	1	2	1
$\xi_m$	1	3	3	2	1	2	3	2	1
$\xi_m$	1	3	2	1	2	3	3	2	1
$\xi_m$	1	2	3	3	2	1	3	2	1
$\xi_m$	1	2	3	2	1	3	3	2	1
$\xi_m$	1	2	1	3	3	2	3	2	1
$\xi_m$	1	2	1	3	2	3	3	2	1

Table 3.1 给定每种环形成的次数  $k$ ，所有可能的轨迹

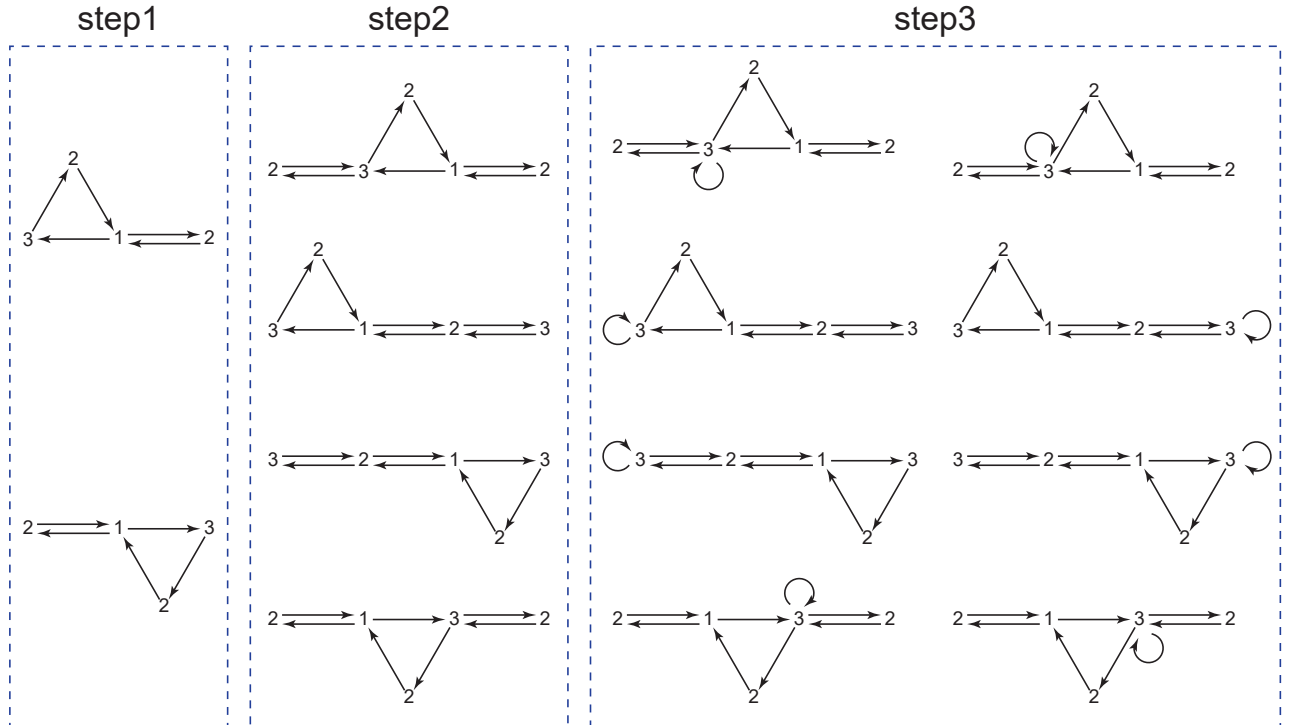


Figure 3.1 给定每种环形成的次数  $k$ ，所有可能的轨迹 ( $k^3 = k^{12} = k^{23} = k^- = 1, k^1 = k^2 = k^{13} = k^+ = 0$ )。所有轨迹都是从状态 1 出发。在第一步之后，顺时针向左移动

接下来，计算容许轨迹的数量  $G_n(k)$ 。计算过程分为三个步骤：

1) 已假设系统从状态 1 出发, 从环集合  $C$  选出通过状态 1 的环, 也就是  $(1), (1, 2), (1, N), (1, 2, \dots, N), (1, N, \dots, 2)$ , 并且插入到初始状态 1 中。这些环的排列数为:

$$A_1 = \binom{k^1 + k^{12} + k^{1N} + k^+ + k^-}{k^1, k^{12}, k^{1N}, k^+, k^-} := \frac{(k^1 + k^{12} + k^{1N} + k^+ + k^-)!}{k^1! k^{12}! k^{1N}! k^+! k^-!}.$$

$$\binom{k^+ + k^{12} + l^2 - 1}{l^2}.$$

接下来, 把每个状态  $3 \leq i \leq N$  对应的  $l^i$  个环  $(i, i+1)$  插入轨迹中, 且每个状态  $i$  总共有  $k^+ + l^{i-1}$  个可能的位置插入, 这对应了环  $(1, 2, \dots, N)$  和环  $(i-1, i)$ 。因此可能的插入方式数量是:

$$\binom{k^+ + l^{i-1} + l^i - 1}{l^i}, \quad 3 \leq i \leq N-1.$$

最终, 把每个状态  $2 \leq i \leq N-1$  对应的  $m^i$  个环  $(i, i+1)$  插入轨迹, 所有两状态的环就已经完全被插入。步骤 2) 中所有可能的插入方式数量为:

$$A_2 = \sum_{l^2+m^2=k^{23}} \cdots \sum_{l^{N-1}+m^{N-1}=k^{N-1,N}} \prod_{i=2}^{N-1} \binom{l^i + l^{i-1} + k^+ - 1}{l^i} \prod_{i=2}^{N-1} \binom{m^i + m^{i+1} + k^- - 1}{m^i},$$

其中  $l^1 := k^{12}$  且  $m^N = k^{1N}$ 。

3) 最终把剩下的所有一状态的环插入轨迹中。对每个环  $(i), 2 \leq i \leq N$ , 总共有  $\sum_{c \ni i} k^c - k^i$  个可选择的位置插入。因此步骤 3) 总共的可能的插入方式数量为:

$$A_3 = \prod_{i=2}^N \binom{\sum_{c \ni i} k^c - 1}{k^i}.$$

结合上述三个步骤, 最终可以得到容许轨迹的数量为:

$$|G_n(k)| = A_1 A_2 A_3. \quad (3-5)$$

为了得到更明确的速率函数表达式, 先回顾 *Stirling* 公式:

$$\log n! = n \log n - n + O(\log n) = h(n) - n + O(\log n),$$

其中  $h(x) = x \log x, x \geq 0$ 。记  $k_i = \sum_{c \ni i} k^c$  且  $v_i = \sum_{c \ni i} v^c$ , 那么有:

$$\begin{aligned} \log A_1 &= \log \frac{(k^1 + k^{12} + k^{1N} + k^+ + k^-)!}{k^1! k^{12}! k^{1N}! k^+! k^-!} \\ &= h(k_1) - h(k^1) - h(k^{12}) - h(k^{1N}) - h(k^+) - h(k^-) + O(\log n) \\ &= n \left[ h(v_1) - h(v^1) - h(v^{12}) - h(v^{1N}) - h(v^+) - h(v^-) \right] + O(\log n). \end{aligned} \quad (3-6)$$

最后, 估计  $\log A_2$ , 令:

$$D = \{(l^i, m^i)_{2 \leq i \leq N-1} : l^i, m^i \in \mathbb{N}, l^i + m^i = k^{i, i+1}\}.$$

表示  $l^i$  和  $m^i$  可能的组合形成的集合。记  $L = (l^i, m^i) \in D$ , 令

$$B_L = \prod_{i=2}^{N-1} \binom{l^i + l^{i-1} + k^+ - 1}{l^i} \binom{m^i + m^{i+1} + k^- - 1}{m^i}.$$

表示在给定  $l^i$  和  $m^i$  时, 步骤 2) 中插入方式的数量。易知  $|D| \leq (n+1)^{N-2}$ , 因此, 可以得到:

$$\max_{L \in D} B_L \leq A_2 \leq (n+1)^{N-2} \max_{L \in D} B_L, \quad (3-7)$$

该式中还运用了  $A_2 = \sum_{L \in D} B_L$ 。类似于 (11) 式, 有:

$$\begin{aligned} \log B_L &= \sum_{i=2}^{N-1} [h(l^i + l^{i-1} + k^+) - h(l^i) - h(l^{i-1} + k^+)] \\ &\quad + \sum_{i=2}^{N-1} [h(m^i + m^{i+1} + k^-) - h(m^i) - h(m^{i+1} + k^-)] + O(\log n) \\ &= \sum_{i=2}^{N-1} n[h(x^i + x^{i-1} + v^+) - h(x^i) - h(x^{i-1} + v^+)] \\ &\quad + \sum_{i=2}^{N-1} n[h(y^i + y^{i+1} + v^-) - h(y^i) - h(y^{i+1} + v^-)] + O(\log n), \end{aligned} \quad (3-8)$$

其中  $x^i = l^i/n$  和  $y^i = m^i/n$ 。对于给定的  $v \in \mathcal{V}$ , 考虑其到处的空间:

$$V(v) = \{(x^i, y^i)_{2 \leq i \leq N-1} : x^i, y^i \geq 0, x^i + y^i = v^{i,i+1}\},$$

且记  $X = (x^i, y^i) \in V(v)$ 。定义函数:

$$\begin{aligned} F_v(X) &= \sum_{i=2}^{N-1} [h(x^{i-1} + v^+) + h(x^i) - h(x^{i-1} + x^i + v^+)] \\ &\quad + \sum_{i=2}^{N-1} [h(y^i) + h(y^{i+1} + v^-) - h(y^i + y^{i+1} + v^-)]. \end{aligned} \quad (3-9)$$

那么联系 (12) 式的结果, 可知:

$$\log A_2 = \max_{L \in D} \log B_L + O(\log n) = n \sup_{X \in V(v)} F_v(X) + O(\log n). \quad (3-10)$$

结合(??), (??) 和 (??)可得:

$$\begin{aligned} I_J(v) &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(J_n^c = v^c, \forall c \in C) \\ &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \log A_1 + \log A_2 + \log A_3 + \sum_{c \in C} k^c \log \gamma^c \right]. \end{aligned}$$

再联系(??), (??), 和 (??)式, 可得:

$$\begin{aligned} I_J(v) &= [h(v^{12}) + h(v^{1N}) + h(v^+) + h(v^-) - h(v^{12} + v^{1N} + v^+ + v^-)] \\ &\quad + \inf_{X \in V(v)} F_v(X) + \sum_{i \in S} [h(v_i - v^i) + h(v^i) - h(v_i)] - \sum_{c \in C} v^c \log \gamma^c, \end{aligned} \quad (3-11)$$

其中  $h(x) = x \log x$  且  $v_i = \sum_{c \ni i} v^c$ 。这就是经验  $LE$  完整的环流速率函数表达式。该式中的  $\inf_{X \in V(v)} F_v(X)$  难以直接计算, 不过可以通过拉格朗日乘子法得到。在附录 A 中, 证明了

$$\inf_{X \in V(v)} F_v(X) = F_v(x^i, y^i),$$

其中  $x^1 = v^{12}$ ,  $x^N = 0$ ,  $y^1 = 0$ , 并且  $y^N = v^{1N}$ 。

上述论证, 都是基于系统的初始状态是 1, 自然会联想到, 基于其他初始分布, 速率函数的表达式是否与其一致。附录 B 给出了速率函数不依赖初始状态的证明, 由 (??) 的形式, 可以看出这是一个极不平凡的结论。

为建立经验  $LE$  环流大偏差原理, 依然要证明速率函数的水平集是紧的, 也就是验证条件 (??) 和 (??)。大偏差原理严格的证明在附录 ?? 中给出。总结上面的论述, 可以得到下面的定理

定理 3.1 单环马氏链的经验环流  $(J_n^c)_{c \in C}$  满足大偏差原理, 并且相应的速率函数  $I_J : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty]$  满足上式 (??)。速率函数  $I_J$  满足有界性, 连续性和凸性。并且, 速率函数  $I_J$  并不依赖初始分布的选择。

一般单环马氏链的速率函数表达式 (??) 十分复杂。不过, 如果令状态 1 到状态  $N$  的转移概率为 0, 或者只考虑三状态的马氏链。若  $N = 3$ , 则速率函数可以化简为: (证明细节见 ??)

$$I_J(v) = \sum_{i \in S} \left[ v^i \log \left( \frac{v^i / v_i}{J^i / J_i} \right) + (v_i - v^i) \log \left( \frac{(v_i - v^i) / v_i}{(J_i - J^i) / J_i} \right) \right] + \sum_{c \in C, |c| \neq 1} v^c \log \left( \frac{v^c / \tilde{v}}{J^c / \tilde{J}} \right),$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= \sum_{c \in C, |c| \neq 1} v^c = v^{12} + v^{13} + v^{23} + v^+ + v^-, \\ \tilde{J} &= \sum_{c \in C, |c| \neq 1} J^c = J^{12} + J^{13} + J^{23} + J^+ + J^-. \end{aligned}$$

若  $p_{1N} = 0$ , 速率函数可以化简为 (证明细节见 ??) :

$$\begin{aligned} I_J(v) &= \sum_{i \in S} \left[ v^i \log \left( \frac{v^i / v_i}{J^i / J_i} \right) + v^{i,i+1} \log \left( \frac{v^{i,i+1} / v_i}{J^{i,i+1} / J_i} \right) \right. \\ &\quad \left. + (v^{i-1,i} + v^+) \log \left( \frac{(v^{i-1,i} + v^+) / v_i}{(J^{i-1,i} + J^+) / J_i} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3-12)$$

最好, 考虑经验经验净  $LE$  环流  $(\tilde{J}_n^c)_{c \in C}$  的大偏差原理。因为  $\tilde{J}_n^c = 0$ ,  $|S| = 1, 2$  且  $\tilde{J}_n^+ = -J_n^-$ , 所以只需要考虑环  $(1, 2, \dots, N)$  的经验净环流。那么由收缩原理可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{J}_n^+ = x) &= \mathbb{P}(J_n^+ - J_n^- = x) \\ &= \sum_{v^+ - v^- = x} \mathbb{P}(J_n^c = v^c, \forall c \in C) \\ &\propto \sum_{v^+ - v^- = x} e^{-nI_J(v)}. \end{aligned} \quad (3-13)$$

由此说明  $\tilde{J}_n^+$  满足大偏差原则, 相应的速率函数  $I_{\tilde{J}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$  为:

$$I_{\tilde{J}}(x) = \inf_{\{v \in \mathcal{V} : v^+ - v^- = x\}} I_J(v).$$

从上述表达式, 也可以看出  $I_{\tilde{J}}$  与初始分布的选择无关。

### 3.1.1 一般马氏链的 $ST$ 环流的大偏差

$ST$  经验净环流的大偏差, 以及速率函数的对称性已经在文献 [?] 中有过相关介绍。本文将着重研究经验  $ST$  环流的大偏差原理, 涉及对经验测度部分可参考 [?]。

$n$  时刻的对经验测度  $R_n : E \rightarrow [0, 1]$ , 可以定义为

$$R_n(i, j) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n 1_{\{\xi_{m-1}=i, \xi_m=j\}},$$

其中假设周期边界条件  $X_0 = X_n$ 。显然  $R_n(i, j)$  表示边  $\langle i, j \rangle$  形成的速度。注意到, 对经验测度  $R_n$  处于空间

$$\mathcal{M} = \left\{ R : E \rightarrow [0, 1] : \sum_{i,j \in S} R(i, j) = 1, \sum_{j \in S} R(i, j) = \sum_{j \in S} R(j, i) \right\}.$$

众所周知, 对经验测度满足下面的大偏差原则:

$$\mathbb{P}(R_n(i, j) = R(i, j), \forall \langle i, j \rangle \in E) \propto e^{-nI_{\text{pair}}(R)}, \quad n \rightarrow \infty,$$

上式中的速率函数  $I_{\text{pair}} : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  的表达式为

$$I_{\text{pair}}(R) = \sum_{\langle i, j \rangle \in E} R(i, j) \log \frac{R(i, j)}{R(i)p_{ij}}$$

其中  $R(i) = \sum_{j \in S} R(i, j)$ , 可以看到, 对经验测度的速率函数可以表示为有着明显的相对熵形式。给定生成树  $T$ , 定义在空间  $E$  上的函数  $H^{c_l}$  为:

$$H^{c_l}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{if } \langle i, j \rangle \in c_l \text{ and } \langle i, j \rangle \in T, \text{ or } \langle i, j \rangle = l, \\ -1, & \text{if } \langle i, j \rangle \notin c_l, \langle j, i \rangle \in c_l, \text{ and } \langle i, j \rangle \in T, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对经验测度可以被分解为下面  $ST$  环流的加权和:

$$R_n(i, j) = \sum_{c_l \in \mathcal{L}} H^{c_l}(i, j) Q_n^{c_l},$$

且由文献 [?] 可知, 该分解是唯一的。那么有:

$$\mathbb{P}(Q_n^{c_l} = \mu^{c_l}, \forall c_l \in \mathcal{L}) = \mathbb{P}\left(R_n(i, j) = \sum_{c_l \in \mathcal{L}} \mu^{c_l} H^{c_l}(i, j), \forall \langle i, j \rangle \in E\right) \propto e^{-nI_{\text{pair}}(\sum_{c_l \in \mathcal{L}} \mu^{c_l} H^{c_l})}.$$

这表明  $ST$  经验环流  $(Q_n^{c_l})_{c_l \in \mathcal{L}}$  满足大偏差原则, 相应的速率函数  $I_Q : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  为:

$$I_Q(\mu) = I_{\text{pair}}\left(\sum_{c_l \in \mathcal{L}} \mu^{c_l} H^{c_l}\right). \quad (3-14)$$

最终, 考虑  $ST$  经验净环流  $(\tilde{Q}_n^{c_l})_{c_l \in \mathcal{L}}$  的大偏差原理。考虑基本集中三状态或者更多状态的环, 令  $l_1, l_1-, l_2, l_2-, \dots, l_s, l_s-$  为对应的弦。类似于  $LE$  经验净环流的论证, 只考虑环  $c_{l_1}, c_{l_2}, \dots, c_{l_s}$  的经验净环流。则  $(\tilde{Q}^{c_{l_i}})_{1 \leq i \leq s}$  满足大偏差原则, 且相应的速率函数  $I_{\tilde{Q}} : \mathbb{R}^s \rightarrow [0, \infty]$  为:

$$I_{\tilde{Q}}(x) = \inf_{\{\mu \in \mathcal{M}; \mu^{c_{l_i}} - \mu^{c_{l_i}^-} = x_{l_i}, \forall 1 \leq i \leq s\}} I_Q(\mu). \quad (3-15)$$

前面论述已得出单环马氏链 LE 经验环流的速率函数，和一般马氏链的 ST 经验环流的速率函数，下面将探讨两者之间的关系。前面也说过 ST 环流可以通过 LE 表示为  $Q_n^{c_l} = \sum_{c \in C} J_n^c 1_{\{l \in c\}}$ 。从收缩原理中，可以得到：

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Q_n^{c_l} = \mu^{c_l}, \forall l \in \mathcal{L}) &= \mathbb{P}\left(\sum_{c \in C} J_n^c 1_{\{l \in c\}} = \mu^{c_l}, \forall l \in \mathcal{L}\right) \\ &= \sum_{\{v \in \mathcal{V}; \sum_c v^c 1_{\{l \in c\}} = \mu^{c_l}\}} \mathbb{P}(J_n^c = v^c, \forall c \in C) \\ &\propto \sum_{\{v \in \mathcal{V}; \sum_c v^c 1_{\{l \in c\}} = \mu^{c_l}\}} e^{-nI_J(v)}. \end{aligned}$$

这表明 LE 和 ST 经验环流的内部关系为：

$$I_Q(\mu) = \inf_{\{v \in \mathcal{V}; \sum_c v^c 1_{\{l \in c\}} = \mu^{c_l}\}} I_J(v).$$

易知上式中的  $I_Q$  和式 (??) 中的一致，故该式的证明在此省略。

由于 LE 环流的定义相比于 ST 环流更为精确，所以多数情况下，LE 经验环流的速率函数有别于 ST 环流。然而，对于图 ??(d) 所示的单环系统，基本集  $\mathcal{L}$  与环空间  $C$  完全一致。那么结合 (??) 式，可得 LE 经验环流  $(J^{c_l})_{c_l \in \mathcal{L}}$  和 ST 经验环流  $(Q^{c_l})_{c_l \in \mathcal{L}}$  恰好相等，并且

$$I_J(v) = I_Q(v),$$

其中  $I_J(v)$  已经在 (??) 中给出。



## 第四章 环流的涨落定理

### 4.1 单环马氏链 LE 环流的涨落定理

本章节将验证前面讨论的经验环流是否满足各类涨落定理。LE 经验环流的暂态涨落定理已经在文献 [?] 中证明，不过该文中的证明还有些许不完整，下面先简述该文中关于单环马氏链的证明。记单环系统中两个  $N$  状态环为  $C^+ = (1, 2, \dots, N)$  和  $C^- = (1, N, \dots, 2)$ ，令  $N_n^+$  和  $N_n^-$  分别表示  $n$  时刻环  $C^+$  和  $C^-$  分别形成的数量。由文献 (??) 可以得到：

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_n^+ = k^+, N_n^- = k^-, N_n^c = k^c, \forall c \neq C^+, C^-) \\ = (\gamma^+)^{k^+} (\gamma^-)^{k^-} \prod_{c \neq C^+, C^-} (\gamma^c)^{k^c} |G_n(k^+, k^-, (k^c)_{c \neq C^+, C^-})|, \end{aligned}$$

其中  $\gamma^+ = p_{12}p_{23} \cdots p_{N1}$  和  $\gamma^- = p_{1N}p_{N,N-1} \cdots p_{21}$  分别是环  $C^+$  和环  $C^-$  中的转移概率的乘积， $G_n(k^+, k^-, (k^c)_{c \neq C^+, C^-})$  表示所有容许轨迹的集合，这些轨迹满足  $C^+$  形成  $k^+$  次， $C^-$  形成  $k^-$  次，环  $c \neq C^+, C^-$  形成  $k^c$  次。上述方程可以重写为：

$$\mathbb{P}(N_n^+ = k^+, N_n^- = k^-, \dots) = (\gamma^+)^{k^+} (\gamma^-)^{k^-} \prod_{c \neq C^+, C^-} (\gamma^c)^{k^c} |G_n(k^+, k^-, \dots)|. \quad (4-1)$$

类似地，如果交换上式中的  $k^+$  和  $k^-$ ，可以得到

$$\mathbb{P}(N_n^+ = k^-, N_n^- = k^+, \dots) = (\gamma^+)^{k^-} (\gamma^-)^{k^+} \prod_{c \neq C^+, C^-} (\gamma^c)^{k^c} |G_n(k^-, k^+, \dots)|. \quad (4-2)$$

文献 [?] 中的证明是基于  $G_n(k^+, k^-, \dots)$  与  $G_n(k^-, k^+, \dots)$  之间的一一对应关系的，即对  $G_n(k^+, k^-, \dots)$  的任意轨迹  $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$  都可以在  $G_n(k^-, k^+, \dots)$  中找到对应的逆轨迹  $(\xi_n, \xi_{n-1}, \dots, \xi_0)$ 。也就是说轨迹中环  $C^+$  形成  $k^+$  次，环  $C^-$  形成  $k^-$  次，相应的逆轨迹中环  $C^+$  形成  $k^-$  次，环  $C^-$  形成  $k^+$  次。同时也可得到两个集合中的元素数量相同，即：

$$|G_n(k^+, k^-, \dots)| = |G_n(k^-, k^+, \dots)|. \quad (4-3)$$

结合 (??)，(??)，和(??)，可以得到 LE 经验环流的暂态涨落定理：

$$\mathbb{P}(N_n^+ = k^+, N_n^- = k^-, \dots) = \mathbb{P}(N_n^+ = k^-, N_n^- = k^+, \dots) \left( \frac{\gamma^+}{\gamma^-} \right)^{k^+ - k^-}. \quad (4-4)$$

然而，上面也指出直观的想法是基于周期边界条件。例如，表?? 中的四状态单环系统的轨迹，其中环  $C^+$  形成一次，然而相应的反环并没有形成  $C^+$  和  $C^-$ 。这说明逆轨迹并没有  $G_n(k^+, k^-, \dots)$  和  $G_n(k^-, k^+, \dots)$  之间的一一对应关系。通过上述论证，确实可以通过假设周期边界条件简化，简化论证。只是逆轨迹无法做到两个集合之间的一一映射，但这并不能否认暂态涨落定理 (??) 是错误的。在附录 E 中，给出了暂态涨落定理的严格证明。该证明的出发点是式 (??) 中  $|G_n(k)|$  的非平凡对称性。因为证明过于复杂，所以放在附录部分。这表明 LE 经验环流的联合分布满足一种非平凡对称性。

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
trajectory	1	2	3	4	4	1	4	3
derived chain	[1]	[1,2]	[1,2,3]	[1,2,3,4]	[1,2,3,4]	[1]	[1,4]	[1,4,3]
cycles formed					(4)	(1,2,3,4)		
$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
reversed trajectory	3	4	1	4	4	3	2	1
derived chain	[3]	[3,4]	[3,4,1]	[3,4]	[3,4]	[3]	[3,2]	[3,2,1]
cycles formed				(1,4)	(4)	(3,4)		

Table 4.1 环擦除方式形成环的例子

通过暂态涨落定理，可以进一步得到其他两种涨落定理。首先，回顾 LE 经验环流的矩母函数：

$$g_n(\lambda^+, \lambda^-, \dots) = \mathbb{E} \left[ e^{\lambda^+ N_n^+ + \lambda^- N_n^- + \sum_{c \in C^+, C^-} \lambda^c N_n^c} \right].$$

可以得出 Kurchan-Lebowitz-Spohn 类型涨落定理成立：

$$\begin{aligned}
g_n(\lambda^+, \lambda^-, \dots) &= \sum_k e^{\sum_{c \in C} \lambda^c k^c} \mathbb{P}(\dots, N^+ = k^+, N^- = k^-) \\
&= \sum_k e^{\sum_{c \in C} \lambda^c k^c} \mathbb{P}(\dots, N^+ = k^-, N^- = k^+) \left( \frac{\gamma^+}{\gamma^-} \right)^{k^+ - k^-} \\
&= \sum_k e^{\dots + \left( \lambda^+ - \log \frac{\gamma^+}{\gamma^-} \right) k^+ + \left( \lambda^- - \log \frac{\gamma^-}{\gamma^+} \right) k^-} \mathbb{P}(\dots, N^+ = k^-, N^- = k^+) \\
&= \mathbb{E} \left[ e^{\dots + \left( \lambda^+ - \log \frac{\gamma^+}{\gamma^-} \right) N_n^+ + \left( \lambda^- + \log \frac{\gamma^-}{\gamma^+} \right) N_n^-} \right] \\
&= g_n \left( \lambda^- - \log \frac{\gamma^+}{\gamma^-}, \lambda^+ + \log \frac{\gamma^-}{\gamma^+}, \dots \right),
\end{aligned}$$

其中  $\log(\gamma^+/\gamma^-)$  是环  $C^+$  的匹配度。接下来，考虑  $n$  趋于无穷是时，单环系统的极限情况，易知：

$$\begin{aligned}
e^{-nI_J(\dots, \nu^+, \nu^-)} &\propto \mathbb{P}(\dots, J_n^+ \approx \nu^+, J_n^- \approx \nu^-) \\
&= \mathbb{P}(\dots, J_n^+ \approx \nu^-, J_n^- \approx \nu^+) \left( \frac{\gamma^+}{\gamma^-} \right)^{n(\nu^+ - \nu^-)} \\
&\propto e^{-n \left[ I_J(\dots, \nu^-, \nu^+) - \left( \log \frac{\gamma^+}{\gamma^-} \right) (\nu^+ - \nu^-) \right]}.
\end{aligned}$$

这蕴含着下面 Gallavotti-Cohen 形式的涨落定理成立：

$$I_J(\dots, \nu^+, \nu^-) = I_J(\dots, \nu^-, \nu^+) - \left( \log \frac{\gamma^+}{\gamma^-} \right) (\nu^+ - \nu^-). \quad (4-5)$$

类似地，可以得到 LE 经验净环流的涨落定理。类似于章节 ?? 中讨论  $(\tilde{J}_n^c)_{c \in C}$ ，只需关注环  $C^+$  的经验净环流。令  $\tilde{g}_n(\lambda) = \mathbb{E}[e^{\lambda n \tilde{J}_n^+}]$  为  $\tilde{J}_n^+$  的矩母函数， $I_{\tilde{J}}(x)$  为相应的速率函数。下面各种有关的涨落皆可得出：1) 暂态涨落定理：

$$\frac{\mathbb{P}(\tilde{J}_n^+ = x)}{\mathbb{P}(\tilde{J}_n^+ = -x)} = \left( \frac{\gamma^+}{\gamma^-} \right)^{nx}.$$

2) Kurchan-Lebowitz-Spohn 类型涨落定理：

$$\tilde{g}_n(\lambda) = \tilde{g}_n \left( - \left( \lambda + \log \frac{\gamma^+}{\gamma^-} \right) \right).$$

3) 积分涨落定理：取  $\lambda = -\log \gamma^+/\gamma^-$  带入上式 2) 可得

$$\mathbb{E}[e^{\lambda n \tilde{J}_n^+}] = 1.$$

4) Gallavotti-Cohen 类型涨落定理：

$$\tilde{I}_{\tilde{J}}(x) = \tilde{I}_{\tilde{J}}(-x) - \left( \log \frac{\gamma^+}{\gamma^-} \right) x.$$

最后考虑熵产生涨落和环流涨落之间的关系。回顾熵产生的定义 [?]：

$$W_n = \frac{1}{2} \sum_{c \in C} \tilde{J}_n^c \log \frac{\gamma^c}{\gamma^{c-}} = \tilde{J}_n^+ \log \frac{\gamma^+}{\gamma^-}.$$

熵产生的暂态涨落定理可以整理为：

$$\frac{\mathbb{P}(W_n = x)}{\mathbb{P}(W_n = -x)} = \frac{\mathbb{P}(\tilde{J}_n^+ = x/(\log \frac{\gamma^+}{\gamma^-}))}{\mathbb{P}(\tilde{J}_n^+ = -x/(\log \frac{\gamma^+}{\gamma^-}))} = e^{nx}.$$

其他形式的涨落定理也有类似形式，在此省略。

## 4.2 单环马氏链 ST 环流的涨落定理

有关 LE 经验环流和 LE 经验净环流的涨落定理已经很完整了。自然会想到是否 ST 经验环流和 ST 经验净环流是否也满足相似的涨落定理。下面将通过一个例子说明，ST 经验环流不具有 Gallavotti-Cohen 类型涨落定理，即使只考虑单环系统。

考虑三状态马氏链，并且令  $T = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  是一个生成树，那么相应基本集为：

$$\mathcal{L} = \{(1), (2), (3), (1, 2), (2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}.$$

回顾式 (??) 中的 ST 经验环流的速率函数为：

$$I_Q(\mu) = \sum_{\langle i, j \rangle \in E} R^\mu(i, j) \log \frac{R^\mu(i, j)}{R^\mu(i) p_{ij}},$$

其中  $R^\mu(i, j) = \sum_{c_l \in \mathcal{L}} \mu^{c_l} H^{c_l}(i, j)$  且  $R^\mu(i) = \sum_{j \in S} R^\mu(i, j)$ 。再记  $\mu^+ = \mu^{(1,2,3)}$ ， $\mu^- = \mu^{(1,3,2)}$ ，易知（参考图 ?? (a)）

$$I_Q(\cdots, \mu^+, \mu^-) \neq I_Q(\cdots, \mu^-, \mu^+) - \left( \log \frac{\gamma^+}{\gamma^-} \right) (\mu^+ - \mu^-),$$

这说明了 Gallavotti-Cohen 类型涨落定理对于 ST 环流不成立。且由于 Gallavotti-Cohen

类型涨落定理成立条件最弱，所以其他类型涨落定理也不成立。ST 经验环流无法满足

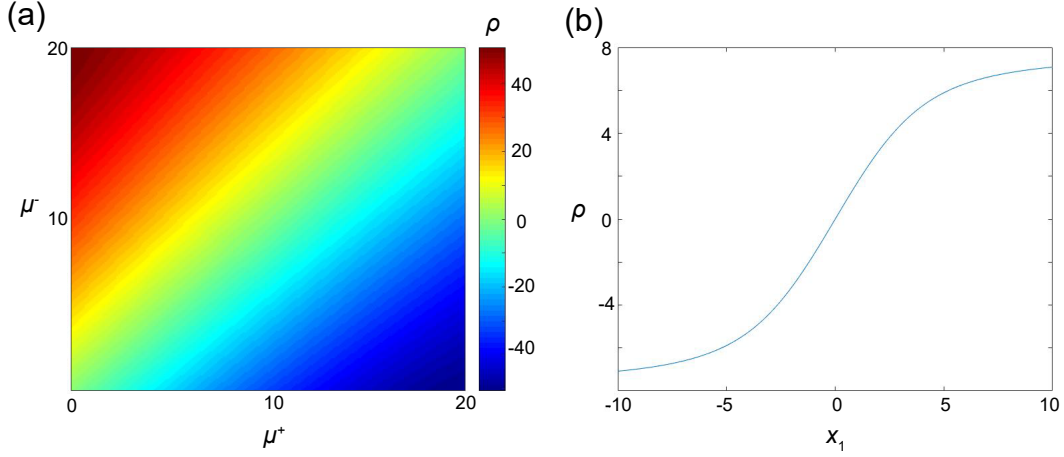


Figure 4.1 ST 经验环流和经验净环流的速率函数图像 (a)

$$\rho = I_Q(\cdots, \mu^+, \mu^-) - I_Q(\cdots, \mu^-, \mu^+) + (\log \frac{\gamma^+}{\gamma})(\mu^+ - \mu^-). \quad (b)$$

$$\rho = I_{\tilde{Q}}(\tilde{\mu}^{c_1}, \tilde{\mu}^{c_2}, \tilde{\mu}^{c_3}) - I_{\tilde{Q}}(-\tilde{\mu}^{c_1}, \tilde{\mu}^{c_2}, \tilde{\mu}^{c_3}) + (\log \frac{\gamma^{c_1}}{\gamma^{c_1-}})\tilde{\mu}^{c_1}$$

各种涨落定理，ST 经验净环流却是在很多情况下成立（参考 [?]）。对于单环系统，只需考虑环  $C^+$  的净环流。从 (??) 式中易知环  $C^+$  的 ST 经验净环流  $\tilde{Q}_n^+$  等于该环的 LE 经验净环流  $\tilde{J}_n^+$ 。记弦  $l^+$  和  $l^-$  分别对应于  $C^+$  和  $C^-$ ，由于  $l^+ = l^-$ ，则：

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_n^+ &= \sum_{c \in C} J_n^c 1_{\{l^+ \in c\}} - \sum_{c \in C} J_n^c 1_{\{l^- \in c\}} \\ &= \sum_{c \in C} J_n^c 1_{\{l^+ \in c\}} - \sum_{c \in C} J_n^{c^-} 1_{\{l^+ \in c\}} = \tilde{J}_n^+. \end{aligned}$$

因此 ST 净环流的涨落定理自然等同于 LE 环流的涨落定理。然而，(??) 式只在周期边界条件下成立，也就意味着，只能得到 ST 经验净环流满足 Gallavotti-Cohen 类型涨落定理。并且，容易验证  $\tilde{Q}_n^+$  对其他三种类型涨落定理不成立。

### 4.3 一般马氏链 LE 环流的涨落定理

目前，已经验证了单环马氏链环流相关的涨落定理，自然会问到环流涨落定理是否会适用于一般的马氏链。下面从回顾文献 [?] 的相关结论开始。记  $c_1 = (i_1, i_2, \dots, i_s)$  和  $c_2 = (j_1, j_2, \dots, j_r)$  是两个环。如果  $s = r$  且  $\{i_1, i_2, \dots, i_s\} = \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ ，则称环  $c_1$  和环  $c_2$  相似。换句话说，如果两个环包含的状态完全一致，则称两个环相似。例如，下面六个环  $(1, 2, 3, 4)$ ,  $(1, 2, 4, 3)$ ,  $(1, 3, 2, 4)$ ,  $(1, 3, 4, 2)$ ,  $(1, 4, 2, 3)$  和  $(1, 4, 3, 2)$ ，互为相似关系。根据这个定义，环  $c$  和它的反环  $c^-$  一定是相似的。

首先考虑 LE 经验环流  $(J_n^c)_{c \in C}$ 。记  $c_1, c_2, \dots, c_r$  是一族环，比如，它们可以是环空间中环的全体。若环  $c_s$  和环  $c_t$  ( $1 \leq s, t \leq r$ ) 相似，那么有下面的暂态涨落定理成立：

$$\frac{\mathbb{P}(N_n^{c_s} = k^{c_s}, N_n^{c_t} = k^{c_t}, N_n^{c_m} = k^{c_m}, \forall m \neq s, t)}{\mathbb{P}(N_n^{c_t} = k^{c_t}, N_n^{c_s} = k^{c_s}, N_n^{c_m} = k^{c_m}, \forall m \neq s, t)} = \left( \frac{\gamma^{c_s}}{\gamma^{c_t}} \right)^{k^{c_s} - k^{c_t}}. \quad (4-6)$$

这表明如果环  $c_s$  和环  $c_t$  相似，那么 LE 经验环流的联合分布满足非平凡的对称关系。若环  $c_s$  和环  $c_t$  不仅相似，而且互为正反环，则上述方程可以化为：

$$\frac{\mathbb{P}(N_n^+ = k^+, N_n^- = k^-, N_n^c = k^c, \forall c \neq C^+, C^-)}{\mathbb{P}(N_n^+ = k^-, N_n^- = k^+, N_n^c = k^c, \forall c \neq C^+, C^-)} = \left(\frac{\gamma^+}{\gamma^-}\right)^{k^+ - k^-},$$

这与单环系统的暂态涨落定理有着相同的表达形式。针对从  $i$  出发的马氏链，并且环  $c_1, c_2, \dots, c_r$  通过相同状态  $i \in S$  的情况，并且文献 [?] 已经给出了 (??) 式的有关证明。实际上，使这个结论成立的假设，可以简化为对任意一族环，并且任意初始分布。此外，对任意一族环  $c_1, c_2, \dots, c_r$ ，任意  $1 \leq s \leq r$ ，下式成立：

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\tilde{J}_n^{c_s} = x^{c_s}/n, \tilde{J}_n^{c_m} = x^{c_m}/n, \forall m \neq s) \\ &= \mathbb{P}(N_n^{c_s} - N_n^{c_s^-} = x^{c_s}, N_n^{c_m} - N_n^{c_m^-} = x^{c_m}, \forall m \neq s) \\ &= \sum_{k^{c_m} - k^{c_m^-} = x^{c_m}, \forall m} \mathbb{P}(N_n^{c_s} = k^{c_s}, N_n^{c_s^-} = k^{c_s^-}, N_n^{c_m} = k^{c_m}, N_n^{c_m^-} = k^{c_m^-}, \forall m \neq s) \\ &= \sum_{k^{c_m} - k^{c_m^-} = x^{c_m}, \forall m} \mathbb{P}(N_n^{c_s} = k^{c_s^-}, N_n^{c_s^-} = k^{c_s}, N_n^{c_m} = k^{c_m}, N_n^{c_m^-} = k^{c_m^-}, \forall m \neq s) \left(\frac{\gamma^{c_s}}{\gamma^{c_s^-}}\right)^{k^{c_s} - k^{c_s^-}} \\ &= \sum_{k^{c_m} - k^{c_m^-} = x^{c_m}, \forall m} \mathbb{P}(N_n^{c_s} = k^{c_s^-}, N_n^{c_s^-} = k^{c_s}, N_n^{c_m} = k^{c_m}, N_n^{c_m^-} = k^{c_m^-}, \forall m \neq s) \left(\frac{\gamma^{c_s}}{\gamma^{c_s^-}}\right)^{x^{c_s}} \\ &= \mathbb{P}(N_n^{c_s} - N_n^{c_s^-} = -x^{c_s}, N_n^{c_m} - N_n^{c_m^-} = x^{c_m}, \forall m \neq s) \left(\frac{\gamma^{c_s}}{\gamma^{c_s^-}}\right)^{x^{c_s}} \\ &= \mathbb{P}(\tilde{J}_n^{c_s} = -x^{c_s}/n, \tilde{J}_n^{c_m} = x^{c_m}/n, \forall m \neq s) \left(\frac{\gamma^{c_s}}{\gamma^{c_s^-}}\right)^{x^{c_s}}. \end{aligned}$$

因此最终可得到下列的 LE 环流的暂态涨落定理：

$$\mathbb{P}(\tilde{J}_n^{c_s} = x_s, \tilde{J}_n^{c_m} = x_m, \forall m \neq s) = \mathbb{P}(\tilde{J}_n^{c_s} = -x_s, \tilde{J}_n^{c_m} = x_m, \forall m \neq s) e^{n x_s \log \frac{\gamma^{c_s}}{\gamma^{c_s^-}}}. \quad (4-7)$$

也就是说，对任意环  $c_s$ ，LE 经验净环流的联合分布满足对称关系。且一状态和两状态的环  $c$  满足  $\tilde{J}_n^c = 0$ ，三状态或更多状态的环满足  $\tilde{J}_n^c = -\tilde{J}_n^{c^-}$ 。令  $c_1, c_1^-, c_2, c_2^-, \dots, c_{r*}, c_{r*}^-$  表示所有三状态或更多状态的环。若把上述方程中的  $x_s, 1 \leq s \leq r^*$  改为  $-x_s$ ，则可以得到：

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\tilde{J}_n^{c_1} = x_1, \tilde{J}_n^{c_2} = x_2, \dots, \tilde{J}_n^{c_{r*}} = x_{r*}) \\ &= \mathbb{P}(\tilde{J}_n^{c_1} = -x_1, \tilde{J}_n^{c_2} = -x_2, \dots, \tilde{J}_n^{c_{r*}} = -x_{r*}) e^{n \sum_{i=1}^{r*} x_i \log \frac{\gamma^{c_i}}{\gamma^{c_i^-}}}. \end{aligned} \quad (4-8)$$

通过对比，可以看到 (??) 式的结论弱于 (??) 式。因此，本文称 (??) 式为强形式的暂态涨落定理，(??) 式为弱形式的暂态涨落定理。

有关 LE 经验环流和 LE 经验净环流的其他类型涨落定理都可以通过暂态涨落定理得到，下面会整理处这些定理的强形式。考虑任意一族环  $c_1, c_2, \dots, c_r$ ，令  $g_n(\lambda) = \mathbb{E}[e^{n \sum_{i=1}^r \lambda_i J_n^{c_i}}]$  和  $\tilde{g}_n(\lambda) = \mathbb{E}[e^{n \sum_{i=1}^r \lambda_i \tilde{J}_n^{c_i}}]$  分别为  $(J_n^{c_i})_{1 \leq i \leq r}$  和  $(\tilde{J}_n^{c_i})_{1 \leq i \leq r}$  的矩母函数，并且令  $I_J(x)$  和  $I_{\tilde{J}}(x)$  为相应的速率函数。

Kurchan-Lebowitz-Spohn 类型涨落定理：对任意互相相似的两个环  $c_s$  和  $c_t$  ( $1 \leq$

$s, t \leq r$ ), 下列公式成立:

$$g_n(\cdots, \lambda_s, \cdots, \lambda_t, \cdots) = g_n\left(\cdots, \lambda_t - \log \frac{\gamma^{c_s}}{\gamma^{c_t}}, \cdots, \lambda_s + \log \frac{\gamma^{c_s}}{\gamma^{c_t}}, \cdots\right).$$

$$\tilde{g}_n(\cdots, \lambda_s, \cdots) = \tilde{g}_n\left(\cdots, -\left(\lambda_s + \log \frac{\gamma^{c_s}}{\gamma^{c_s-}}\right), \cdots\right).$$

积分涨落定理:

$$\mathbb{E}\left[e^{-n \sum_{i=1}^r (\log \gamma^{c_i} / \gamma^{c_i-}) \tilde{J}_n^{c_i}}\right] = 1.$$

Gallavotti-Cohen 类型涨落定理:

$$I_J(\cdots, x_s, \cdots, x_t, \cdots) = I_J(\cdots, x_t, \cdots, x_s, \cdots) - \left(\log \frac{\gamma^{c_s}}{\gamma^{c_t}}\right)(x_s - x_t).$$

$$I_J(\cdots, x_s, \cdots) = I_J(\cdots, -x_s, \cdots) - \left(\log \frac{\gamma^{c_s}}{\gamma^{c_s-}}\right)x_s.$$

#### 4.4 一般马氏链的 ST 环流的涨落定理

关于单环马氏系统, ST 经验环流无法满足各种涨落定理, 然而 ST 经验净环流满足 Gallavotti-Cohen 类型涨落定理。对于一般情形的马氏链, Andrieux 和 Gaspard 在文献 [?] 中已经证实了 ST 经验净环流满足弱形式下的 Gallavotti-Cohen 类型涨落定理: 对于基本集  $\mathcal{L}$  中三状态以上的环  $c_1, c_1-, c_2, c_2-, \cdots, c_r, c_r-$ , 满足:

$$I_{\tilde{Q}}(x_1, x_2, \cdots, x_r) = I_{\tilde{Q}}(-x_1, -x_2, \cdots, -x_r) - \sum_{i=1}^r x_i \log \frac{\gamma^{c_i}}{\gamma^{c_i-}}.$$

这表明 ST 经验净环流的联合分布具有对称性。

更加让人难以置信的是, 对比 LE 经验净环流, 可以发现 ST 经验净环流不满足强形式下的 Gallavotti-Cohen 类型涨落定理。下面将通过举出反例证实。考虑图 ??(b) 中的具有全连接转移图的四状态马氏链, 并且令生成树为  $T = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ 。由于对所有一状态和两状态的环  $c_l$ , 有  $\tilde{Q}_n^{c_l} = 0$ , 因此只考虑其余的环:

$$c_1 = (1, 2, 3), c_2 = (2, 3, 4), c_3 = (1, 2, 3, 4), c_4 = (1, 3, 2), c_5 = (2, 4, 3), c_6 = (1, 4, 3, 2).$$

注意到所有三状态以上的环满足  $\tilde{Q}_n^{c_l} = -\tilde{Q}_n^{c_l-}$  且  $c_1 = c_4-, c_2 = c_5-, c_3 = c_6-$ 。回顾 ST 经验环流的速率函数, 可知  $(\tilde{Q}_n^{c_1}, \tilde{Q}_n^{c_2}, \tilde{Q}_n^{c_3})$  的速率函数为:

$$I_{\tilde{Q}}(x) = \inf_{\{\mu \in \mathcal{M}; \mu^{c_i} - \mu^{c_i-} = x_i, \forall 1 \leq i \leq 3\}} I_Q(\mu).$$

对于环  $c_1$ , 如果把  $\tilde{\mu}^{c_1}$  换为  $-\tilde{\mu}^{c_1}$ , 那么有图 ?? (b) 可以得到:

$$I_{\tilde{Q}}(\tilde{\mu}^{c_1}, \tilde{\mu}^{c_2}, \tilde{\mu}^{c_3}) \neq I_{\tilde{Q}}(-\tilde{\mu}^{c_1}, \tilde{\mu}^{c_2}, \tilde{\mu}^{c_3}) - \left(\log \frac{\gamma^{c_1}}{\gamma^{c_1-}}\right)\tilde{\mu}^{c_1},$$

这表明 ST 经验净环流不满足 Gallavotti-Cohen 类型涨落定理的强形式。

## 第五章 总结

本文介绍了 LE 和 ST 两种方式下定义的马氏链经验环流，并从大偏差理论和涨落定理的角度比较两者间的差异。

## 5.1 附录 A：单环马氏链速率函数 $I_J$ 的表达式

因此，可以得到速率函数：

$$I_J(\nu) = \left[ h(\nu^{12}) + h(\nu^{1N}) + h(\nu^+) + h(\nu^-) - h(\nu^{12} + \nu^{1N} + \nu^+ + \nu^-) \right] \\ + \inf_{X \in V(\nu)} F_\nu(X) + \sum_{i \in S} \left[ h(\nu_i - \nu^i) + h(\nu^i) - h(\nu_i) \right] - \sum_{c \in C} \nu^c \log \gamma^c,$$

下面将使用拉格朗日乘子法化简该式。固定  $\nu \in \mathcal{V}$ ，令拉格朗日函数 [?]  $\mathcal{A}_\nu : V(\nu) \times \mathbb{R}^{N-2} \rightarrow \mathbb{R}$  为：

$$\mathcal{A}_\nu(X, \lambda) = F_\nu(X) + \sum_{i=2}^{N-1} \lambda_i (x^i + y^i - \nu^{i,i+1}),$$

其中  $X = (x^i, y^i)_{2 \leq i \leq N-1} \in V(\nu)$  并且  $\lambda = (\lambda_i)_{2 \leq i \leq N-1} \in \mathbb{R}^{N-2}$ 。分别对  $x^i$ ,  $y^i$  和  $\lambda_i$  求导，可以得到下列方程：

$$\begin{aligned} \log(x^i) - \log(x^{i-1} + x^i + \nu^+) + \log(x^i + \nu^+) - \log(x^i + x^{i+1} + \nu^+) + \lambda_i &= 0, \\ \log(y^i + \nu^-) - \log(y^{i-1} + y^i + \nu^-) + \log(y^i) - \log(y^i + y^{i+1} + \nu^-) + \lambda_i &= 0, \\ x^i + y^i &= \nu^{i,i+1}, \quad 2 \leq i \leq N-1. \end{aligned} \quad (5-1)$$

而且，可以把方程组 (??) 写为：

$$\frac{x^i}{x^{i-1} + x^i + \nu^+} \frac{x^i + \nu^+}{x^i + x^{i+1} + \nu^+} = \frac{y^i + \nu^-}{y^{i-1} + y^i + \nu^-} \frac{y^i}{y^i + y^{i+1} + \nu^-} = e^{-\lambda_i}, \quad (5-2)$$

$$x^i + y^i = \nu^{i,i+1}, \quad 2 \leq i \leq N-1.$$

其中  $x^1 = \nu^{12}$ ,  $x^N = 0$ ,  $y^1 = 0$  和  $y^N = \nu^{1N}$ 。

引理 5.1 方程 (??) 有解  $X = (x^i, y^i) \in V(\nu)$ 。

证明：若对某些  $2 \leq k \leq N-1$  存在  $\nu^{k,k+1} = 0$ ，则有  $x^k = y^k = 0$  成立。那么依据指标  $2 \leq i \leq k-1$  和  $k+1 \leq i \leq N-1$ ，方程 (??) 可以被分为两个方程。因此对  $\nu^{k,k+1} > 0, \forall k, 2 \leq k \leq N-1$  证明引理，下面会从三种不同情况考虑这个引理。

情况 1:  $\nu^{12} = \nu^+ = \nu^{1N} = \nu^- = 0$ 。易知，对每个  $\alpha \in (0, 1)$ ,

$$x^i = \alpha \nu^{i,i+1}, \quad y^i = (1 - \alpha) \nu^{i,i+1}, \quad 2 \leq i \leq N-1,$$

都是 (??) 的解。

情况 2:  $\nu^{12} = \nu^+ = 0, \nu^{1N} + \nu^- > 0$  或  $\nu^{1N} = \nu^- = 0, \nu^{12} + \nu^+ > 0$ 。容易验证若  $\nu^{12} = \nu^+ = 0, \nu^{1N} + \nu^- > 0$  成立，则  $x^i = 0, y^i = \nu^{i,i+1}$  是方程 (??) 的解。

情况 3:  $\nu^{12} + \nu^+ > 0$  或  $\nu^{1N} + \nu^- > 0$ 。上述已证明对任意给定的  $x^{k+1} \geq 0, y^{k+1} > 0$ ，和  $x^{k+1} + y^{k+1} = \nu^{k+1,k+2}$ ，下列方程 (??) 满足  $x^i, y^i > 0, \forall i, 2 \leq i \leq k$ 。

$$\frac{x^i}{y^i} = \frac{x^i + x^{i+1} + \nu^+}{x^i + \nu^+} \frac{y^i + \nu^-}{y^{i-1} + y^i + \nu^-} \frac{x^{i-1} + x^i + \nu^+}{y^i + y^{i+1} + \nu^-}, \quad (5-3)$$

$$x^i + y^i = \nu^{i,i+1}, \quad 2 \leq i \leq k.$$

下面通过归纳法证明。若  $k = 2$ ，方程 (??) 可以简化为：



$$\frac{x^2}{v^{23} - x^2} = \frac{x^2 + x^3 + v^+}{x^2 + v^+} \frac{v^{12} + x^2 + v^+}{v^{23} - x^2 + y^3 + v^-}.$$

易得:

$$\lim_{x^2 \downarrow 0} \frac{x^2}{v^{23} - x^2} = 0, \quad \lim_{x^2 \downarrow 0} \frac{x^2 + x^3 + v^+}{x^2 + v^+} \frac{v^{12} + x^2 + v^+}{v^{23} - x^2 + y^3 + v^-} \geq \frac{v^{12} + v^+}{v^{23} + y^3 + v^-} > 0.$$

另外,

$$\lim_{x^2 \uparrow v^{23}} \frac{x^2}{v^{23} - x^2} = \infty, \quad \lim_{x^2 \uparrow v^{23}} \frac{x^2 + x^3 + v^+}{x^2 + v^+} \frac{v^{12} + x^2 + v^+}{v^{23} - x^2 + y^3 + v^-} = \frac{v^{23} + x^3 + v^+}{v^{23} + v^+} \frac{v^{12} + v^{23} + v^+}{y^3 + v^-} < \infty.$$

通过中值定理, 可以找到满足  $x^i, y^i > 0$  的方程 (??) 的解, 并且有  $x^i + y^i = v^{i,i+1}$ 。假设对  $k = n - 1$  命题成立, 那么可以考虑方程:

$$\frac{x^n}{v^{n,n+1} - x^n} = \frac{x^n + x^{n+1} + v^+}{x^n + v^+} \frac{v^{n,n+1} - x^n + v^-}{y^{n-1} + v^{n,n+1} - x^n + v^-} \frac{x^{n-1} + x^n + v^+}{v^{n,n+1} - x^n + y^{n+1} + v^-},$$

其中  $x^{n-1}, y^{n-1}$  是方程 (??) 在  $k = n - 1$  时的解。可以得到:

$$\lim_{x^n \downarrow 0} \frac{x^n}{v^{n,n+1} - x^n} = 0, \quad (5-4)$$

并且

$$\begin{aligned} & \lim_{x^n \downarrow 0} \frac{x^n + x^{n+1} + v^+}{x^n + v^+} \frac{v^{n,n+1} - x^n + v^-}{y^{n-1} + v^{n,n+1} - x^n + v^-} \frac{x^{n-1} + x^n + v^+}{v^{n,n+1} - x^n + y^{n+1} + v^-} \\ & \geq \frac{v^{n,n+1} + v^-}{\lim_{x^n \downarrow 0} (y^{n-1}) + v^{n,n+1} + v^-} \frac{\lim_{x^n \downarrow 0} (x^{n-1}) + v^+}{v^{n,n+1} + y^{n+1} + v^-} > 0. \end{aligned} \quad (5-5)$$

利用归纳法得出的结论  $\lim_{x^n \downarrow 0} (x^{n-1}) > 0$ , 可以得到下面两个式子成立。

$$\lim_{x^n \uparrow v^{n,n+1}} \frac{x^n}{v^{n,n+1} - x^n} = \infty, \quad (5-6)$$

和

$$\begin{aligned} & \lim_{x^n \uparrow v^{n,n+1}} \frac{x^n + x^{n+1} + v^+}{x^n + v^+} \frac{v^{n,n+1} - x^n + v^-}{y^{n-1} + v^{n,n+1} - x^n + v^-} \frac{x^{n-1} + x^n + v^+}{v^{n,n+1} - x^n + y^{n+1} + v^-} \\ & \leq \frac{v^{n,n+1} + x^{n+1} + v^+}{v^{n,n+1} + v^+} \frac{\lim_{x^n \uparrow v^{n,n+1}} x^{n-1} + v^{n,n+1} + v^+}{y^{n+1} + v^-} < \infty. \end{aligned} \quad (5-7)$$

那么通过中值定理, 可以找到方程 (??) 满足条件  $x^i, y^i > 0, x^i + y^i = v^{i,i+1}, \forall i = 2, 3, \dots, n$  的解, 就是说上述命题对  $k = n$  成立。

当  $k = N - 1$  时, 有  $y^{k+1} = y^N = v^{1N}$  成立。注意到  $v^{1N} + v^- > 0$ , 那么可以得到 (??), (??), (??) 和 (??) 成立。通过中值定理, 可以找到方程 (??) 满足条件  $x^i, y^i > 0, x^i + y^i = v^{i,i+1}, \forall i = 2, 3, \dots, n$  的解。当  $k = N - 1$  时, 方程 (??) 与方程 (??) 等价。证毕。

□

引理 5.2 令  $X = (x^i, y^i) \in V(v)$  是引理 ?? 的解, 那么  $X$  是  $F_v(\cdot)$  定义在  $V(v)$  下的最小值点。

证明: 对任意  $a_1, a_2, b_1, b_2 \geq 0$ , 通过 log-sum 不等式 (见 (??)), 可以得到:

$$a_1 \log \frac{a_1}{a_1 + a_2} + a_2 \log \frac{a_2}{a_1 + a_2} \geq a_1 \log \frac{b_1}{b_1 + b_2} + a_2 \log \frac{b_2}{b_1 + b_2}. \quad (5-8)$$

对任意  $Z = (z^i, w^i) \in V(v)$ , 可以把 (??) 写为:

$$F_v(Z) = \sum_{i=2}^{N-1} \left[ (z^{i-1} + v^+) \log \frac{z^{i-1} + v^+}{z^{i-1} + z^i + v^+} + z^i \log \frac{z^i}{z^{i-1} + z^i + v^+} \right] \\ + \sum_{i=2}^{N-1} \left[ w^i \log \frac{w^i}{w^i + w^{i+1} + v^-} + (w^{i+1} + v^-) \log \frac{w^{i+1} + v^-}{w^i + w^{i+1} + v^-} \right],$$

其中  $z^1 = v^{12}, w^N = v^{1N}$ . 再根据方程 (??) 和 (??)

$$F_v(Z) \geq \sum_{i=2}^{N-1} \left[ (z^{i-1} + v^+) \log \frac{x^{i-1} + v^+}{x^{i-1} + x^i + v^+} + z^i \log \frac{x^i}{x^{i-1} + x^i + v^+} \right] \\ + \sum_{i=2}^{N-1} \left[ w^i \log \frac{y^i}{y^i + y^{i+1} + v^-} + (w^{i+1} + v^-) \log \frac{y^{i+1} + v^-}{y^i + y^{i+1} + v^-} \right] \\ = \sum_{i=2}^{N-1} \left[ v^+ \log \frac{x^{i-1} + v^+}{x^{i-1} + x^i + v^+} + z^i \log \frac{x^i + v^+}{x^{i-1} + x^i + v^+} \frac{x^i}{x^{i-1} + x^i + v^+} \right] \\ + \sum_{i=2}^{N-1} \left[ v^- \log \frac{y^{i+1} + v^-}{y^i + y^{i+1} + v^-} + w^i \log \frac{y^i + v^-}{y^{i-1} + y^i + v^-} \frac{y^i}{y^i + y^{i+1} + v^-} \right] \\ + v^{12} \log \frac{v^{12} + v^+}{v^{12} + x^2 + v^+} + v^{1N} \log \frac{v^{1N} + v^-}{v^{1N} + y^{N-1} + v^-} \\ = \sum_{i=2}^{N-1} \left[ -\lambda_i v^{i,i+1} + v^+ \log \frac{x^{i-1} + v^+}{x^{i-1} + x^i + v^+} + v^- \log \frac{y^{i+1} + v^-}{y^i + y^{i+1} + v^-} \right] \\ + v^{12} \log \frac{v^{12} + v^+}{v^{12} + x^2 + v^+} + v^{1N} \log \frac{v^{1N} + v^-}{v^{1N} + y^{N-1} + v^-} \\ = \sum_{i=2}^{N-1} \left[ (x^{i-1} + v^+) \log \frac{x^{i-1} + v^+}{x^{i-1} + x^i + v^+} + x^i \log \frac{x^i}{x^{i-1} + x^i + v^+} \right] \\ + \sum_{i=2}^{N-1} \left[ y^i \log \frac{y^i}{y^i + y^{i+1} + v^-} + (y^{i+1} + v^-) \log \frac{y^{i+1} + v^-}{y^i + y^{i+1} + v^-} \right] \\ = F_v(X),$$

其中  $\lambda_i$  被表示为 (??). 证毕。 □

## 5.2 速率函数的对称性

下面将证明速率函数与初始分布的选择无关 (见命题 ??). 在开始证明之前, 先给出下面的定义。

给定  $k = (k^c)_{c \in \mathcal{C}} \in \mathbb{N}^{2N+2}$  和  $\eta = [i_0, i_1, \dots, i_t]$ , 记  $|k| = \sum_{c \in \mathcal{C}} k^c |c|$ , 并且令  $n = |k| + |\eta| = |k| + t$ , 其中  $|c|$  和  $|\eta|$  分别表示环  $c$  的长度和导出链的长度。令  $G^\eta(k)$  为所有  $n$  步长的轨道  $(\xi_m)_{0 \leq m \leq n}$  组成的集合, 这些轨道满足环  $c$  形成  $k^c$  次, 并且去环遗留的轨道是  $\eta$ , 定义为

$$G^\eta(k) = \left\{ (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in S^{n+1} : N_n^c = k^c (\forall c \in C), \tilde{\xi}_n = \eta, \text{ and } n = |k| + |\eta| \right\}.$$

在此, 对只有一个状态的  $\eta = [i]$ , 用  $G^i(k)$  表示  $G^\eta(k)$ . 对任意包含状态  $i$  的环  $\tilde{c} \in C$ ,  $G^i(k)$  的一个子集  $G^{i,\tilde{c}}(k)$  定义为:

$$G^{i,\tilde{c}}(k) = \left\{ (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in S^{n+1} : N_n^c = k^c (\forall c \in C), \tilde{\xi}_n = [i], T_{k^c}^{\tilde{c}} = n, \text{ and } n = |k| \right\},$$

其中  $T_{k^c}^{\tilde{c}}$  表示为第  $k^c$  次形成的环  $\tilde{c}$ . 即对任意轨道  $(\xi_m)_{0 \leq m \leq n} \in G^{i,\tilde{c}}(k)$ , 最后一次形成的环是  $\tilde{c}$ .

注意到等式  $n = |k| + |\eta|$  对  $G^\eta(k)$  和  $G^{i,\tilde{c}}(k)$  成立. 因此在章节 ?? 省略  $G_n(k)$  的角标  $n$ .

下面将针对  $|G^i(k)|$  和  $|G^{i,\tilde{c}}(k)|$ , 给出两个重要的等式. 记

$$B^i(\tilde{k}) = |G^{i,+}(1, 0, \tilde{k})|, \quad C^i(\tilde{k}) = |G^{i,-}(0, 1, \tilde{k})|,$$

其中  $\tilde{k} = (k^1, \dots, k^N, k^{12}, \dots, k^{N-1,N}, k^{1N})$ , 即  $B^i$  ( $C^i$ ) 表示满足下列条件的轨迹数量: 1) 环  $c$  形成  $k^c$  次; 2)  $k^+ = 1, k^- = 0$  ( $k^+ = 0, k^- = 1$ ); 3) 从状态  $i$  出发, 状态  $i$  结束; 4) 最后形成的环是  $(1, \dots, N)$  ( $(1, N, \dots, 2)$ ).

引理 5.3 对任意  $i, j \in S$ , 有:

$$B^i(\tilde{k}) = B^j(\tilde{k}) = C^i(\tilde{k}) = C^j(\tilde{k}).$$

证明: 不降低一般性, 令  $i = 1$ , 只须证  $B^1(\tilde{k}) = C^1(\tilde{k}) = B^j(\tilde{k})$ .

首先证明  $B^1(\tilde{k}) = C^1(\tilde{k})$ . 注意到该系统是单环马氏链,  $\xi$  的每条轨迹可以被看作是一

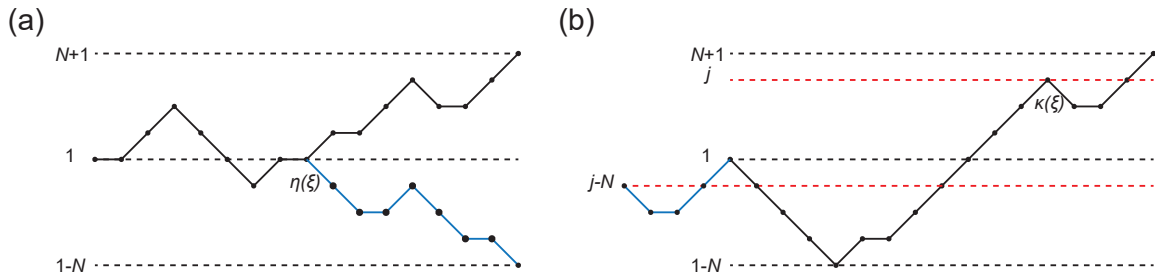


Figure 5.1  $\xi$  的轨迹对应的折线图. (a) 第一种类型的轨迹映射 (b) 第二种类型的轨迹映射

个折线图 (见图 ?? (a)) 折线在状态  $i$  时间  $m$  处的水平移动表示环  $(i)$  在时间  $m$  处形成. 折线从状态  $i+1$  ( $-j$ ) 到状态  $i$  ( $1-j$ ) 的每次上升对应于 (其中的加减运算的结果都会经过模  $N$  运算). 对任意轨迹  $\xi = (\xi_m)_{0 \leq m \leq n} \in G^{1,+}(1, 0, \tilde{k})$ , 令  $\eta(\xi) = \max\{m : 0 \leq m \leq n-1, \xi_m = 1\}$ . 回顾定义  $G^{1,+}(1, 0, \tilde{k})$ , 轨迹  $(\xi_m)_{0 \leq m \leq n}$  在时间  $n$  和状态  $N+1$  到达集合  $\{N+1, 1-N\}$ . 那么构造  $\xi$  对应的轨迹  $\tilde{\xi}$  (见图 ?? (a))

$$\tilde{\xi}_m := \begin{cases} \xi_m, & \text{if } 0 \leq m \leq \eta(\xi), \\ \xi_{n+\eta(\xi)-m}, & \text{if } \eta(\xi) < m \leq n. \end{cases}$$

所有  $(\xi_m)_{0 \leq m \leq \eta(\xi)}$  中形成的环, 在  $(\tilde{\xi}_m)_{0 \leq m \leq \eta(\xi)}$  中也有形成. 折线轨迹  $(\xi_m)_{\eta(\xi) \leq m \leq n}$  在状态  $i$

时间  $m$  的水平移动对应于  $(\tilde{\xi}_m)_{\eta(\xi) \leq m \leq n}$  在状态  $i - N$  时间  $n + \eta(\xi) - m$  的水平移动。类似的，折线轨迹  $(\xi_m)_{\eta(\xi) \leq m \leq n}$  在时间  $m$  从状态  $i + 1$  到状态  $i$  的下落对应于  $(\tilde{\xi}_m)_{\eta(\xi) \leq m \leq n}$  在时间  $n + \eta(\xi) - m$  从状态  $i - N$  到状态  $i + 1 - N$  的下落。那么所有  $(\xi_m)_{0 \leq m \leq \eta(\xi)}$  中形成的单状态和两状态环在  $(\tilde{\xi}_m)_{0 \leq m \leq \eta(\xi)}$  中也有对应。而且，轨迹  $(\tilde{\xi}_m)_{0 \leq m \leq n}$  在时间  $n$  和状态  $1 - N$  第一次到达集合  $\{N + 1, 1 - N\}$ ，这说明轨迹  $(\tilde{\xi}_m)_{0 \leq m \leq n}$  最后形成的环是  $(1, N, \dots, 2)$ ，使得  $\tilde{\xi} \in G^{1,-}(0, 1, \tilde{k})$ 。那么  $\xi \rightarrow \tilde{\xi}$  是从  $G^{1,+}(1, 0, \tilde{k})$  到  $G^{1,-}(0, 1, \tilde{k})$  的一一映射，这说明  $B^1(\tilde{k}) = C^1(\tilde{k})$ 。

现在已经证明  $B^1(\tilde{k}) = B^j(\tilde{k})$ 。对任意  $\tilde{k}$ ，令  $\tilde{G}^i(\tilde{k})$  为满足下列所有条件路径的集合，1) 前  $n$  步 ( $n = N + \sum_{i \in S} (k^i + 2k^{i,i+1})$ ) 是从状态  $i$  出发。2) 边  $\langle i, i \rangle$  被通过  $k^i$  次。3) 边  $\langle i, i + 1 \rangle$  被通过  $k^{i,i+1}$  次。4) 在时间  $n$  第一次到达状态  $N + i$ 。

已经阐明对任意  $j \in S$ ， $|\tilde{G}^1(\tilde{k})| = |\tilde{G}^j(\tilde{k})|$  成立。对任意轨迹  $\xi = (\xi_m)_{0 \leq m \leq n} \in \tilde{G}^1(\tilde{k})$ ，令  $\kappa^j(\xi) = \min\{m : 0 \leq m \leq n, \xi_k = j\}$ ， $\xi$  也可以被视为折线图（见图 ?? (b)）。那么构造  $\xi$  对应的轨迹  $\tilde{\xi}$  为：

$$\tilde{\xi}_k := \begin{cases} \xi_{\kappa(\xi)+k}, & \text{if } 0 \leq k \leq n - \kappa(\xi), \\ \xi_{k+\kappa(\xi)-n}, & \text{if } n - \kappa(\xi) < k \leq n. \end{cases}$$

因此  $(\tilde{\xi}_m)_{0 \leq m \leq n} \in \tilde{G}^j(\tilde{k})$ 。注意到  $\kappa(\xi)$  是  $\xi$  第一次到达状态  $j$ ，这说明  $n$  也是  $\tilde{\xi}$  第一次到达状态  $j + N$ ，那么  $\tilde{\xi} \in \tilde{G}^j(\tilde{k})$ 。显然， $\xi \rightarrow \tilde{\xi}$  是从  $\tilde{G}^1(\tilde{k})$  到  $\tilde{G}^j(\tilde{k})$  的一一映射，这说明  $|\tilde{G}^1(\tilde{k})| = |\tilde{G}^j(\tilde{k})|$ 。

对轨迹  $\xi \in \tilde{G}^j(\tilde{k})$ ，环  $(i)$ ， $(i, i + 1)$ ， $(1, \dots, N)$ ， $(1, N, \dots, 2)$  分别形成  $k^i$ ， $k^{i,i+1} - l$ ， $l + 1$ ， $l$  次，其中  $l \leq \min_{i \in S} k^{i,i+1}$  依赖于  $\xi$ 。注意到  $\xi$  在  $n$  时到达状态  $N + j$ ，那么  $\xi$  形成的最后一个环是  $(1, \dots, N)$ ，因此

$$\begin{aligned} \tilde{G}^j(\tilde{k}) &= \bigsqcup_{l=0}^{\min_{i \in S} k^{i,i+1}} G^{j,+}(l + 1, l, k^1, \dots, k^N, k^{12} - l, \dots, k^{N1} - l), \\ |\tilde{G}^j(\tilde{k})| &= \sum_{l=1}^{\min_{i \in S} k^{i,i+1}} |G^{j,+}(l + 1, l, k^1, \dots, k^N, k^{12} - l, \dots, k^{N1} - l)| + B^j(\tilde{k}). \end{aligned} \quad (5-9)$$

下面用归纳法证明  $B^1(\tilde{k}) = B^j(\tilde{k})$ 。当  $\min_{i \in S} k^{i,i+1} = 0$ ，通过方程 (??)，可以得到

$$B^1(\tilde{k}) = |\tilde{G}^1(\tilde{k})| = |\tilde{G}^j(\tilde{k})| = B^j(\tilde{k}).$$

假设等式对  $\min_{i \in S} k^{i,i+1} \leq m$  成立。当  $\min_{i \in S} k^{i,i+1} = m + 1$  时，固定  $1 \leq l \leq \min_{i \in S} k^{i,i+1}$ ，并且令  $\xi \in G_n^{j,+}(l + 1, l, k^1, \dots, k^N, k^{12} - l, \dots, k^{N1} - l)$ 。那么轨迹  $\xi$  可以被分为  $2l + 1$  个子轨迹，是的每一个子轨迹最后形成的环是  $(1, \dots, N)$  或  $(1, N, \dots, 2)$ 。注意到最后一个环  $(1, \dots, N)$  是  $\binom{2l}{l}$  形成前，在状态 1 处插入  $l$  环  $(1, \dots, N)$  和  $l$  个环  $(1, N, \dots, 2)$  的排列数是  $\binom{2l}{l}$ 。固定剩余的环的分区（即  $\sum_{s=1}^{2l+1} \tilde{k}_s = (k^1, \dots, k^N, k^{12} - l, \dots, k^{N1} - l)$ ），因为对任意  $i$  和  $\tilde{k}$ ，插入方式的排列数为  $\prod_{s=1}^{2l+1} B^j(\tilde{k}_s)$ ，那么：

$$\begin{aligned} & \left| G^{j+} (l+1, l, k^1, \dots, k^N, k^{12} - l, \dots, k^{N1} - l) \right| \\ &= \binom{2l}{l} \sum_{\sum_{s=1}^{2l+1} \tilde{k}_s = (k^1, \dots, k^N, k^{12} - l, \dots, k^{N1} - l)} \prod_{s=1}^{2l+1} B^j(\tilde{k}_s). \end{aligned}$$

因为  $l \geq 1$ , 所以有  $B^1(\tilde{k}_s) = B^j(\tilde{k}_s)$ , 那么:

$$\begin{aligned} & \left| G^{1,+} (l+1, l, k^1, \dots, k^N, k^{12} - l, \dots, k^{N1} - l) \right| \\ &= \left| G^{j+} (l+1, l, k^1, \dots, k^N, k^{12} - l, \dots, k^{N1} - l) \right|. \end{aligned}$$

依据式 (??), 可知  $B^1(\tilde{k}) = B^j(\tilde{k})$ 。最后通过归纳法, 完成证明。  $\square$

命题 5.1 考虑任意  $1 \leq i, j \leq N$ ,  $k \in \mathbb{N}^{2N+2}$  和导出链  $\eta$ , 可得下面三条结论:

(i)

$$\left| G^i(k^+, k^-, \tilde{k}) \right| = \left| G^i(k^-, k^+, \tilde{k}) \right|. \quad (5-10)$$

(ii)

$$\left| G^{i,+}(k) \right| = \left| G^{j,+}(k) \right|, \quad \left| G^{i,-}(k) \right| = \left| G^{j,-}(k) \right|. \quad (5-11)$$

(iii)

$$\left| G^\eta(k^+, k^-, \tilde{k}) \right| = \left| G^\eta(k^-, k^+, \tilde{k}) \right|. \quad (5-12)$$

证明: (1) 首先考虑在状态  $i$  插入环  $k^+$  个环  $(1, \dots, N)$  和  $k^-$  个环  $(1, N, \dots, 2)$ , 那么相应的排列数为  $\binom{k^+ + k^-}{k^+}$ 。接下来把剩余的环 (i.e.  $k^i$  个环  $(i)$  和  $k^{i,i+1}$  个环  $(i, i+1)$ ) 分为  $k^+ + k^- + 1$  个部分。将剩余环的分区固定为  $\sum_{s=1}^{k^+ + k^- + 1} \tilde{k}_s = \tilde{k}$ 。通过引理 ??, 插入的数量为:

$$\left[ \prod_{s=1}^{k^+ + k^-} B^i(\tilde{k}_s) \right] \left| G^i(0, 0, \tilde{k}_{k^+ + k^- + 1}) \right|,$$

其中  $B^i(\tilde{k}_s)$  是在第  $(s-1)$  个和第  $s$  个  $N$  状态环之间插入  $\tilde{k}_s$  个环的排列数, 且  $|G^i(0, 0, \tilde{k}_{k^+ + k^- + 1})|$  是在第  $(k^+ + k^-)$  个  $N$  状态环之后插入  $\tilde{k}_{k^+ + k^- + 1}$  个环的排列数。在所有分区中增加插入数量  $\sum_{s=1}^{k^+ + k^- + 1} \tilde{k}_s = \tilde{k}$ , 可以得到:

$$\left| G^i(k^+, k^-, \tilde{k}) \right| = \binom{k^+ + k^-}{k^+} \sum_{\sum_{s=1}^{k^+ + k^- + 1} \tilde{k}_s = \tilde{k}} \left[ \prod_{s=1}^{k^+ + k^-} B^i(\tilde{k}_s) \right] \left| G^i(0, 0, \tilde{k}_{k^+ + k^- + 1}) \right|. \quad (5-13)$$

注意到 (??) 是关于  $k^+$  和  $k^-$  对称的, 故 (1) 证毕。

(ii) 上面只证明了 (??) 中的第一个等式, 第二个等式的证明与其相似。但是这里考虑的是轨迹  $\xi \in G_n^{i+}(k)$ , 最后的环是  $(1, \dots, N)$ , 只需在状态  $i$  处插入  $k^+ - 1$  个环  $(1, \dots, N)$  和  $k^-$  个环  $(1, N, \dots, 2)$ , 可以得到:

$$\left| G^{i,+}(k) \right| = \binom{k^+ + k^- - 1}{k^+ - 1} \sum_{\sum_{s=1}^{k^+ + k^-} \tilde{k}_s = \tilde{k}} \prod_{s=1}^{k^+ + k^-} B^i(\tilde{k}_s)$$

$$= \binom{k^+ + k^- - 1}{k^+ - 1} \sum_{\sum_{s=1}^{k^+ + k^-} \tilde{k}_s = \tilde{k}} \prod_{s=1}^{k^+ + k^-} B^j(\tilde{k}_s) = |G^{j,+}(k)|,$$

其中第二步出自引理 ??。

(iii) 记  $\eta = [i_0, i_1, \dots, i_t]$ , 首先把所有的环分为  $t+1$  个部分, 固定一部分为  $\sum_{s=0}^t k_s = k$ , 那么  $k_s^c$  个环  $c$  ( $\forall c \in C$ ) 将被插入在  $\eta$  的状态  $i_s$  ( $0 \leq s \leq t$ )。那么可插入方式的数量为  $\prod_{s=0}^t |G^{i_s}(k_s)|$ 。增加所有分区数量  $\sum_{s=0}^t k_s = k$ , 可以得到

$$|G^\eta(k)| = \sum_{\sum_{s=0}^t k_s = k} \prod_{s=0}^t |G^{i_s}(k_s)|.$$

注意到对任意分区  $\sum_{s=0}^t k_s = k$ , 可知  $\sum_{s=0}^t (k_s^-, k_s^+, \tilde{k}_s) = (k^-, k^+, \tilde{k})$  是  $(k^-, k^+, \tilde{k})$  的一个分区。那么由方程 (??), 可得:

$$\begin{aligned} |G^\eta(k^-, k^+, \tilde{k})| &= \sum_{\sum_{s=0}^t (k_s^-, k_s^+, \tilde{k}_s) = (k^-, k^+, \tilde{k})} \prod_{s=0}^t |G^{i_s}(k_s^-, k_s^+, \tilde{k}_s)| \\ &= \sum_{\sum_{s=0}^t k_s = k} \prod_{s=0}^t |G^{i_s}(k_s)| = |G^\eta(k)|. \end{aligned}$$

□

下面将陈述  $|G^i(k)|$  和  $|G^{i,c}(k)|$  的相关性。

引理 5.4 对任意  $k \in \mathbb{N}^{2N+2}$  和  $i \in S$ , 令  $c \in C$  包含状态  $i$  的环, 那么:

$$|G^{i,c}(k)| = \frac{k^c}{k_i} |G^i(k)|.$$

证明: 下面只证明  $i = 1$  时的情况, 并不降低一般性。回顾章节 ?? 中计算  $|G^1(k)|$  的三个步骤。在第一个步骤中固定最后一个环  $c$ , 并且把排列数转换为

$$\frac{k^c}{k^1 + k^{12} + k^{1N} + k^+ + k^-} A_1.$$

第二, 三个步骤不变。在这种情况下, 轨迹形成的最后一个环是  $c$ , 这意味着:

$$|G^{1,c}(k)| = \frac{k^c}{k_1} |G^1(k)|.$$

□

命题 5.2  $I_J$  不依赖于初始分布的选择  $\xi$ .

证明: 记  $c = (1, \dots, N)$  或  $(1, N, \dots, 2)$ , 通过命题 ?? 和引理 ??, 易知  $\log |G^1(k)| = \log |G^i(k)| + O(\log n)$ , 那么由式 (??), 命题得证。 □

### 5.3 Proof of Theorem ??

这里把大偏差原理的证明 ?? 分为两部分。首先研究经验环流的速率函数的性质。回顾速率函数  $I_J : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty]$  的形式为:

$$\begin{aligned}
I_J(\nu) &= \left[ h(\nu^{12}) + h(\nu^{1N}) + h(\nu^+) + h(\nu^-) - h(\nu^{12} + \nu^{1N} + \nu^+ + \nu^-) \right] \\
&\quad + \inf_{X \in V(\nu)} F_\nu(X) + \sum_{i \in S} \left[ h(\nu_i - \nu^i) + h(\nu^i) - h(\nu_i) \right] - \sum_{c \in C} \nu^c \log \gamma^c \\
&:= I_1(\nu) + I_2(\nu) + I_3(\nu) + I_4(\nu).
\end{aligned}$$

命题 5.3 速率函数  $I_J$  是有界, 连续的凸函数。

证明: 易知  $I_J$  有界。首先证明  $I_J$  连续。易知  $h$  是定义在  $[0, \infty)$  的连续函数。那么  $I_1$  和  $I_3$  是连续的。注意到  $I_4$  是关于  $\nu$  的连续函数, 因此还需证明  $I_2$  是连续函数。令  $Y(\nu) \in V(\nu)$  是方程 (??) 的解, 由于 (??) 是一个多项式方程组, 因此易知  $Y(\nu)$  是关于变量  $\nu$  的连续函数。因为  $h$  是连续的, 再根据 (??),  $\inf_{X \in V(\nu)} F_\nu(X) = F_\nu(Y(\nu))$  是关于  $\nu$  的连续函数。

然后证明  $I_J$  是凸函数。回顾 log-sum 不等式, 对任意  $a_1, a_2, b_1, b_2 \geq 0$ , 有:

$$(a_1 + a_2) \log \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} \leq a_1 \log \frac{a_1}{b_1} + a_2 \log \frac{a_2}{b_2}, \quad (5-14)$$

注意到

$$I_1(\nu) = \nu^{12} \log \left( \frac{\nu^{12}}{\hat{\nu}} \right) + \nu^{1N} \log \left( \frac{\nu^{1N}}{\hat{\nu}} \right) + \nu^+ \log \left( \frac{\nu^+}{\hat{\nu}} \right) + \nu^- \log \left( \frac{\nu^-}{\hat{\nu}} \right), \quad (5-15)$$

其中  $\hat{\nu} = \nu^{12} + \nu^{1N} + \nu^+ + \nu^-$ 。对任意满足  $\alpha + \beta = 1$  的  $\alpha, \beta \geq 0$  和  $\nu, \mu \in \mathcal{V}$ , 通过 log-sum 不等式 (??), 可以得到:

$$(\alpha \nu^{12} + \beta \mu^{12}) \log \left( \frac{\alpha \nu^{12} + \beta \mu^{12}}{\alpha \hat{\nu} + \beta \hat{\mu}} \right) \leq \alpha \nu^{12} \log \left( \frac{\nu^{12}}{\hat{\nu}} \right) + \beta \mu^{12} \log \left( \frac{\mu^{12}}{\hat{\mu}} \right),$$

其中  $\hat{\mu} = \mu^{12} + \mu^{1N} + \mu^+ + \mu^-$ 。这说明 (??) 式的第一项的右边是关于  $\nu$  的连续函数, 同理, 其他三项的右边也是关于  $\nu$  的连续函数。因此  $I_1(\nu)$  是凸函数, 同理, 可以通过 log-sum 不等式得到  $I_3(\nu)$  也是凸函数。由于  $I_4(\nu)$  是线性函数, 故也是凸函数, 最后只需证明  $\inf_{X \in V(\nu)} F_\nu(X)$  是凸函数。吧(??) 重写为:

$$\begin{aligned}
F_\nu(X) &= \sum_{i=2}^{N-1} \left[ (x^{i-1} + \nu^+) \log \left( \frac{x^{i-1} + \nu^+}{x^{i-1} + x^i + \nu^+} \right) + x^i \log \left( \frac{x^i}{x^{i-1} + x^i + \nu^+} \right) \right] \\
&\quad + \sum_{i=2}^{N-1} \left[ y^i \log \left( \frac{y^i}{y^i + y^{i+1} + \nu^-} \right) + (y^{i+1} + \nu^-) \log \left( \frac{y^{i+1} + \nu^-}{y^i + y^{i+1} + \nu^-} \right) \right] \\
&:= \sum_{i=2}^{N-1} [A_1^i(\nu, X) + A_2^i(\nu, X) + A_3^i(\nu, X) + A_4^i(\nu, X)].
\end{aligned}$$

注意到对任意  $X = (x^i, y^i) \in V(\nu)$  和  $Z = (z^i, w^i) \in V(\mu)$ , 有  $\alpha X + \beta Z \in V(\alpha \nu + \beta \mu)$ 。那么通过 log-sum 不等式, 可得:

$$\begin{aligned}
&A_1^i(\alpha \nu + \beta \mu, \alpha X + \beta Z) \\
&= (\alpha x^{i-1} + \beta z^{i-1} + \alpha \nu^+ + \beta \mu^+) \log \left( \frac{\alpha x^{i-1} + \beta z^{i-1} + \alpha \nu^+ + \beta \mu^+}{\alpha x^{i-1} + \alpha x^i + \beta z^{i-1} + \beta z^i + \alpha \nu^+ + \beta \mu^+} \right) \\
&= (\alpha(x^{i-1} + \nu^+) + \beta(z^{i-1} + \mu^+)) \log \left( \frac{\alpha(x^{i-1} + \nu^+) + \beta(z^{i-1} + \mu^+)}{\alpha(x^{i-1} + x^i + \nu^+) + \beta(z^{i-1} + z^i + \mu^+)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \alpha(x^{i-1} + v^+) \log \left( \frac{x^{i-1} + v^+}{x^{i-1} + x^i + v^+} \right) + \beta(z^{i-1} + \mu^+) \log \left( \frac{z^{i-1} + \mu^+}{z^{i-1} + z^i + \mu^+} \right) \\
&= \alpha A_1^i(v, X) + \beta A_1^i(\mu, Y).
\end{aligned}$$

同理, 对任意  $j = 2, 3, 4$  有  $A_j^i(\alpha v + \beta \mu, \alpha X + \beta Y) \leq \alpha A_j^i(v, X) + \beta A_j^i(\mu, Y)$ 。这说明

$$F_{\alpha v + \beta \mu}(\alpha X + \beta Y) \leq \alpha F_v(X) + \beta F_\mu(Y).$$

针对  $X$  和  $Y$  取极小, 可以得到:

$$\inf_{Z \in V(\alpha v + \beta \mu)} F_{\alpha v + \beta \mu}(Z) \leq \alpha \inf_{X \in V(v)} F_v(X) + \beta \inf_{Y \in V(\mu)} F_\mu(Y).$$

证毕。 □

下面给出 LDP 原理的严格证明。

命题 5.4 经验环流  $(J_n^c)_{c \in C}$  满足速率为  $n$  的大偏差原理, 并且相应的速率函数为  $I_J : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty]$ 。此外, 它的上界可以提升为: 对任意集合  $\Gamma \subset \mathcal{V}$ , 有:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}((J_n^c)_{c \in C} \in \Gamma) \leq - \inf_{v \in \Gamma} I_J(v). \quad (5-16)$$

证明: 记

$$K_n := \left\{ (k^c)_{c \in C} \in \mathbb{N}^{2N+2} : \sum_{c \in C} k^c |c| = n \right\}. \quad (5-17)$$

接下来的证明将假设马氏链从状态 1 出发, 这并不会降低命题的一般性。那么, 对任意  $k = (k^c)_{c \in C} \in K_n$ , 由 (??) 式, 可得:

$$\mathbb{P}_1 \left( J_n^c = \frac{k^c}{n}, \forall c \in C \right) = |G_n(k)| \prod_{c \in C} (\gamma^c)^{k^c}, \quad (5-18)$$

令  $\mu_n(k) = k/n \in \mathcal{V}$ 。对任意  $\Gamma \subset \mathcal{V}$ , 令

$$Q_n(\Gamma) = \max_{k \in K_n: \mu_n(k) \in \Gamma} \mathbb{P}_1 \left( J_n^c = \frac{k^c}{n}, \forall c \in C \right).$$

显然有:

$$Q_n(\Gamma) \leq \mathbb{P}_1(J_n \in \Gamma) \leq |K_n| Q_n(\Gamma). \quad (5-19)$$

易知  $|K_n| \leq (2N+2)(n+1)^{2N+3}$ , 那么有公式 (??), (??), (??), (??), 和(??)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \log \mathbb{P}_1(J_n \in \Gamma) &= O\left(\frac{\log n}{n}\right) + \frac{1}{n} \log Q_n(\Gamma) \\
&= O\left(\frac{\log n}{n}\right) + \max_{k \in K_n: \mu_n(k) \in \Gamma} \left[ \frac{1}{n} \log |G_n(k)| + \sum_{c \in C} \frac{k^c}{n} \log \gamma^c \right] \\
&= O\left(\frac{\log n}{n}\right) - \min_{k \in K_n: \mu_n(k) \in \Gamma} I_J(\mu_n(k)).
\end{aligned} \quad (5-20)$$

由于  $\cup_{n \in \mathbb{N}} \{\mu_n(k) : k \in K_n\}$  在  $\mathcal{V}$  中稠密, 且  $v \rightarrow I_J(v)$  在  $\mathcal{V}$  中连续 (见命题 ??), 这保证了对每个  $v \in \mathcal{V}$ , 存在序列  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , 使得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu_n(k_n) - v\| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_J(\mu_n(k_n)) = I_J(v).$$



那么对任意开集  $U \subset \mathcal{V}$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \min_{k \in K_n; \mu_n(k) \in U} I_J(\mu_n(k)) \leq I_J(\nu), \quad \forall \nu \in U.$$

对  $\nu \in U$  取极小, 可得:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \min_{k \in K_n; \mu_n(k) \in U} I_J(\mu_n(k)) \leq \inf_{\nu \in U} I_J(\nu). \quad (5-21)$$

结合 (??) 和 (??), 可得大偏差原理的下界 (??)。此外, 对任意  $\Gamma \subset \mathcal{V}$ , 同理可得反向的不等式, 即

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \min_{k \in K_n; \mu_n(k) \in \Gamma} I_J(\mu_n(k)) \geq \inf_{\nu \in \Gamma} I_J(\nu). \quad (5-22)$$

结合 (??) 和 (??), 可得大偏差原理的上界 (??)。  $\square$

## 5.4 简化速率函数 $I_J$

这里将对两种特殊情况, 给出速率函数  $I_J$  的简化形式, 1) 三状态马氏链。2) 状态 1 到状态 N 的转移概率为 0 的单环马氏系统。回顾速率函数  $I_J : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty]$  的公式为:

$$\begin{aligned} I_J(\nu) &= \left[ h(\nu^{12}) + h(\nu^{1N}) + h(\nu^+) + h(\nu^-) - h(\nu^{12} + \nu^{1N} + \nu^+ + \nu^-) \right] \\ &\quad + \inf_{X \in V(\nu)} F_\nu(X) + \sum_{i \in S} \left[ h(\nu_i - \nu^i) + h(\nu^i) - h(\nu_i) \right] - \sum_{c \in C} \nu^c \log \gamma^c \\ &:= I_1(\nu) + I_2(\nu) + I_3(\nu) + I_4(\nu). \end{aligned}$$

命题 5.5 三状态马氏链的速率函数为

$$I_J(\nu) = \sum_{i \in S} \left[ \nu^i \log \left( \frac{\nu^i / \nu_i}{J^i / J_i} \right) + (\nu_i - \nu^i) \log \left( \frac{(\nu_i - \nu^i) / \nu_i}{(J_i - J^i) / J_i} \right) \right] + \sum_{c \in C, |c| \neq 1} \nu^c \log \left( \frac{\nu^c / \tilde{\nu}}{J^c / \tilde{J}} \right).$$

证明: 易知  $X = (x^2, y^2)$  为方程 (??) 的解, 其中

$$x^2 = \frac{\nu^{23}(\nu^{12} + \nu^+)}{\nu^{12} + \nu^{13} + \nu^+ + \nu^-}, \quad y^2 = \frac{\nu^{23}(\nu^{13} + \nu^-)}{\nu^{12} + \nu^{13} + \nu^+ + \nu^-}.$$

根据引理 ??

$$I_2(\nu) = F_\nu(X) = \nu^{23} \log \frac{\nu^{23}}{\tilde{\nu}} + (\nu^{12} + \nu^{13} + \nu^+ + \nu^-) \log \frac{\tilde{\nu} - \nu^{23}}{\tilde{\nu}}.$$

那么通过计算, 可以得到:

$$I_1(\nu) + I_2(\nu) + I_3(\nu) = \sum_{i \in S} \left[ \nu^i \log \frac{\nu^i}{\nu_i} + (\nu_i - \nu^i) \log \frac{\nu_i - \nu^i}{\nu_i} \right] + \sum_{c \in C, |c| \neq 1} \nu^c \log \frac{\nu^c}{\tilde{\nu}}. \quad (5-23)$$

回顾环流的表达 [?, Theorem.1.3.3], 有

$$J^+ = \gamma^+ \frac{1}{C}, \quad J^- = \gamma^- \frac{1}{C}, \quad J^{i,i+1} = \gamma^{i,i+1} \frac{1 - p_{i-1,i-1}}{C}, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (5-24)$$

其中  $C = 3 + \sum_{i \in S} [p_{ii} p_{i+1,i+1} - p_{i,i+1} p_{i+1,i} - 2(p_{ii} + p_{i+1,i+1})]$ . 根据 (??),

$$p_{ij} = \frac{\sum_{c \ni \langle i, j \rangle} J^c}{\sum_{c \ni i} J^c}. \quad (5-25)$$

结合 (??) 和 (??), 有:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in S} \left[ \nu^i \log \frac{J^i}{J_i} + (\nu_i - \nu^i) \log \frac{J_i - J^i}{J_i} \right] + \sum_{c \in C, |c| \neq 1} \nu^c \log \left( \frac{J^c}{\tilde{J}} \right) \\
&= \sum_{i \in S} \left[ \nu^i \log \frac{J^i}{J_i} + \nu^{i,i+1} \log \left( \left( 1 - \frac{J^i}{J_i} \right) \left( 1 - \frac{J^{i+1}}{J_{i+1}} \right) \frac{J^{i,i+1}}{\tilde{J}} \right) \right] \\
&\quad + \nu^+ \log \left( \frac{J^+}{\tilde{J}} \prod_{i \in C} \left( 1 - \frac{J^i}{J_i} \right) \right) + \nu^- \log \left( \frac{J^-}{\tilde{J}} \prod_{i \in C} \left( 1 - \frac{J^i}{J_i} \right) \right) \\
&= \sum_{c \in C} \nu^c \log \gamma^c = -I_4(\nu).
\end{aligned} \tag{5-26}$$

结合 (??) 和 (??), 得证。  $\square$

命题 5.6 状态 1 到状态 N 的转移概率为 0 的单环马氏链的速率函数为:

$$I_J(\nu) = \sum_{i \in S} \left[ \nu^i \log \left( \frac{\nu^i / \nu_i}{J^i / J_i} \right) + \nu^{i,i+1} \log \left( \frac{\nu^{i,i+1} / \nu_i}{J^{i,i+1} / J_i} \right) + (\nu^{i-1,i} + \nu^+) \log \left( \frac{(\nu^{i-1,i} + \nu^+) / \nu_i}{(J^{i-1,i} + J^+) / J_i} \right) \right].$$

证明: 在  $p_{1N} = 0$  的条件下, 环  $(1, N)$  和环  $(1, N, \dots, 2)$  不会被形成。因此, 可以得到 (??) 中的  $\nu^{1N} = \nu^- = 0$ , 并且  $x^i = \nu^{i,i+1}, y^i = 0$  是方程 (??) 的解, 那么

$$I_2(\nu) = F_\nu(x^i, y^i) = \sum_{i=2}^{N-1} \left[ -\lambda_i \nu^{i,i+1} + \nu^+ \log \frac{\nu^{i-1,i} + \nu^+}{\nu^{i-1,i} + \nu^{i,i+1} + \nu^+} \right] + \nu^{12} \log \frac{\nu^{12} + \nu^+}{\nu^{12} + \nu^{23} + \nu^+},$$

其中

$$\lambda_i = -\log \left( \frac{\nu^{i,i+1}}{\nu^{i-1,i} + \nu^{i,i+1} + \nu^+} \frac{\nu^{i,i+1} + \nu^+}{\nu^{i,i+1} + \nu^{i+1,i+2} + \nu^+} \right).$$

通过  $\nu_i$  的定义, 有

$$\nu_1 = \nu^1 + \nu^{12} + \nu^+, \quad \nu_i = \nu^i + \nu^{i-1,i} + \nu^{i,i+1} + \nu^+, \quad 2 \leq i \leq N-1, \quad \nu_N = \nu^N + \nu^{N-1,N} + \nu^+.$$

然后通过计算, 可以得到:

$$I_1(\nu) = \nu^{12} \log \frac{\nu^{12}}{\nu_1 - \nu^{12}} + \nu^+ \log \frac{\nu^+}{\nu_1 - \nu^1}, \tag{5-27}$$

$$I_2(\nu) = \sum_{i=2}^N \left[ \nu^{i,i+1} \log \frac{\nu^{i,i+1}}{\nu_i - \nu^i} + \nu^+ \log \frac{\nu^{i-1,i} + \nu^+}{\nu_i - \nu^i} \right] + \sum_{i=1}^N \nu^{i,i+1} \log \frac{\nu^{i,i+1} + \nu^+}{\nu_{i+1} - \nu^{i+1}}, \tag{5-28}$$

和

$$I_3(\nu) = \sum_{i \in S} \left[ \nu^i \log \frac{\nu^i}{\nu_i} + \nu^+ \log \frac{\nu_i - \nu^i}{\nu_i} \right] + \sum_{i \in S} \nu^{i,i+1} \left( \log \frac{\nu_i - \nu^i}{\nu_i} + \log \frac{\nu_{i+1} - \nu^{i+1}}{\nu_{i+1}} \right). \tag{5-29}$$

根据 (??), 可得

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in S} \left[ \nu^i \log \frac{J^i}{J_i} + \nu^{i,i+1} \log \frac{J^{i,i+1}}{J_i} + (\nu^{i-1,i} + \nu^+) \log \frac{J^{i-1,i} + J^+}{J_i} \right] \\
&= \sum_{i \in S} \left[ \nu^i \log \frac{J^i}{J_i} + \nu^{i,i+1} \log \frac{J^{i,i+1}(J^{i,i+1} + J^+)}{J_{i+1}J_i} \right] + \nu^+ \log \frac{\prod_{i=1}^N (J^{i,i+1} + J^+)}{\prod_{i=1}^N J_i} \\
&= \sum_{c \in C} \nu^c \log \gamma^c = -I_4(\nu).
\end{aligned} \tag{5-30}$$

结合 (??), (??), (??), 和 (??), 证毕。 □

## 5.5 经验 LE 环流的暂态涨落定理的证明

在此, 将给出无周期条件下, 经验 LE 环流的暂态涨落定理的证明。记  $k = (k^c)_{c \in C} \in \mathbb{N}^{2N+2}$ 。在时间步  $n$ , 轨迹中环  $c$  形成  $k^c$  次, 因此有:

$$n = \sum_{c \in C} k^c |c| + |\eta|,$$

其中  $\eta$  表示剩下的导出链, 且  $0 \leq |\eta| \leq N-1$ 。假设系统从状态 1 出发, 这并不降低命题的一般性。令  $[\eta] = t$ , 那么  $\eta = \eta_1$  或者  $\eta_2$ , 其中  $\eta_1 = [1, 2, \dots, t+1]$  且  $\eta_2 = [1, N, \dots, N+1-t]$ 。同时, (??) 可以被写为:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_n^c = k^c, \forall c \in C) &= \mathbb{P}(N_n^c = k^c, \forall c \in C, \tilde{\xi}_n = \eta_1) + \mathbb{P}(N_n^c = k^c, \forall c \in C, \tilde{\xi}_n = \eta_2) \\ &= |G^{\eta_1}(k)| \left[ \prod_{c \in C} (\gamma^c)^{k^c} \right] \gamma^{\eta_1} + |G^{\eta_2}(k)| \left[ \prod_{c \in C} (\gamma^c)^{k^c} \right] \gamma^{\eta_2}, \end{aligned} \quad (5-31)$$

其中  $\gamma^{\eta_1} = p_{12} \cdots p_{t,t+1}$  且  $\gamma^{\eta_2} = p_{1N} \cdots p_{N+2-t, N+1-t}$ 。那么有

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_n^+ = k^+, N_n^- = k^-, \dots) &= (\gamma^+)^{k^+} (\gamma^-)^{k^-} \prod_{c \neq C^+, C^-} (\gamma^c)^{k^c} \\ &\quad [ |G^{\eta_1}(k^+, k^-, \dots)| \gamma^{\eta_1} + |G^{\eta_2}(k^+, k^-, \dots)| \gamma^{\eta_2} ]. \end{aligned}$$

同理, 如果交换上述方程中的  $k^+$  和  $k^-$ , 可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_n^+ = k^-, N_n^- = k^+, \dots) &= (\gamma^+)^{k^-} (\gamma^-)^{k^+} \prod_{c \neq C^+, C^-} (\gamma^c)^{k^c} \\ &\quad [ |G^{\eta_1}(k^-, k^+, \dots)| \gamma^{\eta_1} + |G^{\eta_2}(k^-, k^+, \dots)| \gamma^{\eta_2} ]. \end{aligned}$$

根据 (??) 式, 可以得到下列的暂态涨落定理成立:

$$\mathbb{P}(N_n^+ = k^+, N_n^- = k^-, \dots) = \mathbb{P}(N_n^+ = k^-, N_n^- = k^+, \dots) \left( \frac{\gamma^+}{\gamma^-} \right)^{k^+ - k^-}.$$